

Capitolo 1

Insiemi e logica

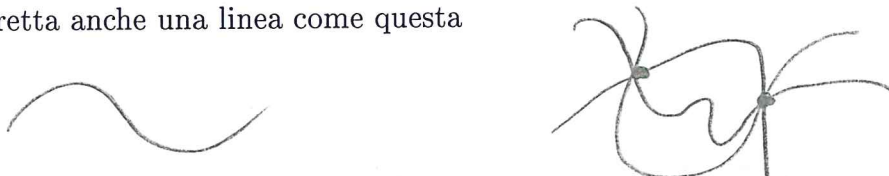
1.1 Principali notazioni della teoria degli insiemi

Introduciamo le principali nozioni di teoria degli insiemi e gli insiemi numerici. Il concetto di insieme è problematico in quanto non è chiaro come si possa spiegarne il significato in maniera soddisfacente utilizzando concetti più semplici o maggiormente intuitivi. Non cercheremo pertanto di stabilire cosa sia davvero un insieme ma assumeremo tale concetto come *primitivo* supponendo che lo studente abbia una certa intuizione del concetto stesso.

Pur spostando il problema sul significato della parola *collezione*, può tuttavia esser di un qualche aiuto per l'intuizione dare la seguente pseudo definizione.

Pseudo definizione 1. *Un insieme è una collezione di oggetti che prendono il nome di elementi.*

La teoria che svilupperemo avrà, fra gli altri scopi, quello di precisare tale intuizione evitandone le possibili derive o le distorte interpretazioni. Questo al fine di costruire un concetto che venga percepito in modo uniforme da tutti. Avete già incontrato un approccio simile trattando il concetto di retta nella geometria euclidea. Anche in quel caso avete detto che la retta è un concetto primitivo. Successivamente avete dichiarato vere certe proprietà, i cosiddetti assiomi, come ad esempio quello che dice che per due punti distinti passa una ed una sola retta. In tal modo una possibile soggettiva interpretazione della retta che veda come retta anche una linea come questa



viene corretta, perché è chiaro come per due punti distinti passino molte di tali linee.

Per cominciare tale percorso con gli insiemi partiamo dal

- **Principio di estensionalità** *Un insieme è completamente determinato dai suoi elementi. Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.*

Tale principio afferma che trattare con un certo insieme significa trattare con i suoi elementi e nulla più. O, se preferite, conosciamo compiutamente un insieme solo a patto di saper decidere se un qualsivoglia oggetto ne è o no un suo elemento.

Gli insiemi sono solitamente indicati con lettere maiuscole $A, B, C, \dots$, mentre gli elementi con lettere minuscole usualmente corrispondenti $a, b, c, \dots$. Questa è evidentemente una convenzione a cui, se necessario, ci potremo sottrarre.

Se A è un insieme e a è un suo elemento diciamo che a *appartiene ad* A e scriviamo in simboli $a \in A$. Se un oggetto b non è elemento di A , diciamo che b *non appartiene ad* A e scriviamo in simboli $b \notin A$.

Gli insiemi più importanti in matematica sono sicuramente gli insiemi numerici. Essi costituiscono il serbatoio principale per costruire sostanzialmente tutti gli altri insiemi utili in matematica.

- L'insieme dei numeri naturali è indicato con $\mathbb{N}$ ed i suoi elementi sono i numeri

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

- L'insieme dei numeri interi è indicato con $\mathbb{Z}$ ed i suoi elementi sono i numeri

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

- L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$ e, i suoi elementi sono le frazioni, ossia scritte del tipo $\frac{p}{q}$, dove $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Si ricordi che $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ se e solo se $pq' = qp'$.
- L'insieme dei numeri reali è indicato con $\mathbb{R}$. Ne tratterete a fondo le proprietà nel corso di Calcolo. Ricordiamo solo che è l'insieme numerico che estende $\mathbb{Q}$ in modo da poter associare ad ogni punto della retta un numero. Due importanti elementi di $\mathbb{R}$ e non di $\mathbb{Q}$ sono $\sqrt{2}$ e π .
- L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C}$ e, i suoi elementi sono i numeri del tipo $a + ib$ dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria ossia quel numero definito dalla proprietà $i^2 = -1$.

Gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono sicuramente ben noti allo studente e supporremo che egli conosca e sappia effettuare le operazioni aritmetiche su di essi. Si noti che fra questi tre insiemi solo $\mathbb{Q}$ consente di effettuare somme, sottrazioni, prodotti e divisione per numeri diversi da zero: questo si esprime dicendo che $\mathbb{Q}$ è un *campo*. Anche $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi e verranno studiati nel corso di calcolo. Dal punto di vista dell'algebra lineare, saranno le proprietà di campo quelle più interessanti.

1.1.1 Rappresentazione di un insieme per elencazione

Se un insieme ha un numero finito (e piccolo!) di elementi, è possibile descriverlo elencando tutti i suoi elementi separati da virgola entro due parentesi graffe. Ad esempio la scrittura

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

denota l'insieme avente come elementi i numeri naturali 1, 2, 3 e 4.

Osserviamo che i simboli $\in$ e $\notin$ richiedono che alla loro destra vi sia un simbolo o una scrittura che denota un insieme. Sono pertanto formalmente corrette le scritture

$$1 \in \{1, 2\} \text{ (vera)}, \quad 2 \notin \{1, 2\} \text{ (falsa)}, \quad 3 \notin \{1, 2\} \text{ (vera)},$$

e di esse possiamo dire se sono vere o false. Non è invece corretta la scrittura

$$\{1, 2\} \in 1$$

in quanto, nel contesto che stiamo analizzando, il simbolo 1 non indica un insieme.

Osserviamo anche che un insieme può essere a sua volta elemento di un altro insieme. Ad esempio l'insieme

$$\{\{1\}, \{1, 2\}\}$$

è l'insieme costituito dagli elementi $\{1\}, \{1, 2\}$. Dunque, in particolare, possiamo scrivere $\{1\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}\}$.

Gli insiemi aventi un solo elemento sono detti singoletti. Ad esempio sono singoletti gli insiemi

$$\{1\}, \quad \{\{1, 2, 3, 4\}\}, \quad \{\mathbb{N}\}.$$

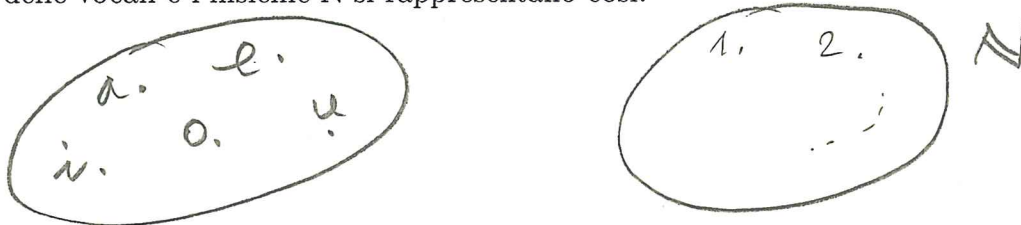
In molte circostanze, è assai conveniente assegnare ad un dato insieme un nome che lo denoti. Gli insiemi numerici, data la loro importanza hanno, come abbiamo visto, un nome specifico. La scrittura

$$A := \{1, 2, 3\} \text{ o più semplicemente } A = \{1, 2, 3\}$$

all'interno di un certo ragionamento significa che, fino al termine dello stesso, l'insieme $\{1, 2, 3\}$, potrà essere indicato sinteticamente con la lettera A . Tale scrittura si legge *si indichi con A l'insieme $\{1, 2, 3\}$ oppure sia A l'insieme $\{1, 2, 3\}$ oppure si ponga A uguale a $\{1, 2, 3\}$.*

1.1.2 I diagrammi di Eulero-Venn

Un modo ingenuo ma intuitivo per rappresentare gli insiemi è dato dai cosiddetti diagrammi di Eulero-Venn. Essi consistono in una linea chiusa tracciata nel piano al cui interno si collocano gli elementi dell'insieme in esame, contrassegnandoli in qualche modo, ad esempio con un puntino. In realtà, nella maggior parte dei casi, basta ed è preferibile, interpretare la linea chiusa del diagramma come delimitante una regione del piano in cui possiamo pensare presenti gli elementi dell'insieme, senza bisogno di raffigurarli. Ad esempio, con i diagrammi di Venn, l'insieme delle vocali e l'insieme $\mathbb{N}$ si rappresentano così:



Stiamo disegnando una sorta di sacco contenente le vocali nel primo caso e tutti i numeri naturali nel secondo.

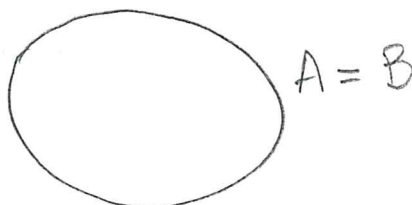
Ovviamente i diagrammi di Venn forniscono una visualizzazione da cui il nostro pensiero può trarre solo una fonte di ispirazione e nient'altro. *Nessun ragionamento rigoroso riguardante gli insiemi può essere affidato in modo esclusivo a tali diagrammi.* Vedremo però che con essi si possono facilmente visualizzare le operazioni fra insiemi che introdurremo in seguito e farsi un'idea delle proprietà che le riguardano. Inoltre vedremo che i diagrammi di Venn sono molto preziosi per fare congetture.

1.1.3 Uguaglianza e inclusione fra insiemi

Il principio di estensionalità può essere utilizzato per dare la definizione di uguaglianza fra insiemi, chiarendo in modo formale la frase *avere gli stessi elementi*.

Definizione 2. Siano A e B insiemi. Diciamo che A è uguale a B se ogni elemento di A è elemento di B e se ogni elemento di B è elemento di A . In simboli scriviamo che $A = B$. Se A non è uguale a B diciamo che A è diverso da B e scriviamo $A \neq B$.

Con i diagrammi di Venn tale concetto può essere così visualizzato:



Si osservi che, secondo la definizioni introdotta abbiamo che, ad esempio,

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \quad \{1, 2\} = \{1, 1, 2\}.$$

Ciò mette in evidenza che *l'ordine con cui si scrivono gli elementi in un insieme ed eventuali ripetizioni sono ininfluenti*. Inoltre appare chiaro come lo stesso insieme possa essere indicato in più modi.

1.1.4 Prime proposizioni e inclusione

Una *proposizione* è una frase, di senso compiuto, che sia ritenuta suscettibile di una considerazione di verità (V) o falsità (F), potenzialmente accertabili. Dunque se una frase è una proposizione deve essere possibile, in principio, tramite un qualche accertamento o un qualche ragionamento, riuscire a stabilire se risulti vera o falsa. Se ciò non è possibile la frase non è considerata una proposizione.

Ad esempio la frase "La prima guerra mondiale è finita nel 1918" è una proposizione e risulta vera (ce lo conferma la Storia). È, in altri termini, un fatto. Lo stesso "2=2". Invece la frase "La prima guerra mondiale è finita nel 1998" è una proposizione che risulta falsa. Lo stesso "2 ≠ 2". Anche "Una cometa ha attraversato il cielo il 10 maggio del 1978" è una proposizione: in questo caso, ce ne possiamo accertare andando a consultare i registri astronomici. Notiamo subito un fatto importante. Il ragionamento naturale dell'essere umano è strutturato con due soli possibili valori verità, V e F. Ne segue che ad ogni proposizione P ne corrisponde sempre un'altra, la sua negazione "non P ", che risulta falsa se P è vera e vera se P è falsa. Il simbolo internazionale per non è $\neg$. Notiamo subito che, di conseguenza, la verità/falsità di $\neg\neg P$ è la stessa di P .

In ambito matematico, stabilire che una proposizione vale (è vera) richiede usualmente, nei casi significativi, un ragionamento convincente detto *dimostrazione*.

Definizione 3. Una *dimostrazione* è un ragionamento rigoroso che consente di stabilire la verità di una proposizione.

Un primo esempio di proposizione vera, interessante ai nostri scopi, è la seguente.

Proposizione 4. Siano A, B insiemi. Se $A = B$, allora $B = A$.

Vediamo subito che la dimostrazione della proposizione 4 segue da una semplice osservazione di tipo logico: quando dico che valgono due fatti, l'ordine in cui li nomino è ininfluente. Dire: "ho un cappello nero e a tesa larga" esprime la stessa cosa di "ho un cappello a tesa larga e nero"...

Dimostrazione. Supponiamo che $A = B$ sia vera (immaginiamo cioè di prendere due insiemi A e B per i quali risulti vera l'affermazione $A = B$). Allora ogni elemento di A è elemento di B e ogni elemento di B è elemento di A . Pertanto ogni elemento di B è elemento di A e ogni elemento di A è elemento di B , e dunque $B = A$ è vera. $\square$

Sulla base della precedente proposizione possiamo usare come equivalenti le espressioni A è uguale a B , B è uguale ad A , oppure A e B sono uguali.

A seconda del ruolo più o meno rilevante che riveste in una teoria che si sta sviluppando, una proposizione vera può essere detta teorema, lemma, corollario, principio, legge. Queste parole sono di fatto sinonimi e via via che le incontreremo ne preciseremo la specificità.

L' *enunciato* di un teorema, ossia la proposizione di cui si vuol dimostrare la verità, si compone sempre di due parti. Una prima parte in cui viene specificato l'universo di riferimento, ossia viene contestualizzato il risultato che si vuole stabilire: nel caso in esame Siano A e B insiemi. Una seconda parte in cui si specificano l'*ipotesi* $\mathcal{I}$ e la *tesi* $\mathcal{T}$ tramite la scrittura se $\mathcal{I}$ allora $\mathcal{T}$: nel caso in esame $\mathcal{I}$ è $A = B$, mentre $\mathcal{T}$ è $B = A$.

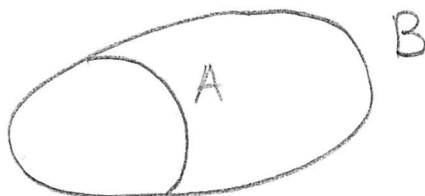
Introduciamo ora la seguente fondamentale definizione.

Definizione 5. Siano A e B insiemi. Diciamo che A è sottoinsieme di B (oppure A è incluso in B o B contiene A) se ogni elemento di A è un elemento di B . In simboli scriviamo che $A \subseteq B$. Se A non è un sottoinsieme di B (A non è incluso in B), scriviamo che $A \not\subseteq B$.

Ad esempio

$$\{3, 12\} \subseteq \{12, -7, 3, 8\}, \quad \{7, 8, 103\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Con i diagrammi di Venn l'inclusione può essere così visualizzata:



Osserviamo che $A \not\subseteq B$ significa che è falsa l'affermazione che ogni elemento di A sia un elemento di B . Ciò significa dunque che esiste almeno un elemento di A che non è un elemento di B . Grazie a questa osservazione abbiamo che ad esempio

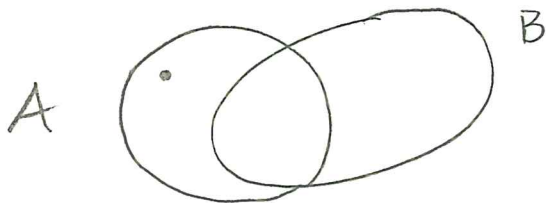
$$\{1, 2, 3, 4\} \not\subseteq \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

poichè $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ ma $3 \notin \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$. Abbiamo inoltre che

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}.$$

Abbiamo incontrato un'interessante idea: ogni si nega con esiste...

Con i diagrammi di Venn la non inclusione può essere così visualizzata:



Si osservi anche che, direttamente dalle definizioni di uguaglianza e inclusione, valgono le due seguenti proposizioni.

Proposizione 6. *Siano A e B insiemi. Se $A = B$ allora $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Proposizione 7. *Siano A e B insiemi. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$.*

I due enunciati sopra descritti sono l'uno l'inverso dell'altro. Utilizzando una espressione assai comune in matematica, ossia l'espressione "se e solo se", essi possono essere riassunti nella seguente proposizione.

Proposizione 8. *Siano A e B insiemi. $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Avendo inoltre ben compreso cosa significhi $A \not\subseteq B$, sulla base delle precedenti proposizioni possiamo meglio comprendere il significato dell'espressione $A \neq B$. Infatti sappiamo che $A = B$ è lo stesso che dire che valgono entrambe le relazioni $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Pertanto $A \neq B$ è equivalente a dire che almeno una fra $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ è falsa. In altre parole

$$A \neq B \text{ se e solo se } A \not\subseteq B \text{ o } B \not\subseteq A.$$

Come sempre in matematica la congiunzione "o" deve essere intesa con valenza inclusiva e non esclusiva. Ciò significa che almeno una delle alternative deve valere (e non soltanto una). Ad esempio, $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 3, 4\}$ poichè $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{2, 3, 4\}$ dato che $1 \in \{1, 2, 3\}$ e $1 \notin \{2, 3, 4\}$. Tale uso è presente anche nel linguaggio comune anche se, in molte circostanze, la particella o ha invece valenza esclusiva. Si confrontino le frasi: "In estate vado al mare o in montagna" (inclusivo, perchè intendo di poter andare anche sia al mare che in montagna) e "Quest'estate sono al verde. O vado al mare o in montagna" (esclusivo, perchè intendo di poter andare solamente al mare o solamente in montagna e non ad entrambi).

Proposizione 9. *Siano A , B e C insiemi. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.*

Dimostrazione. Si consideri un elemento $a \in A$. Voglio far vedere che $a \in C$. Poichè $A \subseteq B$ si ha che $a \in B$. Inoltre, poichè $B \subseteq C$ si ha anche che $a \in C$. Dunque ogni elemento di A appartiene a C e quindi $A \subseteq C$. $\square$

Proposizione 10. *Siano A , B e C insiemi. Se $A = B$ e $B = C$, allora $A = C$.*

Dimostrazione. Se $A = B$ e $B = C$, allora $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Dalla precedente proposizione $A \subseteq C$. Inoltre abbiamo anche che $B \subseteq A$ e $C \subseteq B$. Dalla precedente proposizione $C \subseteq A$. Pertanto dalla Proposizione 8 si ha che $A = C$. $\square$

1.1.5 Rappresentazione di un insieme tramite proprietà caratteristica

In molti casi la descrizione di un insieme mediante l'elencazione dei suoi elementi non è praticamente possibile oppure non è conveniente. Si pensi ad esempio all'insieme dei numeri naturali maggiori di 10. In tali circostanze si cerca di descrivere l'insieme attraverso l'individuazione di una proprietà che caratterizzi i suoi elementi. Nell'esempio precedente tale proprietà è "essere maggiore di 10" e per comprenderla completamente abbiamo dovuto prima specificare a quali numeri ci riferivamo, i numeri naturali, cioè far riferimento ad un certo universo. Tramite una proprietà si può definire un insieme nuovo a partire da un certo insieme dato, detto universo.

Per rendere rigorosa tutta la faccenda, occorre introdurre un nuovo principio.

- **Principio di comprensione** Sia U un insieme e sia $\mathcal{P}$ una proprietà degli elementi di U espressa rispetto ad un generico elemento x di U (una variabile in U) e tale che, sostituendo ad x un qualsivoglia elemento $u_0 \in U$, si ottenga una proposizione. Allora, gli elementi di U che rendono vera $\mathcal{P}$ costituiscono sempre un sottoinsieme di U (in particolare un insieme) di cui $\mathcal{P}$ è detta la proprietà caratteristica.

Viceversa ogni sottoinsieme A di U ammette come proprietà caratteristica la proprietà $x \in A$.

L'insieme di proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ è indicato con la scrittura

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x) \text{ è vera}\}$$

o più sinteticamente

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\}$$

e si dice anche che tale insieme è definito da $\mathcal{P}$. Il simbolo $:$ si legge *tale che*. Notiamo che la scelta della variabile x non ha nessun significato specifico: essa può essere sostituita da un qualunque altro simbolo. In altre parole, le seguenti scritture indicano lo stesso insieme:

$$\{y \in U : \mathcal{P}(y)\}, \quad \{\clubsuit \in U : \mathcal{P}(\clubsuit)\}.$$

Alcuni esempi di insiemi descritti tramite proprietà caratteristica sono i seguenti:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ è somma di } 3 \text{ e di } 5\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}, \quad \{y \in \mathbb{Z} : 3y + 6 = 0\}.$$

Si noti come non abbia senso chiedersi se sia vera la frase " x è somma di 3 e di 5" ma solo chiedersi se siano vere le frasi (proposizioni) ottenute da essa sostituendo un numero naturale a x . Ad esempio " 4 è somma di 3 e di 5" è falsa, " 8 è somma di 3 e di 5" è vera. Diremo che in " x è somma di 3 e di 5" appare una *variabile libera* mentre in " 4 è somma di 3 e di 5" la variabile è stata *saturata*.

Gli insiemi sopra descritti ammettono anche una rappresentazione per elencazione. Essi sono infatti uguali rispettivamente ai seguenti insiemi:

$$\{8\}, \quad \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad \{-2\}.$$

Questo ci mostra ancora una volta che non esiste un solo modo per rappresentare un insieme e, a seconda del contesto, potremo preferire l'una o l'altra rappresentazione. Ad esempio, i tre insiemi seguenti coincidono

$$\{4\}, \quad \{n \in \mathbb{N} : n > 3, n < 5\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : 4x - 16 = 0\}$$

Nel considerare il secondo esempio sopra, si tenga presente che affiancare due enunciati, separandoli con una virgola, è un modo sintetico per esprimere la congiunzione e.

Soffermiamoci un attimo anche sulla seconda parte del principio di comprensione. Esso afferma semplicemente che se è dato $A \subseteq U$, allora $A = \{x \in U : x \in A\}$.

Consideriamo ora l'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{N} : x + y < 7\}.$$

Notate qualcosa di strano? La proprietà $x + y < 7$ non è in una variabile ma in due! Dunque, se non si fissa prima y da qualche parte (e si dovrebbe dire in quale universo), non è affatto chiaro chi siano gli elementi di D . Ossia D non è un'insieme perché non sappiamo decidere i suoi elementi! Quindi la definizione di D così data è scorretta. Se invece dico, per ogni $y \in U = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 3\}$, consideriamo l'insieme

$$D_y = \{x \in \mathbb{N} : x + y < 7\} \tag{1.1}$$

sto definendo in modo corretto una famiglia di insiemi. Ad esempio, se $y = 3$ abbiamo $D_3 = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\} = \{1, 2, 3\}$ mentre se $y = 4$ ho $D_4 = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\} = \{1, 2\}$.

Notiamo che possono esistere proprietà che sono soddisfatte da tutti gli elementi dell'universo. Ad esempio l'insieme $W = \{x \in \mathbb{N} : x = x\}$ coincide con l'universo $\mathbb{N}$, semplicemente perché l'equazione $x = x$ è una identità. D'altra parte la stessa cosa vale usando un'altra identità, quale ad esempio $2x + 1 = 1 + 2x$. Questo ci fa osservare che *proprietà diverse possono definire lo stesso insieme*.

Notiamo poi che esistono proprietà che non sono soddisfatte da alcun elemento di U . Consideriamo, ad esempio, con riferimento a (1.1),

$$D_7 = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$$

Ovviamente nessun numero naturale soddisfa la condizione richiesta. L'insieme considerato non ha dunque alcun elemento. Tale insieme viene chiamato *insieme vuoto* e denotato con il simbolo speciale $\emptyset$. In sostanza il simbolo $\emptyset$ è dedicato all'unico insieme per cui una scrittura del tipo $a \in \emptyset$ risulta sempre falsa. Se preferite, la scrittura $a \notin \emptyset$ risulta sempre vera. Possiamo quindi scrivere $D_7 = \emptyset$.

L'insieme vuoto ci dà l'occasione di fare una prima *dimostrazione per assurdo* o per *contraddizione*. Si tratta di una strategia molto comune in matematica, ma alquanto spiazzante ad un primo incontro.

Innanzitutto diciamo che una dimostrazione (un ragionamento) perviene ad una *contraddizione* se si ottiene la verità di una affermazione falsa quale ad esempio $1 \neq 1$, $4 < 3$, $6 = 7$, piove e non piove, $x \in A$ e $x \notin A$.

Proposizione 11. *Sia A un insieme. Allora $\emptyset \subseteq A$.*

Dimostrazione. Sia A un insieme e supponiamo, per assurdo, che $\emptyset \not\subseteq A$. Allora esiste $x \in \emptyset$ tale che $x \notin A$. Tuttavia, per le proprietà di $\emptyset$, abbiamo che $x \notin \emptyset$. Dunque assumendo $\emptyset \not\subseteq A$ si ottiene che esiste x tale che $x \in \emptyset$ e $x \notin \emptyset$. Questa conclusione è una contraddizione. Dunque $\emptyset \subseteq A$. $\square$

L'idea che guida la dimostrazione per assurdo è che, volendo dimostrare che supponendo vera l'ipotesi $\mathcal{I}$ si deduce la verità della tesi $\mathcal{T}$, si possa equivalentemente dimostrare che supponendo vera sia $\mathcal{I}$ che la negazione di $\mathcal{T}$ si ottiene una contraddizione. Come dire: accettando vera $\mathcal{I}$ ma falsa $\mathcal{T}$ andremmo contro qualcosa di solidamente stabilito, tipo contro $1 = 1$ o contro $4 \geq 3$... Quindi quando $\mathcal{I}$ è vera, siamo costretti a contemplare come unica ragionevole possibilità che anche $\mathcal{T}$ sia vera.

Osserviamo infine che per una proprietà $\mathcal{P}(x)$, è contemplato il caso estremo in cui la variabile x non compaia esplicitamente. In tal caso le sostituzioni di x con $u_0 \in U$ non hanno alcun effetto, o se si preferisce fanno restare sulla stessa frase. Così $\mathcal{P}(x)$ è semplicemente vera o falsa una volta per tutte. In tal caso ci sono due sole possibilità per l'insieme A che la ammette come proprietà caratteristica: $A = U$ o $A = \emptyset$. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 2 = 2\} = \mathbb{N},$$

mentre

$$B = \{x \in \mathbb{N} : 18 = 2\} = \emptyset.$$

1.1.6 Il paradosso di Russell

Vogliamo a questo punto considerare brevemente anche il problema dei cosiddetti paradossi, trattandone il principale, ossia il *Paradosso di Russell*¹. Esistono molte versioni del cosiddetto *Paradosso di Russell*, più o meno colorite (vedi ad esempio il paradosso del barbiere). La formulazione più chiara è tuttavia quella che fa riferimento alla totalità degli insiemi che non appartengono a sé stessi. Partiamo osservando che vi sono sicuramente insiemi che tra i loro elementi hanno loro stessi. Ad esempio abbiamo che l'insieme di tutti i concetti astratti appartiene a sé stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto. Ma vi sono anche insiemi (la maggioranza!) che non hanno fra i loro elementi loro stessi. Il curioso esempio citato da Russell, in proposito, è l'insieme di tutte le tazze da tè che non appartiene a se stesso non essendo una tazza da tè...

Definiamo ora

$$R = \{X : X \text{ è un insieme e } X \notin X\}.$$

La frase $X \notin X$ esprime, nella variabile X , una proprietà per l'universo U dato dalla totalità degli insiemi. Pertanto, il principio di comprensione, ci dice che R è un insieme. Ma allora dovremmo essere in grado, in particolare, di stabilire se R vi appartiene o no. Vediamo cosa succede. Se è vero $R \in R$ allora R deve soddisfare la proprietà caratteristica di R e quindi $R \notin R$. D'altra parte se è invece vero che $R \notin R$, allora R soddisfa la proprietà caratteristica di R e quindi vi appartiene cioè $R \in R$. Così, comunque stiano le cose, deduco una cosa e il suo contrario pervenendo ad una contraddizione. L'insanabilità del problema mi fa però riflettere meglio e tornare sui miei passi. C'è un punto sul quale siamo stati frettolosi... chi ci assicura che la totalità U degli insiemi sia un insieme? Non abbiamo nessun appiglio per affermare questo in realtà. La comunità matematica accetta dunque questa idea: l'elemento

¹Bertrand Russell è stato uno dei più grandi logici e filosofi di inizio '900.

contraddittorio del paradosso di Russell è dovuto al fatto che *la totalità degli insiemi non è un insieme*². Fortunatamente se consideriamo anziché la totalità degli insiemi solo gli insiemi che servono per l'analisi o per l'algebra lineare si vede che i paradossi non si creano. Su questi temi esiste una sconfinata letteratura. Per un primo approfondimento rimandiamo al breve saggio del Prof. C. Casolo, reso disponibile sulla pagina e-l del nostro corso. Estraiamo da tale saggio una versione più moderna del paradosso di Russell. Le pagine Internet accessibili in rete contengono diverse connessioni (links) ad altre pagine. Vi sono normalmente pagine che, per motivi pratici, contengono un link a se stesse (tipicamente le cosiddette home page), mentre altre, la maggioranza, non contengono un link a se stesse. Il numero totale di pagine (diciamo nel mondo, ma possiamo limitarci ad ambiti più ristretti, ad esempio alle pagine ospitate dai server del mio dipartimento) è comunque finito. Supponiamo che io chieda al mio responsabile informatico di allestire una pagina Internet che contenga un link a tutte e sole le pagine che non hanno link a se stesse ... Al meglio delle sue capacità, lo può fare?

In sostanza il paradosso di Russell dice questo: usate cautela, non tutto si può fare... Per affrontare tali questioni si è sviluppata ad inizio novecento la teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, un tentativo di rendere rigoroso quello che noi qui stiamo sviluppando in cosiddetta forma naïve (ingenua). Ai nostri scopi e anche nella stragrande maggioranza dei problemi matematici l'approccio ingenuo è più che sufficiente (fortunatamente!). Si tenga presente che la denominazione naïve riguarda una teoria con una solida paternità matematica, in quanto fu formulata da George Cantor a fine ottocento.

1.1.7 Equivalenza logica

Dal punto di vista matematico, o se volete logico, due proprietà su un insieme universo U che definiscano lo stesso sottoinsieme sono completamente indistinguibili: per ogni sostituzione operata entro U esse sono o entrambi vere o entrambe false. Questo significa che esprimono lo stesso concetto e diciamo che sono proprietà *logicamente equivalenti*.

Definizione 12. Due proprietà $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ in una variabile su un universo U , si dicono logicamente equivalenti se gli insiemi

$$A = \{x \in U : \mathcal{P}(x)\}, \quad B = \{x \in U : \mathcal{Q}(x)\}$$

da esse definiti sono uguali.

Ad esempio nell'universo U dei triangoli le due proprietà x è un triangolo equilatero e x è un triangolo equiangolo sono logicamente equivalenti. Nella vostra esperienza matematica avete incontrato molte volte delle proprietà logicamente equivalenti risolvendo le equazioni. Infatti *i passaggi che fate risolvendo una equazione, rappresentano sempre proprietà logicamente equivalenti* perchè ad ogni passo, se il vostro procedere è corretto, l'insieme delle soluzioni non cambia. Invece non sono logicamente equivalenti le proprietà su $\mathbb{Z}$ seguenti: $x > 7$ e $x^2 > 49$. Perché? Se due proprietà $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sono logicamente equivalenti scriviamo $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$. Si noti che $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ significa esattamente questo: tutte le volte che $\mathcal{P}$ risulta vera, anche $\mathcal{Q}$ risulta vera e tutte le volte che $\mathcal{Q}$ risulta vera anche $\mathcal{P}$ risulta vera.

Se due proprietà $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ su un insieme universo U definiscono due insiemi, rispettivamente A e B , tali che $A \subseteq B$ diciamo che $\mathcal{Q}$ è *conseguenza logica* di $\mathcal{P}$ e scriviamo $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Esplicitamente:

²Russell stesso conierà il termine classe per comprendere tali oggetti.

$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ significa che tutte le sostituzioni che rendono vera $\mathcal{P}$ rendono vera anche $\mathcal{Q}$.

Ciò si esprime anche dicendo che, in U , $\mathcal{P}$ è *condizione sufficiente* per $\mathcal{Q}$ o che $\mathcal{Q}$ è *condizione necessaria* per $\mathcal{P}$.

Ad esempio abbiamo in $U = \mathbb{Z}$, che

$$x > 7 \implies x^2 > 49.$$

Infatti tenuto conto del grafico della parabola $y = x^2$, è evidente come nel tratto corrispondente ad ascisse x maggiori di 7, il suo andamento sia crescente, ossia preveda che il valore ottenuto calcolando il quadrato di un numero maggiore di 7, sia maggiore del quadrato di 7.

Invece

$$x^2 > 49 \not\implies x > 7.$$

Soffermiamoci un attimo sul controllo di questo secondo fatto: quello che esprime è che

$$\{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 49\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{Z} : x > 7\}$$

e questo risulta provato esibendo un elemento di $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 49\}$ che non appartenga a $\{x \in \mathbb{Z} : x > 7\}$. A tale scopo basta considerare -9 : infatti i due fatti $-9 \in \mathbb{Z}$ e $(-9)^2 = 81 > 49$ ci dicono che $-9 \in \{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 49\}$ mentre $-9 < 7$ garantisce $-9 \notin \{x \in \mathbb{Z} : x > 7\}$.

Notiamo che affermare che $\mathcal{Q}$ è *conseguenza logica* di $\mathcal{P}$ e contemporaneamente che $\mathcal{P}$ è *conseguenza logica* di $\mathcal{Q}$ è la stessa cosa che dire $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$. In tal caso diciamo anche che $\mathcal{P}$ è *condizione necessaria e sufficiente* per $\mathcal{Q}$.

Vediamo ora una interessante conseguenza della Proposizione 11.

Corollario 13. *Sia $\mathcal{P}$ una proprietà nell'universo U , che risulti falsa per ogni sostituzione della variabile. Se $\mathcal{Q}$ è una qualunque proprietà nell'universo U , allora vale sempre $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.*

Prima di dimostrare tale proposizione vediamo al lavoro su degli esempi, che ci stupiranno un po'. Valgono le seguenti implicazioni logiche:

$$x \neq x \implies x^2 = x + 3$$

$$3 = 7 \implies 10 = 45$$

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \implies \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \implies \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Notate che abbiamo pensato $3 = 7$, $\{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$, etc. come proprietà in una variabile ma in cui la variabile non appare esplicitamente. E gli universi? Chi erano?

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi con proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ e con proprietà caratteristica $\mathcal{Q}$ e chiamiamoli, rispettivamente A e B . Abbiamo allora

$$A = \{x \in U : \mathcal{P}(x) \text{ vera}\}$$

mentre

$$B = \{x \in U : \mathcal{Q}(x) \text{ vera}\}.$$

Ora di B sappiamo ben poco, ma invece sappiamo chi è A . Infatti, per tutte le possibili sostituzioni, $\mathcal{P}(x)$ non risulta mai vera e quindi A non contiene elementi, ossia $A = \emptyset$. Ora la Proposizione 11 mi garantisce che $A = \emptyset \subseteq B$, ossia $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

□

Notate: stiamo dicendo che da una premessa sempre falsa si può dedurre logicamente qualunque cosa... Sarà un principio importante da tener presente.

1.1.8 Quantificatori

Nello scrivere le proprietà che caratterizzano gli insiemi utilizzeremo molto frequentemente alcuni simboli detti *quantificatori*, il cui scopo è quello di rendere più sintetica e compatta la scrittura. Notate che abbiamo già incontrato questi termini in precedenza.

$\forall$ per ogni, $\exists$ esiste.

Ad esempio si considerino i due insiemi

$$A := \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y\}, \quad B := \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} \text{ tale che } x + y \leq 10\}.$$

Siete in grado di controllare che valgono le uguaglianze

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

Dovete fare due passi: 1) partire da un elemento a di A e mostrare che $a = 1$; 2) prendere l'unico elemento 1 del singoletto $\{1\}$ e mostrare che esso appartiene ad A , ossia che rende vera la proprietà caratteristica che definisce A . Analogamente per B .

Per trattare con questi due simboli è fondamentale tener presente che per controllare la verità di una frase del tipo $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ occorre stabilire la verità di $\mathcal{P}(u_0)$, per qualunque possibile $u_0 \in U$ sostituito al posto della variabile x . Se invece vogliamo stabilirne la falsità, dobbiamo trovare almeno un $u_0 \in U$ che, sostituito al posto della variabile x , rende falsa $\mathcal{P}(u_0)$: diremo che u_0 è un *controesempio* per $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$.

Ovviamente, dato che le sostituzioni da fare possono essere infinite (e di solito lo saranno), tale sostituzione va pensata in senso potenziale: ossia devo immaginare di prendere un generico elemento in U e sostituirlo in $\mathcal{P}(x)$. In tale operazione devo contemplare la possibilità di pescare in U in modo completamente libero. Gli esiti possibili del nostro controllo sono comunque solo due: V o F. Il che significa che siamo davanti ad una proposizione: la presenza della variabile è neutralizzata dal quantificatore!

Ad esempio se sono chiamato a decidere sulla verità/falsità della frase "In ogni triangolo la somma dei quadrati di due opportuni lati è uguale al quadrato del terzo", non posso limitarmi a lavorare con triangoli equilateri o con i triangoli rettangoli. Devo contemplare tutti i triangoli possibili. Ora, in questo caso, intuitivamente siamo di fronte ad una proposizione falsa. Per provare che è falsa devo però esibire un triangolo che non la soddisfa! Questo significa trovare un controesempio. Lo sapete fare? Una possibilità, fra le molte possibili, è la seguente : uno dei teoremi della geometria euclidea garantisce che si possa costruire un triangolo isoscele con base di lunghezza 4 cm e lati obliqui di lunghezza 6 cm, perché $6 > 4$. Ora vedo che $6^2 + 6^2 \neq 4^2$ come pure $6^2 + 4^2 \neq 6^2$ e questo garantisce che la mia proposizione è falsa, dato che ho esaminato tutti i casi possibili, accoppiando i lati. Cosa accade se ora scrivo la stessa proposizione nell'universo dei triangoli rettangoli? Risulta vera: è il teorema di Pitagora. Infatti qualcuno, tanti anni fa, ha fatto una dimostrazione...

Invece per controllare la verità di una frase del tipo $\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$ occorre stabilire la verità di $\mathcal{P}(u_0)$, per un solo particolare $u_0 \in U$. Per controllare se è falsa devo invece vedere che qualunque $u \in U$ io sostituisca, $\mathcal{P}(u)$ risulta falsa. Anche qui osserviamo che siamo davanti ad una proposizione grazie al quantificatore esistenziale che neutralizza la variabile.

Ricordiamoci ora, come fatto utile, che una frase è falsa se e solo se la sua negazione è vera. Ora la negazione di $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ è $\exists x \in U$ tale che non $\mathcal{P}(x)$. Dualmente la negazione di $\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$ è $\forall x \in U$, non $\mathcal{P}(x)$. Così, se preferiamo, per controllare se una proprietà del tipo $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ risulta vera o falsa ci possiamo mettere di fronte a lei e alla sua negazione $\exists x \in U$ tale che non $\mathcal{P}(x)$ e stabilire quale delle due sia vera.

Esempio: dire se è vera o falsa la proposizione seguente

$$"\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x \text{ è pari}"$$

Scriviamo anche la sua negazione

$$"\exists x \in \mathbb{N} \text{ tale che } x^2 + x \text{ è dispari}"$$

e cerchiamo di capire quale fra le due sia vera. Sappiamo che una ed una sola di esse lo è. Ovviamente per stabilirlo serve una dimostrazione...

Dimostro che la prima è vera: scompongo in fattori il polinomio $x^2 + x = x(x + 1)$ e vedo che è il prodotto di due numeri consecutivi, pertanto o x è pari o $x + 1$ è pari. Dunque anche il loro prodotto $x^2 + x$ è pari.

1.1.9 Quantificatori e variabili saturate

Consideriamo ora anche proprietà $\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)$ in cui appaiono più variabili. Se vi sono dei quantificatori, le corrispondenti variabili vengono *saturate*, ossia perdono il ruolo di variabili mentre le altre restano *libere*, ossia sono le variabili effettivamente presenti e possono assumere un qualunque valore nell'universo U . A tutti gli effetti *la proprietà* si comporta come se fosse scritta solamente rispetto alle variabili libere. Questa idea generalizza quanto detto nel caso di un solo quantificatore.

Vediamo degli esempi. In $\forall x, \forall y \in \mathbb{Z}, xy = yx$, tutte le due variabili x e y sono saturate. Siamo di fronte quindi ad una proposizione di cui riconosciamo facilmente la verità. Essa esprime la proprietà commutativa del prodotto fra interi. Consideriamo ora nell'universo $\mathbb{Z}$, la seguente frase $\forall x \in \mathbb{Z}, xy = yx$: può sembrare identica alla precedente ma non lo è affatto. La differenza sta nel fatto che ora y è libera. Questo, tanto per cominciare, ci dice che siamo effettivamente di fronte ad una proprietà in una sola variabile e non ad una proposizione. Chiediamoci ora chi sia

$$A = \{y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z}, xy = yx\}.$$

Dobbiamo pensare $x \in \mathbb{Z}$ come un nostro parametro di lavoro e risolvere in y l'equazione $xy = yx$. Se $x = 0$ tale affermazione dice $0 = 0$ vera per ogni $y \in \mathbb{Z}$; se $x \neq 0$ la semplifico in $y = y$ anch'essa vera per ogni $y \in \mathbb{Z}$. Quindi, qualunque sia $x \in \mathbb{Z}$, abbiamo che $xy = yx$ vale per tutte le $y \in \mathbb{Z}$. Questo dice che $A = \mathbb{Z}$. Presentiamo un interessante ragionamento più semplice per ottenere la stessa conclusione. Poiché $xy = yx$ vale comunque scelga x e y (lo abbiamo notato prima), se fisso y come voglio ho che $xy = yx$ vale certamente per ogni x . Pertanto ogni possibile y è dentro A e dunque $A = \mathbb{Z}$.

Vediamo un terzo esempio. Consideriamo nell'universo $\mathbb{Z}$

$$\forall x, \exists y \text{ t.c. } xy = 4.$$

E' saturata e quindi è una proposizione. Cerchiamo di capire se è vera o falsa. La sua negazione è

$$\exists x \text{ t.c. } \forall y, xy \neq 4.$$

Per decidere quale, fra queste due affermazioni, sia quella vera cerchiamo di capire cosa esprimono. La prima dice che l'equazione $xy = 4$ è sempre risolvibile in y a prescindere da chi sia il parametro x . Ora però se noi proviamo a risolvere questa equazione, vediamo che, se $x = 0$, non ce la facciamo a ricavare y . Infatti essa diventa $0y = 4$, che è una frase falsa qualunque y si sostituisca perché equivale a $0 = 4$, proposizione falsa. Il ragionamento fatto ci ha mostrato, tra le righe, come fare per dire che è la $\exists x$ t.c. $\forall y, xy \neq 4$ ad essere vera! Infatti esibisco $x = 0$ come caso per il quale, per ogni y , vale $0y \neq 4$.

1.2 Operazioni fra insiemi

Introduciamo in questa sezione le fondamentali operazioni fra insiemi.

Definizione 14. Siano A e B insiemi.

- Si chiama *unione* di A e B (in simboli $A \cup B$) l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi che appartengono ad A o a B .
- Si chiama *intersezione* di A e B (in simboli $A \cap B$) l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi che appartengono ad A e a B .
- Si chiama *differenza* di A e B (in simboli $A \setminus B$) l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B .

Come già detto la particella "o" in matematica è sempre considerata, salvo specifica indicazione, in senso inclusivo. Il simbolo internazionale per "o" è $\vee$. In particolare nell'unione dovranno essere messi anche tutti gli elementi dell'intersezione.

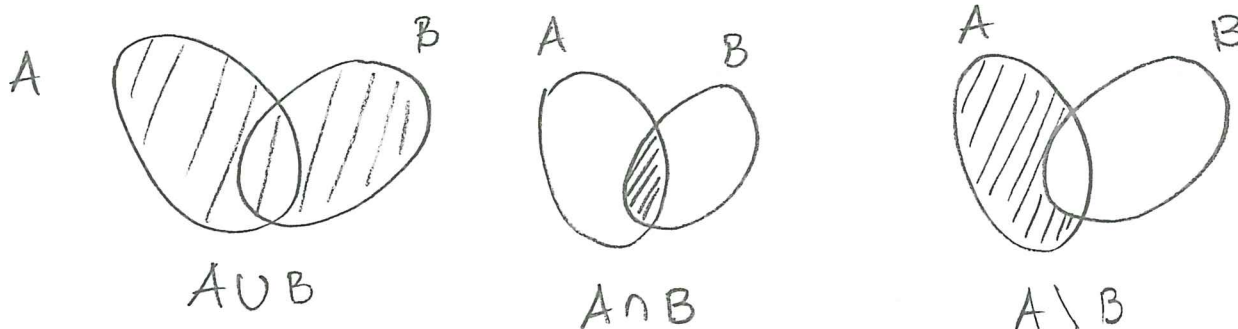
Alcuni esempi per spiegare il significato delle operazioni sono certamente utili. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$ allora

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \{3, 4\}, \quad A \setminus B = \{1, 2\}, \quad B \setminus A = \{5, 6\},$$

Siano $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2\}$ allora

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} = A, \quad A \cap B = \{1, 2\} = B, \quad A \setminus B = \{0\}, \quad B \setminus A = \emptyset.$$

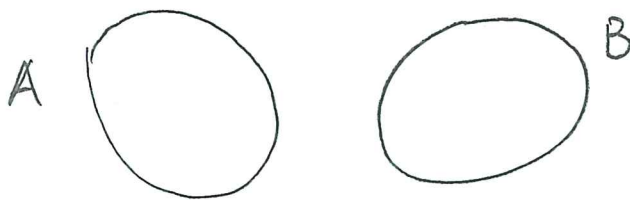
Con i diagrammi di Venn tali operazioni possono essere così visualizzate:



Notate che se A ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ e B ha proprietà caratteristica $\mathcal{Q}$, allora $A \cup B$ ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ mentre $A \cap B$ ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Il simbolo internazionale per "e" è $\wedge$.

Definizione 15. Siano A e B insiemi. Se $A \cap B = \emptyset$ gli insiemi A e B sono detti *disgiunti*.

Con i diagrammi di Venn tale concetto può essere così visualizzato:



Vi sono alcune proprietà molto importanti delle operazioni fra insiemi. La loro dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni, nel senso che gli unici strumenti da utilizzare per ottenerle sono dati dal significato che abbiamo attribuito a tali operazioni.

Proposizione 16. Sia A un insieme. Allora

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A, \quad A \setminus A = \emptyset, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \setminus \emptyset = A, \quad \emptyset \setminus A = \emptyset.$$

Siano A e B insiemi. Allora

- $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$
- $A \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq A, \quad A \setminus B \subseteq A,$
- se $A \subseteq B$, allora $A \setminus B = \emptyset,$
- se $A \cap B = \emptyset$, allora $A \setminus B = A$ e $B \setminus A = B.$

Dimostrazione. Dimostriamo soltanto che se $A \cap B = \emptyset$, allora $A \setminus B = A$. Supponiamo dunque che $A \cap B = \emptyset$ e deduciamo che $A \setminus B = A$. Dobbiamo quindi dimostrare che $A \setminus B \subseteq A$ e $A \subseteq A \setminus B$. La prima delle due inclusioni è ovvia poiché se $x \in A \setminus B$ allora $x \in A$ e $x \notin B$ e dunque in particolare $x \in A$. Per mostrare il viceversa considero $x \in A$. Poiché $A \cap B = \emptyset$ si ha che sicuramente $x \notin B$ e dunque $x \in A \setminus B$. $\square$

Le operazioni fra gli insiemi possono essere fra loro combinate come nelle espressioni aritmetiche. In questo caso entrano in gioco le parentesi che chiariscono l'ordine di esecuzione delle operazioni. La regola fondamentale che governa l'uso delle parentesi è che hanno la precedenza le operazioni i cui argomenti non sono espressioni contenenti a loro volta parentesi.

Ad esempio, se

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3, x \leq 12\}, \quad C = \{4, 8, 12\}.$$

si ha che

$$(A \setminus B) \cap C = \emptyset, \quad (A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}.$$

Proposizione 17. Siano A, B e C insiemi. Allora

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

La precedente proposizione è utile perchè mostra che le scritture

$$A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C,$$

non sono ambigue. Infatti qualunque sia l'ordine scelto per applicare le operazioni otteniamo lo stesso insieme.

Proposizione 18. Siano A , B e C insiemi. Allora

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

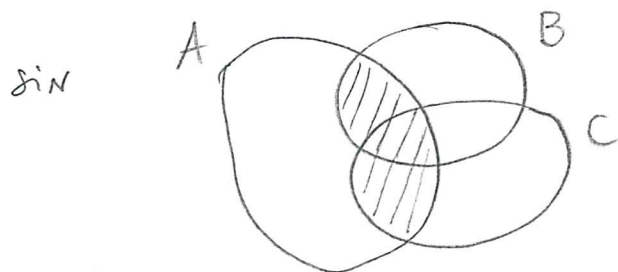
Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione è educativa poiché non è completamente banale. Dimostriamo soltanto la prima uguaglianza, la seconda è lasciata per esercizio. Anche per essa è di aiuto la rappresentazione con i diagrammi di Venn.

Sia $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Allora $x \in (A \cap B)$ o $x \in (A \cap C)$. Nel primo caso $x \in A$ e $x \in B \cup C$ e dunque $x \in A \cap (B \cup C)$. Nel secondo caso $x \in A$ e $x \in B \cup C$ e dunque $x \in A \cap (B \cup C)$. Dunque $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

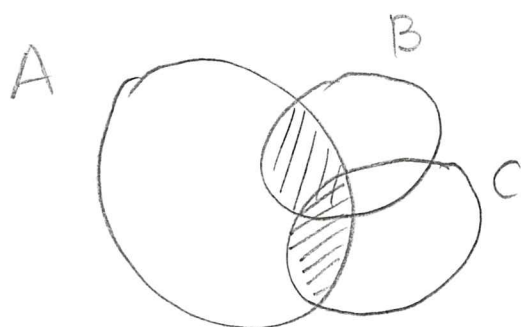
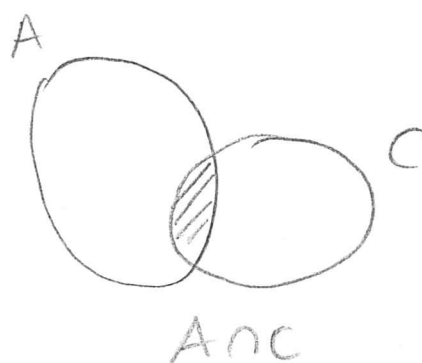
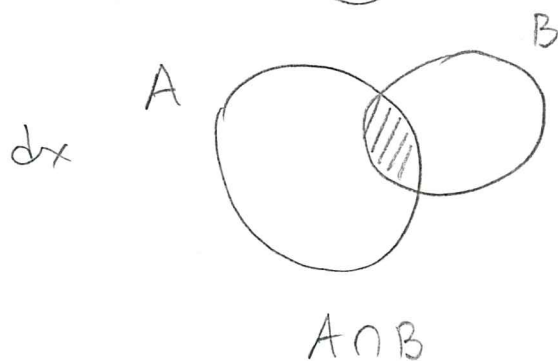
Sia adesso $x \in A \cap (B \cup C)$. Allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Pertanto abbiamo due casi: se $x \in B$ allora $x \in A \cap B$ e dunque $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$; se $x \in C$ allora $x \in A \cap C$ e dunque $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. In definitiva $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Questo completa la dimostrazione. $\square$

Vediamone una conferma utilizzando i diagrammi di Venn. L'idea è rappresentare prima l'insieme a sinistra dell'uguaglianza in esame e poi quello a destra per convincersi, sul piano intuitivo, della loro uguaglianza. Per fare ciò conviene procedere per passi eseguendo le operazioni nell'ordine imposto dalle parentesi:



$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)_{16}$$

Definizione 19. Sia U un insieme universo e sia $A \subseteq U$. Il complementare di A in U è l'insieme $U \setminus A$ ed è indicato con $\complement_U A$ o più semplicemente con A' (se il contesto chiarisce in modo evidente chi sia U).

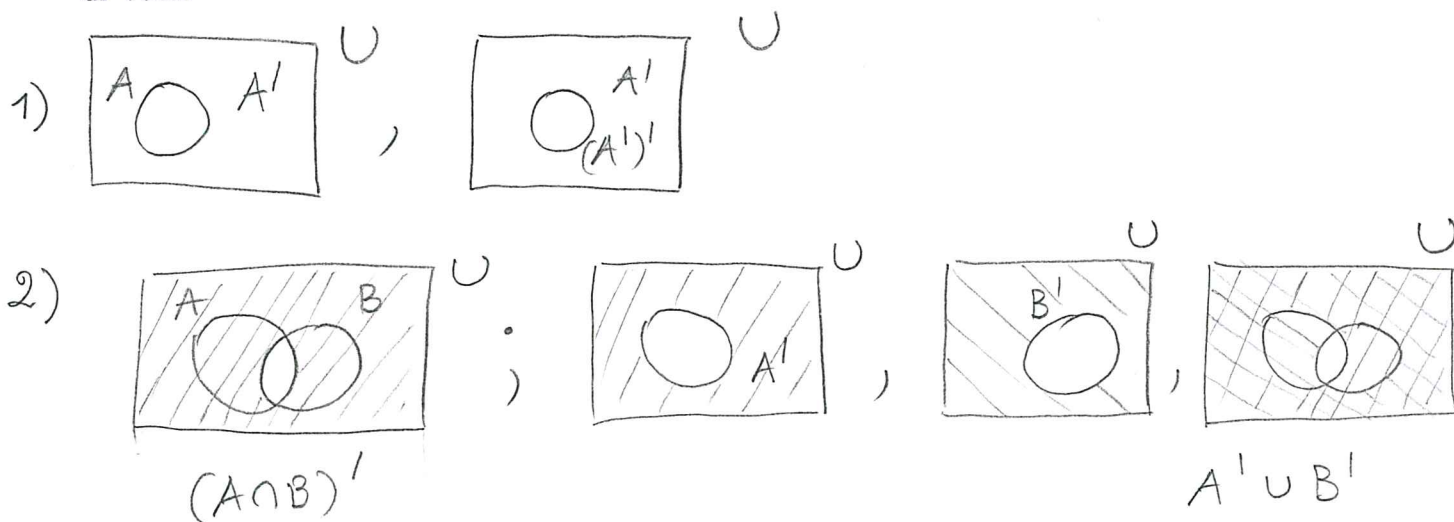
Notiamo che se A ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$, allora A' ha proprietà caratteristica $\neg \mathcal{P}$.

Teorema 20 (Leggi di De Morgan). Sia U insieme e siano $A, B \subseteq U$. Allora

$$(A')' = A, \quad [A \cap B]' = A' \cup B', \quad [A \cup B]' = A' \cap B'$$

Notate che la $(A')' = A$ esprime il fatto che negare due volte una frase la lascia com'è; $[A \cap B]' = A' \cup B'$ esprime il fatto che "e" si neghi con "o"; $[A \cup B]' = A' \cap B'$ esprime il fatto che "o" si neghi con "e".

Vediamo come si possa intuire la verità dell'enunciato precedente utilizzando i diagrammi di Venn.

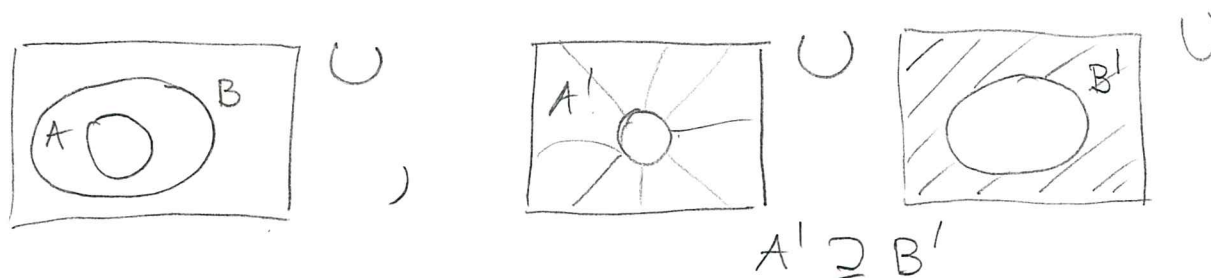


Siete in grado ora di scrivere anche una dimostrazione?

Un altro interessante risultato è il seguente.

Teorema 21. Sia U insieme e siano $A, B \subseteq U$ tali che $A \subseteq B$. Allora $B' \subseteq A'$.

Anche questo risultato si visualizza bene con i diagrammi di Venn.



La sua dimostrazione è facile e lasciata per esercizio.

Vediamo una interessante conseguenza del Teorema 21.

Teorema 22. Siano $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ proprietà su U . L'affermazione $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ è equivalente all'affermazione $\neg \mathcal{Q} \implies \neg \mathcal{P}$ (detta la sua contronominale).

Dimostrazione. Se vale $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ significa che l'insieme $A = \{x \in U : \mathcal{P}(x)\}$ è incluso in $B = \{x \in U : \mathcal{Q}(x)\}$. Ma applicando il Teorema 21 si ha allora $B' \subseteq A'$. D'altra parte $B' = \{x \in U : \neg \mathcal{Q}(x)\}$ e $A' = \{x \in U : \neg \mathcal{P}(x)\}$ per cui abbiamo $\neg \mathcal{Q} \implies \neg \mathcal{P}$. Viceversa se vale $\neg \mathcal{Q} \implies \neg \mathcal{P}$ il ragionamento appena fatto ci dice che vale $\neg \neg \mathcal{P} \implies \neg \neg \mathcal{Q}$ che è come dire $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. $\square$

Useremo a volte il teorema appena visto nel fare le dimostrazioni.