Matematica per le Applicazioni Economiche I

Scuola di Economia e Management

Compiti di Esame

Editor: Pierluigi Zezza

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Capitolo 1

Regolamento del corso di Matematica per le Applicazioni Economiche I

1.1 Prerequisiti

Strutture numeriche, aritmetica
I numeri naturali. I numeri interi relativi. I numeri razionali. Idea intuitiva dei numeri reali. Operazioni aritmetiche e loro proprietà. Calcolo di percentuali. Numeri primi. Fattorizzazione di un numero naturale (sapere scomporre un numero in fattori primi). Massimo comune divisore e minimo comune multiplo. Disuguaglianze e relative regole di calcolo (saper trasformare una disuguaglianza in un'altra equivalente; saper sommare membro a membro, moltiplicare o dividere i membri della disuguaglianza per un dato numero). Valore assoluto. Potenze e radici (calcolo con le potenze e calcolo con le radici; saper operare con le disuguaglianze quando si eleva a potenza o si estrae una radice). Proprietà delle potenze e delle radici. Semplificazione di espressioni letterali.

Algebra elementare, equazioni, disequazioni
Polinomi (saper sommare e moltiplicare i polinomi, elevare al quadrato e al cubo i binomi). Prodotti notevoli (saper scomporre la differenza di quadrati e di cubi). Saper scomporre un polinomio in fattori irriducibili nei casi semplici. Principio di identità dei polinomi. Espressioni razionali fratte (saper sommare e moltiplicare espressioni razionali fratte). Identità ed equazioni (saper sommare o trasformare un'equazione in un senso desiderato, cioè conoscere le regole per il passaggio di un addendo oppure di un fattore da

un membro all'altro ecc.). Nozione di soluzione di un'equazione. Equazioni algebriche di primo e di secondo grado (saper risolvere anche equazioni di grado superiore in casi particolari; applicazione della legge di annullamento del prodotto). Radice di un polinomio. Sistemi lineari di due equazioni in due incognite (saper applicare almeno un metodo risolutivo per i sistemi lineari). Equazioni con espressioni fratte. Equazioni con radicali. Disequazioni (saper sommare o trasformare una disequazione in un senso desiderato, cioè conoscere le regole per il passaggio di un addendo oppure di un fattore da un membro all'altro ecc.). Risoluzione di disequazioni algebriche di primo e di secondo grado, di disequazioni con espressioni fratte, con radicali.

Insiemi. Elementi di logica
Linguaggio elementare degli insiemi: appartenenza, inclusione, intersezione, unione, complementare, insieme vuoto. Implicazione: condizione sufficiente, condizione necessaria.

Geometria analitica Coordinate cartesiane ortogonali nel piano. Teorema di Pitagora. Distanza tra due punti. Equazione della retta (saper scrivere l'equazione della retta per due punti, di una retta per un punto con coefficiente angolare dato). Parallelismo e perpendicolarità di due rette. Equazione della parabola (saper tracciare un grafico qualitativo).

Testi consigliati

- Giuseppe Anichini, Antonio Carbone, Paolo Chiarelli, Giuseppe Conti, Precorso di matematica, 2010, Pearson Education, pag. 272, €17,00 - ISBN 9788871925899

- Roberto D'Ercole - Precorso di Matematica per Economia e Scienze, 2011, Pearson Education, pag.264 €17,00 - ISBN 9788871926308

- Paolo Boieri, Giuseppe Chiti, Precorso di matematica, 1994, Zanichelli, €22,30 - ISBN 9788808091864

1.2 Programma del corso

- *Il ruolo della matematica nelle applicazioni.*

- *Introduzione al ragionamento matematico.*

- *I numeri reali: proprietà algebriche e di ordine. Rappresentazione geometrica dei numeri reali: la retta reale. Topologia della retta reale. Intorno di un punto, punti interni e di accumulazione. Insiemi limitati inferiormente e/o superiormente. Estremo superiore e inferiore di un insieme.*

- *Funzioni. Dominio, immagine e grafico di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Funzioni inverse. Composizione di funzioni. Dominio della composizione. La funzione esponenziale e la funzione logaritmo, proprietà e regole di calcolo. le funzioni trigonometriche di base.*

- *Funzioni monotone. Stretta monotonia e invertibilità. Funzioni limitate superiormente e inferiormente. Estremo superiore e inferiore di una funzione, massimo e minimo di una funzione.*

- *Successioni. Il concetto di limite. Teoremai dell'unicità del limite, della permanenza del segno e dei carabinieri. Successioni monotone.*

- *Limite di funzione. Teorema dell'unicità del limite. Teorema della permanenza del segno e teorema dei carabinieri. Limite destro e limite sinistro. Operazioni fra limiti: prodotto per un numero, somma, prodotto e quoziente. Limite della composizione (cambiamento di variabili). Limiti infiniti e limiti all'infinito. Infiniti e infinitesimi. I limiti delle funzioni razionali, del logaritmo e dell'esponenziale al finito e all'infinito. Forme indeterminate.*

- *Funzioni continue. Definizione ed esempi. Continuità delle funzioni elementari. Conservazione della continuità tramite le operazioni fra funzioni. Teorema degli zeri e teorema dei valori intermedi. L'algoritmo di bisezione. Massimi e minimi locali e globali. Il teorema di Weierstrass.*

- *Definizione di derivata. Retta tangente. Regole di derivazione per somma, prodotto e quoziente e composizione. Teorema di Fermat, teoremi di Rolle e Lagrange. Teorema di de l'Hôspital. Segno della derivata prima e monotonia di una funzione. Funzioni convesse, segno della derivata seconda e convessità di una funzione. Criterio del segno della derivata seconda come condizione sufficiente per max e min locali. Il polinomio di Taylor.*

Libro di testo
Pierluigi Zezza, *Metodi matematici per le scienze economiche e aziendali*, 2009, Carocci Editore, Roma, pg. 260, €23.50. ISBN 9788843048182

1.3 Esame (contenuto e modalità)

1. L'esame prevede una prova scritta ed una, eventuale, prova orale. L'esame scritto con votazione sufficiente può essere integrato da un breve esame orale a discrezione del docente o su richiesta dello studente. L'esame orale consiste in una breve discussione dell'elaborato consegnato e riguarderà almeno un terzo degli studenti.

2. La prova scritta è comune a tutti i corsi.

3. Per poter sostenere la prova scritta è obbligatorio iscriversi on-line sul sito

   http://sol.unifi.it/prenot/prenot

   dove gli studenti troveranno indicazioni sulle date e orari luoghi delle prove scritte ed orali

4. I compiti corretti verranno conservati sino al termine della sessione e dopo tale scadenza perderanno ogni validità

5. L'esame scritto contiene un numero variabile di esercizi con un numero di punti associati a ciascuno. Il totale dei punti su tutti gli esercizi è 40. Il numero minimo di punti da ottenere per superare l'esame è 18. Il voto sarà riportato in trentesimi secondo la seguente tabella.

   TABELLA CONVERSIONE VOTI PROVA SCRITTA

18	19, 20	21	22, 23	24	25, 26	27	28	29, 30	31	32, 33	34	35, 36	$37-40$
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$30L$

6. Pena l'annullamento della prova, è vietato l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone o ogni altro strumento che sia in grado di connettersi con l'esterno. Lo studente può portare con sè, al posto assegnato, soltanto il materiale per scrivere, cancellare. Tutto il resto, cappotti e giacche incluse, deve essere lasciato agli appositi attaccapanni al momento dell'ingresso in aula.

7. Lo studente deve presentarsi all'esame con un documento di riconoscimento valido. Il libretto universitario non è un documento di riconoscimento.
8. È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.
9. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.
10. Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.
11. Il giorno della verbalizzazione/prova orale, gli studenti potranno visionare i compiti corretti e chiedere spiegazioni ai docenti sulle correzioni fatte.
12. Il voto della prova scritta sarà comunicato in rete prima della prova orale.

1.4 Tutor junior

Anche nell'anno 2012-2013 saranno banditi dei posti per tutor junior. Tali tutor aiuteranno gli studenti a svolgere esercizi per tutto l'anno accademico.

1.5 Frequenza.

Gli studenti possono frequentare, a loro scelta, uno dei quattro corsi anche se, per motivi organizzativi, suggeriamo caldamente di seguire quello assegnatogli.
Gli studenti devono obbligatoriamente sostenere l'esame con i professori che competono loro in termini di lettera iniziale del loro cognome.

1.6 La prove d'esame

Carico di studio Le delibere degli Organi di Ateneo prevedono, per i nostri corsi di laurea, che ad ogni CFU corrispondano 25 ore di studio; *le 25 ore di 1 CFU saranno ripartite in 8 e 17 ore rispettivamente di attività di docenza [lezioni] e individuale.* Il corso prevede quindi un carico di 9 CFU x

25 ore = 225 ore di cui 9 x 8 = 72 ore di lezione suddivisi in 6 ore settimanali per 12 settimane, come da calendario didattico della Facoltà, e in 9 x 17 = 153 ore di studio individuale.
Esempio. Supponiamo che uno studente voglia sostenere l'esame Lunedì 14 gennaio 2013, tenendo conto delle vacanze di Natale 2012, lo studente deve iniziare Lunedì 8 ottobre 2012 a studiare tre (3) ore al giorno tutti i giorno esclusi Sabato e Domenica per totalizzare la quantità prevista di ore di studio necessarie per preparare l'esame. Per molti corsi questo viene, erroneamente, considerato come un limite massimo e non come carico didattico effettivo. Questo non è vero per questo corso che richiede effettivamente un carico di questo genere.

Per affrontare la prova d'esame è necessaria una buona conoscenza del programma ed in particolare:

Funzioni Elementari Lo studente deve conoscere le seguenti funzioni elementari e le loro proprietà

- Potenze ad esponente intero
- Potenze ad esponente razionale
- Valore assoluto
- Funzione segno
- Funzione scalino (Heaviside)
- Funzioni definite a tratti
- Esponenziali
- Logaritmi
- Funzioni trigonometriche

Lo studente deve essere inoltre in grado di calcolare la loro

- Somma
- Prodotto
- Quoziente
- Composizione

Limiti Lo studente deve essere in grado di calcolare il valore del limite (al finito, limite destro e sinistro, all'infinito) delle funzioni elementari ed in particolare deve saper

- Calcolare i limiti delle funzioni razionali
- Calcolare i limiti delle funzioni esponenziali e dei logaritmi
- Calcolare i limiti riducibili a limiti notevoli tramite un cambiamento di variabile o operazioni algebriche

- Comportamento delle funzioni elementari all'infinito
- Usare il Teorema di de l'Hôspital per il calcolo dei limiti

Studio di funzione Le seguenti funzioni potranno essere utilizzate per descrivere la funzione oggetto di studio

- Funzioni razionali
- Potenze razionali
- Valore assoluto
- Esponenziali e logaritmi naturali
- Esponenziali e logaritmi in altra base
- Funzioni trigonometriche

Funzioni Lo studente deve conoscere la definizione di funzione e, per le funzioni descritte nel precedente paragrafo, deve saper determinare

- Dominio
- Immagine
- Asintoti orizzontali
- Asintoti verticali
- Asintoti obliqui
- Intervalli di continuità
- Punti di derivabilità
- Intervalli di monotonia
- Intervalli di concavità e convessità
- Massimi e minimi locali e globali
- Estremo superiore e inferiore
- Intervalli di invertibilità

Definizioni Lo studente deve conoscere le seguenti definizioni e saperle utilizzare in casi particolari

- Estremo superiore e inferiore
- Limite di successione
- Limite di funzione
- Monotonia
- Monotonia stretta
- Iniettività
- Suriettività
- Invertibilità
- Continuità
- Derivabilità
- Concavità e convessità

Teoremi I Lo studente deve conoscere i seguenti Teoremi sulle funzioni e le loro dimostrazioni

- unicità del limite
- dei carabiniere
- permanenza del segno per funzioni continue
- dei valori intermedi per funzioni continue
- di Fermat (Estremi locali di funzioni derivabili)
- di Lagrange
- derivabilità e continuità
- derivabilità e monotonia

Teoremi II Lo studente deve conoscere i seguenti Teoremi e il loro enunciato

- di Weierstrass (esistenze di massimo e minimo globale)
- di Taylor (approssimazione locale con un polinomio)

Algoritmi Lo studente deve conoscere il funzionamento e saper utilizzare l'algoritmo di Bisezione

Problemi Di norma, la prova scritta conterrà un problema consistente in una applicazione alla economia degli strumenti matematici studiati nel corso. Un'ampia gamma di esempi sarà proposta durante il corso.

Capitolo 2

Compiti di esame 2013

2.1 Compito del 16 gennaio 2013

2.1.1 Compito A

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f := x \mapsto \frac{5}{2x^2+1}.$$

Utilizzando la definizione di iniettività e di immagine di una funzione, si dimostri che la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$. Si trovi poi l'espressione esplicita della funzione inversa di f.

Esercizio 2. (5 punti)
Usando la appropriata definizione di limite, si verifichi che

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Esercizio 3. (5 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f := x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(ax^2)}{x} & \text{se} \quad x \in (-\infty, 0) \\ ax + bx^2 & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ -2bx & \text{se} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di a, b tali che f risulti continua e, qualora esistano, determinarli.

Esercizio 4. (10 punti)

i) Si enunci e si dimostri il Teorema di Lagrange.

ii) Si applichi il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$$

nell'intervallo $[a, b]$;

iii) Si usi quanto ottenuto al punto ii), per dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, si ha che $|\sin(b) - \sin(a)| \leq b - a$.

Esercizio 5. (8 punti)
Si studi e si tracci il grafico di

$$f := x \mapsto \frac{|x^3 - x^2|}{x^2 - 1}.$$

Si tralasci lo studio della derivata seconda.

Esercizio 6. (7 punti)
Si consideri un'impresa che produce un solo bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad q \mapsto R(q).$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad q \mapsto C(q).$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \pi(q) = R(q) - C(q).$$

Supponimao che

$$R(q) = 7\,q$$
$$C(q) = q^2 + q + 1$$

e che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 5.

i) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.

ii) Si calcoli $\pi(0)$ e $\pi(5)$e l'eventuale profitto massimo per $q \in (0, 5)$.

iii) Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.1.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1. Per dimostrare l'iniettività si considerano due elementi del dominio, x e y in $[1, +\infty)$ e si deve fare vedere che $f(x) = f(y)$ implica $x = y$; questo può essere fatti in modi diversi.
Abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \frac{5}{2x^2+1} = \frac{5}{2y^2+1} \\ &\Leftrightarrow 10x^2 + 5 = 10y^2 + 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Poiché, per x e y nel dominio, il primo fattore è strettamente positivo $(x + y) \geq 2$, allora deve necessariamente essere $x - y = 0$ ossia $x = y$.

In alternativa possiamo notare che la derivata della nostra funzione è

$$D[f](x) = -\frac{20\,x}{(2\,x^2+1)^2}$$

e nel dominio è sempre negativa, la funzione è quindi strettamente decrescente e quindi se $x \neq y$ $(x < y)$ allora $f(x) \neq f(y)$ $(f(x) > f(y))$. Questo ci permette di dire anche che la funzione risulta invertibile.

Per calcolare l'immagine di f si deve determinare per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ammette *almeno* una soluzione $x \in Dom(f)$ (per quanto detto prima l'equazione può avere al massimo una soluzione). Ricordiamo che $Dom(f) = [1, +\infty)$.

Osserviamo che, per ogni $x \in [1, +\infty)$, $f(x) > 0$. Ciò implica che se $y \leq 0$ allora $y \notin Im(f)$. Possiamo allora assumere $y > 0$. Si ha che

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5}{2x^2+1} = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{5-y}{2y}.$$

Tale equazione non ha soluzioni se $y > 5$, e se $y = 5$ ha come unica soluzione $0 \notin [1, +\infty)$; dunque se $y \geq 5$ si ha che $y \notin Im(f)$. Assumiamo dunque $y \in (0, 5)$. L'equazione sopra considerata ha due soluzioni

$$-\sqrt{\frac{5-y}{2y}}, \quad \sqrt{\frac{5-y}{2y}}.$$

La prima sicuramente non appartiene a $[1, +\infty)$. La seconda appartiene a tale insieme se e solo se

$$\frac{5-y}{2y} \geq 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{3}.$$

Concludendo si ha che $Im(f) = (0, \frac{5}{3}]$.
Notate come da quanto detto nel cercare l'immagine ne segue che l'equazione $f(x) = y$ ha al massimo una soluzione e quindi abbiamo di nuovo fatto vedere che la funzione è iniettiva.

In alternativa poiché la funzione è strettamente decrescente possiamo affermare che l'immagine è l'intervallo $(a, b]$ che ha per estremo sinistro a (che non appartiene all'immagine)

$$a := \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

e per estremo destro (che appartiene all'immagine)

$$b := f(1) = 0$$

.
Per il calcolo dell'inversa della funzione occorre soltanto osservare che per ogni elemento dell'immagine abbiamo che l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$ é $\sqrt{\frac{5-y}{2y}}$. Pertanto si ha che

$$f^{-1} : (0, \frac{5}{3}] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{\frac{5-y}{2y}}$$

Soluzione Esercizio 2. Dobbiamo mostrare che per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che se $2 < x < 2 + \delta_M$ allora $f(x) < -M$. Considero dunque $M > 0$ e mostro che l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{2-x} < -M$$

contiene un insieme della forma $(2, 2 + \delta_M)$ dove $\delta_M > 0$ è opportunamente scelto.

Si ha che

$$\frac{1}{2-x} < -M \Leftrightarrow \frac{Mx-2M-1}{x-2} < 0.$$

Lo studio del segno di $\frac{Mx-2M-1}{x-2}$ stabilisce che esso è negativo nell'insieme

$$\left(2, \frac{2M+1}{M}\right) = \left(2, 2+\frac{1}{M}\right)$$

(osserviamo che, per ogni $M > 0$, si ha che $2+\frac{1}{M} > 2$). Dunque definito $\delta_M = 2+\frac{1}{M}-2 = \frac{1}{M}$ concludiamo la dimostrazione.

Soluzione Esercizio 3. E' immediato verificare che la funzione f è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ in quanto ottenuta da funzioni elementari tramite le operazioni si somma, prodotto, quoziente e composizione. Dobbiamo controllare dunque la continuità nei punti 0 e 1. Osserviamo anzitutto che $f(0) = 0$ e $f(1) = a+b$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(ax^2)}{ax^2} ax = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a+b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2b$$

Dunque f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a+b=-2b$ ossia $a+3b=0$.

Soluzione Esercizio 4.

i) Vedi libro di testo.

ii) Esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f(b)-f(a) = D[f](x_0)(b-a),$$

e dunque nel nostro caso

$$\sin(b)-\sin(a) = \cos(x_0)(b-a),$$

iii) Utilizzando questa eguaglianza possiamo scrivere

$$|\sin(b)-\sin(a)| = |\cos(x_0)(b-a)| \le b-a,$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \le 1$ e dalla fatto che $a < b$..

Soluzione Esercizio 5.

$$f(x) = \frac{|x^3-x^2|}{x^2-1}$$

<u>1. Dominio.</u>

$Dom\ f = \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$.

$$f(x) = \frac{|x^3-x^2|}{x^2-1} = \frac{x^2|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \dfrac{-x^2(x-1)}{x^2-1} = -\dfrac{x^2}{x+1} & \text{se} \quad x<1 \text{ e } x\neq -1 \\[2ex] \dfrac{x^2(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{x+1} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

Dunque studiamo $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ e poi, con semplici modifiche, disegniamo il grafico di f. Più precisamente,

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{se} \quad x<1 \text{ e } x\neq -1 \\ g(x) & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

Si osservi che $Dom\ g = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

<u>2. Segno.</u>

<u>$g(x) > 0$</u> se e solo se $x > -1$.

<u>3. Limiti al finito negli estremi che non appartengono al domino.</u>

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} =" \frac{1}{0^-}" = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} =" -\frac{1}{0^+}" = +\infty;$$

<u>4. Comportamento a $\pm\infty$ e eventuali asintoti non verticali.</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} 2x = \pm\infty.$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right) = -1.$$

C'è dunque un asintoto obliquo (per $x \to \pm\infty$) di equazione $y = x - 1$.

5. Derivata prima.

$$D[g]\,(x) = \frac{2x\,(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x\,(x+2)}{(x+1)^2}$$

			-2		-1		0	
$D[g]$		$+$		$-$	$\nexists$	$-$		$+$
g		crescente		decrescente	$\nexists$	decrescente		crescente

$x = -2$ è un punto di massimo locale, $g\,(-2) = 4$.
$x = 0$ è un punto di minimo locale, $g\,(0) = 0$.

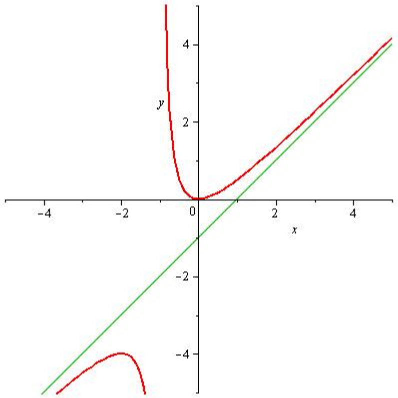


Figura 2.1: Grafico di $g(x)$

Soluzione Esercizio 6. 1. L'impresa deve massimizzare

$$\pi\,(q) = R\,(q) - C\,(q) = -q^2 + 6q - 1$$

sotto il vincolo $q \in [0,5]$. Poiché π è una funzione polinomiale, essa è continua. Poiché $[0,5]$ è un intervallo chiuso e limitato, l'esistenza di un punto di massimo globale segue dal teorema di Weierstrass (o del valore estremo).

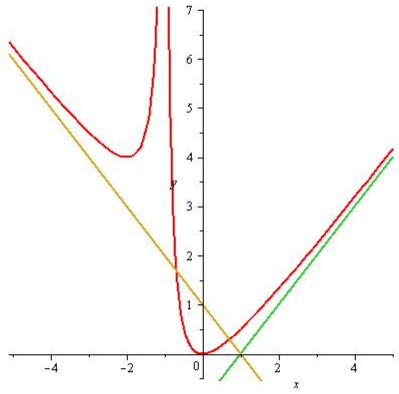


Figura 2.2: Grafico di $f(x)$

2. $\pi\,(0) = -1$; $\pi\,(5) = -25 + 30 - 1 = 4$.
$D[\pi]\,(q) = -2q + 6$ e $D^2[\pi]\,(q) = -2$.

Dunque la funzione profitto è strettamente concava e q^* è un massimo per π su $(0,5)$ se e solo se $D[\pi]\,(q^*) = 0$ ovvero $q^* = 3$.

3. Poiché $\pi\,(3) = -9+18-1 = 10$, la soluzione del problema dell'impresa è $q^* = 3$.

2.1.3 Compito B

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f := x \mapsto \log(x^2 + 2x + 3).$$

Utilizzando la definizione di iniettività e di immagine di una funzione, si dimostri che la funzione f è iniettiva e si calcoli $\mathrm{Im}(f)$. Si determini poi l'espressione esplicita della funzione inversa di f.

Esercizio 2. (5 punti)
Usando la appropriata definizione di limite, si verifichi che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x}=0.$$

Esercizio 3. (5 punti)
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f:=x\mapsto\begin{cases} ax^2+x+b & \text{se} \quad x\in(-\infty,1) \\ \log_2(x^2+x+2) & \text{se} \quad x\in[1,2] \\ \dfrac{5\ln(x-1)}{x-2}+2a & \text{se} \quad x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

dove $a,b\in\mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di a,b tali che f risulti continua e, qualora esistano, determinarli.

Esercizio 4. (10 punti)

i) Si enunci e si dimostri il Teorema di Lagrange.

ii) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile e tale che, per ogni $z\in\mathbb{R}$, $D[f](x)=f'(z)\geq m>0$. Per un fissato $x>0$, si applichi il Teorema di Lagrange alla funzione f ristretta all'intervallo $[0,x]$.

iii) Si usi quanto ottenuto al punto ii), per dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

Esercizio 5. (8 punti) Si studi e si tracci il grafico di

$$f:=x\mapsto\frac{x^2-4}{x^2-4x+3}.$$

Si tralasci lo studio della derivata seconda.

Esercizio 6. (7 punti) Si consideri un'impresa che produce un solo bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q\geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\quad q\mapsto R(q).$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\quad q\mapsto C(q).$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\quad \pi(q)=R(q)-C(q).$$

Si assuma che

$$R(q)=11\,q-q^2,$$
$$C(q)=1+q$$

e che la quantità massima che l'impresa puo' produrre sia 6.

i) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.

ii) Si calcoli $\pi(0),\pi(6)$ e l'eventuale profitto massimo per $q\in(0,6)$.

iii) Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.1.4 Soluzioni Compito B

Il compito B è una *variazione sul tema* del compito A, lo studente deve quindi, una volta studiate le soluzioni del compito A provare a svolgere il compito B seguendo le indicazioni, i suggerimenti e i metodi illustrati.

2.2 Compito del 19 Febbraio 2013

2.2.1 compito A

Esercizio 1. (4 punti)
Sia A il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\;:\;\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\leq 0\right\}.$$

Determinare $\inf A$, $\sup A$ e, se esistono, $\max A$ e $\min A$.

Esercizio 2. (6 punti)
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^2(x\cos(x)+1)}$$

Esercizio 3. (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili). Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una fuzione continua in $[-1,1]$, derivabile in $(-1,1)$ e tale che

$$f(-1) = -1\ ,\ f(0) = 2\ ,\ f(1) = 1$$

Dimostrare che esiste $c \in (-1,1)$ tale che $D[f](c) = 0$..

Esercizio 4. (6 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f : 0x \mapsto |1 - e^x|$$

a) stabilire se f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ e, in caso contrario, si dica in quali punti f è discontinua;
b) dopo aver accertato che f è derivabile in $x = 1$, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$.

Esercizio 5. (8 punti)
Studiare la funzione

$$f := x \mapsto \frac{\log(|x|)}{x}$$

e determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = a.$$

.

Esercizio 6. (8 punti)
Un'impresa deve fabbricare 5 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 (una fabbrica in Toscana) e l'impianto 2 (una fabbrica in Romania). Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 1, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 1 è

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1}\ .$$

Con $x_2 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 2, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 2 è $6x_2$. L'impresa vuole scegliere x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 5$, in modo da minimizzare il costo totale, ovvero

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1} + 6x_2\ .$$

Si noti che sostituendo x_2 con $5 - x_1$ è possibile scrivere il costo totale come funzione della sola variabile x_1 .

(a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2 ..

2.2.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1. Le radici del polinomio al numeratore sono $x = 1$ e $x = 2$, quelle del polinomio al denominatore sono $x = 3$ e $x = 4$.

		1		2		3		4	
num	+		−		+		+		+
den	+		+		+		−		+
segno	+		−		+		−		+

Quindi l'insieme richiesto è

$$A = [1,2] \cup (3,4).$$

Dalla struttura di A ricaviamo che

$$\inf A = \min A = 1, \quad \sup A = 4, \quad \max A \qquad \text{non esiste.}$$

Soluzione Esercizio 2. Se moltiplichiamo numeratore e denominatore per 4

$$f(x) = 4\,\frac{\cos(2x)-1}{4x^2}\,\frac{1}{x\cos(x)+1}$$

il nostro limite si ottiene il prodotto dei due limiti

$$\frac{\cos(2x)-1}{4x^2} \to -1/2 \quad , \quad x\cos(x)+1 \to 1$$

e quindi il limite è $4 \cdot (-1/2) \cdot 1 = -2$.

Soluzione Esercizio 3. Teorema di Fermat: *Sia f una funzione che ha nel punto c un estremo locale. Se il punto c è interno al dominio e la funzione f è derivabile in c allora* $D[f](c) = 0$. La nostra funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato e quindi ammette un massimo globale per il Teorema di Weierstass. Tale massimo non può essere raggiunto agli estremi x=-1 o x=1 poichè

$$f(0) > f(-1) \text{ e } f(0) > f(1)$$

Quindi il punto di massimo è interno, ovvero $c \in (-1, 1)$ e quindi poiché un massimo locale e anche un massimo locale, per il Teorema di Fermat, $D[f](c) = 0$.

Soluzione Esercizio 4. La funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}$ poiché è prodotto e composizione di funzioni continue.

$$|1 - e^x| = \begin{cases} 1 - e^x, \text{ per } x \leq 0 \\ e^x - 1, \text{ per } x > 0 \end{cases}$$

Per $x > 0$

$$f(x) = x(e^x - 1)$$

$D[f](x) = xe^x + (e^x - 1)$ da cui segue che $D[f](1) = 2\,e - 1$. Dato che $f(1) = e - 1$, la retta tangente è

$$y - (e - 1) = (2\,e - 1)(x - 1) \quad , \quad y = (2\,e - 1)x - e$$

Soluzione Esercizio 5. Il dominio è $x \neq 0$. La funzione è dispari, la studiamo quindi per $x \geq 0$. La funzione è

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

poiché il numeratore tende a $-\infty$ e il denominatore a 0^+.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0+$$

per il confronto fra infiniti.
Quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = 0$ è un asintoto verticale.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

La derivata si annulla per $x = e$, è positiva per $x \in (0, e)$ e negativa per $x > e$. Il punto $x = e$ è punto di massimo e $f(e) = 1/e$.

La derivata seconde è

$$D^2[f](x) = \frac{2\,\log(x) - 3}{x^3}$$

che si annulla nel punto $x = e^{\frac{3}{2}}$ dove la funzione ha un flesso.

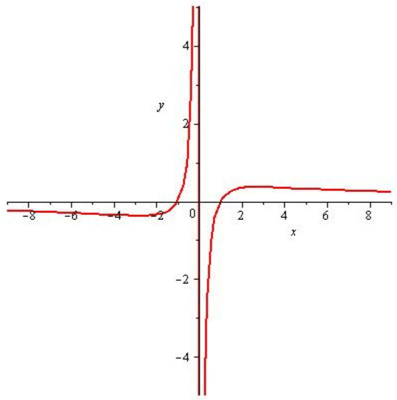


Figura 2.3: Grafico di $f(x)$

Dato che la funzione è dispari, tracciando la retta orizzontale $y = a$ non è difficile vedere che l'equazione $f(x) = a$ ha

$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione, per } a \in (-\infty - 1/e) \cup (1/e, +\infty) \\ 2 \text{ soluzioni, per } a = -1/e\ ,\ a = 1/e\ ,\ a = 0 \\ 3 \text{ soluzioni, per } a \in (-1/e, 1/e) \backslash 0. \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 6. Il problema può essere formulato come

$$\min_{x_1 \in [0,5]} f(x_1),$$

con

$$f(x_1) = 4x_1 + \frac{18x_1}{1 + x_1} + 6(5 - x_1).$$

Poiché f è una funzione continua in $[0,5]$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di minimo globale. Per ricavare il punto di minimo è sufficiente notare che

i. Poiché $D[f](x_1) = -2 + \frac{18}{(1+x_1)^2}$, esiste un unico punto critico in $(0,5)$, che è 2;

ii. $f(0) = 30$, $f(2) = 38$, $f(5) = 35$.

Dunque il punto di minimo globale è $x_1 = 0$.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.2.3 compito B

Esercizio 1. (4 punti)
Sia A il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20} \leq 0 \right\}.$$

Determinare $\inf A$, $\sup A$ e, se esistono, $\max A$ e $\min A$.

Esercizio 2. (6 punti)
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2\sin(x))}{x(\cos(3\,x)+1)}$$

Esercizio 3. (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili). Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ una fuzione continua in $[0,2]$, derivabile in $(0,2)$ e tale che

$$f(0) = -1 \;,\; f(1) = -2 \;,\; f(2) = 1$$

Dimostrare che esiste $c \in (0,2)$ tale che $D[f](c) = 0$.

Esercizio 4. (6 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f := x \mapsto |x-1|e^{-x^2+2x}$$

a) stabilire se f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ e, in caso contrario, si dica in quali punti f è discontinua;
b) dopo aver accertato che f è derivabile in $x = 2$, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(2, f(2))$.

Esercizio 5. (8 punti)
Studiare la funzione

$$f := x \mapsto xe^{\frac{1}{|x|}}$$

e determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = a \,.$$

Esercizio 6. (8 punti)
Un'impresa deve fabbricare 17 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 (una fabbrica in Toscana) e l'impianto 2 (una fabbrica in Romania). Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 1, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 1 è

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1}.$$

Con $x_2 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 2, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 2 è $6x_2$. L'impresa vuole scegliere x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 17$, in modo da minimizzare il costo totale, ovvero

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1} + 6x_2.$$

Si noti che sostituendo x_2 con $17 - x_1$ è possibile scrivere il costo totale come funzione della sola variabile x_1.

(a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.2.4 Soluzioni Compito B

Il compito B è una *variazione sul tema* del compito A, lo studente deve quindi, una volta studiate le soluzioni del compito A provare a svolgere il compito B seguendo le indicazioni, i suggerimenti e i metodi illustrati.

2.3 Compito del 17 Giugno 2013

2.3.1 Compito A

Esercizio 1. (10 punti)

a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

b) Dimostrare che l'equazione

$$2\,x\log(x) + x - \frac{4}{x} = 0$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo [1, 2]. Suggerimento: applicare il Teorema di Rolle nell'intervallo $[1,2]$ alla funzione

$$f : x \mapsto f(x) = \left(x^2 - 4\right)\log(x)$$

c) Dimostrare che nell'intervallo [1, 2] la soluzione è unica.

d) Quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sarebbero necessarie per trovare un valore approssimato di questa soluzione con un errore non superiore a $0,125$?

Esercizio 2. (5 punti)
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|1 - x^2 - \log(x)| - |x^2 + x + 1|}{x + \log(3\,x)}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Utilizzando le definizioni di continuità e derivabilità e/o i teoremi sulle funzione continue e/o derivabili, studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione in tutti i punti del suo dominio.

$$f := x \mapsto f(x) = x\,|x|$$

Esercizio 4. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}(f)$;

(b) $\sup f$;

(c) funzione monotona strettamente decrescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente decrescente ed è tale che $\mathrm{Im}(f) = [1,2]$; per tale funzione si ricavi $\sup f$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un'impresa deve scegliere il prezzo $p \geq 0$ per il prodotto che mette in vendita, e sa che per ogni $p \geq 0$ la quantità venduta è pari a $800\,e^{-p/6}$ unità. Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p \cdot 800\,e^{-p/6}$. L'impresa vuole individuare p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere p maggiore di 4.

(a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \leq 4$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f := x \mapsto x^2 \log(x)$$

2.3.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1.

a. Per l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si veda il libro di testo

b. La funzione

$$f : x \mapsto f(x) = \left(x^2 - 4\right)\log(x)$$

soddisfa le ipotesi del Teorema nell'intervallo $[1, 2]$ in quanto prodotto di funzioni continue e derivabili in quell'intervallo ed inoltre

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$

e quindi esiste un punto $c \in [1, 2]$ in cui

$$f'(c) = D[f](c) = 2\, c \log(c) + c - 4\, \frac{1}{c} = 0.$$

c. Se deriviamo la funzione al primo membro dell'equazione otteniamo

$$f''(x) = D^2[f](x) = 2\, \log(x) + 3 + 4\, \frac{1}{x^2}$$

è immediato verificare che nell'intervallo $[1, 2]$ i tre addendi sono positivi e quindi la funzione $f' = D[f]$ è strettamente crescente e si può annullare al massimo una volta. La soluzione dell'equazione è quindi unica.

d. Notiamo che

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

Poiché l'intervallo iniziale di incertezza è lungo 1 abbiamo che l'errore iniziale è minore o eguale a $\frac{1}{2}$, e dopo due iterazioni dell'algoritmo di bisezione si ottiene un valore approssimato della soluzione con un errore minore o eguale a $\dfrac{1}{2^3}$.

Soluzione Esercizio 2. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|1 - x^2 - \log(x)| - |x^2 + x + 1|}{x + \log(3\, x)}$$

dobbiamo per prima cosa cercare di scrivere il numeratore senza i due valori assoluti. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^2 - \log(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$$

possiamo eliminare i due valori assoluti all'interno del limite cambiando di segno alla prima espressione perché diventa negativa al crescere di x e lasciando inalterata la seconda perché, invece, è positiva al crescere di x. Il

limite così diventa

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{-(1 - x^2 - \log(x)) - (x^2 + x + 1)}{x + \log(3\, x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x) - x - 2}{x + \log(3\, x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\dfrac{\log(x)}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\log(3\, x)}{x}\right)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 3. La funzione

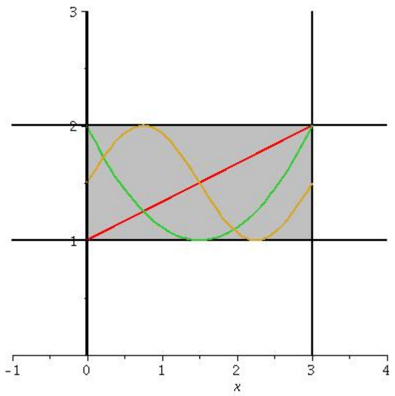
$$f := x \mapsto f(x) = x\,|x|$$

ha per dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$ e, in quanto prodotto di funzioni elementari (derivabili e continue), è continua in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ tranne, al massimo, in $x_0 = 0$ dove il valore assoluto non è derivabile. In $x_0 = 0$ dobbiamo verificare la derivabilità utilizzando la definizione

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0} |x| = 0
\end{aligned}$$

e dunque la nostra funzione è derivabile anche in $x_0 = 0$.

Soluzione Esercizio 4. Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[0, 3]$ e sull'asse y l'intervallo $[1, 2]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (crescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e dall'immagine

$$f(x) = 1 + \frac{2-1}{3-0} \cdot x = 1 + \frac{1}{3}x$$

che ha $\sup f = \max f = 2$, poiché $\operatorname{Im} f = [1,\, 2]$.

Soluzione Esercizio 5.

(a) Il problema di massimizzazione del profitto può essere formulato così

$$\max_{p \in [0,4]} f(p)$$

con $f(p) = 800\, p\, e^{-p/6}$, ovvero l'impresa vuole massimizzare $800\, p\, e^{-p/6}$ rispetto a p, per p contenuto in $[0,4]$. Poiché f è una funzione continua in $[0,4]$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di massimo globale per f in $[0,4]$.

(b) Per ricavare il punto di massimo si studia il segno di $f'(p) = D[f](p)$ in $[0,4]$. Poiché

$$f'(p) = D[f](p) = 800\, e^{-p/6} + 800\, pe^{-p/6}(-\frac{1}{6}) = \frac{400}{3} e^{-p/6}\,(6-p)\,,$$

si ricava $f'(p) = D[f](p) > 0$ per ogni $p \in [0,4]$; dunque f è monotona strettamente crescente in $[0,4]$. Pertanto esiste un unico punto di massimo globale per f in $[0,4]$, ed è $p = 4$. Se venisse cancellata la legge

che impone $p \le 4$, allora l'impresa potrebbe scegliere ogni $p \ge 0$. Osservando $f' = D[f]$ si deduce che f è monotona strettamente crescente in $[4,6]$, dunque $f(6) > f(4)$ e quindi la cancellazione della legge che impone $p \le 4$ permetterebbe all'impresa di aumentare il proprio profitto da $f(4)$ a $f(6)$.

Soluzione Esercizio 6. Il dominio è $A = (0,+\infty)$ e f è continua e derivabile in A perché è il prodotto di funzioni elementari continue e derivabili in A. Inoltre

(i) $f(x) < 0$ per $x \in (0,1)$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (1,+\infty)$;

(ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ \cdot (-\infty)$, ma applicando il teorema di L'Hôpital a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-;$$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$. Dunque non esistono asintoti verticali né orizzontali e non esistono nemmeno asintoti obliqui poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = D[f](x) = x(1 + 2\log(x))$$

e

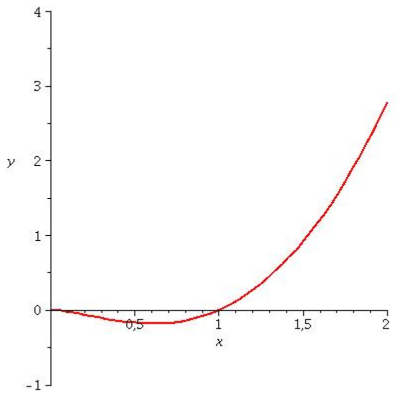
$$\begin{aligned} f'(x) = D[f](x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in (0, e^{-1/2}),\\ f'(x) = D[f](x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in (e^{-1/2}, +\infty). \end{aligned}$$

Dunque f è monotona strettamente decrescente in $(0, e^{-1/2})$, monotona strettamente crescente in $(e^{-1/2}, +\infty)$, e $x = e^{-1/2}$ è punto di minimo globale per f.
La derivata seconda è

$$f''(x) = D^2[f](x) = 2\log(x) + 3$$

$$\begin{aligned} f''(x) = D^2[f](x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in (0, e^{-3/2}),\\ f''(x) = D^2[f](x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in (e^{-3/2}, +\infty). \end{aligned}$$

Dunque f è concava in $(0, e^{-3/2})$, convessa in $(e^{-3/2}, +\infty)$, e $x = e^{-3/2}$ è punto di flesso per f.
Il grafico di f è quindi il seguente:



2.3.3 Compito B

Esercizio 1. (10 punti)

(a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(b) Dimostrare che l'equazione

$$2\,x - 3 + \pi\,\cos(\pi\,x) = 0$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo $[1, 2]$. Suggerimento: applicare il Teorema di Rolle nell'intervallo $[1, 2]$ alla funzione

$$f : x \mapsto f(x) = x^2 - 3\,x + 2 + \sin(\pi\,x)$$

(c) Dimostrare che nell'intervallo $[1,\ 2]$ la soluzione è unica.

(d) Quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sarebbero necessarie per trovare un valore approssimato di questa soluzione con un errore non superiore a $0, 125$?

Esercizio 2. (5 punti)
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|1 - x^2 - \sin(x)| - |x^2 - x + 1|}{x + \sin(3\,x)}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Utilizzando le definizioni di continuità e derivabilità e/o i teoremi sulle funzione continue e/o derivabili, studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione in tutti i punti del suo dominio.

$$f := x \mapsto f(x) = |x|\ \log(1 - 3\,x)$$

Esercizio 4. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}(f)$;

(b) $\inf f$;

(c) funzione monotona strettamente crescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente crescente ed è tale che $\mathrm{Im}(f) = [2, 5]$; per tale funzione si ricavi $\inf f$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un'impresa deve scegliere il prezzo $p \geq 0$ per il prodotto che mette in vendita e sa che, per ogni $p \geq 0$, la quantità venduta è pari a $900\,e^{-p/7}$ unità. Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p \cdot 900\,e^{-p/7}$. L'impresa vuole individuare il valore di p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere p maggiore di 8.

(a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \leq 8$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x) = x\,(\log(x))^2$$

2.3.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1.

a. Per l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si veda il libro di testo

b. La funzione
$$f : x \mapsto f(x) = x^2 - 3\,x + 2 + \sin(\pi\, x)$$
soddisfa le ipotesi del Teorema nell'intervallo $[1, 2]$ in quanto somma di funzioni elementari continue e derivabili in quell'intervallo ed inoltre
$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$
e quindi esiste un punto $c \in [1, 2]$ in cui
$$f'(c) = D[f](c) = 2\,c - 3 + \pi\, \cos(\pi\, c) = 0.$$

c. Se deriviamo la funzione al primo membro dell'equazione otteniamo
$$f''(x) = D^2[f](x) = 2 - \pi^2\, \sin(\pi\, x)\,;$$
è immediato verificare che nell'intervallo $[1, 2]$ questa espressione è positiva (la funzione seno è negativa fra π e $2\,\pi$) e quindi la funzione $f' = D[f]$ è strettamente crescente e si può annullare al massimo una volta. La soluzione dell'equazione è quindi unica.

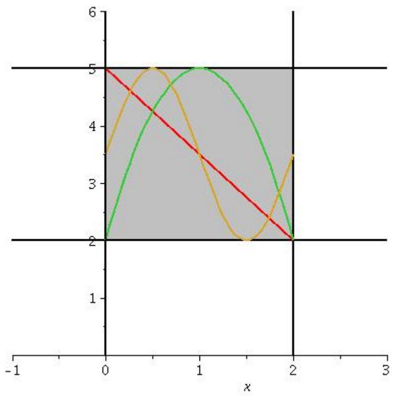
d. Notiamo che
$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8},$$
Poiché l'intervallo iniziale di incertezza è lungo 1 abbiamo che l'errore iniziale minore o eguale a $\frac{1}{2}$, e dopo due iterazioni dell'algoritmo di bisezione si ottiene un valore approssimato della soluzione con un errore minore o eguale a $\dfrac{1}{2^3}$.

Soluzione Esercizio 2. Per calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|1 - x^2 - \sin(x)| - |x^2 - x + 1|}{x + \sin(3\,x)}$$
dobbiamo per prima cosa cercare di scrivere il numeratore senza i due valori assoluti. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^2 - \sin(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$$

possiamo eliminare i due valori assoluti all'interno del limite cambiando di segno alla prima espressione perché diventa negativa al crescere di x e lasciando inalterata la seconda perché, invece, è positiva al crescere di x. Il limite così diventa
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{-(1 - x^2 - \sin(x)) - (x^2 - x + 1)}{x + \sin(3\,x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) + x - 2}{x + \sin(3\,x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\dfrac{\sin(x)}{x} + 1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\sin(3\,x)}{x}\right)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 3. La funzione
$$f := x \mapsto f(x) = |x|\, \log(1 - 3\,x)$$
ha per dominio $Dom(f) = (-\infty, \dfrac{1}{3})$ e, in quanto prodotto e composizione di funzioni elementari continue, è continua in tutto il suo dominio ed è derivabile in tutto il suo dominio tranne, al massimo, in $x_0 = 0$ dove il valore assoluto non è derivabile. In $x_0 = 0$ dobbiamo verificare la derivabilità utilizzando la definizione
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\, \log(1 - 3\,x)}{x} =\\ &= \lim_{x\to 0} |x| \cdot (-3) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 - 3\,x)}{-3\,x} = 0 \cdot 1 = 0\end{aligned}$$
e dunque la nostra funzione è derivabile anche in $x_0 = 0$.

Soluzione Esercizio 4. Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[0, 2]$ e sull'asse y l'intervallo $[2, 5]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (decrescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e immagine

$$f(x) = 5 - \frac{5-2}{2-0} \cdot x = 5 - \frac{3}{2}x$$

con $\sup f = \max f = 5$ e $\inf f = \min f = 2$, poiché $\operatorname{Im} f = [2,\, 5]$.

Soluzione Esercizio 5.

1. Il problema di massimizzazione del profitto può essere formulato così

$$\max_{p \in [0,8]} f(p)$$

con $f(p) = 900\, p\, e^{-p/7}$, ovvero l'impresa vuole massimizzare $900\, p\, e^{-p/7}$ rispetto a p, per p contenuto in $[0, 8]$. Poiché f è una funzione continua in $[0, 8]$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di massimo globale per f in $[0, 8]$.

2. Per ricavare il punto di massimo si studia il segno di $f'(p) = D[f](p)$ in $[0, 8]$. Poiché

$$f'(p) = D[f](p) = 900\, e^{-p/7} + 900\, p\, e^{-p/7}(-\frac{1}{7}) = \frac{900}{7}\, e^{-\frac{1}{7}p}\,(7-p)\,,$$

si ricava $f'(p) = D[f](p) > 0$ per $p \in [0, 7)$, $f'(p) = D[f](p) < 0$ per $p \in (7, 8]$; dunque f è monotona strettamente crescente in $[0, 7]$, monotona

strettamente decrescente in $[7, 8]$. Pertanto esiste un unico punto di massimo globale per f in $[0, 8]$, ed è $p = 7$. Se venisse cancellata la legge che impone $p \leq 8$, allora l'impresa potrebbe scegliere ogni $p \geq 0$. Osservando $f' = D[f]$ si deduce che f è monotona strettamente decrescente in $[8, +\infty)$, dunque $f(p) < f(8) < f(7)$ per ogni $p > 8$ e la cancellazione della legge che impone $p \leq 8$ non permetterebbe all'impresa di aumentare il proprio profitto.

Soluzione Esercizio 6. Il dominio è $A = (0, +\infty)$, e f è continua e derivabile in A perché è il prodotto di funzioni elementari continue e derivabili in A. Inoltre

(i) $f(x) > 0$ per $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $f(1) = 0$;

(ii) $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^+ \cdot (+\infty)$, ma applicando il teorema di L'Hopital a

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(\log(x))^2}{\dfrac{1}{x}}$$

(due iterazioni) si ottiene $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^+$;

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

Dunque non esistono asintoti verticali né orizzontali, e non esistono nemmeno asintoti obliqui poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = D[f](x) = \log(x)\,(\log(x) + 2)$$

$$f'(x) = D[f](x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in (e^{-2}, 1),$$
$$f'(x) = D[f](x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty).$$

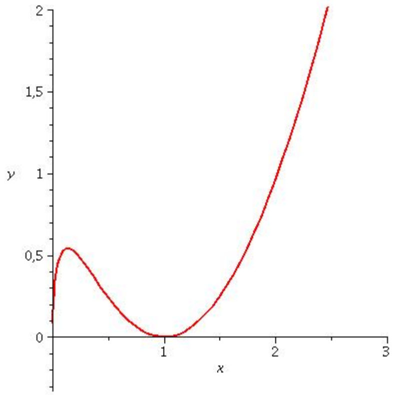
Dunque f è monotona strettamente crescente in $(0, e^{-2})$ e in $(1, +\infty)$;, monotona strettamente decrescente in $(e^{-2}, 1)$. $x = e^{-2}$ è punto di massimo (locale, dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) e $x = 1$ è punto di minimo (globale, dato che $f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$).

La derivata seconda è

$$f''(x) = D^2[f](x) = 2\,\frac{\log(x) + 1}{x}$$

$$f''(x) = D^2[f](x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in (0, e^{-1}),$$
$$f''(x) = D^2[f](x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in (e^{-1}, +\infty).$$

Dunque f è concava in $(0, e^{-1})$, convessa in $(e^{-1}, +\infty)$, e $x = e^{-1}$ è un punto di flesso per f. Il grafico di f è quindi il seguente:



2.4 Compito del 4 Luglio 2013

2.4.1 Compito A

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ f := x \mapsto e^{(x-1)^2}.$$

Si dimostri che f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} - \sqrt{1 + 3x + x^4} \right).$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si enunci il teorema dei valori intermedi. Dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^3}{x^2 + 2} = 3$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-5, 10]$.

Esercizio 4. (8 punti)

1. Si enunci e si dimostri il criterio di monotonia (crescenza) per le funzioni derivabili;
2. si determinino gli intervalli di monotonia della funzione

$$f := x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{1}{1 - x}.$$

Esercizio 5. (7 punti)
Si consideri un'impresa che produce un bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R := q \mapsto 4 - 2^{-2q}.$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C := q \mapsto \frac{2^q}{4}.$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi := q \mapsto R(q) - C(q).$$

Si assuma che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 4.

1. Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.
2. Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

Esercizio 6. (10 punti)
Si studi la funzione $f(x)$ (suggerimento: non studiare il segno della funzione)

$$f := x \mapsto \log(x^2 + 1) - \frac{3x}{5}$$

e si disegni il suo grafico.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI
Poiché non avete calcolatrice nell'effettuare i calcoli a mano prendete come valore approssimato di e il numero 3 e quindi, ad esempio $e^2 \approx 9$ e $\log(9) \approx 2$ e così via

2.4.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1. Per quanto riguarda l'iniettività proponiamo diverse soluzioni.

1. Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)^2}$

$$D[f](x) = 2\ (x-1)\,\mathrm{e}^{(x-1)^2}$$

è è immediato vedere che questa derivata è negativa in tutto il dominio di definizione, l'intervallo (illimitato) $(-\infty, 0]$. La funzione è quindi strettamente decrescente e quindi iniettiva. Calcoliamo il valore di f (il limite) agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{(x-1)^2} = +\infty$$

e $f(0) = e$. Dalla stretta decrescenza ricaviamo anche che l'immagine

$$\mathrm{Im}(f) = f((-\infty, 0]) = [e, +\infty).$$

2. Si può osservare che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ allora $x_1 - 1 \neq x_2 - 1$ e anche $x_1 - 1 < 0$, $x_2 - 1 < 0$. Quindi $(x_1-1)^2 \neq (x_2-1)^2$ e poiché la funzione $x \to e^x$ è iniettiva si ha

$$f(x_1) = e^{(x_1-1)^2} \neq e^{(x_2-1)^2} = f(x_2).$$

In definitiva si ha che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$ ottenendo così l'iniettività di f.

3. L'inettività di f può essere anche dimostrata osservando che la funzione f è strettamente decrescente in quanto risulta

$$f(x) = g\,(h(x))\,,$$

dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $g(x) = e^x$ e $h : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ è tale che $h(x) = (x-1)^2$. Ora, g è strettamente crescente e h è strettamente decrescente. Quindi f è strettamente decrescente e, poiché una funzione strettamente decrescente è iniettiva, f risulta iniettiva.

Per quanto riguarda $\mathrm{Im}\,(f)$, ricordiamo che

$$\mathrm{Im}\,(f) = f\,((-\infty, 0]) = g\,(h((-\infty, 0]))\,,$$

e osserviamo che

$$h((-\infty, 0]) = [1, +\infty)$$

e

$$g\,([1, +\infty)) = [e, +\infty)$$

quindi

$$\mathrm{Im}\,(f) = [e, +\infty).$$

Soluzione Esercizio 2. Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4}\right)\left(\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}\right)}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}} = \\
&= \frac{(2+2x^2+x^4) - (1+3x+x^4)}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}} = \frac{1-3x+2x^2}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}}.
\end{aligned}$$

A questo punto vediamo che numeratore e denominatore sono dello stesso ordine due; numeratore x^2 e denominatore $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$ e quindi il limite è dato dal rapporto dei coefficiente dei termini di grado più alto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4}\right) = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1.$$

Nei dettagli possiamo procedere nel modo seguente, osserviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1-3x+2x^2}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}} &= \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{x^4\left(\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1\right)} + \sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1\right)}} = \\
= \frac{x^2}{x^2}\frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1}} &= \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1}}.
\end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4} = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1}}.$$

Ora, poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right) = 2$$

e
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}=2$$
otteniamo
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+2x^2+x^4}-\sqrt{1+3x+x^4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}}=1.$$

Soluzione Esercizio 3. L'enunciato del teorema dei valori intermedi si trova sul libro di testo.
Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione procediamo nel modo seguente.
Indichiamo con f la funzione
$$f:[-5,10]\to\mathbb{R},\ f:=x\mapsto\frac{x^3}{x^2+2}.$$
La funzione f risulta continua in quanto quoziente di due polinomi e il denominatore, x^2+2, non si annulla mai. Inoltre si ha
$$f(-5)=-\frac{125}{27}<3<\frac{1000}{102}=f(10),$$
quindi $3\in[f(-5),f(10)]$ e per il teorema dei valori intermedi si ha che esiste $c\in[-5,10]$ tale che
$$\frac{c^3}{c^2+2}=f(c)=3.$$
c è la soluzione cercata.

Soluzione Esercizio 4. La formulazione del criterio si può trovare sul libro di testo.
Il dominio $\mathcal{D}$ della funzione $f(x)$ è $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.
La sua derivata è
$$f'(x)=D[f](x)=\frac{1+2x-x^2}{2(1-x)^2}.$$
Il denominatore della derivata è non negativo, mentre il numeratore cambia il segno nei punti $1\pm\sqrt{2}$, prende valori positivi nell'intervallo $I=\left(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$ ed è non positivo nel complemento di I. La derivata $f'(x)=D[f](x)$ prende valori positivi nella intersezione $I\cap\mathcal{D}$, che coincide con $\left(1-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,1+\sqrt{2}\right)$ e la funzione $f(x)$ cresce in ciascuno dei due intervalli $\left(1-\sqrt{2},1\right)$, $\left(1,1+\sqrt{2}\right)$. La derivata $f'(x)=D[f](x)$ prende valori negativi e la funzione $f(x)$ decresce nei due intervalli $\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)$ e $\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$.

Soluzione Esercizio 5. Il problema della massimizzazione del profitto si formula come
$$\max\ \pi(q):=4-2^{-2q}-\frac{2^q}{4}$$
con
$$0\le q\le 4,$$
ed ha una soluzione d'accordo con il teorema di Weierstrass poiché si tratta di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.
Per il teorema di Fermat il punto di massimo globale si trova
- agli estremi
- nei punti di non derivabilità (non ce ne sono)
- nei punti critici.

Calcoliamo la derivata
$$\pi'(q)=D[\pi](q)=2^{-2q}2\log 2-\frac{2^q\log 2}{4},$$
e cerchiamo i(l) punti(o) critici(o) descritti (o) dalla condizione
$$\pi'(q)=D[\pi](q)=2^{-2q}2\log 2-\frac{2^q\log 2}{4}=0,$$
che implica $2^{-2q}8=2^q \Leftrightarrow 2^{3q}=8=2^3$, da dove si trova che l'unico punto critico è $q^*=1$.

È facile di vedere che la derivata $\pi'(q)=D[\pi](q)$ positiva e la funzione $\pi(q)$ cresce per $q\in[0,1)$, mentre $\pi'(q)=D[\pi](q)<0$ e la $\pi(q)$ decresce per $q\in(1,4]$, si tratta quindi di un punto di massimo locale che è globale poiché gli estremi non possono essere massimi.

Allora il massimo profitto si raggiunge per $q^*=1$
$$\pi(q^*)=3.25.$$

Soluzione Esercizio 6. Il dominio della funzione
$$f:=x\mapsto\log(x^2+1)-\frac{3}{5}x$$
è $\mathbb{R}$. La funzione è continua nel domino essendo la somma e composizione di funzioni elementari continue.
- La funzione non è né pari né dispari.
- Il grafico della funzione non ha asintoti verticali.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty-(-\infty)=+\infty.$

• Il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ risulta una forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Trasformiamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = x\left(\frac{\log(x^2+1)}{x} - 3/5\right).$$

Calcoliamo il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x}$, che è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, applicando teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)\cdot 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2/x}{1+(1/x^2)} = 0.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\log(x^2+1)}{x} - 3/5\right) = +\infty\cdot(-3/5) = -\infty.$$

Gli asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ sono definiti dalle formule $y = k_\pm x + \ell_\pm$, dove $k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -3/5$, mentre $\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - k_\pm x) = +\infty$,
Quindi non esistono asintoti obliqui.
La derivata prima della funzione

$$f'(x) = D[f](x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{5} = \frac{10x - 3x^2 - 3}{5(x^2+1)},$$

si annulla nei punti $x_1 = 1/3, x_2 = 3$.

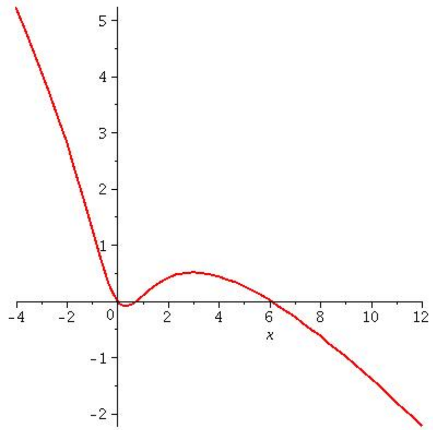
La derivata $f'(x) = D[f](x)$ è negativa nei due intervalli $(-\infty, 1/3),\ (3, +\infty)$, dove la funzione $f(x)$ decresce, ed è positiva nell'intervallo $(-1/3, 3)$, dove $f(x)$ cresce.
I punti $x_1 = 1/3, x_2 = 3$ sono rispettivamente punti di minimo e di massimo locale.

La derivata seconda

$$f''(x) = D^2[f](x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2},$$

si annulla nei punti $x = \pm 1$, che sono punti di flesso. La funzione risulta convessa in $(-1, 1)$ ed è concava altrove.

È facile stimare il valore della funzione nel punto $x = 3$, $f(3)\log(10) - 9/5 > 0$ poiché $\log(10) > 2$, $9/5 < 2$; più delicato il valore in $x = 1/3$, $f(1/3) = \log(10/9) - 1/15 < 0$ che è più difficile da stimare senza calcolatrice.
Il grafico della funzione è



2.4.3 Compito B

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f := x \mapsto \sqrt{1 + (x+1)^2}$. Si dimostri che f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6}\right).$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si enunci il teorema dei valori intermedi. Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + \sin(x) = 2$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-\pi/2, \pi]$.

Esercizio 4. (8 punti)

1. Si enunci e si dimostri il criterio criterio di monotonia (decrescenza) per le funzioni derivabili;

2. si determinino gli intervalli di monotonia della funzione

$$f := x \mapsto -x + \frac{1}{1-2x}.$$

Esercizio 5. (7 punti)
Si consideri un'impresa che produce un bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R := q \mapsto \frac{q}{1+2q}.$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C := q \mapsto \log\left(1 + \frac{q}{8}\right).$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi := q \mapsto R(q) - C(q).$$

Si assuma che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 4.

1. Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.
2. Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

Esercizio 6. (10 punti)
Si studi la funzione (suggerimento: non studiare il segno della funzione)

$$f := x \mapsto x^2 e^{-x/2} - 1,$$

e si disegni il suo grafico.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI
POICHÉ NON AVETE CALCOLATRICE NELL'EFFETTUARE I CALCOLI A MANO PRENDETE COME VALORE APPROSSIMATO DI e IL NUMERO 3 E QUINDI, AD ESEMPIO $e^2 \approx 9$ E $\log(9) \approx 2$ E COSÌ VIA

2.4.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1. Per quanto riguarda l'iniettività proponiamo diverse soluzioni.

1. Calcoliamo la derivata della funzione $f := x \mapsto \sqrt{1+(x+1)^2}$

$$D[f](x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$$

è immediato vedere che questa derivata è positiva in tutto il dominio di definizione, l'intervallo (illimitato) $[0, +\infty)$. La funzione è quindi strettamente crescente e quindi iniettiva. Calcoliamo il valore di f (il limite) agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+(x+1)^2} = +\infty$$

e $f(0) = \sqrt{2}$. Dalla stretta crescenza ricaviamo anche che l'immagine

$$\operatorname{Im}(f) = f([0, +\infty)) = [\sqrt{2}, +\infty).$$

2. Si può osservare che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ allora $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ e anche $x_1 + 1 > 0$, $x_2 + 1 > 0$. Quindi $1 + (x_1+1)^2 \neq 1 + (x_2+1)^2$ e poiché la funzione $x \to \sqrt{x}$ è iniettiva si ha

$$f(x_1) = \sqrt{1+(x_1+1)^2} \neq \sqrt{1+(x_2+1)^2} = f(x_2).$$

In definitiva si ha che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$ ottenendo così l'iniettività di f.

3. L'inettività di f può essere anche dimostrata osservando che la funzione f è strettamente crescente in quanto risulta

$$f(x) = g(h(x)),$$

dove $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è tale che $g(x) = \sqrt{x}$ e $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è tale che $h(x) = 1 + (x+1)^2$. Ora sia g che h sono strettamente crescenti. Quindi f è strettamente crescente e, pertanto, è iniettiva.

Per quanto riguarda $\operatorname{Im}(f)$, ricordiamo che

$$\operatorname{Im}(f) = f([0, +\infty)) = g(h([0, +\infty))),$$

e osserviamo che

$$h([0, +\infty)) = [2, +\infty)$$

e

$$g([1, +\infty)) = [\sqrt{2}, +\infty)$$

quindi

$$\operatorname{Im}(f) = [\sqrt{2}, +\infty).$$

Soluzione Esercizio 2. Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione $\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6}$ per $\sqrt{1+3x^2+x^6} + \sqrt{1+x^3+x^6}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6}\right)\left(\sqrt{1+3x^2+x^6} + \sqrt{1+x^3+x^6}\right)}{\sqrt{1+3x^2+x^6} + \sqrt{1+x^3+x^6}} = \\ &= \frac{(1+3x^2+x^6)-(1+x^3+x^6)}{\sqrt{1+3x^2+x^6} + \sqrt{1+x^3+x^6}} = \frac{3x^2-x^3}{\sqrt{1+3x^2+x^6} + \sqrt{1+x^3+x^6}}. \end{aligned}$$

A questo punto vediamo che numeratore e denominatore sono dello stesso ordine tre; numeratore x^3 e denominatore $\sqrt{x^6} = |x^3| = x^3$, perché x tende a $+\infty$ ed è quindi positivo, da questo segue che il limite è dato dal rapporto dei coefficiente dei termini di grado più alto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}.$$

Nei dettagli osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-x^3}{\sqrt{1+3x^2+x^6} + \sqrt{1+x^3+x^6}} &= \frac{x^3\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{x^6\left(\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^4}+1\right)} + \sqrt{x^6\left(\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1\right)}} = \\ &= \frac{x^3}{x^3}\frac{\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^4}+1} + \sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}} = \frac{\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^4}+1} + \sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}}. \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6} = \frac{\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^4}+1} + \sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}},$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+3x^2+x^6} - \sqrt{1+x^3+x^6}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^4}+1} + \sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}} = \\ &= \frac{0-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 3. L'enunciato del teorema dei valori intermedi si trova sul libro di testo.

Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione procediamo nel modo seguente. Indichiamo con f la funzione

$$f : [-\pi/2, \pi] \to \mathbb{R},\ f := x \mapsto x^3 + \sin(x).$$

La funzione f risulta continua in quanto somma delle due funzioni continue x^3 e $\sin(x)$. Inoltre si ha

$$f(-\pi/2) = -\frac{\pi^3}{8} - 1 < 2 < \pi^3 = f(\pi),$$

quindi $2 \in [f(-\pi/2), f(\pi)]$ e per il teorema dei valori intermedi si ha che esiste $c \in [-\pi/2, \pi]$ tale che

$$c^3 + \sin(c) = f(c) = 2.$$

c è quindi la soluzione cercata.

Soluzione Esercizio 4. La formulazione e la dimostrazione del criterio si possono trovare sul libro di testo.
Il dominio $\mathcal{D}$ della funzione $f := x \mapsto -x + \frac{1}{1-2x}$ è $(-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$. La sua derivata è

$$f'(x) = D[f](x) = \frac{-4x^2+4x+1}{(1-2x)^2}.$$

Il denominatore della derivata prima è positivo nel dominio, mentre il numeratore cambia il segno nei punti $\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ e prende valori positivi nell'intervallo $I = \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ ed è non positivo nel complemento di I. La derivata $f'(x) = D[f](x)$ prende valori positivi e la funzione $f(x)$ cresce nella intersezione $I \cap \mathcal{D}$, che coincide con $\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$. La derivata $f'(x) = D[f](x)$ prende valori negativi e la funzione $f(x)$ decresce negli intervalli $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Soluzione Esercizio 5. Il problema della massimizzazione del profitto si formula come

$$\max\ \pi(q) = R(q) - C(q) = \frac{q}{1+2q} - \log\left(1+\frac{q}{8}\right)$$

con
$$0 \leq q \leq 4.$$
ed ha una soluzione d'accordo con il teorema di Weierstrass poiché si tratta di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.
Per il teorema di Fermat il punto di massimo globale si trova
- agli estremi
- nei punti di non derivabilità (non ce ne sono)
- nei punti critici.

Calcoliamo la derivata
$$\pi'(q) = D[\pi](q) = \frac{1}{(1+2q)^2} - \frac{1}{8+q} = \frac{7-3q-4q^2}{(1+2q)^2(8+q)},$$
e cerchiamo i(l) punti(o) critici(o) di $\pi(q)$ dalla condizione $\pi'(q) = D[\pi](q)$. I punti critici risultano $q_0 = -7/4, q_1 = 1$; q_0 non soddisfa i vincoli.

È facile di vedere che la derivata $\pi'(q) = D[\pi](q)$ è positiva e la funzione $\pi(q)$ cresce nell'intervallo $[0, 1)$, mentre $\pi'(q) = D[\pi](q) < 0$ e $\pi(q)$ decresce in $(1, 4]$ il punto $q_1 = 1$ è un punto di massimo locale che è anche globale poiché gli estremi non possono essere massimi.

Il massimo del profitto si raggiunge per $q_1 = 1$
$$\pi(q_1) = \frac{1}{3} - \log(9/8) \approx 0,21.$$

Soluzione Esercizio 6. Il dominio della funzione
$$f(x) = x^2 e^{-x/2} - 1,$$
è $\mathbb{R}$. La funzione è ottenuta tramite somme, prodotti e le composizioni di funzioni elementari continue, e quindi è continua nel dominio.
- l grafico della funzione non ha asintoti verticali.
- La funzione non è né pari né dispari.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty - 1 = +\infty,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ è una forma indeterminata del tipo $[\infty \cdot 0]$.

Possiamo scrivere
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x/2}}$$
il limite diventa del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Applicando teorema di De L'Hôpital (due volte) concludiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(1/2)e^{x/2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(1/4)e^{x/2}} = 0,$$

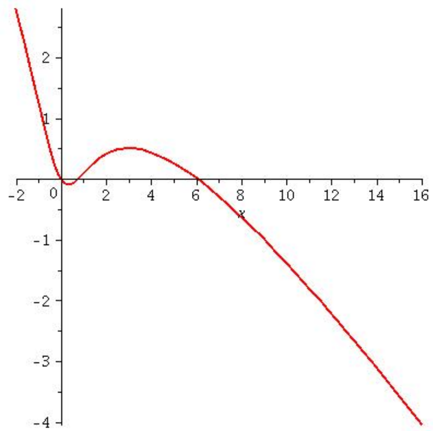
e quindi
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1.$$
Il grafico di $f(x)$ ha asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to +\infty$.
Per quanto riguarda eventuali asintoti obliqui per $x \to -\infty$, vediamo, che
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x/2} = -\infty,$$
e quindi di tale asintoto non esiste.

La derivata prima
$$f'(x) = D[f](x) = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) e^{-x/2},$$
si annulla nei punti 0 e 4.

La derivata $f'(x) = D[f](x)$ è positiva per $x \in (0, 4)$, dove la funzione $f(x)$ cresce; $f'(x) = D[f](x)$ è negativa in $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ dove la f decresce. I punti $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$ sono rispettivamente punti di minimo e del massimo locale.

La derivata seconda
$$f''(x) = D[f](x) = \left(2 - 2x + \frac{x^2}{4}\right) e^{-x/2},$$
si annulla nei punti $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$, che sono punti di flesso. La funzione risulta concava in $(4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2})$ ed è convessa altrove.

Il grafico della funzione è



2.5 Compito del 4 Settembre 2013

2.5.1 Compito A

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 7x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3.$$

a. Si dia la definizione di funzione monotona crescente.
b. Si dimostri usando le relative definizioni che f non è né monotona crescente né monotona decrescente.
c. Si determini un maggiorante di $Im(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si determini il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = e^{\sin(x)} + \sqrt{\frac{2|x|-1}{x^2-2x-3}}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:
a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 1}{2^x - 1},$$

b

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - x},$$

Esercizio 4. (8 punti)
a. Si enunci e dimostri il teorema di Lagrange.
b. Si applichi il teorema di Lagrange alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ nell'intervallo $[1,2]$ per dimostrare che

$$\forall x_1, x_2 \in [1,2] \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ si ha che } e^{x_2} - e^{x_1} > e\,(x_2 - x_1)\,.$$

Esercizio 5. (7 punti)
Sia $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c(x)$ la funzione di consumo in termini di reddito. La funzione elasticità del consumo rispetto al reddito è definita come segue:

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x \cdot c'(x)}{c(x)},$$

ed è interpretabile come l'aumento percentuale del consumo conseguente all'incremento di un punto percentuale del reddito. Sia

$$c(x) = -x^2 + 4x.$$

a. E' possibile dimostrare che la funzione elasticità ammette un massimo e un minimo globale nell'intervallo $[1,3]$ senza calcolare i punti di massimo e di minimo globale?
b. Si calcolino i punti di massimo e minimo globale della funzione elasticità η nell'intervallo $[1,3]$.

Esercizio 6. (10 punti)
Si studi il grafico di

$$f(x) = \left| \frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)} - 1} \right|$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui a $\pm\infty$; non si studi il segno della derivata seconda.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.5.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1. a. Per le definizioni guardate il libro di testo.

b. Per dimostrare che la funzione **non** è monotona (né crescente né decrescente) dobbiamo negare le definizioni che stabiliscono che *per ogni* x_1, x_2 ... per fare questo dobbiamo trovare due coppie di punti che ci servano a contraddirle, due candidati sono certamente i due estremi dell'intervallo $x = -1$, $x = 1$ come terzo proviamo $x = 0$.
Calcoliamo la funzione in questi tre punti

$$f(-1) = 5,\ f(0) = 3,\ f(1) = 11.$$

Dunque f non è monotona crescente poiché $-1 < 0$ e $f(-1) > f(0)$ inoltre f non è monotona decrescente poiché $0 < 1$ e $f(0) < f(1)$.

Poiché la funzione non è monotona i valori negli estremi dell'intervallo non ci danno nessuna informazione sui possibili valori della funzione nell'intervallo dobbiamo quindi ragionare in un altro modo. Ci viene richiestio di trovare un maggiorante di $Im(f)$ proviamo a maggiorare nell'intervallo dato $[-1,\, 1]$ i singoli addendi della funzione, distinguendo fra potenze pari e dispari. Notiamo che, per ogni $x \in [-1, 1]$, si ha che

$$7x^4 \leq 7, \quad 8x^3 \leq 8, \quad -2x^2 \leq 0, \quad -5x \leq 5.$$

Dunque, per ogni $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) \leq 7 + 8 + 0 + 5 + 3 = 23.$$

Da ciò segue che se $y \in Im(f)$ allora $y \leq 23$. Pertanto 23 é un maggiorante di $Im(f)$.

Soluzione Esercizio 2.

La funzione $g(x) = e^{\sin(x)}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ pertanto ci possiamo ricondurre a studiare il campo di esistenza della formula

$$\sqrt{\frac{2|x| - 1}{x^2 - 2x - 3}} = \sqrt{\frac{2|x| - 1}{(x-3)(x+1)}}.$$

Dobbiamo dunque risolvere la disequazione

$$\frac{2|x| - 1}{(x-3)(x+1)} \geq 0.$$

Il numeratore è non negativo per $x \in (-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty)$. Il denominatore è positivo per $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Si ottiene dunque che la soluzione della disequazione ossia il campo di esistenza cercato é

$$(-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \cup (3, +\infty).$$

Soluzione Esercizio 3.

a. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{2^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{2^x - 1} = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = 2.$$

b. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (x + \sqrt{x})}{(1 - x) \cdot (x + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{(1 - x) \cdot (x + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x\,(1 - x)}{(1 - x) \cdot (x + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{-x}{(x + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione Esercizio 4.

a. Vedi libro di testo.

b. La funzione f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e dunque è continua su $[1, 2]$ e derivabile su $(1, 2)$. Possiamo dunque applicare il teorema di Lagrange per concludere che

$$\exists\; x_0 \in (x_1, x_2) \;\text{ tale che }\; \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^{x_0} > e^1 = e,$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che $x_0 > x_1 \geq 1$ ed inoltre poiché che $x_2 > x_1$ possiamo scrivere

$$e^{x_2} - e^{x_1} > e\,(x_2 - x_1)\,.$$

Soluzione Esercizio 5.

a. Poichè nel dominio $[1, 3]$

$$\eta\,(x) = \frac{x\,(-2x + 4)}{-x^2 + 4x} = \frac{-2x^2 + 4x}{-x^2 + 4x} = 2\,\frac{x - 2}{x - 4}$$

l'esistenza di un massimo e di u minimo globali segue dal Teorema di Weierstrass poiché η è una funzione continua perché rapporto tra polinomi con polinomio al denominatore diverso da zero (e i polinomi sono funzioni continue).

b. Occorre studiare il segno della derivata

$$D[\eta](x) = \eta'(x) = \frac{-4}{(x - 4)^2}.$$

Poiché per ogni $x \in [1, 3]$, $D[\eta](x) = \eta'\,(x) < 0$, η ammette il massimo globale in $x_1 = 1$ ($\eta(1) = \frac{2}{3}$) e il minimo globale in $x_2 = 3$ ($\eta(3) = -2$).

Soluzione Esercizio 6.

Disegniamo il grafico di $g\,(x) = \frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)} - 1}$ e poi quello di $f\,(x)$.

1. Dominio.

$x-4=0$ se e solo se $x=4$;

$e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1=0$ se e solo se $\frac{1}{x-4}=0$, che non è verificato per alcun $x \in \mathbb{R}$. Dunque $Dom(g)=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

2. Segno.

La funzione è positiva se $e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1$, ovvero $\frac{1}{x-4}>0$ ovvero $x>4$; la funzione è negativa per $x<4$.

$$g(0)=\frac{2}{e^{\frac{-1}{4}}-1}=-9.\ 0416$$

Il valore esatto non è importante ma bisogna notare che $e^{\left(\frac{-1}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}<1$ e quindi il valore in zero è negativo.

3. Limiti agli estremi finiti del dominio.

$$\lim_{x\to-4^-}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{-\infty}-1}\right]=-2$$

$$\lim_{x\to-4+}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{+\infty}-1}\right]=0$$

4. Comportamento a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{0^-}-1}\right]=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{0^+}-1}\right]=\left[\frac{2}{0^+}\right]=+\infty;$$

5. Derivata prima.

$$D\left[\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}\right]=D\left[\left(2\cdot\left(e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1\right)^{-1}\right)\right]=$$

$$=-2\left(e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1\right)^{-2}e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}(-1)(x-4)^{-2}=\frac{2e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1\right)^{2}\cdot(x-4)^2}>0$$

per qualsiasi valore di $x\in Dom(g)$; dunque g è strettamente crescente.

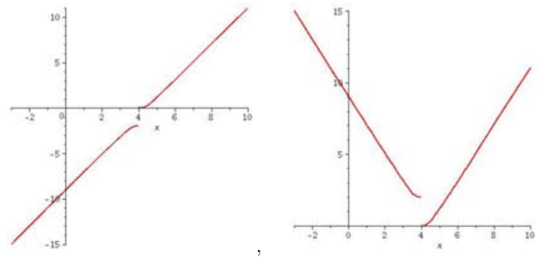


Figura 2.4: Grafico di $g(x)$ e di $f(x)=|g(x)|$

2.5.3 Compito B

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)=-5x^5+3x^3-16x^2-3x+2.$$

a. Si dia la definizione di funzione monotona decrescente.

b. Si dimostri usando le relative definizioni che f non è né monotona crescente né monotona decrescente.

c. Si determini un maggiorante di $Im(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)

Si determini il campo di esistenza della funzione

$$f(x)=\sin\big(\cos(x)\big)-\sqrt{\frac{x^2+x-6}{|x|-5}}$$

Esercizio 3. (5 punti)

Si calcolino i seguenti limiti:

a.

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{4^x-1},$$

b

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1},$$

Esercizio 4. (8 punti)

a. Si enunci e dimostri il teorema di Lagrange.

b. Si applichi il teorema di Lagrange alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ nell'intervallo $[0,1]$ per dimostrare che

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1] \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ si ha che } e^{x_2} - e^{x_1} < e(x_2 - x_1).$$

Esercizio 5. (7 punti)

Sia $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto s(x)$ la funzione di risparmio (savings) in termini di reddito. La funzione elasticità del risparmio rispetto al reddito è definita come segue:

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x \cdot s'(x)}{s(x)},$$

ed è interpretabile come l'aumento percentuale del risparmio conseguente all'incremento di un punto percentuale del reddito. Sia

$$s(x) = -x^2 + 8x.$$

a. E' possibile dimostrare che la funzione elasticità ammette un massimo e un minimo globale nell'intervallo $[1,6]$ senza calcolare i punti di massimo e di minimo globale?;

b. Si calcolino i punti di massimo e minimo globale della funzione elasticità η nell'intervallo $[1,6]$.

Esercizio 6. (10 punti)

Si studi il grafico di

$$f(x) = -\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)} - 1}$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui a $\pm\infty$; non si studi il segno della derivata seconda

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.5.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1. a. Per le definizioni guardate il libro di testo.

b. Per dimostrare che la funzione **non** è monotona (né crescente né decrescente) dobbiamo negare le definizioni che stabiliscono che *per ogni* $x_1,\ x_2\ \ldots$ per fare questo dobbiamo trovare due coppie di punti che ci servano a contraddirle, due candidati sono certamente i due estremi dell'intervallo $x = -1$, $x = 1$ come terzo proviamo $x = 0$.
Calcoliamo la funzione in questi tre punti

$$f(-1) = -9,\ f(0) = 2\ f(1) = -19.$$

Dunque f non è monotona crescente poiché $-1 < 0$ e $f(-1) > f(0)$ inoltre f non è monotona decrescente poiché $0 < 1$ e $f(0) < f(1)$.
Poiché la funzione non è monotona i valori negli estremi dell'intervallo non ci danno nessuna informazione sui possibili valori della funzione nell'intervallo dobbiamo quindi ragionare in un altro modo. Ci viene richiesti di trovare un maggiorante di $Im(f)$ proviamo a maggiorare nell'intervallo dato $[-1,\ 1]$ i singoli addendi della funzione, distinguendo fra potenze pari e dispari. Notiamo che, per ogni $x \in [-1,1]$, si ha che

$$-5x^5 \le 5, \quad 3x^3 \le 3, \quad -16x^2 \le 0, \quad -5x \le 5.$$

Dunque, per ogni $x \in [-1,1]$,

$$f(x) \le 5 + 3 + 0 + 5 + 2 = 15.$$

Da ciò segue che se $y \in Im(f)$ allora $y \le 15$. Pertanto 15 è un maggiorante di $Im(f)$.

Soluzione Esercizio 2. La funzione $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ pertanto ci possiamo ricondurre a studiare il campo di esistenza della formula

$$\sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x| - 5}} = \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)}{|x| - 5}}.$$

Dobbiamo dunque risolvere la disequazione

$$\frac{(x+3)(x-2)}{|x| - 5} \ge 0.$$

Il numeratore è non negativo per $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$. Il denominatore è positivo per $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$. Si ottiene dunque che la soluzione della disequazione ossia il campo di esistenza cercato è

$$(-\infty, -5) \cup [-3, 2] \cup (5, +\infty).$$

Soluzione Esercizio 3.

a. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{4^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{4^x-1}=\frac{\log 2}{\log 4}=\frac{\log 2}{\log 2^2}=\frac{1}{2}.$$

b. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{x})\cdot(x+\sqrt{x})}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}.$$

Soluzione Esercizio 4.

a. Vedi libro di testo.

b. La funzione f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e dunque è continua su $[0,1]$ e derivabile su $(0,1)$.Possiamo dunque applicare il teorema di Lagrange per concludere che

$$\exists\ x_0\in(x_1,x_2)\ \text{ tale che }\ \frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=e^{x_0}<e^1=e,$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che $x_0<x_1\leq 1$ ed inoltre poiché $x_2>x_1$ possiamo scrivere

$$e^{x_2}-e^{x_1}<e\,(x_2-x_1)\,.$$

Soluzione Esercizio 5.

a. Poichè

$$\eta(x)=\frac{x(-2x+8)}{-x^2+8x}=\frac{2x(-x+4)}{x(-x+8)}=\frac{2(x-4)}{x-8},$$

il risultato segue dal teorema di Weierstrass (o del valore estremo) e dal fatto che

i. η è una funzione continua perché rapporto tra polinomi con polinomio al denominatore diverso da zero (e i polinomi sono funzioni continue), e

ii. $[1,6]$ è un intervallo chiuso e limitato.

b. Occorre studiare il segno di $D[\eta](x)=\eta'(x)$:

$$D[\eta](x)=\eta'(x)=\frac{2(x-8)-2(x-4)}{(x-8)^2}=\frac{-8}{(x-8)^2}$$

Poichè per ogni $x\in[1,6]$, $D[\eta](x)=\eta'(x)<0$, η ammette massimo globale in 1 e minimo globale in 6.

Soluzione Esercizio 6.

Disegniamo prima il grafico di $g(x)=\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}$ e poi quello di $f(x)=-g(x)$ (per non fare confusione col segno)

1. Dominio.

$x-4=0$ se e solo se $x=4$;
$e^{\frac{1}{x-4}}-1=0$ se e solo se $\frac{1}{x-4}=0$, che non è verificato per alcun $x\in\mathbb{R}$.
Dunque $D(g)=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

2. Segno.

La funzione è positiva se $e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1>0$, ovvero se $\frac{1}{x-4}>0$ ovvero $x>4$; la funzione è negativa per $x<4$. Con $g(0)=\frac{2}{e^{\frac{1}{-4}}-1}=-9.0416$ non è importate il valore della funzione nell'origine ma basta notare che in quel punto la funzione è negativa per disegnarne il grafico.

3. Limiti agli estremi finiti del dominio.

$$\lim_{x\to -4^-}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{-\infty}-1}\right]=-2$$

$$\lim_{x\to -4+}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{+\infty}-1}\right]=0$$

4. Comportamento a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{0^-}-1}\right]=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}=\left[\frac{2}{e^{0^+}-1}\right]=\left[\frac{2}{0^+}\right]=+\infty;$$

5. Derivata prima.

$$D\left[\left(\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1}\right)\right]=\left[\left(2\cdot\left(e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1\right)^{-1}\right)\right]=$$

$$=-2\left(e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1\right)^{-2}e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}(-1)(x-4)^{-2}=\frac{2e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{1}{x-4}\right)}-1\right)^{2}\cdot(x-4)^{2}}>0$$

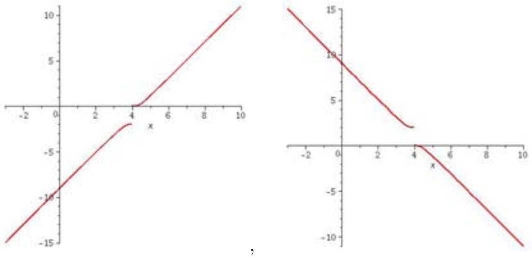


Figura 2.5: Grafico di $g(x)$ e di $f(x)=-g(x)$

2.6 Compito del 09 Dicembre

2.6.1 Compito A

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-4e^{x/2}$. Si determini l'immagine di f, $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-e^x}{x+x^2}.$$

Esercizio 3. (5 punti)
3a) Si enunci e si dimostri il teorema dei carabinieri.

3b) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+k^2 & \text{se} \quad x\leq 1\\ \dfrac{2\log\left(x^k\right)}{x-1} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali f è continua nel punto $x=1$.

Esercizio 4. (7 punti)
a) Si enunci il teorema di Weierstrass.
b) Si giustifichi l'esistenza del massimo e del minimo globale della funzione $f:[1,9]\to\mathbb{R}$, definita come

$$f(x)=x-4\sqrt{x}+5$$

c) si determinino il massimo e il minimo globale della funzione di cui al punto b).

Esercizio 5. (10 punti)

Si consideri un'impresa con funzione di costo totale

$$T:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\qquad T(x)=x^2+10x+25.$$

La funzione di costo marginale è

$$M:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\qquad M(x):=D[T](x)=T'(x).$$

La funzione di costo medio è

$$N:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\qquad N(x)=\frac{T(x)}{x}.$$

1. Si disegni il grafico delle tre funzioni.
2. Si verifichi che costo marginale e medio sono uguali nel punto di minimo del costo medio.
3. Si dica per quali valori di x, il costo marginale è maggiore del costo medio.

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x)=\sqrt[3]{(3-x)x^2}$$

e se ne disegni il grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.6.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1.

Soluzione 1 Poiché $\exp(x/2)^2 = \exp(x)$ poniamo $\exp(x/2) = t,\ t > 0$ e studiamo la funzione $g(t) = t^2 - 4\,t$ per $t > 0$.

$$D[g](t) = 2\,t - 4 = 0$$

che si annulla per $t = 2$ ed è negativa per $0 < t < 2$ e positiva per $t > 2$. Il punto $t = 2$ è dunque un minimo relativo in cui la funzione vale $g(2) = -4$, inoltre

$$g(0) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$$

Abbiamo quindi che la funzione ha un minimo globale in $t = 2$ dove vale $g(2) = -4$ e non è superiormente limitata, in conclusione la sua immagine è

$$\mathrm{Im}(f) = [-4,\ +\infty).$$

Soluzione 2 L'immagine di f è l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$f(x) = y \tag{2.1}$$

ammette almeno una soluzione.

L'equazione (2.1) si scrive come segue

$$e^x - 4e^{x/2} = y. \tag{2.2}$$

Se poniamo $t = e^{x/2},\ t > 0$ possiamo, in modo equivalente, cercare l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$t^2 - 4t - y = 0 \tag{2.3}$$

ammette soluzioni positive.

Indicato con Δ il discriminante di (2.3) si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + y.$$

Quindi per $y \geq -4$ si ha $\Delta \geq 0$ e in questo caso le due soluzioni di (2.3) sono date da

$$t_1 = 2 - \sqrt{4+y}, \quad \text{e} \quad t_2 = 2 + \sqrt{4+y}. \tag{2.4}$$

Poiché $t_2 > 0$ si ha che per $y \geq -4$ l'equazione (2.3) ammette almeno una soluzione positiva e quindi la sua immagine è

$$\mathrm{Im}(f) = [-4,\ +\infty).$$

Se volessimo trovare il valore di x basta risolvere l'equazione

$$e^{x/2} = t_2 = 2 + \sqrt{4+y}$$

che ammette come (unica) soluzione

$$x = 2\log(t_2) = 2\log\left(2 + \sqrt{4+y}\right).$$

Notate che anche t_1 può essere positiva e quindi per certi valori di y troviamo due soluzioni.

Soluzione Esercizio 2. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ in quanto

$$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+x} - e^x\right) = \sqrt{1+0} - e^0 = 1 - 1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to0}\left(x + x^2\right) = 0 + 0^2 = 0.$$

L'esercizio può essere risolto in due modi: senza applicare il teorema di de l'Hôpital oppure applicandolo.

Soluzione 1 .

Trasformiamo la funzione $\dfrac{\sqrt{1+x} - e^x}{x + x^2}$ in modo da risolvere l'indeterminazione.

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x} + e^x$ abbiamo

$$\frac{\sqrt{1+x} - e^x}{x + x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x} - e^x\right)\left(\sqrt{1+x} + e^x\right)}{(x+x^2)\left(\sqrt{1+x} + e^x\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - (e^x)^2}{(x+x^2)\left(\sqrt{1+x} + e^x\right)} = \frac{1 + x - e^{2x}}{(x+x^2)\left(\sqrt{1+x} + e^x\right)}.$$

Inoltre nel denominatore dell'ultima espressione raccogliamo x

$$\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2} = \frac{1+x-e^{2x}}{x(1+x)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)} = \\ = \frac{1}{(1+x)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(\frac{1+x-e^{2x}}{x}\right)$$

Il primo fattore tende a $\frac{1}{2}$. In definitiva non ci resta che calcolare i limite di

$$\tag{2.5}$$

che è riconducibile all limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{2.6}$$

Applichiamo i teoremi sulle operazioni con i limiti abbiamo da (2.5) e (2.6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(1-2\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) = \\ = \frac{1}{2}\cdot(1-2) = -\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione 2 Abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{D\left[\sqrt{1+x}-e^x\right]}{D\left[x+x^2\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-e^x}{1+2x} = \\ = \frac{\frac{1}{2}-e^0}{1} = \frac{\frac{1}{2}-1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione Esercizio 3.
Per la parte 3a) si rinvia al libro di testo.
Per quanto riguarda 3b), dobbiamo trovare per quali valori di k si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

e dal momento che $f(1) = 1^2 - 1 + k^2 = k^2$, questo equivale a trovare per quali valori di k si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = k^2. \tag{2.7}$$

Calcoliamo $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f_{|(-\infty,1)}(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-x+k^2\right) = k^2$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = k^2. \tag{2.8}$$

Calcoliamo $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f_{|(-\infty,1)}(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\log\left(x^k\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2k\log(x)}{x-1}. \tag{2.9}$$

Ora, posto $x-1=y$ e sfruttando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(y+1)}{y}=1$$

abbiamo da (2.9)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2k\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{2k\log(y+1)}{y} = 2k.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2k. \tag{2.10}$$

Poiché vale la (2.8), la (2.7) è soddisfatta se e solo se

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = k^2$$

ovvero, tenendo presente la (2.10), la (2.7) è soddisfatta se e solo se

$$k^2 = 2k$$

e quindi se e solo se $k=0$ oppure $k=2$.

Pertanto la funzione è continua se e solo se $k=0$ oppure $k=2$.

Soluzione Esercizio 4.
a) Per la parte 4a) si rinvia al libro di testo.
b) Basta vedere, che la funzione $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5$ è somma delle potenze, definita e continua in $\mathbb{R}_+$. D'accordo con il teorema di Weierstrass raggiunge suo massimo e minimo globale nell'intervallo $[1,9]$.

c) Visto che la funzione è derivabile in $[1,9]$ suoi massimo e minimo globali possono essere raggiunti o nei punti critici di f o nei punti estremi dell'intervallo.

Calcoliamo $D[f](x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ e risolviamo l'equazione

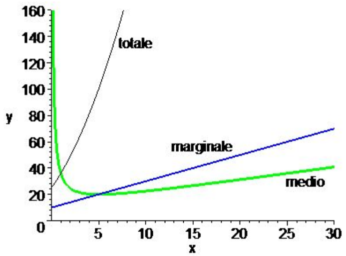
$$D[f](x) = f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

trovando il punto critico $x_0 = 4$, che appartiene a $(1,9)$.Il valore $f(4) = 1$.
I valori della funzione nei punti estremi dell'intervallo sono $f(1) = 2, f(9) = 2$.
Dunque la funzione raggiunge il minimo globale, uguale a 1, in $x_0 = 4$, e raggiunge il massimo globale, uguale a 2, nei punti $x = 1, x = 9$.

Soluzione Esercizio 5. La funzione di costo marginale $M(x) = T'(x) = 2x + 10$, mentre la funzione di costo medio

$$N(x) = \frac{T(x)}{x} = x + 10 + 25/x.$$

I grafici di queste funzioni sono



Per trovare il minimo di costo medio calcoliamo la derivata $N'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$ e cerchiamo punti critici dall'equazione $N'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = 0$. Da due punti critici $x_{0,1} = \pm 5$ l'unico appartenente all'intervallo $(0, +\infty)$ è $x_0 = 5$.

È facile di vedere che $N'(x) < 0$ in $(0,5)$ e $N'(x) > 0$ in $(5, +\infty)$, quindi $x_0 = 5$ è punto di minimo globale di $N(x)$ in $(0, +\infty)$.

Calcolando i valori $N(5) = 20, M(5) = 20$ verifichiamo loro coincidenza $M(5) = N(5)$.

La differenza $\Delta(x) = M(x) - N(x) = x - 25/x$ si annulla nel punto $x_0 = 5$. Inoltre $\Delta(x)$ è rappresentabile come la SOMMA di due funzioni

$f(x) = x$ e $g(x) = -25/x$, entrambe monotone CRESCENTI (per $x > 0$) e quindi anche $\Delta(x)$ è monotona crescente.

Allora per $x > 5$: $\Delta(x) > 0$ e $M(x) > N(x)$.

Soluzione Esercizio 6. Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(3-x)x^2} = \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2},$$

è $\mathbb{R}$, visto che fè la composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio $3x^2 - x^3$), definite ovunque.
La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari,
I limiti della funzione $f(x)$ all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{-1 + 3/x} = \mp\infty.$$

La funzione f e definita e continua in $\mathbb{R}$ e quindi il suo grafico non ha asintoti verticali.
Per calcolare gli eventuali asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ calcoliamo prima

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3 + 3x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{-1 + 3/x} = -1,$$

e

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2} - k_\pm x = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{-1 + 3/x} + x$$

si tratta di una forma indeterminata del tipo $[\infty - \infty]$ che scriviamo come

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{-1 + 3/x} + 1}{1/x}.$$

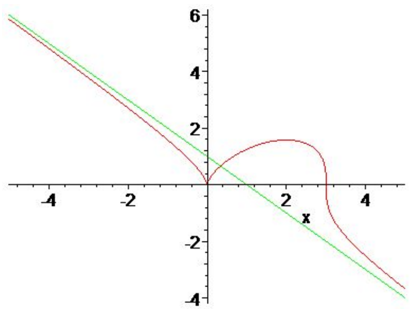
questa è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, alla quale si può applicare teorema di De l'Hôpital:

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-1 + 3/x)^{1/3} + 1}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{3}(-1 + 3/x)^{-2/3}(-3/x^2)}{-1/x^2} =$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(-1 + 3/x)^{-2/3} = 1.$$

Dunque la retta $y = -x + 1$ è l'asintoto obliquo del grafico di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.
Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$D[f](x) = f'(x) = \frac{1}{3}((3-x)x^2)^{-2/3} D\left[(3-x)x^2\right] =$$
$$= \frac{6x - 3x^2}{3((3-x)x^2)^{2/3}} = \frac{(2-x)x}{\left(\sqrt[3]{(3-x)x^2}\right)^2}.$$

Vediamo che il denominatore è sempre non-negativo, perciò il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore - un polinomio quadratico le cui radici sono 0 e 2.
La derivata $D[f](x)$ prende valori negativi per $x \in (-\infty, 0)$, positivi per $x \in (0, 2)$ e di nuovo negativi per $x \in (2, +\infty)$. Pertanto la funzione $f(x)$ decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 2)$ e decresce in $(2, +\infty)$.
Il punto $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale (*la funzione non è derivabile in* 0) e $x_1 = 2$ è punto di massimo locale.
I valori del minimo e del massimo locale sono $f(0) = 0, f(2) = \sqrt[3]{4}$.
Il grafico della funzione è



2.6.3 Compito B

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$. Si determini l'immagine di f, Imf.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x^2 - x^3}.$$

Esercizio 3. (5 punti)
3a) Si enunci e si dimostri il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue.

3b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \dfrac{e^{k^2 x} - e^{2k^2}}{e^{2k^2}(x-2)} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è continua nel punto $x = 2$.

Esercizio 4. (7 punti)
a) Si fornisca la definizione di punto di massimo globale.
b) Si giustifichi l'esistenza del massimo e del minimo globale della funzione $f : [-4, -1] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$$

c) si determinino il massimo e e il minimo globale della funzione di cui al punto b).

Esercizio 5. (10 punti)

Si consideri un'impresa con funzione di costo totale

$$T : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad T(x) = 2x^2 + 8x + 18.$$

La funzione di costo marginale è

$$M : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad M(x) := D[T](x) = T'(x).$$

la funzione di costo medio è

$$N : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad N(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

1. Si disegni il grafico delle tre funzioni;
2. Si verifichi che costo marginale e medio sono uguali nel punto di minimo del costo medio;
3. Si dica per quali valori di x, il costo marginale è maggiore del costo medio.

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$$

e si disegni il suo grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA
TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

2.6.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1. IMMAGINE DI f.

Soluzione 1 Studiamo la funzione $f := x \mapsto x^4 - 2x^2$ che è continua nell'intervallo considerato. La sua derivata è

$$D[f](x) = 4\,x^3 - 2\,x = 2\,x\,(x^2-1) > 0,\ x \in (1,+\infty)$$

si tratta di una funzione strettamente crescente e quindi la sua immagine è l'intervallo $[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x))$.

$$f(1) = -1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Soluzione 2 L'immagine di f con dominio $x \in [1,+\infty)$ è l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$f(x) = y \tag{2.11}$$

ammette almeno una soluzione $x \in [1,+\infty)$.
L'equazione (2.11) è

$$x^4 - 2x^2 = y. \tag{2.12}$$

Per risolverla poniamo $t = x^2$. Cerchiamo quindi per quali valori di $y \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$t^2 - 2t - y = 0 \tag{2.13}$$

ammette almeno una soluzione t maggiore o uguale a 1.
Indicato con Δ il discriminante di (2.13) si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + y.$$

Quindi per $y \geq -1$ si ha $\Delta \geq 0$ e in questo caso le due soluzioni di (2.13) sono date da

$$t_1 = 1 - \sqrt{1+y}, \quad \text{e} \quad t_2 = 1 + \sqrt{1+y}. \tag{2.14}$$

Chiaramente $t_2 \geq 1$ e quindi per $y \geq -1$ l'equazione (2.13) ammette almeno una soluzione maggiori o uguale di 1.
Se volessimo trovare la soluzione x dell'equazione (2.12) abbiamo che

$$x^2 = t_2 = 1 + \sqrt{1+y}$$

questa equazione ammette soluzione una (unica) soluzione x maggiore o uguale a 1 ed è

$$x = \sqrt{t_2} = \sqrt{1+\sqrt{1+y}}.$$

Conclusione: $\mathrm{Im}(f) = [-1,+\infty)$.

Soluzione Esercizio 2. Il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ in quanto

$$\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{2x+e^x}-1\right) = \sqrt{0+e^0}-1 = 1-1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^2-x^3\right) = 0^2 - 0^3 = 0.$$

L'esercizio può essere risolto in due modi: senza applicare il teorema di de l'Hôpital oppure applicandolo.

Soluzione 1 Trasformiamo l'espressione $\dfrac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}$ in modo da risolvere l'indeterminazione.

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{2x+e^x}+1$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3} &= \frac{\left(\sqrt{2x+e^x}-1\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}{(x^2-x^3)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{2x+e^x}\right)^2-1}{(x^2-x^3)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)} = \frac{2x+e^x-1}{(x^2-x^3)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}.\end{aligned}$$

Al denominatore dell'ultima espressione raccogliamo x^2

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3} &= \frac{2x+e^x-1}{x^2\,(1-x)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)} = \\ &= \frac{1}{(1-x)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{2x+e^x-1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

possiamo cancellare i fattori moltiplicativi che tendo ad un limite finito sostituendoli con il valore del loro limite; dobbiamo quindi studiare il limite di

$$\frac{e^x - 1 + 2\,x}{2\,x^2} = \frac{1}{2\,x}\left(\frac{e^x-1}{x} + 2\right). \tag{2.15}$$

Ora ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{2.16}$$

Applichiamo i teoremi sulle operazioni con i limiti abbiamo da (2.15) e (2.16)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right) = 3\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3} = +\infty.$$

Soluzione 2 Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{D\left[\sqrt{2x+e^x}-1\right]}{D\left[x^2-x^3\right]} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2+e^x}{2\sqrt{2\,x+e^x}}}{x\,(2-3x)} =$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2+e^x}{2\sqrt{2\,x+e^x}}}{2-3x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \frac{3}{4}\cdot(+\infty) = +\infty$$

Soluzione Esercizio 3. Per la parte 3a) si rinvia al libro di testo.
Per quanto riguarda 3b), basta vedere per quali valori di k si ha

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

e dal momento che $f(2) = 2^2 = 4$ basta vedere per quali valori di k si ha

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4. \tag{2.17}$$

Calcoliamo $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f_{|(2,+\infty)}(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

Quindi

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2). \tag{2.18}$$

Calcoliamo $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.
Osserviamo innanzitutto che se $k = 0$ allora $f_{|(-\infty,2)}(x) = 0$. Quindi in questo caso $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ e perciò, per (2.18), f non è continua in $x = 2$.
Ora consideriamo il caso $k \neq 0$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f_{|(-\infty,2)}(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{e^{k^2x}-e^{2k^2}}{e^{2k^2}\,(x-2)} = \tag{2.19}$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{e^{2k^2}\left(e^{k^2(x-2)}-1\right)}{e^{2k^2}\,(x-2)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{e^{k^2(x-2)}-1}{x-2}. \tag{2.20}$$

Posto $(x-2)\,k^2 = y$ e sfruttando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1,$$

abbiamo da (2.19)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{e^{k^2(x-2)}-1}{x-2} = \lim_{y\to 0} k^2\frac{e^y-1}{y} = k^2.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = k^2. \tag{2.21}$$

Poiché vale la (2.18), la (2.17) è soddisfatta se e solo se

$$k^2 = 4$$

ovvero, tenendo presente la (2.21), la (2.17) è soddisfatta se e solo se $k = -2$ oppure $k = 2$.

Pertanto la funzione è continua se e solo se $k = -2$ oppure $k = 2$.

Soluzione Esercizio 4.

a) Per la parte 4a) si rinvia al libro di testo.
b) Basta vedere, che la funzione $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ è somma e quoziente di potenze ed è quindi definita e continua in $\mathbb{R}\setminus 0$. Per il teorema di Weierstrass raggiunge suo massimo e minimo globale nell'intervallo $[-4,-1]$ che non contiene l'origine.

c) Visto che la funzione $f(x)$ è derivabile in $[-4,-1]$, il massimo e il minimo possono essere raggiunti o nei punti critici di f o nei punti estremi dell'intervallo.

Calcoliamo $D[f](x) = f'(x) = -x - \frac{8}{x^2}$ e risolviamo l'equazione

$$f'(x) = -x - \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8.$$

Trovimao il punto critico $x_0 = -2$ che appartiene a $(-4,-1)$. Il valore $f(-2) = 2$.

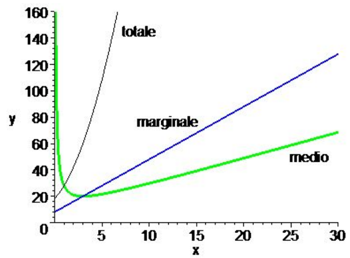
I valori della funzione nei punti estremi dell'intervallo sono $f(-4) = -2, f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Dunque la funzione raggiunge il suo minimo globale, uguale a -2, nel punto $x_1 = -4$, ed il suo massimo globale, uguale a 2 nel punto $x_0 = -2$.

Soluzione Esercizio 5. La funzione di costo marginale è $M(x) = D[T](x) = T'(x) = 4x + 8$, mentre la funzione di costo medio è

$$N(x) = \frac{T(x)}{x} = 2x + 8 + 18/x.$$

I grafici di queste funzioni sono



Per trovare il minimo del costo medio calcoliamo la sua derivata $D[N](x) = N'(x) = 2 - \frac{18}{x^2}$ e cerchiamo punti critici dall'equazione $N'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0$.

Da due punti critici $x_{0,1} = \pm 3$ di $N(x)$ c'è un solo $x_0 = 3$, che appartiene all'intervallo $(0,+\infty)$.

È facile di vedere che $N'(x) < 0$ in $(0,3)$ e $N'(x) > 0$ in $(3,+\infty)$, quindi $x_0 = 3$ è punto di minimo globale di $N(x)$ in $(0,+\infty)$.

Calcolando i valori $N(3) = 20, M(3) = 20$, verifichiamo loro coincidenza $M(3) = N(3)$.

La differenza $\Delta(x) = M(x) - N(x) = 2x - 18/x$ si annulla nel punto $x_0 = 3$. Inoltre $\Delta(x)$ è rappresentabile come la SOMMA di due funzioni $f(x) = 2x, g(x) = -18/x$, entrambe monotone CRESCENTI (per $x > 0$), e quindi anche $\Delta(x)$ è monotona crescente. Allora, per $x > 3$, $\Delta(x) > 0$ e $M(x) > N(x)$.

Soluzione Esercizio 6. Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$$

è $\mathbb{R}$, visto che f è composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio $x(x+3)^2$), definite ovunque.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari

I limiti della funzione all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x+3)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{(1+3/x)^2} = \pm\infty.$$

Non avendo la funzione f discontinuità ed essedno definita su tutto $\mathbb{R}$, il suo grafico non ha asintoti verticali.

Per calcolare asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ applichiamo le formule per loro coefficienti:

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(1+3/x)^2} = 1,$$

e

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x+3)^2} - k_\pm x = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{(1+3/x)^2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1+3/x)^{2/3} - 1}{1/x}.$$

L'ultimo limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, a quale si può applicare teorema di De l'Hôpital:

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1+3/x)^{2/3} - 1}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{3}(1+3/x)^{-1/3}(-3/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 2(1+3/x)^{-1/3} = 2.$$

Dunque la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo del grafico di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

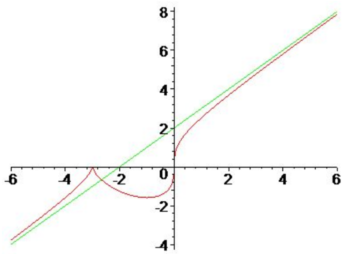
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x(x+3)^2)^{-2/3}(x(x+3)^2)' = \frac{3x^2 + 12x + 9}{3(x(x+3)^2)^{2/3}} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^{2/3}(x+3)^{4/3}}.$$

Vediamo che il denominatore è non-negativo per tutti x, quindi il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore - un polinomio quadratico. Le radici del polinomio sono -3 e -1.

Allora la derivata $f'(x)$ prende valori positivi per $x \in (-\infty, -3)$, negativi per $x \in (-3, -1)$, e di novo positivi per $x \in (-1, \infty)$. Pertanto $f(x)$ cresce in $(-\infty, -3)$ decresce in $(-3, -1)$ e cresce in $((-1, +\infty)$.

Il punto $x_0 = -3$ è punto di massimo locale (*la funzione non è derivabile in* -3) e $x_1 = -1$ è punto di minimo locale.

I valori del massimo e del minimo locale sono $f(-3) = 0, f(-1) = -\sqrt[3]{4}$. Il grafico della funzione è



Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 15 gennaio 2014

1. **(7 punti)** (a) Sia data la funzione f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Trovare il dominio di f, l'estremo superiore di f, l'estremo inferiore di f e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di f.

(b) Sia data la funzione $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ definita come segue (si noti che g ha la stessa espressione di f, ma è definita nell'intervallo $[0,2]$):

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{x-1}{x+3} & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

Trovare l'estremo superiore di g, l'estremo inferiore di g e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di g.

2. **(5 punti)** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[5]{x^2+x+1} + x - 3$$

3. **(7 punti)** (a) Si diano le definizioni di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.

(b) Sia f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(bx)}{\ln(1+x)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori dei parametri reali a e b in modo che f sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

4. **(8 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = e^{-x}(2x + x^2)$$

e si disegni il suo grafico.

5. **(7 punti)** In questo esercizio f è una funzione definita in $\mathbb{R}$.

(a) Si dia la definizione di funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(b) Si provi che se f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(c) E' vero che se f è derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$, allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$? Se no, si dia un esempio di funzione f che è derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma per la quale non è vero che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantità, $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene è 9, e dunque produrre la quantità x genera un ricavo pari a $9x$. Per produrre la quantità x, l'impresa sostiene un costo pari a $15x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantità x è

$$\pi(x) = 9x - \left(15x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$$

L'obiettivo dell'impresa è individuare un punto di massimo globale per la funzione π, che è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

(a) Si enunci il teorema di Weierstrass e si dica se è possibile applicare tale teorema per stabilire l'esistenza di un punto di massimo globale per la funzione π.

(b) Indipendentemente dalla risposta al punto (a), si determini un punto di massimo globale per la funzione π.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame B, 15 gennaio 2014

1. **(7 punti)** Sia data la funzione f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{1-2x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Trovare il dominio di f, l'estremo superiore di f, l'estremo inferiore di f e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di f.

(b) Sia data la funzione $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita come segue (si noti che g ha la stessa espressione di f, ma è definita nell'intervallo $[0, 2]$):

$$g(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{1}{1-2x} & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

Trovare l'estremo superiore di g, l'estremo inferiore di g e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di g.

2. **(5 punti)** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^6 - 3x + 2} + 5 - x$$

3. **(7 punti)** (a) Si diano le definizioni di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.

(b) Sia f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(1+bx)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori dei parametri reali $a > 0$ e $b > 0$ in modo che f sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

4. **(8 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = e^x(2x - x^2)$$

e si disegni il suo grafico.

5. **(7 punti)** In questo esercizio f è una funzione definita in $\mathbb{R}$.

(a) Si dia la definizione di funzione strettamente decrescente in $\mathbb{R}$.

(b) Si provi che se f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$.

(c) E' vero che se f è derivabile e strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, allora $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$? Se no, si dia un esempio di funzione f che è derivabile e strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, ma per la quale non è vero che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantità, $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene è 10, e dunque produrre la quantità x genera un ricavo pari a $10x$. Per produrre la quantità x, l'impresa sostiene un costo pari a $24x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantità x è

$$\pi(x) = 10x - \left(24x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$$

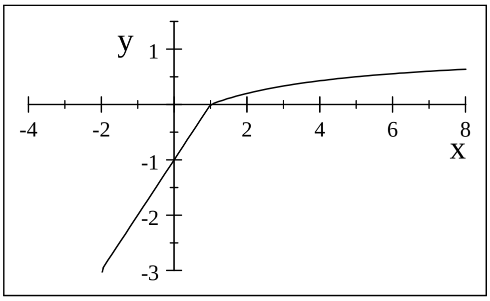
L'obiettivo dell'impresa è individuare un punto di massimo globale per la funzione π, che è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

(a) Si enunci il teorema di Weierstrass e si dica se è possibile applicare tale teorema per stabilire l'esistenza di un punto di massimo globale per la funzione π.

(b) Indipendentemente dalla risposta al punto (a), si determini un punto di massimo globale per la funzione π.

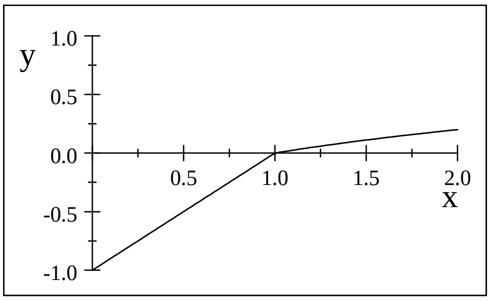
Soluzioni per il testo A

1. (a) Il dominio di f e' $\mathbb{R}$. Il grafico di f e'



e $\sup f = 1$, $\inf f = -\infty$, $\max f$ non esiste, $\min f$ non esiste.

(b) Il grafico di g e'



e $\sup g = \frac{1}{5}$, $\inf g = -1$, $\max g = \frac{1}{5}$, $\min g = -1$.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt[5]{x^2+x+1}+x-3 &= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\sqrt[5]{x^2+x+1}}{x}+1-\frac{3}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[5]{\frac{x^2+x+1}{x^5}}+1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-\infty)(0+1-0) = -\infty\end{aligned}$$

3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) Per ogni a e b in $\mathbb{R}$, f e' continua in ogni x diverso da 0. f e' continua anche in $x=0$ se e solo se $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$. Poiche' $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{a}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{a}$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\sin(bx)}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{b}{1} = b$, $f(0)=1$, si deduce che f e' continua in $x=0$ (e dunque in $\mathbb{R}$) se e solo se $a=b=1$.

4. Il dominio di f e' $\mathbb{R}$. $f(x)=0$ in $x=-2$ e in $x=0$; $f(x)>0$ in $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f(x)<0$ in $(-2,0)$. Poiche' f e' continua (f e' anche derivabile) in $\mathbb{R}$, non esistono asintoti verticali. Poiche' $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$, non esiste asintoto orizzontale ne' asintoto obliquo per $x\to-\infty$. Poiche' $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x^2}{e^x} = 0$ (per confronto tra ordini di infinito), la retta $y=0$ e' asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

La derivata prima di f e'

$$f'(x) = e^{-x}(-2x-x^2)+e^{-x}(2+2x) = e^{-x}(2-x^2)$$

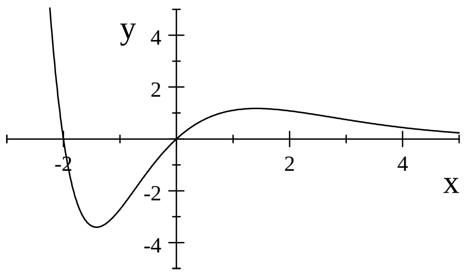
quindi $f'(x)<0$ in $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ e $f'(x)>0$ in $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Pertanto f e' strettamente decrescente in $(-\infty,-\sqrt{2})$, strettamente crescente in $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, strettamente decrescente in $(\sqrt{2},+\infty)$. Il punto $x=-\sqrt{2}$ e' punto di minimo globale per f, con $f(-\sqrt{2})<0$; il punto $x=\sqrt{2}$ e' punto di massimo locale per f, con $f(\sqrt{2})>0$.

La derivata seconda di f e'

$$f''(x) = e^{-x}(-2 + x^2) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$$

quindi $f''(x) > 0$ in $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ in $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. Pertanto f e' convessa in $(-\infty, 1-\sqrt{3})$, concava in $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, convessa in $(1+\sqrt{3}, +\infty)$. I punti $x = 1-\sqrt{3}$ e $x = 1+\sqrt{3}$ sono punti di flesso per f.

Pertanto il grafico di f e'



5. (a-b) Si veda il libro di testo.

   (c) La funzione $f(x) = x^3$ e' strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma non e' vero che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$ e' uguale a zero nel punto $x = 0$.

6. (a) Si veda il libro di testo per il teorema di Weierstrass. Sebbene π sia continua, non e' possibile applicare il teorema di Weierstrass per dimostrare l'esistenza di un punto di massimo globale per π perche' π e' definita su un insieme illimitato.

   (b) $\pi(x) = -6x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, quindi $\pi'(x) = -6 + 7x - x^2$, che e' negativa per $x \in [0,1) \cup (6, +\infty)$ e positiva per $x \in (1,6)$. Pertanto π e' strettamente decrescente in $[0,1)$, strettamente crescente in $(1,6)$, strettamente decrescente in $(6,+\infty)$. Il punto $x = 6$ e' punto di massimo globale per π perche' $\pi(6) = 18 > \pi(0) = 0$.

Soluzioni per il testo B

1. (a) Il dominio di f e' $\mathbb{R}$. Il grafico di f si trova alla fine di questo documento, e $\sup f = 0$, $\inf f = -\infty$, $\max f$ non esiste, $\min f$ non esiste.

   (b) Il grafico di g si trova alla fine di questo documento, e $\sup g = -\frac{1}{3}$, $\inf g = -2$, $\max g = -\frac{1}{3}$, $\min g = -2$.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^6 - 3x + 2} + 5 - x &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt[4]{x^6 - 3x + 2}}{x} + \frac{5}{x} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[4]{\frac{x^6 - 3x + 2}{x^4}} + \frac{5}{x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} (+\infty)(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

3. (a) Si veda il libro di testo.

   (b) Per ogni a e b in $\mathbb{R}$, f e' continua in ogni x diverso da 0. f e' continua anche in $x = 0$ se e solo se $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$. Poiche' $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x)\frac{\ln(1+bx)}{x} = b$, $f(0) = 5$, si deduce che f e' continua in $x = 0$ (e dunque in $\mathbb{R}$) se e solo se $a = b = 5$.

4. Il dominio di f e' $\mathbb{R}$. $f(x) = 0$ in $x = 0$ e in $x = 2$; $f(x) < 0$ in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f(x) > 0$ in $(0,2)$.

   Poiche' f e' continua (f e' anche derivabile) in $\mathbb{R}$, non esistono asintoti verticali. Poiche' $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-x^2}{e^{-x}} =^H \lim_{x\to-\infty} \frac{2-2x}{-e^{-x}} =^H \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{e^{-x}} = 0$, la retta $y = 0$ e' asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Poiche' $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$, non esiste asintoto orizzontale ne' asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

La derivata prima di f e'

$$f'(x) = e^x(2x - x^2) + e^x(2 - 2x) = e^x(2 - x^2)$$

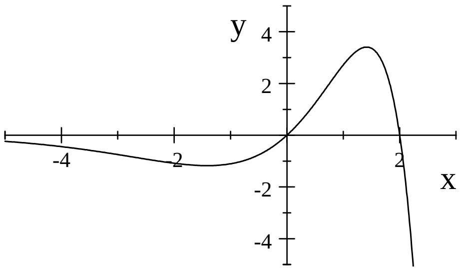
quindi $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pertanto f e' strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{2})$, strettamente crescente in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, strettamente decrescente in $(\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ e' punto di minimo locale per f, con $f(-\sqrt{2}) < 0$; il punto $x = \sqrt{2}$ e' punto di massimo globale per f, con $f(\sqrt{2}) > 0$.

La derivata seconda di f e'

$$f''(x) = e^x(2 - x^2) + e^x(-2x) = e^x(-x^2 - 2x + 2)$$

quindi $f''(x) < 0$ in $(-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ e $f''(x) > 0$ in $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$. Pertanto f e' concava in $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$, convessa in $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$, concava in $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$. I punti $x = -1 - \sqrt{3}$ e $x = -1 + \sqrt{3}$ sono punti di flesso per f.

Pertanto il grafico di f e'

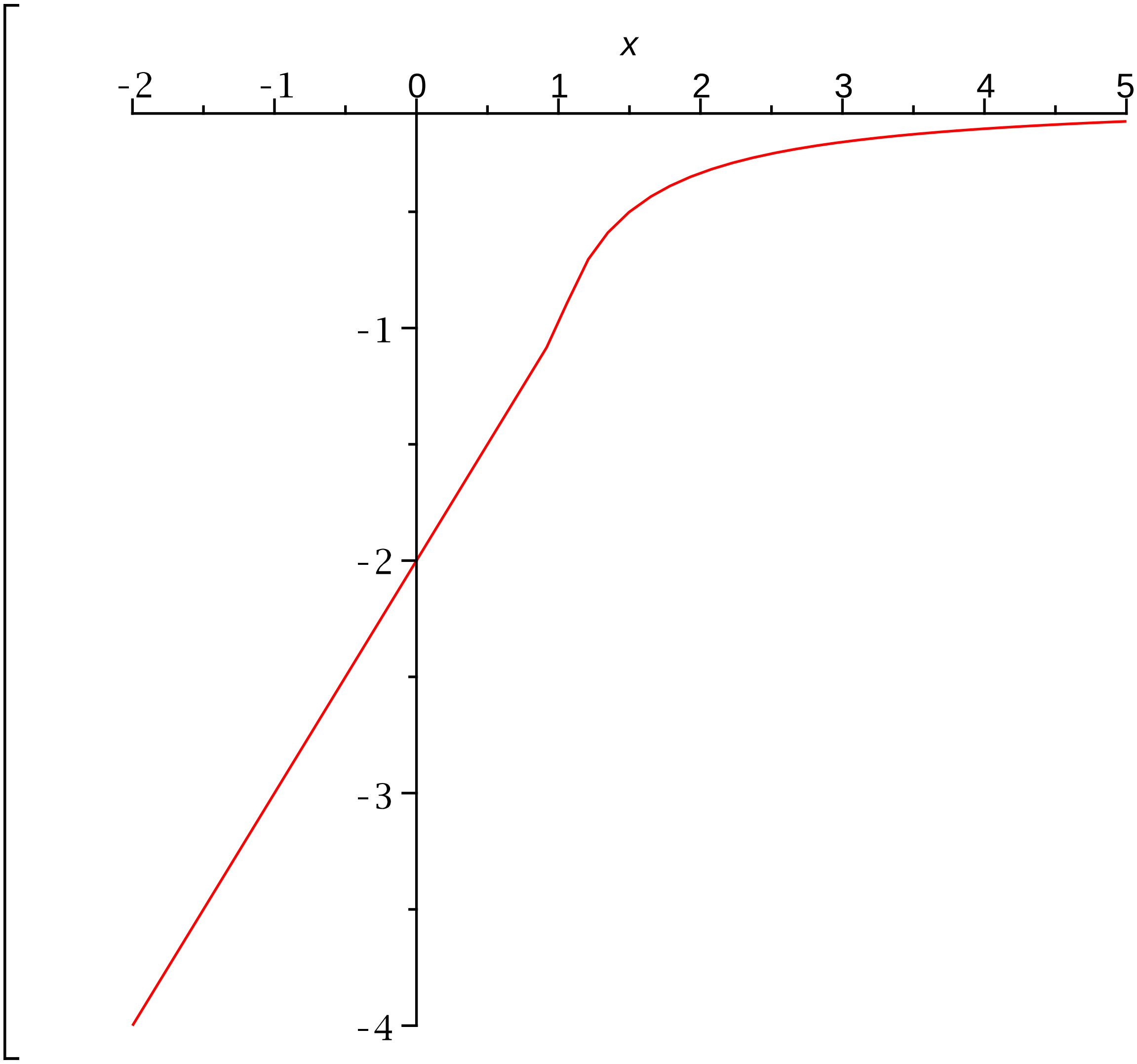


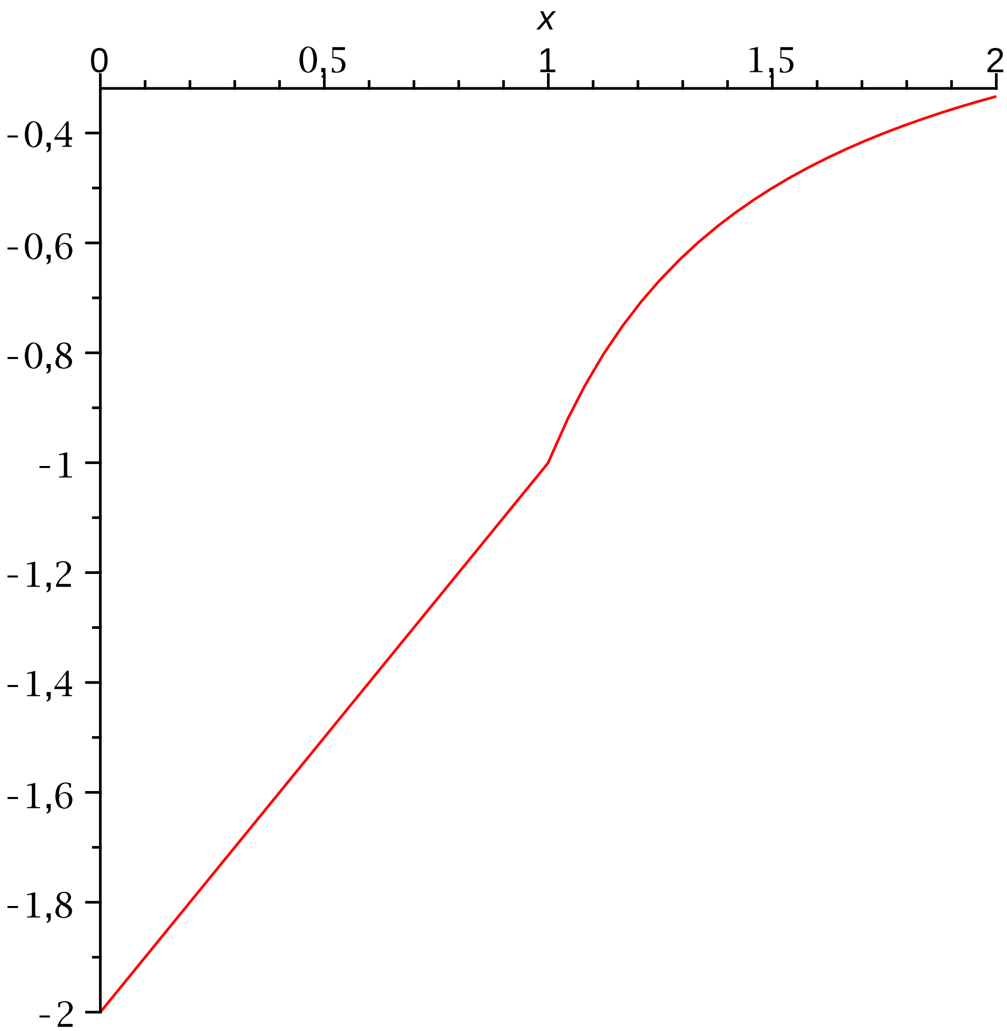
5. (a-b) Si veda il libro di testo.

   (c) La funzione $f(x) = -x^3$ e' strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, ma non e' vero che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -3x^2$ e' uguale a zero nel punto $x = 0$.

6. (a) Si veda il libro di testo per il teorema di Weierstrass. Sebbene π sia continua, non e' possibile applicare il teorema di Weierstrass per dimostrare l'esistenza di un punto di massimo globale per π perche' π e' definita su un insieme illimitato.

   (b) $\pi(x) = -14x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, quindi $\pi'(x) = -14 + 9x - x^2$, che e' negativa per $x \in [0, 2) \cup (7, +\infty)$ e positiva per $x \in (2, 7)$. Pertanto π e' strettamente decrescente in $[0, 2)$, strettamente crescente in $(2, 7)$, strettamente decrescente in $(7, +\infty)$. Il punto $x = 7$ e' punto di massimo globale per π perche' $\pi(7) = \frac{49}{6} > \pi(0) = 0$.


x
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4



x
0
0,5
1
1,5
2
-0,4
-0,6
-0,8
-1
-1,2
-1,4
-1,6
-1,8
-2

>

Compito A del 5 Febbraio 2014, versione del 3 febbraio 2014

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostra risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square$

Esercizio 1. (8 punti)

a) (3p) Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto.

b) (2p) Per la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva lo sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due.

c) (3p) Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2},$$

possibilmente usando lo sviluppo di Taylor con resto trovato in precedenza.

Esercizio 2. (6 punti)

a) (1p) Si scriva la definizione di derivata prima di una funzione f in un punto x_0.

b) (4p) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \le 0 \\ x^2 - x & \text{se} \quad x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{4} & \text{se} \quad x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$. La funzione è derivabile in $x_0 = 0$? Si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = \frac{1}{2}$. La funzione è derivabile in $x_0 = \frac{1}{2}$? La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$?

c) (1p) Si disegni il grafico della funzione.

Esercizio 3. (6 punti) Una azienda necessita per quest'anno di 300 tonnellate di materia prima per il suo piano di produzione ed effettua degli ordini, ciascuno della stessa quantità x. Poiché ci sono dei costi di magazzino si è valutato che il costo per questa strategia di acquisto è espresso in euro dalla funzione

$$C(x) = \frac{60.000}{x} + 6\,x.$$

a) (2p) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a cui x deve appartenere.

b) (4p) Determinare la quantità x che è ottimale ordinare se si vuole minimizzare il costo descritto.

Esercizio 4. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f := x \mapsto x^3 - 6\,x^2 + 9\,x - 5$$

a) (4p) Si dimostri, utilizzando teoremi noti, che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 5]$.

b) (3p) Si dimostri che questa equazione ha esattamente una soluzione nell'intervallo dato.

c) (2p) Una volta determinato un intervallo in cui c'è una soluzione, si dica quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sono necessarie per trovare una soluzione approssimata con un errore inferiore a 0.1.

Esercizio 5. (11 punti) Data la funzione

$$f(x) = x\,e^{\frac{1}{x^2}} = x\,\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

a) (3p) Determinarne dominio, zeri, segno; dire se la funzione è pari/dispari e determinarne eventuali asintoti.

b) (2p) Dire se è possibile definire f anche in $x = 0$ in modo che risulti continua in quel punto.

c) (3p) Determinare gli intervalli di monotonia di f ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

d) (2p) Determinarne intervalli di concavità.

e) (1p) Disegnarne il grafico.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA

1 Soluzioni Compito A

Soluzione esercizio 1.
a) Vedere libro di testo.
b) Lo sviluppo di Taylor fino al grado due di f nell'origine è

$$f(0) + \mathrm{D}[f](0)\,x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + \frac{D^3[f](\theta)}{3!}x^3$$

ovvero

$$f(0) + \mathrm{D}[f](0)\,x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(0) = 3,\ D[f](0) = 0,\ D^2[f](0) = \frac{1}{3}$$

e quindi

$$f(x) = 3 + \frac{1}{6}x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^2 + R_2(x)}{x^2} = \\ &= \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.
a) Vedere libro di testo.
b) Per $x \neq 0, \frac{1}{2}$ la funzione è derivabile perché si tratta di una costante o di un polinomio di secondo grado.
Si osservi che f è continua in $x_0 = 0$ e in $x_1 = \frac{1}{2}$, perché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(\frac{1}{2}) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{4}.$$

f è quindi continua in tutto $\mathbb{R}$.
Derivabilità in $x = 0$: si noti che $f(0) = 0$, quindi

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0 = D_-[f](0).$$

Invece

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h-1 = -1 = D_+[f](0).$$

Poiché derivate destra e sinistra non coincidono, f non risulta derivabile in 0.
Derivabilità in $x = \frac{1}{2}$: si noti che $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, quindi

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(\frac{1}{2}+h)^2-(\frac{1}{2}+h)+\frac{1}{4}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0 = D_-[f](\frac{1}{2}).$$

D'altra parte

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{h} = 0 = D_+[f](\frac{1}{2}).$$

Derivate destra e sinistra di f in $\frac{1}{2}$ coincidono, perciò f è derivabile in $\frac{1}{2}$.
c) Il grafico della funzione è composto da due tratti di retta orizzontale e da un tratto di parabola ed è in Figura 1 e come vediamo la curva presenta in $x_0 = 0$ un punto angoloso (f non è derivabile), mentre in $x_1 = \frac{1}{2}$ è liscia (f è derivabile).

Soluzione esercizio 3.
a) x è la quantità di materia prima che viene ordinata e quindi $x > 0$. Nell'anno il totale fabbisogno di materia prima è di 300t. e quindi, poiché ci sono dei costi di immagazzinamento, ciascuna ordinazione sarà al massimo di 300t. Dunque

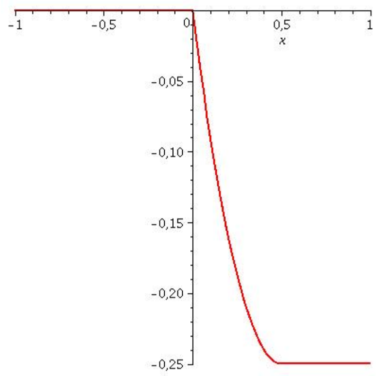


Figura 1: Grafico di $f(x)$

$x \in (0, 300]$.
b) Si determina l'andamento di C per stabilire la collocazione dei punti di minimo assoluto entro $(0, 300]$:

$$D[C](x) = 6\,\frac{x^2 - 10000}{x^2}.$$

che si annulla per $x = \pm 100$ ma solo il valore positivo appartiene al dominio, perciò risulta $D[C](x) \geq 0$ in $(0, 300]$ se e solo se $x \geq 100$. Dunque il costo decresce in $(0, 100]$ e cresce in $[100, 300]$, perciò $C(x)$ raggiunge in $[0, 300]$ il suo valore minimo assoluto per $\hat{x} = 100$.

Soluzione esercizio 4.
a) La funzione $f := x \mapsto x^3 - 6\,x^2 + 9\,x - 5$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ in quanto polinomio. Possiamo quindi applicare il Teorema degli zeri (o il Teorema dei valori intermedi) per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 5]$.
I due punti $y_0 = f(0) = -5$ e $y_1 = f(5) = 15$ appartengono ad $\mathrm{Im}(f)$ e quindi per i teoremi citati anche il punto zero, in quanto $y_0 < 0 < y_1$. L'equazione ha quindi almeno una soluzione nell'intervallo $(0,\ 5)$.
b) Calcoliamo la derivata di f

$$D[f] = 3\,x^2 - 12\,x + 9$$

che si annulla nei due punti $x_0 = 1$, $x_1 = 3$. La funzione non è quindi monotona ed inoltre abbiamo che $f(x_0) = -1$, $f(x_1) = -5$ sono rispettivamente un massimo ed un minimo locale che sono entrambi negativi quindi la funzione è negativa in zero, cresce fino al massimo negativo, descresce fino al minimo, anch'esso negativo e poi cresce fino a diventare positiva in cinque e quindi la funzione ha un solo zero nell'intervallo

$$[0,\ 5]$$

c) Poiché $f(4) = -1$ cerchiamo la soluzione in $[4,\ 5]$ che ha lunghezza uno ed è quindi migliore dell'intervallo originale. La lunghezza dell'intervallo iniziale è uno e quindi l'errore iniziale è $\frac{1}{2}$, errore che si dimezza dopo ogni iterazione e che quindi diventa

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} < 0.1 = \frac{1}{10}$$

dopo tre iterazioni.
Soluzione esercizio 5.
a) Studiamo la funzione

$$f(x) = x\,e^{\frac{1}{x^2}} = x\,\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Dominio. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne che nel punto $x = 0$ che annulla il denominatore dell'esponente dell'esponenziale.
La funzione è dispari e la studieremo quindi in $(0,\ +\infty)$.
Segno.La funzione è positiva per ogni $x > 0$ perché l'esponenziale è positiva.
Limiti/Asintoti.

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Si tratta di un limite della forma $[\infty \cdot 1]$ che non è una forma indeterminata.
Il limite in $x = 0^+$ è una forma $[0 \cdot \infty]$ che riscriviamo come

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

per riportarlo nella forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Per confrontare esponenziale e potenze effettuiamo la sostituzione $x = \frac{1}{y}$ ed otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{e^{y^2}}{y}$$

quest'ultimo è un limite notevole per il confronto fra infiniti, in conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

La funzione ha un asintoto verticale $x = 0$.
Ricerchiamo ora eventuali asintoti obliqui, calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x\, e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

e poi

$$\lim_{x\to +\infty} x\, e^{\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x\to +\infty} x(\, e^{\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} \lim_{z\to 0^+} \frac{e^{z^2} - 1}{z} = \lim_{z\to 0^+} z \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} = 0.$$

La funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$.
b) Poiché il limite di f nell'origine non è finito non è possibile definire la funzione in quel punto in modo da renderla continua.
c) La derivata della funzione è

$$D[f](x) = \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(x^2 - 2\right)}{x^2}$$

che si annulla per $x = \pm\sqrt{2}$, di cui solo il secondo valore è positivo. Lo studio del segno di $D[f](x)$ è immediato perché l'esponenziale e x^2 sono sempre positivi e quindi la funzione decresce in $(0, \sqrt{2}]$ e cresce in $[\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = \sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo.
d) La derivata seconda di f è

$$D^2(f)(x) = 2\,\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(x^2 + 2\right)}{x^5}$$

che per $x > 0$ è sempre positiva, la funzione è quindi convessa in $(0, +\infty)$.
e) Il suo grafico in tutto il suo dominio è mostrato in Figura 2

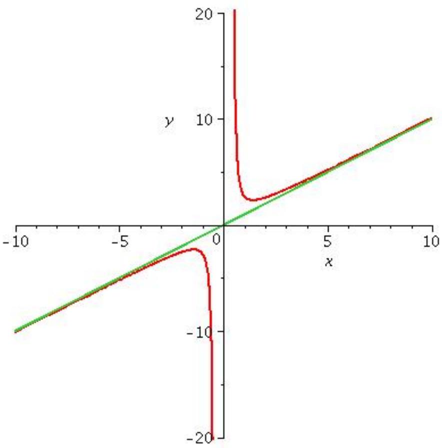


Figura 2: Grafico di $f(x)$

Compito B del 5 Febbraio 2014

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostra risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. (8 punti)

a) (3p) Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto.

b) (2p) Per la funzione $f(x) = \log(x^2 + e)$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva lo sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due.

c) (3p) Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+e)-1}{x^2}.$$

possibilmente usando lo sviluppo di Taylor con resto trovato in precedenza.

Esercizio 2. (6 punti)

a) (1p) Si scriva la definizione di derivata prima di una funzione f in un punto x_0.

b) (4p) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{se} \quad x \in (0,1) \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$. La funzione è derivabile in $x_0 = 0$? Si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 1$. La funzione è derivabile in $x_0 = 1$? La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$?

c) (1p) Si disegni il grafico della funzione.

Esercizio 3. (6 punti)
Una azienda necessita per quest'anno di 400 tonnellate di materia prima per il suo piano di produzione ed effettua degli ordini, ognuno della stessa quantità x. Poiché ci sono dei costi di magazzino si è stabilito che il costo per questa strategia di acquisto è espresso in euro dalla funzione

$$C(x) = \frac{80.000}{x} + 2\,x.$$

a) (2p) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a cui x deve appartenere.

b) (4p) Determinare la quantità x che è ottimale ordinare se si vuole minimizzare il costo descritto.

Esercizio 4. (9 punti) Si consideri al funzione

$$f := x \mapsto -4\,x^3 + 18\,x^2 - 24\,x + 7$$

a) (4p) Si dimostri, utilizzando teoremi noti, che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 4]$.

b) (3p) Dimostrare che questa equazione ha esattamente una soluzione nell'intervallo dato.

c) (2p) Una volta determinato un intervallo in cui c'è una soluzione, si dica quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sono necessarie per trovare una soluzione approssimata con un errore inferiore a 0.1.

Esercizio 5. (11 punti) Data la funzione

$$f(x) = x\,e^{\frac{-1}{x^2}} = x\,\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

a) (3p) determinarne dominio, zeri, segno; dire se la funzione è pari/dispari e determinarne eventuali asintoti.

b) (2p) Dire se è possibile definire f anche in $x = 0$ in modo che risulti continua in quel punto.

c) (3p) Determinare gli intervalli di monotonia di f ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

d) (2p) Determinarne intervalli di concavità.

e) (1p) Disegnarne il grafico.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA

2 Soluzioni Compito B

Soluzione esercizio 1.
a) Vedere libro di testo.
b) Lo sviluppo di Taylor fino al grado due di f nell'origine è

$$f(0) + \mathrm{D}[f](0)\,x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + \frac{D^3[f](\theta)}{3!}x^3$$

ovvero

$$f(0) + \mathrm{D}[f](0)\,x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(0) = 1,\ D[f](0) = 0,\ D^2[f](0) = \frac{2}{e}$$

e quindi

$$f(x) = 1 + \frac{1}{e}x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+e)-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}x^2 + R_2(x)}{x^2} =\\ &= \frac{1}{e} + \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.
a) Vedere libro di testo.
b) Per $x \neq 0, 1$ la funzione è derivabile perché si tratta di una costante o di un polinomio di secondo grado.
Si osservi che f è continua in $x_0 = 0$ e in $x_1 = 1$, perché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

f è quindi continua in tutto $\mathbb{R}$.
Derivabilità in $x = 0$: si noti che $f(0) = 2$, quindi

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{2-2}{h} = 0 = D_-[f](0).$$

Inoltre

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2-h^2-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0 = D_+[f](0).$$

. Poiché derivate destra e sinistra coincidono, f risulta derivabile in 0.
Derivabilità in $x = 1$: si noti che $f(1) = 1$, quindi

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{2-(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} -2-h = -2 = D_-[f](1).$$

Invece

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-1}{h} = 0 = D_+[f](1).$$

Derivate destra e sinistra di f in 1 non coincidono, perciò f non è derivabile in 1.
c) Il grafico della funzione è composto da due tratti di retta orizzontale e da un tratto di parabola ed è in Figura 3 e come vediamo la curva in $x_0 = 0$ è liscia (f è derivabile) mentre presenta in $x_1 = 1$ un punto angoloso (f non è derivabile).

Soluzione esercizio 3.
a) x è la quantità di materia prima che viene ordinata e quindi $x > 0$. Nell'anno il totale fabbisogno di materia prima è di 400t. e quindi, poiché ci sono dei costi di immagazzinamento, ciascuna ordinazione sarà non superiore a 400t. Dunque

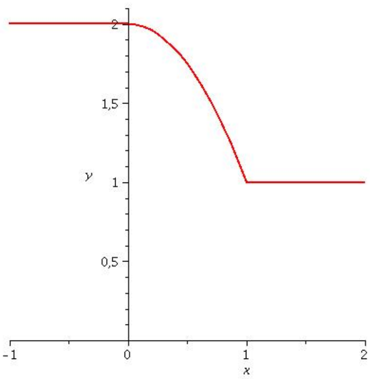


Figura 3: Grafico di $f(x)$

$x \in (0, 400]$.
b) Si determina l'andamento di C per stabilire la collocazione dei punti di minimo assoluto entro $(0, 400]$:

$$D[C](x) = 2\,\frac{x^2 - 40000}{x^2}.$$

che si annulla per $x = \pm 200$ ma solo il valore positivo appartiene a $(0, 400]$, perciò risulta $D[C](x) \geq 0$ in $(0, 400]$ se e solo se $x \geq 200$. Dunque il costo decresce in $(0, 200]$ e cresce in $[200, 400]$, perciò $C(x)$ raggiunge in $[0, 400]$ il suo valore minimo assoluto per $\hat{x} = 200$.

Soluzione esercizio 4.
a) La funzione $f := x \mapsto -4\,x^3 + 18\,x^2 - 24\,x + 7$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ in quanto polinomio. Possiamo quindi applicare il Teorema degli zeri (o il Teorema dei valori intermedi) per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 4]$.
I due punti $y_0 = f(0) = 7$ e $y_1 = f(4) = -57$ appartengono ad $\mathrm{Im}(f)$ e quindi per i teoremi citati anche il punto zero in quanto $y_0 > 0 > y_1$. L'equazione ha quindi almeno una soluzione.
b) Calcoliamo la derivata di f

$$D[f] = -12\,x^2 + 36\,x - 24 = 12\,(-\,x^2 + 3\,x - 2)$$

che si annulla nei due punti $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ la funzione non è quindi monotona ed inoltre abbiamo che $f(x_0) = -3$, $f(x_1) = -1$ sono rispettivamente un punto di minimo ed un punto di massimo locale che sono entrambi negativi quindi la funzione è positiva in zero, decresce fino al minimo negativo in uno, cresce fino al massimo, anch'esso negativo e poi decresce restando sempre negativa fino a quattro e quindi la funzione ha un solo zero nell'intervallo

$$[0,\ 1]$$

c) Poiché $f(1) = -3$ cerchiamo la soluzione in $[0,\ 1]$ che ha lunghezza uno ed è quindi migliore dell'intervallo originale.. La lunghezza dell'intervallo iniziale è uno e quindi l'errore iniziale è $\frac{1}{2}$, errore che si dimezza dopo ogni iterazione e che quindi diventa

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} < 0.1 = \frac{1}{10}$$

dopo tre iterazioni.
Soluzione esercizio 5.
a) Studiamo la funzione

$$f(x) = x\,e^{\frac{-1}{x^2}} = x\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Dominio. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne che nel punto $a = 0$ che annulla il denominatore dell'esponente dell'esponenziale.
La funzione è dispari e la studieremo quindi in $(0,\ +\infty)$.
Segno. La funzione è positiva per ogni $x > 0$ perché l'esponenziale è positiva.
Limiti/ Asintoti.

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{\frac{-1}{x^2}} = +\infty$$

Si tratta di un limite della forma $[\infty \cdot 1]$ che non è una forma indeterminata.
Il limite in $x = 0^+$ è una forma $[0 \cdot 0]$ che non è indeterminata

$$\lim_{x \to 0^+} x\,e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

La funzione non ha asintoti verticali.
Ricerchiamo ora eventuali asintoti obliqui, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\, e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = 1$$

e poi

$$\lim_{x\to+\infty} x\, e^{\frac{-1}{x^2}} - x = \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{-1}{x^2}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to0^+} \frac{e^{-z^2} - 1}{z} = \lim_{z\to0^+} -z\frac{e^{-z^2} - 1}{-z^2} = 0.$$

La funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$.
b) Poiché il limite di f nell'origine è zero possiamo definire la funzione in quel punto come $f(0) = 0$ in modo da renderla continua.
c) La derivata della funzione è

$$D[f](x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}\left(x^2+2\right)}{x^2}$$

che non si annulla mai. Lo studio del suo segno è immediato perché l'esponenziale e x^2 sono sempre positivi e quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$.
La derivata seconda di f è

$$D^2(f)(x) = -2\,\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}\left(x^2-2\right)}{x^5}$$

che si annulla per $x = \pm\sqrt{2}$, solo la radice positiva appartiene a $(0, +\infty)$. Lo studio del suo segno è immediato perché l'esponenziale e x^2 sono sempre positivi e quindi la funzione è convessa in $(0, \sqrt{2}]$ e concava in $[\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = \sqrt{2}$ è un punto di flesso.
d) Il suo grafico in tutto il suo dominio è descritto nella Figura 4

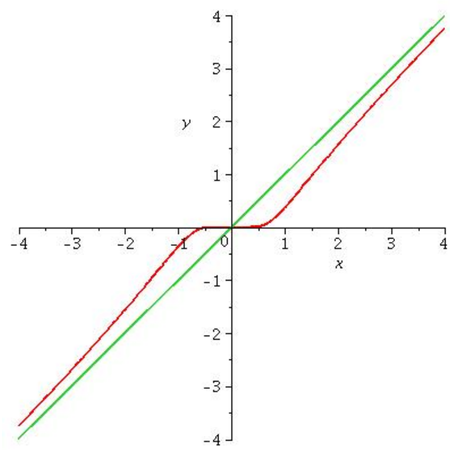


Figura 4: Grafico di $f(x)$

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 17 giugno 2014

1. **(6 punti)**

   (a) Si dia la definizione di funzione iniettiva.

   (b) Si dia la definizione di punto di minimo globale di una funzione.

   (c) Si consideri la funzione $f : [1/3, 4] \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [1/3, 4]$, $f(x) = x\log(x)$. Si stabilisca se essa è iniettiva e se ammette un punto di minimo globale.

2. **(6 punti)**

   (a) Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.

   (b) Si consideri la funzione

$$f : \left[0, \frac{9}{4}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & se \quad x \in \left[0, \frac{3}{2}\right) \\ x - \frac{5}{4} & se \quad x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right] \end{cases}.$$

   Si verifichi che

   i. f è continua in $\left[0, \frac{9}{4}\right]$;

   ii. f è derivabile in $\left(0, \frac{9}{4}\right)$;

   iii. f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0, \frac{9}{4}\right]$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log(1+x)) + \left(1 - \cos^2 x\right)}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} \ (\log(\sin(5x)) - \log x) \left(\frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$

4. **(6 punti)** Siano date le seguenti funzioni, tutte derivabili

$$f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

   Si assuma che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga $f'(x) > 0$, $g'(x) \geq 0$, $h'(x) > 0$.

   (a) Si dica se la funzione $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$l(x) = f(g(x)) + e^{h(x)}$$

   è una funzione crescente.

   (b) Se la funzione g ha un punto critico in x_0 (ovvero, $g'(x_0) = 0$), è vero che la funzione

$$m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad m(x) = f(g(2x))$$

   ha un punto critico in $\frac{x_0}{2}$?

5. **(6 punti)** Una impresa produce un bene B usando un solo input I. Fissate opportune unità di misura per B ed I, si ha che la funzione di produzione, cioè la funzione che esprime la quantità di bene prodotto in relazione alla quantità di input utilizzata, è data da

$$f(x) = 4x.$$

   Si ha inoltre che il prezzo di vendita di una unità di bene B è 1 e che la funzione di costo è data da

$$c(x) = x^2.$$

   Un'autorità di politica economica ha inoltre introdotto una imposta sul profitto π descritta come segue

$$t(\pi) = \frac{1}{8}\pi^2.$$

Dunque, il profitto in assenza di tassazione è

$$f(x) - c(x).$$

e il profitto in presenza di tassazione è

$$f(x) - c(x) - t(f(x) - c(x))$$

(a) Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in assenza di tassazione.

(b) Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in presenza di tassazione (Si ricordi che per ogni a e $b \in \mathbb{R}$, vale $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$).

6. **(10 punti)** Si disegni il grafico di
$$f(x) = x\left(3 - \log^2 x\right).$$
Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui; **si studi** il segno della derivata seconda.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame B, 17 giugno 2014

1. **(6 punti)**

   (a) Si dia la definizione di funzione iniettiva.

   (b) Si dia la definizione di punto di massimo globale di una funzione.

   (c) Si consideri la funzione $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [-2, 3]$, $f(x) = -xe^x$. Si stabilisca se essa è iniettiva e se ammette un punto di massimo globale.

2. **(6 punti)**

   (a) Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.

   (b) Si consideri la funzione

$$f : [-1, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x + 2 & se \quad x \in [-1, 1) \\ -3x^2 + 7x - 1 & se \quad x \in [1, 2] \end{cases}.$$

   Si verifichi che

   i. f è continua in $[-1, 2]$;

   ii. f è derivabile in $(-1, 2)$;

   iii. f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 2]$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - \left(1 - \cos^2 x\right)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\log\left(\sin\left(3x\right)\right) - \log x\right) \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$$

4. **(6 punti)** Siano date le seguenti funzioni, tutte derivabili

$$f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

   Si assuma che per ogni $x \in \mathbb{R}$, si abbia

$$f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad h(x) > 0,$$

$$f'(x) > 0, \quad g'(x) \geq 0,$$

$$h'(x) < 0.$$

   (a) Si dica se la funzione $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$l(x) = \frac{f(x)}{h(x)} + e^{g(x)}$$

   è una funzione crescente.

   (b) Se la funzione g ha un punto critico in x_0 (ovvero, $g'(x_0) = 0$), è vero che la funzione

$$m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad m(x) = f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

   ha un punto critico in $2x_0$?

5. **(6 punti)** Una impresa produce un bene B usando un solo input I. Fissate opportune unità di misura per B ed I, si ha che la funzione di produzione, cioè la funzione che esprime la quantità di bene prodotto in relazione alla quantità di input utilizzata, è data da

$$f(x) = 2x.$$

Si ha inoltre che il prezzo di vendita di una unità di bene B è 1 e che la funzione di costo è data da

$$c(x) = x^2.$$

Un'autorità di politica economica ha inoltre introdotto una imposta sul profitto descritta come segue

$$t(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Dunque, il profitto in assenza di tassazione è

$$f(x) - c(x).$$

e il profitto in presenza di tassazione è

$$f(x) - c(x) - t(f(x) - c(x))$$

(a) Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in assenza di tassazione.

(b) Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in presenza di tassazione (Si ricordi che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$).

6. **(10 punti)** Si disegni il grafico di

$$f(x) = x\left(\log^2 x - 3\right).$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui; **si studi** il segno della derivata seconda.

Soluzioni Fila A

Esercizio 1

Per i punti a) e b) si consulti il libro di testo. Per risolvere il punto c) operiamo come segue. Osserviamo che la funzione è derivabile in $(1/3, 4)$ e in tale intervallo

$$f'(x) = \log(x) + 1.$$

Da ciò segue che $f'(x) < 0$ in $(1/3, e^{-1})$, e $f'(x) > 0$ in $(e^{-1}, 4)$. Pertanto la funzione è decrescente in $[1/3, e^{-1}]$ e crescente in $[e^{-1}, 4]$. Ciò implica che la funzione ammette un minimo globale nel punto e^{-1} e valore minimo $-e^{-1}$. Osservo adesso che $f(1/3) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)$ e che $f(4) = 4\log(4)$ da cui segue che $f(e^{-1}) < f(1/3) < f(4)$. Scegliendo dunque un qualsiasi numero reale $l \in (f(e^{-1}), f(1/3)) \subseteq (f(e^{-1}), f(4))$ e applicando il teorema dei valori intermedi agli intervalli $[1/3, e^{-1}]$ e $[e^{-1}, 4]$, si ha che esiste $x_1 \in (1/3, e^{-1})$ tale che $f(x_1) = l$ e che esiste $x_2 \in (e^{-1}, 4)$ tale che $f(x_2) = l$. Poiché $x_1 \neq x_2$ abbiamo che f non è iniettiva.

Esercizio 2

Data la continuità e derivabilità delle funzioni polinomio è sufficiente studiare la continuità e la derivabilità nel punto $\frac{3}{2}$. Dato che la derivabilità implica la continuità è sufficiente verificare la derivabilità in tal punto.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} \frac{x^2 - 2x + 1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)}{x - \frac{3}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \frac{x - \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)}{x - \frac{3}{2}} = 1.$$

Dunque f è continua in $\left[0, \frac{9}{4}\right]$ e derivabile in $\left(0, \frac{9}{4}\right)$.
$f(0) = 1 = f\left(\frac{9}{4}\right)$. Dunque le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

Esercizio 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log(1+x)) + \left(1 - \cos^2 x\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\log(1+x))}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cdot x} x = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} (\log(\sin(5x)) - \log x) = \lim_{x\to 0} \log\left(\frac{\sin(5x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \log\left(\frac{\sin 5x}{5x} 5\right) = \log 5.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = 2$$

Dunque il limite cercato è $2\log 5$.

Esercizio 4

(a)

$$l'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) + h'(x) \cdot e^{h(x)} > 0,$$

e dunque l è strettamente crescente e dunque crescente.

(b)

$$m'(x) = f'(g(2x)) \cdot g'(2x) \cdot 2$$

$$m'\left(\frac{x_0}{2}\right) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot 2 = 0$$

Esercizio 5

Il problema relativo alla massimizzazione dei profitti senza tassazione consiste nel trovare il massimo della funzione $\pi(x) = 4x - x^2$ su $[0, +\infty)$. Si ha dunque che il piano ottimale di produzione consiste nell'utilizzo di 2 unità di I per la produzione di 8 unità di B. Il profitto è inoltre 4. Si osserva inoltre che i profitti dell'impresa sono positivi o nulli se e solo $x \in [0, 4]$.

La determinazione del piano ottimale di produzione in presenza di tassazione può dunque essere effettuata determinando il massimo della funzione

$$\widetilde{\pi}(x) = f(x) - c(x) - t(f(x) - c(x)) = (4x - x^2) - \frac{1}{8}(4x - x^2)^2$$

sull'insieme $[0, 4]$. Si ha che

$$\widetilde{\pi}(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x$$

e

$$\widetilde{\pi}'(x) = -\frac{1}{2}\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) = -\frac{1}{2}(x-2)^3$$

Anche in questo caso si ha dunque che il piano ottimale di produzione consiste nell'utilizzo di 2 unità di I per la produzione di 8 unità di B. In questo caso il profitto finale è 2.

Esercizio 6

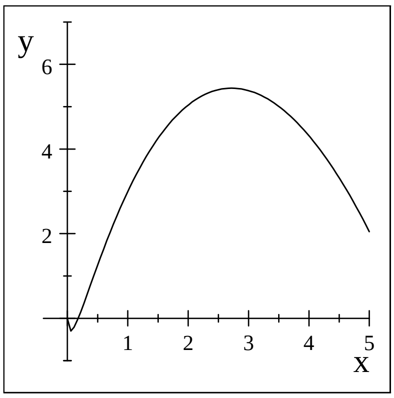
1. Dominio.
$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
2. Intercette con gli assi.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 = \log^2 x = 0 \Leftrightarrow \pm\sqrt{3} = \log x \Leftrightarrow x = e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}}$.
3. f pari, dispari, periodica.
No.
4. Segno della funzione.
$f(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - \log^2 x > 0 \Leftrightarrow e^{-\sqrt{3}} < x < e^{\sqrt{3}}$.
5. Comportamento all'infinito e nei punti di discontinuità e sulla frontiera dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to 0+} x\left(3 - \log^2 x\right) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left(3 - \log^2 x\right) = -\infty$$

6. Derivata prima.
$f'(x) = 3 - \log^2 x - 2\log x$.
Posto $t = \log x$, si ha $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1, -3, \Leftrightarrow x = e, e^{-3}$, e

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [e^{-3}, e].$$

e la funzione ha un minimo in $e^{-3} \approx 4.9787 \times 10^{-2}$ e un massimo in e.
7. Derivata seconda
$f''(x) = -2\log(x) \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x} = -2\frac{\log(x)+1}{x} \geq 0$ se $x \leq e^{-1}$. Dunque f è convessa se $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ e concava altrimenti.
$\frac{1}{e} \approx 0.36788$



Soluzioni Fila B

Esercizio 1

Per i punti a) e b) si consulti il libro di testo. Per risolvere il punto c) operiamo come segue. Osserviamo che la funzione è derivabile in $(-2,3)$ e che in tale intervallo

$$f'(x) = -xe^x - x = -e^x(x+1).$$

Da ciò segue che $f'(x) > 0$ in $(-2,-1)$, e $f'(x) < 0$ in $(-1,3)$. Pertanto la funzione è crescente in $[-2,-1]$ e decrescente in $[-1,3]$. Ciò implica che la funzione ammette un massimo globale nel punto -1 e valore massimo e^{-1}. Osserviamo adesso che $f(-2) = 2e^{-2}$ e che $f(3) = -3e^3$ da cui segue che $f(-1) > f(-2) > f(3)$. Scegliendo dunque un qualsiasi numero reale $l \in (f(-2), f(-1)) \subseteq (f(3), f(-1))$ e applicando il teorema dei valori intermedi agli intervalli $[-2,-1]$ e $[-1,3]$, si ha che esiste $x_1 \in (-2,-1)$ tale che $f(x_1) = l$ e che esiste $x_2 \in (-1,3)$ tale che $f(x_2) = l$. Poiché $x_1 \neq x_2$ abbiamo che f non è iniettiva.

Esercizio 2

Data la continuità e derivabilità delle funzioni polinomio è sufficiente studiare la continuità e la derivabilità nel punto 1. Dato che la derivabilità implica la continuità è sufficiente verificare la derivabilità in tal punto.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+2) - (-3+7-1)}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(-3x^2+7x-1) - (-3+7-1)}{x-1} = 1.$$

Dunque f è continua in $[-1,2]$ e derivabile in $(-1,2)$.
$f(-1) = 1 = f(2)$. Dunque le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

Esercizio 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \left(1-\cos^2 x\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 1 - \lim_{x^+\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cdot x}\cdot x = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} (\log(\sin(3x)) - \log x) = \lim_{x\to 0} \log\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}3\right) = \log 3.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$$

Dunque il limite cercato è zero.

Esercizio 4.

(a)

$$l'(x) = \frac{\overset{(>0)}{f'(x)} \cdot \overset{(>0)}{h(x)} - \overset{(>0)}{f(x)} \cdot \overset{(<0)}{h'(x)}}{(h(x))^2} + \overset{(\geq 0)}{g'(x)} \cdot \overset{(>0)}{e^{g(x)}} > 0$$

e l è una funzione strettamente crescente e dunque crescente.

(b)

$$m'(x) = f'\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot g'\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$m'(2x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Esercizio 5.

Il problema relativo alla massimizzazione dei profitti senza tassazione consiste nel trovare il massimo della funzione $\pi(x) = 2x - x^2$ su $[0,+\infty)$. Si ha dunque che il piano ottimale di produzione consiste nell'utilizzo di 1 unità di I per la produzione di 1 unità di B. Il profitto è inoltre 1. Si osserva inoltre che i profitti dell'impresa sono positivi o nulli se e solo $x \in [0,2]$.

La determinazione del piano ottimale di produzione in presenza di tassazione può dunque essere effettuata determinando il massimo della funzione

$$\widetilde{\pi}(x) = f(x) - c(x) - t(f(x) - c(x)) = (2x - x^2) - \frac{1}{2}(2x - x^2)^2$$

sull'insieme $[0, 2]$. Si ha che

$$\widetilde{\pi}(x) = -\frac{1}{2}\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x\right)$$

e

$$\widetilde{\pi}'(x) = -2\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = -2(x-1)^3$$

Anche in questo caso si ha dunque che il piano ottimale di produzione consiste nell'utilizzo di 1 unità di I per la produzione di 1 unità di B. In questo caso il profitto finale è $\frac{1}{2}$.

Esercizio 6.

Il grafico di questa funzione e' uguale al grafico della funzione dell'esercizio dell'altra fila *cambiato di segno.*

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 7 luglio 2014

1. **(5 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = -2kx + |x|$. Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che

   (i) f sia crescente in $\mathbb{R}$,

   (ii) f sia decrescente in $\mathbb{R}$,

   (iii) f abbia minimo globale in $\mathbb{R}$,

   (iv) f abbia massimo globale in $\mathbb{R}$.

2. **(6 punti)** (a) Si fornisca la definizione di funzione continua in un punto.

   (b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che
$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \geq 2 \\ e^{bx} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$
   Si determinino tutti i valori dei parametri a, b in $\mathbb{R}$ tali che

   (i) f risulti continua in $x = 2$,

   (ii) f risulti derivabile in $x = 2$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

   (a)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} - x^2\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x^5+3}}$$
   (b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{\log(1+x^2)}$$

4. **(6 punti)** (a) Si enunci il teorema (la formula) di Taylor, specificando le proprietá del resto.

   (b) Per la funzione $f(x) = (27 - 2x)^{4/3}$ si scriva la formula di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado 2.

   (c) Usando la formula di Taylor ricavata al punto (b), si calcoli un'approssimazione (razionale) di $25^{4/3}$.

5. **(8 punti)** Si consideri un'impresa che produce un bene in quantità y usando un input x come descritto dalla seguente funzione di produzione
$$y = f(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 4x, \qquad \text{per } x \in [0, +\infty).$$
   Sia 1 il prezzo di ogni unità di prodotto e $c(x) = x$ la funzione di costo, in modo che la funzione di profitto sia
$$f(x) - c(x)$$
   Dato che l'input è una sostanza inquinante, un'autorità di politica economica decide di tassare l'input usato dall'impresa. Tale autorità deve scegliere tra una delle due seguenti funzioni di imposta:
$$t_1(x) = \frac{10}{3}x, \qquad \text{o} \qquad t_2(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$
   Si assuma che la funzione di imposta, una volta decisa, venga comunicata all'impresa, la quale quindi massimizzerà il profitto al netto dell'imposta. Si risolvano i due problemi di massimizzazione.

   Se l'autorità di politica economica vuole massimizzare le entrate ricavate dall'imposta, quale delle due funzioni deve scegliere?

6. **(9 punti)** Si studi la funzione
$$f(x) = \frac{-5}{x^2 - 2x - 3} + 1$$
   e si disegni il suo grafico.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame B, 7 luglio 2014

1. **(5 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = kx - |x|$. Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che
   (i) f sia crescente in $\mathbb{R}$,
   (ii) f sia decrescente in $\mathbb{R}$,
   (iii) f abbia minimo globale in $\mathbb{R}$,
   (iv) f abbia massimo globale in $\mathbb{R}$.

2. **(6 punti)** (a) Si fornisca la definizione di funzione derivabile in un punto.
   (b) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione tale che
   $$f(x) = \begin{cases} a \log x & \text{se} \quad x > 3 \\ \frac{b}{x} & \text{se} \quad 0 < x \leq 3 \end{cases}$$
   Si determinino tutti i valori dei parametri a, b in $\mathbb{R}$ tali che
   (i) f risulti continua in $x = 3$,
   (ii) f risulti derivabile in $x = 3$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti
   (a)
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(\sqrt{x} + 2)^2 - 4}$$
   (b)
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{\sqrt{e^{x^4} + 1}}$$

4. **(6 punti)** (a) Si enunci il teorema (la formula) di Taylor, specificando le proprietá del resto.
   (b) Per la funzione $f(x) = (8 - 2x)^{1/3}$ si scriva la formula di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado 2.
   (c) Usando la formula di Taylor ricavata al punto (b), si calcoli un'approssimazione (razionale) di $10^{1/3}$.

5. **(8 punti)** Si consideri un'impresa che produce un bene in quantità y usando un input x come descritto dalla seguente funzione di produzione
   $$y = f(x) = \log(1 + 2x) + 5x, \qquad \text{per } x \in [0, +\infty).$$
   Sia 1 il prezzo di ogni unità di prodotto e $c(x) = 2x$ la funzione di costo, in modo che la funzione di profitto sia
   $$f(x) - c(x)$$
   Dato che l'input è una sostanza inquinante, un'autorità di politica economica decide di tassare l'input usato dall'impresa. Tale autorità deve scegliere tra una delle due seguenti funzioni di imposta:
   $$t_1(x) = \frac{7}{2}x, \qquad \text{o} \qquad t_2(x) = 3x^2 + x.$$
   Si assuma che la funzione di imposta, una volta decisa, venga comunicata all'impresa, la quale quindi massimizzerà il profitto al netto dell'imposta. Si risolvano i due problemi di massimizzazione.
   Se l'autorità di politica economica vuole massimizzare le entrate ricavate dall'imposta, quale delle due funzioni deve scegliere?

6. **(9 punti)** Si studi la funzione
   $$f(x) = \frac{7}{x^2 + 4x - 5} - 1$$
   e si disegni il suo grafico.

3.4.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1. Esplicitando il valore assoluto abbiamo che

$$f(x) = \begin{cases} (-2k+1)x, & \text{se } x \geq 0 \\ (-2k-1)x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si tratta di due semirette che si raccordano nell'origine $f(0) = 0$.

Per comprendere lo svolgimento dei punti successivi disegnamo il grafico di alcune funzioni di questo tipo che illustrano diverse possibili situazioni

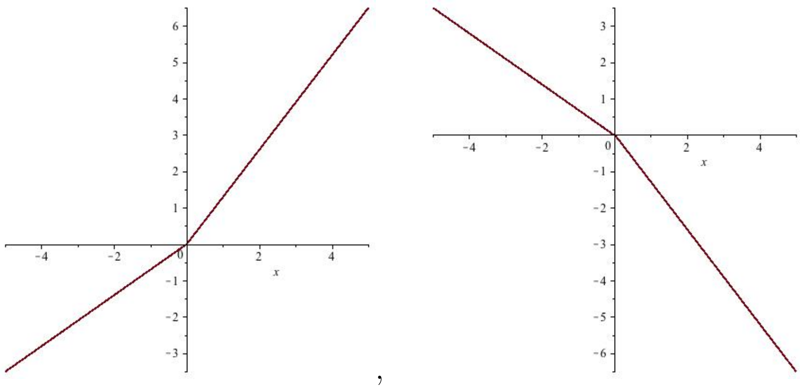


Figura 3.13: Grafico di funzioni lineari a tratti crescenti e decrescenti

i) f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se i due coefficienti angolari (derivate) sono entrambi positivi

$$\begin{cases} -2k+1 > 0 \\ -2k-1 > 0 \end{cases}$$

e questo accade quando

$$k < \frac{1}{2} \;\text{ e }\; k < -\frac{1}{2}.$$

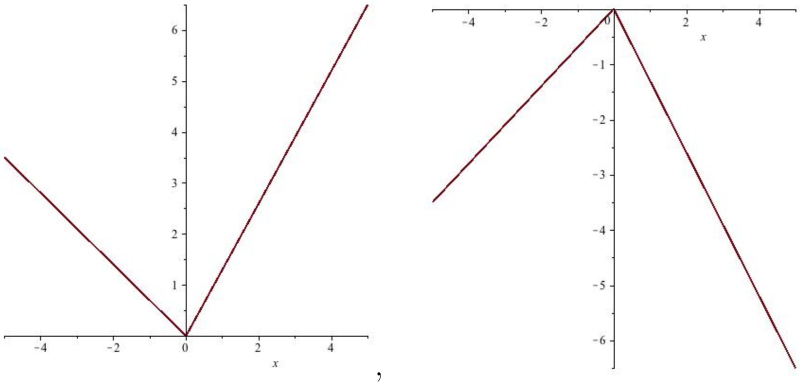


Figura 3.14: Grafico di funzioni lineari a tratti con un minimo e un massimo globale

Pertanto f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k < -\frac{1}{2}.$$

ii) f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se i due coefficienti angolari (derivate) sono entrambi negativi

$$\begin{cases} -2k+1<0 \\ -2k-1<0 \end{cases}$$

e ciò accade quando

$$k > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < k.$$

Pertanto f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k > \frac{1}{2}$$

iii) Trattandosi di due semirette le funzione può avere un estremo locale e quindi globale soltanto nell'origine. In particolare la funzione f ha un minimo globale in $x_0 = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} -2k+1 \geq 0 \\ -2k-1 \leq 0 \end{cases}$$

e questo accade se e solo se

$$k \leq \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad k \geq -\frac{1}{2}.$$

Quindi f ha minimo globale se e solo se

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}.$$

iv) Analogamente f ha massimo globale in $x_0 = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} -2k + 1 \leq 0 \\ -2k - 1 \geq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k \geq \frac{1}{2}, \text{ e } k \leq -\frac{1}{2}.$$

Pertanto f non ha mai massimo globale.

Soluzione Esercizio 2.
a) Si rinvia al libro di testo.
b) Punto i). f è continua in $x = 2$ se e solo se

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax = 2a$$

e

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} e^{bx} = e^{2b}$$

inoltre $f(2) = 2a$. Quindi f è continua se e solo se

$$e^{2b} = 2a \tag{3.1}$$

Punto ii). Ricordiamo che condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile in un punto è che essa sia continua in tale punto. Quindi affinché f sia derivabile in $x = 2$ deve valere la (3.1). Una volta stabilita la continuità possiamo notare che a sinistra e a destra di $x = 2$ la nostra funzione coincide con due funzioni derivabili le cui derivate in $x = 2$ sono

$$D[a\,x]_{|x=2} = a, \quad D[e^{b\,x}]_{|x=2} = b\,e^{2\,b}$$

e quindi necessario che

$$a = b\,e^{2\,b}.$$

Pertanto f è derivabile (e continua) in $x = 2$ se e solo se

$$\begin{cases} e^{2b} = 2a \\ be^{2b} = a. \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} e^{2b} = 2a \\ be^{2b} = \frac{1}{2}e^{2b}. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione dividendo per e^{2b} otteniamo $b = \frac{1}{2}$, dalla prima equazione si ha che $2a = e^{2\frac{1}{2}} = e$. In definitiva f è derivabile in $x = 2$ se e solo se

$$a = \frac{1}{2}e, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Soluzione Esercizio 3.
a) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} - x^2\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x^5+3}}.$$

Per calcolare questo limite dobbiamo capire qual'è il termine di grado più alto nel denominatore e nel numeratore, per fare questo dobbiamo sviluppare il quadrato al numeratore

$$\begin{aligned} x^3 - \sqrt{x} - x^2\left(\sqrt{x}+2\right)^2 &= x^3 - \sqrt{x} - x^2\left(x + 4\sqrt{x} + 4\right) = \\ &= x^3 - \sqrt{x} - \left(x^3 + 4x^2\sqrt{x} + 4x^2\right) = \\ &= -4x^2\sqrt{x} - 4x^2 - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Quindi il termine di grado più alto al numeratore è $-4x^2\sqrt{x}$ e al denominatore è $\sqrt{x^5+3}$ enrambi di grado $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} - x^2\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x^5+3}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x^5+3}} = \\ &= -4 \end{aligned}$$

b) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{\log(1+x^2)}.$$

Il limite è della forma $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Osservando che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\left(e^{2x^2}-1\right)}{\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}$$

e ricordando i due limiti notevoli

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\log(t+1)}{t}=1$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}=2.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\log(1+x^2)}=2.$$

Soluzione Esercizio 4.

a) La formulazione del teorema di Taylor e il calcolo del resto si trova nel libro. C'è un errore di battitura nella espressione per il resto nella formula [5.5], p. 185 del libro [Z]; corretta è la formula che appare alla fine della dimostrazione (p.186) o nell'errata corrige on-line:

$$R_n(x)=\frac{D^{n+1}f(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},\ \theta\in[c,x].$$

b) Calcolando le derivate della funzione $f(x)=(27-2x)^{4/3}$ vediamo, che

$$f'(x)=\frac{-8}{3}(27-2x)^{1/3},\ f''(x)=\frac{16}{9}(27-2x)^{-2/3}$$

e quindi

$$f(0)=27^{4/3}=81,\quad f'(0)=-8,\ f''(0)=\frac{16}{81}.$$

La formula di Taylor si scrive come

$$f(x)=81-\frac{8}{1!}x+\frac{1}{2!}\frac{16}{81}x^2+R_2(x)=81-8x+\frac{8}{81}x^2+R_2(x).$$

c) Il valore approssimato di $25^{4/3}$ si trova sostituendo $x=1$ nel polinomio di Taylor che abbiamo trovato ottenendo

$$25^{4/3}=f(1)\approx 81-8\cdot 1+\frac{8}{81}\cdot 1=73+\frac{8}{81}.$$

Soluzione Esercizio 5. Il profitto (lordo) dell'impresa prima della tassazione è

$$P(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 4\,x - x = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 3\,x$$

Se l'autorità di politica economica applica la tassazione $t_1(x)$ il profitto dell'impresa al netto della tassazione è

$$P_1(x) = P(x) - t_1(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 3x - \frac{10x}{3} = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{3}.$$

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$D[P]_1(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{x}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{1 - x}{3(2 + x)}.$$

È ovvio $D[P]_1(x) > 0$ in $[0, 1)$, mentre $D[P]_1(x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 1)$ e decresce $(1, +\infty)$. Allora $x_1 = 1$ è un punto di massimo globale per P_1 ed è la scelta ottima dell'impresa in questo caso. Il valore della tassazione nel punto x_1 è uguale a $t_1(1) = 10/3$.

In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 3x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = \frac{1}{2 + x} + 2 - x = \frac{5 - x^2}{2 + x},$$

e studiandola per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, \sqrt{5})$, $P_2'(x) < 0$ in $(\sqrt{5}, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, \sqrt{5})$ e decresce $(\sqrt{5}, +\infty)$. Allora $x_2 = \sqrt{5}$ è il punto di massimo globale per $P_2(x)$ ed è la scelta ottima dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore di tassazione è $t_2(\sqrt{5}) = \frac{5}{2} + \sqrt{5}$.

Vediamo che

$$t_1(x_1) = \frac{10}{3} < 4,$$

mentre

$$t_2(x_2) = \frac{5}{2} + \sqrt{5} > \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} > 4,$$

quindi la miglior scelta di tassazione per l'autorità economica è t_2.

Soluzione Esercizio 6.

Dominio. Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{-5}{x^2 - 2x - 3} + 1$$

è definito dalla condizione $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \neq 0$ e quindi

$$Dom(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \wedge x \neq 3\}\,.$$

.

Altre proprietà. La funzione non è né pari né dispari; ad esempio $f(2) = 8/3, f(-2) = 0$.

Intersezioni con gli assi. Intersezione con l'asse Oy è il punto $(0, f(0)) = (0, 8/3)$. Per calcolare l'intersezione(-i) con asse Ox trasformiamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-3)(x+1)},$$

da quale concludiamo che gli zeri della funzione sono $x_1 = -2, x_2 = 4$

Segno. La funzione cambia il segno nei punti $x = -2, x = -1, x = 3, x = 4$.

Limiti e asintoti. È ovvio che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ e quindi $y = 1$ è l'asintoto orizzontale della funzione per $x \to \pm\infty$.
Concludiamo anche che $x = -1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali; possiamo calcolare i limiti

$$\lim_{x \to -1\mp} f(x) = \mp\infty, \;\; \lim_{x \to 3\mp} f(x) = \pm\infty.$$

Derivata prima. La derivata prima

$$f'(x) = \frac{10(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

cambia segno in un unico punto $x_c = 1$. La funzione $f(x)$ è decrescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, 1)$ ed è crescente negli intervalli $(1, 3)$ e $(3, +\infty)$.

Derivata seconda. La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{10(3x^2 - 6x + 7)}{(x^2 - 2x - 3)^3};$$

il numeratore è positivo, invece il denominatore cambia il segno nei punti $x = -1, x = 3$. Tutto sommato $f''(x) > 0$ e la funzione è convessa in $(-1, 3)$ e $f''(x) < 0$ e la funzione è concava in $(-\infty, -1)$ e in $(3, \infty)$.

Grafico. Il grafico della funzione è in Figura 3.15

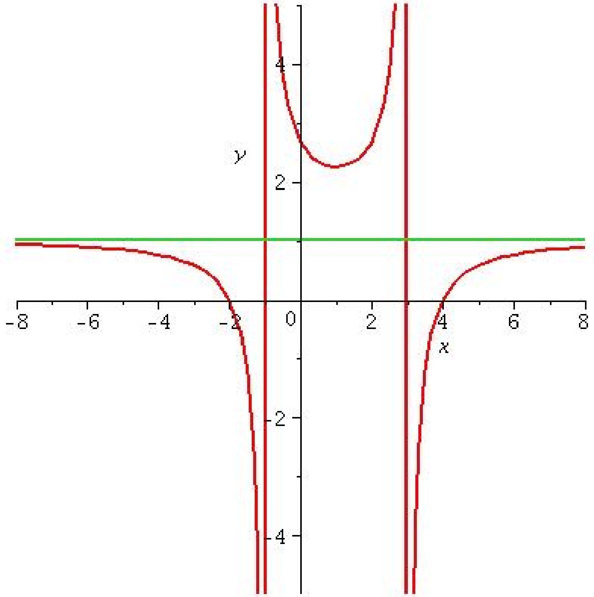


Figura 3.15: Grafico della funzione

3.4.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1. Esplicitando il valore assoluto abbiamo che

$$f(x) = \begin{cases} (k-1)x, & \text{se } x \geq 0 \\ (k+1)x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si tratta di due semirette che si raccordano nell'origine $f(0) = 0$. Per comprendere lo svolgimento dei punti successivi disegnamo il grafico di alcune funzioni di questo tipo che illustrano diverse possibili situazioni

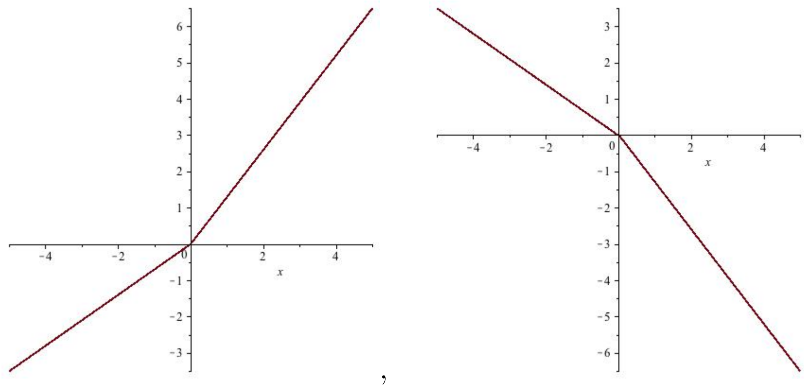


Figura 3.16: Grafico di funzioni lineari a tratti crescenti e decrescenti

i) f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se i due coefficienti angolari (derivate) sono entrambi positivi

$$\begin{cases} k-1 > 0 \\ k+1 > 0 \end{cases}$$

e questo accade quando

$$k > 1 \;\text{ e }\; k > -1.$$

Pertanto f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k > 1.$$

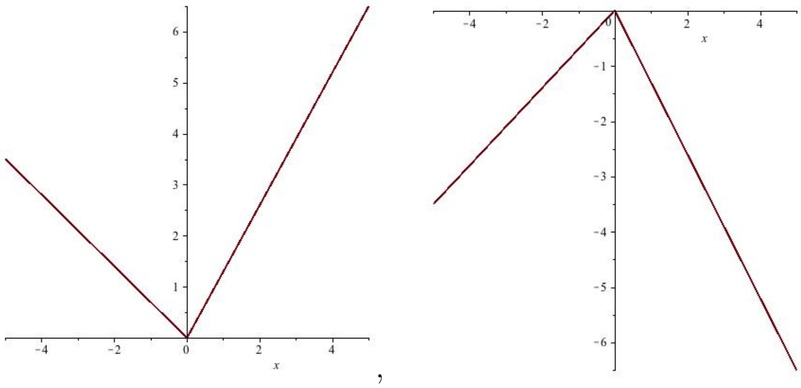


Figura 3.17: Grafico di funzioni lineari a tratti con un minimo e un massimo globale

ii) f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se i due coefficienti angolari (derivate) sono entrambi negativi

$$\begin{cases} k-1<0 \\ k+1<0 \end{cases}$$

e ciò accade quando

$$k<1 \quad \text{e} \quad k<-1.$$

Pertanto f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se $k<-1$.
iii) Trattandosi di due semirette le funzione può avere un estremo locale e quindi globale soltanto nell'origine. In particolare la funzione f ha un minimo globale in $x_0=0$ se e solo se

$$\begin{cases} k-1\geq 0 \\ k+1\leq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k\geq 1, \quad \text{e} \quad k\leq -1.$$

Quindi f non ha mai ha minimo globale
iv) Analogamente f ha massimo globale , se e solo se

$$\begin{cases} k-1\leq 0 \\ k+1\geq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k\leq 1, \quad \text{e} \quad k\geq -1.$$

Pertanto f ha massimo globale globale se e solo se

$$-1\leq k\leq 1.$$

Soluzione Esercizio 2.
a) Si rinvia al libro di testo.
b) Punto i). f è continua in $x = 3$ se e solo se

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} a\log(x) = a\log(3)$$

e

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{b}{x} = \frac{b}{3}$$

inoltre $f(3) = \frac{b}{3}$. Quindi f è continua se e solo se

$$a\log(3) = \frac{b}{3} \tag{3.2}$$

Punto ii) ricordiamo che condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile in un punto è che essa sia continua in tale punto. Quindi affinché f sia derivabile in $x = 3$ deve valere la (3.2). Una volta stabilita continuità possiamo notare che a sinistra e a destra di $x = 3$ la nostra funzione coincide con due funzioni derivabili le cui derivate in $x = 3$ sono

$$D[\frac{b}{x}]_{|x=3} = -\frac{b}{9}, \quad D[a\ \log(x)]_{|x=3} = \frac{a}{3}$$

e quindi necessario che

$$\frac{a}{3} = -\frac{b}{9}.$$

Pertanto f è derivabile in $x = 3$ se e solo se

$$\begin{cases} a\log(3) = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{3} = -\frac{b}{9} \end{cases}.$$

Questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -\frac{b}{3}\log(3) = \frac{b}{3} \\ a = -\frac{b}{3} \end{cases}.$$

Ora, poiché $\log(3) \neq -1$ la prima equazione è vera soltanto per $b = 0$ e dalla seconda equazione si ottiene che anche $a = 0$. In definitiva f è derivabile in $x = 3$ se e solo se $a = b = 0$.

Soluzione Esercizio 3.

a) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1-(\sqrt{x}-1)^3}{(\sqrt{x}+2)^2-4}$$

Sviluppiamo le due potenze al numeratore ed al denominatore

$$\begin{aligned} x^2-1-\left(\sqrt{x}-1\right)^3 &= x^2-1-\left((\sqrt{x})^3-3x+3\sqrt{x}-1\right) = \\ &= x^2-(\sqrt{x})^3+3x-3\sqrt{x} = \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{x}+2\right)^2-4 \quad = \quad \left(x+4\sqrt{x}+4\right)-4 = x+4\sqrt{x}$$

I due termini di grado più basso al numeratore ed al denominatore sono rispettivamente $-3\sqrt{x}$ e $4\sqrt{x}$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1-(\sqrt{x}-1)^3}{(\sqrt{x}+2)^2-4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = -\frac{3}{4}.$$

b) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}+\log x}{\sqrt{e^{x^4}+1}}.$$

Poiché sappiamo confrontare gli infiniti possiamo dire che il termine prevalente al numeratore è e^{x^2} mentre al denominatore è $\sqrt{e^{x^4}} = e^{\frac{x^4}{2}}$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}+\log x}{\sqrt{e^{x^4}+1}} = \lim_{x\to+\infty} = \frac{e^{x^2}}{e^{\frac{x^4}{2}}} = 0.$$

poiché prevale la potenza maggiore.

Soluzione Esercizio 4. a) La formulazione del teorema di Taylor e il calcolo del resto si trova nel libro. C'è un errore di battitura nella espressione per il resto nella formula [5.5], p. 185 del libro [Z] mentre è corretta è la formula che appare alla fine della dimostrazione (p.186)o nell'errata corrige on-line:

$$R_n(x) = \frac{D^{n+1}f(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},\ \theta \in [c,x].$$

b) Calcolando le derivate della funzione $f(x) = (8-2x)^{1/3}$ vediamo, che

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(8-2x)^{-2/3},\ f''(x) = -\frac{8}{9}(8-2x)^{-5/3}.$$

e quindi

$$f(0) = 8^{1/3} = 2,\ f'(0) = -1/6,\ f''(0) = -\frac{1}{36}.$$

La formula di Taylor si scrive come:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{6}\frac{x}{1!} - \frac{1}{2!}\frac{1}{36}x^2 + R_2(x) = 2 - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} + R_2(x).$$

c) Il valore approssimato $10^{1/3}$ si ottiene sostituendo $x = -1$ nel polinomio di Taylor che abbiamo trovato, ottenendo

$$10^{1/3} = f(-1) \approx 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} = 2 + \frac{11}{72} = \frac{155}{72}$$

.

Soluzione Esercizio 5. Il profitto (lordo) dell'impresa prima della tassazione è

$$P(x) = \log(1 + 2x) + 5x - 2x = \log(1 + 2x) + 3x.$$

Se l'autorità di politica economica applica la tassazione $t_1(x) = \frac{7}{2}x$ il profitto dell'impresa al netto della tassazione è

$$P_1(x) = P(x) - t_1(x) = \log(1 + 2x) + 3x - \frac{7}{2}x = \log(1 + 2x) - \frac{1}{2}x.$$

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$P_1'(x) = \frac{2}{1 + 2x} - \frac{1}{2} = \frac{3 - 2x}{2(1 + 2x)}.$$

Da cui risulta che $P_1'(x) > 0$ in $[0, 3/2)$, mentre $P_1'(x) < 0$ in $(3/2, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 3/2)$ e decresce in $(3/2, +\infty)$. Allora $x_1 = 3/2$ è un punto di massimo globale per P_1 e la scelta dell'impresa in questo caso. Il valore della tassazione nel punto x_1 è uguale a $t_1(3/2) = \frac{21}{4}$. In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = \log(1 + 2x) + 3x - \big(3x^2 + x\big) = \log(1 + 2x) + 2x - 3x^2.$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = \frac{2}{1 + 2x} + 2 - 6x = \frac{4 - 2x - 12x^2}{1 + 2x},$$

e studiando-la per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, 1/2)$, $P_2'(x) < 0$ in $(1/2, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, 1/2)$ e decresce

$(1/2, +\infty)$. Allora $x_2 = 1/2$ è il punto del massimo globale per $P_2(x)$ e la scelta dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore di tassazione è $t_2(1/2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Vediamo che $t_1(x_1) = \frac{21}{4} > t_2(x_2) = \frac{5}{4}$ e quindi la miglior scelta di tassazione per l'autorità economica è t_1.

Soluzione Esercizio 6.

Dominio. Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 4x - 5} - 1$$

è definito dalla condizione $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1) \neq 0$ e quindi

$$Dom(f) := \{x \neq -5 \wedge x \neq 1.\}$$

Pari - dispari. La funzione ne è pari ne dispari; ad esempio $f(2) = 0, f(-2) = -16/9$.

Intersezione con gli assi. Intersezione con l'asse Oy è il punto $(0, f(0)) = (0, -12/5)$. Per calcolare l'intersezione(-i) con l'asse Ox trasformiamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \frac{-x^2 - 4x + 12}{x^2 + 4x - 5} = -\frac{(x + 6)(x - 2)}{(x + 5)(x - 1)},$$

e quindi concludiamo che gli zeri della funzione sono $x_1 = -6, x_2 = 2$.

Segno della funzione. La funzione cambia il segno nei punti $x = -6, x = -5, x = 1, x = 2$.

Limit e asintoti. È ovvio che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$ e quindi $y = -1$ è l'asintoto orizzontale della funzione per $x \to \pm\infty$.

Concludiamo anche che $x = -5$ e $x = 1$ sono asintoti verticali; possiamo calcolare i limiti

$$\lim_{x\to -5\mp} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x\to 1\mp} f(x) = \mp\infty.$$

Derivata prima. La derivata prima

$$f'(x) = -\frac{14(x+2)}{(x^2+4x-5)^2}$$

cambia segno in un unico punto $x_c = -2$. La funzione $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty, -5)$ e $(-5, -2)$ ed è decrescente negli intervalli $(-2, 1)$ e $(1, +\infty)$.

Derivata seconda. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{42(x^2+4x+7)}{(x^2+4x-5)^3};$$

il numeratore è positivo, invece il denominatore cambia il segno nei punti $x = -5$ e $x = 1$. Allora $f''(x) > 0$ e la funzione è convessa in $(-\infty, -5)$ e $(1, +\infty)$ in quanto $f''(x) < 0$ e la funzione è concava in $(-5, 1)$.

Grafico. Il grafico della funzione è

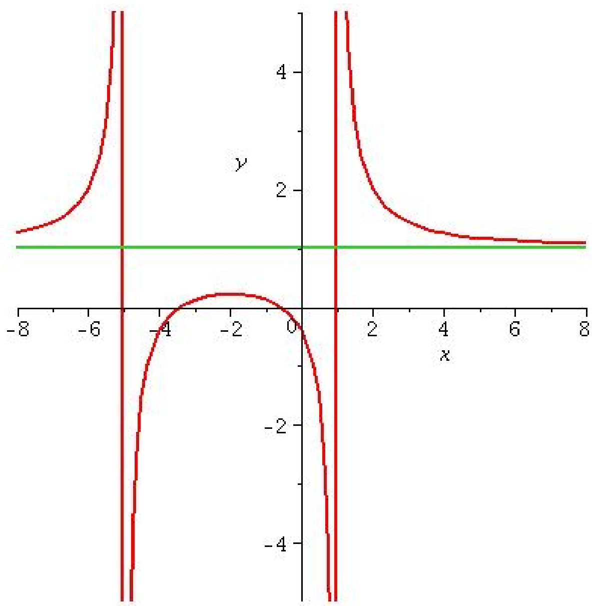


Figura 3.18: Grafico della funzione

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 11 settembre 2014

1. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)\sqrt{\ln(1+2x^2)}}{x^2}; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^2+x+1|-2\,x^2}{|-x^3+x|-x^3+2\,x^2}.$$

2. **(8 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{|x^2-4|}$$

Dominio. Intersezione con gli assi. Segno. Continuita'. Limiti e asintoti. Derivabilita'. Derivata prima. Segno della derivata prima, intervalli di crescenza e decrescenza, estremi relativi. Non proseguire con la derivata seconda. Grafico.

3. **(8 punti)** (a) Si enunci il Teorema degli zeri.

(b) Si applichi tale teorema per dimostrare che l'equazione

$$x^5 + 3\,x - 1 = 0$$

ha almeno una soluzione in $(0, 1)$.

(c) Quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie per ottenere un'approssimazione di una soluzione con errore minore di $1/100$?

(d) Si esegua la prima (solo la prima) iterazione dell'algoritmo di bisezione per trovare il secondo intervallo di incertezza.

4. **(6 punti)** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x-2 & \text{se } x \le 1 \\ ax-b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

si dica se esistono due parametri reali a e b tali che f risulti continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

5. **(6 punti)** Un'impresa deve scegliere il prezzo $p > 0$ per un certo prodotto che mette in vendita, e sa che la funzione di domanda e'

$$D(p) = \begin{cases} 3 + \frac{10}{p} - p & \text{se } p \in (0, 5] \\ 0 & \text{se } p > 5 \end{cases}$$

Per semplicita', immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (ne' di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che e' dato dal prodotto $p \cdot D(p)$. L'impresa vuole individuare p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere p maggiore di 3.

(a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se e' possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \le 3$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

6. **(6 punti)** (a) Per la funzione $F(x) = x^2 - 3x$ si scriva la definizione di F derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$. A partire da questa, si dimostri poi che $F'(x_0) = 2x_0 - 3$.

(b) Si enunci la regola di derivazione della funzione composta, e supponendo la derivabilita' delle funzioni coinvolte si calcoli la derivata per ciascuna delle seguenti funzioni:

$$g(x) = (f(x))^2, \qquad h(x) = \cos(2f(x)), \qquad k(x) = \log(\sin(2x^2))$$

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

Soluzione esercizio 1. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3\,x)\sqrt{\log(1+2\,x^2)}}{x^2} = 3\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3\,x)}{3\,x}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\log(1+2\,x^2)}{2\,x^2}} = 3\sqrt{2}$$

NOTA. Nello spostare x sotto radice abbiamo utilizzato il fatto che $x \to 0^+$ e quindi $x > 0$ altrimenti il passaggio non sarebbe stato corretto poiché $\sqrt{x^2} = |x|$. In effetti il limite per $x \to 0^-$ è $-3\sqrt{2}$ ed il limite per $x \to 0$ non esiste.
Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a più infinito per eliminare i valori assoluti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2+x+1|-2\,x^2}{|-x^3+x|-x^3+2\,x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)-2\,x^2}{-(-x^3+x)-x^3+2\,x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x+1}{2\,x^2-x} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2. Si tratta di una funzione sempre positiva; osservando che

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|x^2-4|} = \left|\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4}\right|,$$

per semplicità la studiamo senza il valore assoluto per poi modificare il grafico di conseguenza, studiamo quindi la funzione

$$g(x) := \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4}$$

Dominio La funzione è definita per $x \neq \pm 2$.

Incontro con gli assi Per $x = 0$ si ha $g(0) = -\frac{1}{4}$ mentre g non incontra mai l'asse orizzontale.

Segno Poiché l'esponenziale è sempre positiva la funzione g è negativa nell'intervallo $(-2, 2)$ ed è positiva altrimenti

Continuità Si tratta di una funzione continua, dove è definita, in quanto ottenuta per composizione, somma e quoziente di funzioni elementari continue

Limiti

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{y}}{y^2-4} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4} = \left[\frac{0^+}{+\infty}\right] = 0$$
$$\lim_{x\to-2^-}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4} = \left[\frac{e^2}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4} = \left[\frac{e^2}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to2^-}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4} = \left[\frac{e^{-2}}{0^-}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2-4} = \left[\frac{e^{-2}}{0^+}\right] = +\infty$$

Il primo limite è una conseguenza del confronto fra infiniti, il secondo non è una forma indeterminata e tutti gli altri sono del tipo $\left[\frac{numero}{0^\pm}\right]$. Abbiamo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per x che tende a più infinito e due asintoti verticali di equazioni $x = -2$, $x = 2$.

Derivata Prima Si tratta di una funzione derivabile dove è definita in quanto ottenuta per composizione, somma e quoziente di funzioni elementari derivabili La derivata prima è

$$D[g](x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}\left(x^2-4+2\,x\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Poiché il denominatore e l'esponenziale sono sempre positivi ci limitiamo a studiare il segno e gli zeri di $-(x^2-4+2\,x)$. Si tratta di un polinomio di secondo grado che si annulla per

$$x = -1-\sqrt{5} \approx -1-2 = -3,\ x = -1+\sqrt{5} \approx -1+2 = 1.$$

La derivata prima è dunque positiva negli intervalli $(-1-\sqrt{5}, -2)$, $(-2, -1+\sqrt{5})$ dove la funzione g risulta quindi crescente, ed è negativa altrimenti, cioè in $(-\infty, -1-\sqrt{5})$, $(-1+\sqrt{5}, 2)$ e $(2, +\infty)$ dove la funzione g risulta quindi decrescente.

Estremi relativi Abbiamo individuato quindi due estremali locali

$$x = -1 - \sqrt{5}, \text{ punto di minimo locale e, } x = -1 + \sqrt{5}, \text{ punto di massimo locale}$$

Derivata seconda Il calcolo della derivata seconda non era richiesto ma se volete provare a calcolarla il calcolo risulta leggermente più complicato e si ottiene

$$D^2[g](x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(x^4 + 4\,x^3 - 2\,x^2 - 16\,x + 24\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3}$$

Il calcolo dei punti di flesso è da escludere.

Grafico Mettendo insieme tutte le informazioni che abbiamo ottenuto, il grafico della funzione g è in Fig. 1. Per ottenere il grafico della funzione f dobbiamo soltanto ribaltare la parte sotto l'asse delle x ottenendo il

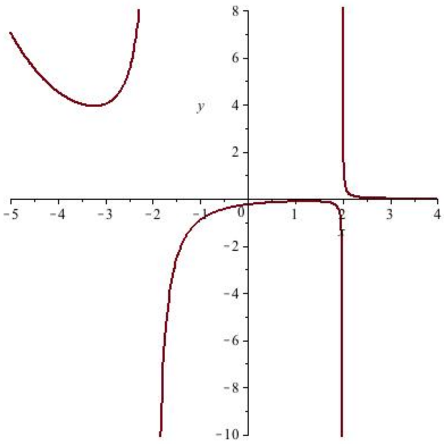


Figure 1: Grafico di $g(x)$

grafico in Figura 2

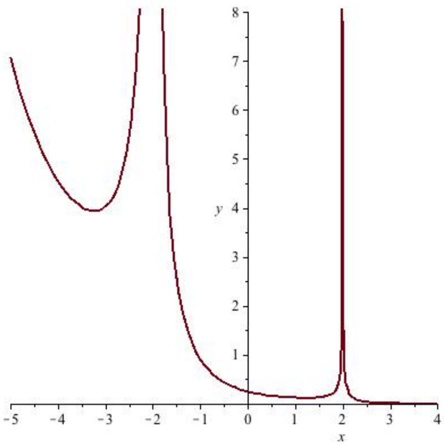


Figure 2: Grafico di $f(x)$

Soluzione esercizio 3.
a) Vedi libro di testo.
b) La funzione $f(x) = x^5 + 3\,x - 1$ è continua nell'intervallo $[0,\,1]$ ed agli estremi assume valori di segno opposto, poiché $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 3 = -3$. Sono verificate quindi le ipotesi del Teorema degli zeri che ci garantisce l'esistenza di almeno una soluzione per l'equazione $f(x) = 0$ in $[0, 1]$.
c) L'intervallo di incertezza iniziale ha lunghezza $1 - 0 = 1$, cerchiamo n tale che

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{100}:$$

la diseguaglianza è soddisfatta per $n = 6$ ($2^7 = 128$), dunque sono necessarie 6 iterazioni per far si che l'errore di approssimazione sia inferiore a $1/100$.
d) Calcoliamo $f(\frac{1}{2}) = \frac{17}{32} > 0$: il nuovo intervallo di incertezza ai cui estremi la funzione cambia di segno è quindi

$$\left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Soluzione esercizio 4. Affinché la funzione sia continua deve essere

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

che nel nostro caso vuol dire

$$2 = 2 = a - b$$

mentre per la derivabilità dobbiamo considerare i due rapporti incrementali destro e sinistro o le due derivate destra e sinistra

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ D[x^2 + 3\,x - 2]_{|x=1} = D[a\,x - b]_{|x=1} \\ 5 = a.\end{gathered}$$

In conclusione la funzione è continua e derivabile per $a = 5$, $b = 3$.
Soluzione esercizio 5. a) La funzione profitto è data da

$$f(p) := p\,d(p) = 3\,p + 10 - p^2,$$

dobbiamo determinare

$$\max_{p\in(0,3]} 3\,p + 10 - p^2.$$

Non è possibile stabilire a priori se il problema ammetta soluzione o meno: il teorema di Weierstrass in questo caso non è applicabile.
b) Si tratta di studiare una parabola con la concavità rivolta verso il basso, che ha il suo massimo globale nel punto p tale che

$$D[f](p) = -2\,p + 3 = 0$$

ovvero in $p = \frac{3}{2}$, dove la funzione vale $f(\frac{3}{2}) = \frac{49}{4}$. Poiché

$$0 < \frac{3}{2} < 3,$$

$p = 3/2$ è in effetti il punto di massimo globale della funzione su $(0, +\infty)$. Poiché per $x > \frac{3}{2}$ la funzione è decrescente, la cancellazione della legge che impone la limitazione superiore $p \le 3$ non fa crescere il massimo profitto dell'impresa.

Soluzione esercizio 6.
a) F si dice derivabile in x_0 se esiste ed è finito il

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - x_0^2 + 3x_0}{h}.$$

Per dimostrare quanto richiesto dobbiamo calcolare il limite appena scritto: abbiamo

$$\frac{(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - x_0^2 + 3x_0}{h} = \frac{2x_0 h + h^2 - 3h}{h} = 2x_0 - 3 + h \to 2x_0 - 3.$$

b)

$$\begin{gathered}D\left[f(x)^2\right] = 2\,f(x)\,D[f](x) \\ D\left[\cos(2\,f(x))\right] = -2\,\sin(2\,f(x))\,D[f](x) \\ D\left[\log(\sin(2\,x^2))\right] = \frac{4\,x\,\cos(2\,x^2)}{\sin(2\,x^2)}\end{gathered}$$

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame B, 11 settembre 2014

1. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} x\frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{e^{2x^2}-1}; \qquad\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{|x^3-x+1|-2\,x^2}{|x^2-x|-2x^3+x}.$$

2. **(8 punti)** Si studi la funzione

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{|x^2-9|}$$

Dominio. Intersezione con gli assi. Segno. Continuita'. Limiti e asintoti. Derivabilita'. Derivata prima. Segno della derivata prima, intervalli di crescenza e decrescenza, estremi relativi. Non proseguire con la derivata seconda. Grafico.

3. **(8 punti)** (a) Si enunci il Teorema dei valori intermedi.

(b) Si applichi tale teorema per dimostrare che l'equazione

$$-x^4-x^2+1=0$$

ha almeno una soluzione in $(0,\,1)$.

(c) Quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie per ottenere un'approssimazione di una soluzione con errore minore di $1/200$?

(d) Si esegua la prima (solo la prima) iterazione dell'algoritmo di bisezione per trovare il secondo intervallo di incertezza.

4. **(6 punti)** Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & \text{se } x\le 1\\ ax+b & \text{se } x>1\end{cases}$$

si dica se esistono due parametri reali a e b tali che f risulti continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

5. **(6 punti)** Un'impresa deve scegliere il prezzo $p>0$ per un certo prodotto che mette in vendita, e sa che la funzione di domanda è

$$D(p)=\begin{cases} 5+\frac{6}{p}-p & \text{se } p\in(0,6]\\ 0 & \text{se } p>6\end{cases}$$

Per semplicita', immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (ne' di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che e' dato dal prodotto $p\cdot D(p)$. L'impresa vuole individuare p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere p maggiore di 2.

(a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se e' possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p\le 2$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

6. **(6 punti)** (a) Per la funzione $F(x)=-2x^2+x$ si scriva la definizione di F derivabile in $x_0\in\mathbb{R}$. A partire da questa, si dimostri poi che $F'(x_0)=-4x_0+1$.

(b) Si enunci la regola di derivazione del quoziente di funzioni. Si verifichi che la derivata della funzione $\tan x$ e' uguale a $\frac{1}{\cos^2(x)}$, e si calcoli la derivata per ciascuna delle seguenti funzioni:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}, \qquad\qquad h(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

Soluzione esercizio 1. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x\to 0^+} x\frac{\sqrt{1-\cos(2\,x)}}{e^{2x^2}-1} = \lim_{x\to 0^+} x\frac{\sqrt{\frac{1-\cos(2\,x)}{4x^2}}2x}{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}2x^2} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{2x^2}{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

NOTA. Nel portare x^2 fuori sotto radice abbiamo utilizzato il fatto che $x \to 0^+$ e quindi $x > 0$ altrimenti il passaggio non sarebbe stato corretto poiché $\sqrt{x^2} = |x|$. In effetti il limite per $x \to 0^-$ è $-1/\sqrt{2}$ ed il limite per $x \to 0$ non esiste.
Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a più infinito per eliminare i valori assoluti

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x^3-x+1\right|-2\,x^2}{|x^2-x|-2x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x-1-2\,x^2}{x^2-x-2x^3+x} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione esercizio 2. Si tratta di una funzione sempre positiva; osservando che

$$\frac{\mathrm{e}^x}{|x^2-9|} = \left|\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-9}\right|,$$

per semplicità la studiamo senza il valore assoluto per poi modificare il grafico di conseguenza, studiamo quindi la funzione

$$g(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{x^2-9}$$

Dominio La funzione è definita per $x \neq \pm 3$.

Incontro con gli assi Per $x = 0$ si ha $g(0) = -\frac{1}{9}$ mentre il grafico di g non incontra mai l'asse orizzontale.

Segno Poiché l'esponenziale è sempre positiva la funzione g è negativa nell'intervallo $(-3,\,3)$ ed è positiva altrimenti.

Continuità Si tratta di una funzione continua sul suo dominio, in quanto ottenuta come quoziente di funzioni elementari continue.

Limiti

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-9} &= \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0,\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-9} &= +\infty\\
\lim_{x\to(-3)^\pm}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-9} &= \left[\frac{e^{-3}}{0^\mp}\right] = \mp\infty\\
\lim_{x\to 3^\pm}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-9} &= \left[\frac{e^{3}}{0^\pm}\right] = \pm\infty \qquad .
\end{aligned}$$

Il primo limite non è una forma indeterminata; il secondo limite si presenta nella forma $= \left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right]$, ma l'esponenziale tende a infinito più velocemente di ogni potenza, perciò il risultato è $+\infty$. Tutti gli altri sono del tipo $\left[\frac{numero}{0^\pm}\right]$. Abbiamo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per x che tende a meno infinito e due asintoti verticali di equazioni $x = -3$, $x = 3$.

Derivata Prima Si tratta di una funzione derivabile sul suo dominio, in quanto ottenuta come quoziente di funzioni elementari derivabili. La derivata prima è

$$D[g](x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(x^2-2\,x-9\right)}{\left(x^2-9\right)^2}$$

Poiché il denominatore e l'esponenziale sono sempre positivi ci limitiamo a studiare il segno e gli zeri di $x^2 - 2\,x - 9$. Si tratta di un polinomio di secondo grado che si annulla per

$$x = 1-\sqrt{10} \approx 1-3 = -2,\; x = 1+\sqrt{10} \approx 1+3 = 4.$$

La derivata prima è dunque positiva negli intervalli $(-\infty,\,-3)$, $(-3, 1-\sqrt{10})$, $(1+\sqrt{10}, +\infty)$, dove la funzione g risulta quindi crescente, ed è negativa altrimenti, cioè in $(1-\sqrt{10},\,3)$ e $(3,\,1+\sqrt{10})$, dove la funzione g risulta quindi decrescente.

Estremi relativi Abbiamo individuato quindi due estremali locali

$$x = 1 - \sqrt{10}, \text{ punto di massimo locale e, } x = 1 + \sqrt{10}, \text{ punto di minimo locale}$$

Grafico Mettendo insieme tutte le informazioni che abbiamo ottenuto, il grafico della funzione g è in Figura 1. Per ottenere il grafico della funzione f dobbiamo soltanto ribaltare la parte sotto l'asse delle x ottenendo il

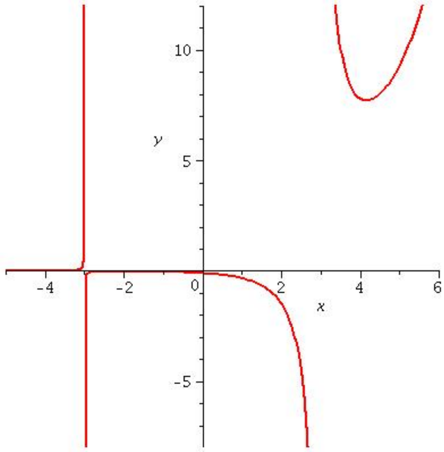


Figure 1: Grafico di $g(x)$

grafico in Figura 2

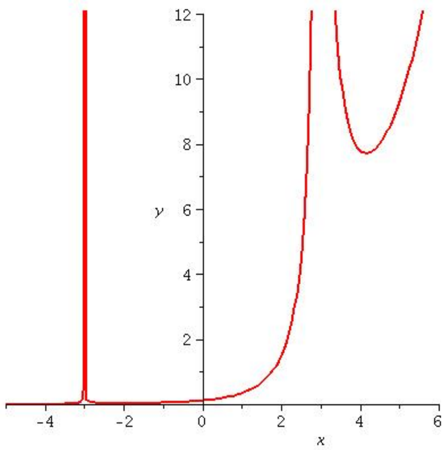


Figure 2: Grafico di $f(x)$

Soluzione esercizio 3.
a) Vedi libro di testo.
b) La funzione $f(x) = -x^4 - x^2 + 1$ è continua nell'intervallo $[0,\, 1]$ ed agli estremi assume valori di segno opposto, poiché $f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot (-1) = -1$. Sono verificate quindi le ipotesi del Teorema dei valori intermedi che ci garantisce l'esistenza di almeno una soluzione per l'equazione $f(x) = 0$ in $(0, 1)$.
c) L'intervallo di incertezza iniziale ha lunghezza $1 - 0 = 1$, cerchiamo n tale che

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{200},$$

ossia $2^{n+1} > 200$. Le potenze 2^m successive di 2 risultano 32 (m=5), 64 (m=6), 128 (m=7), 256 (m=8), perciò cerchiamo un intero n tale che $n + 1 > 7$. La diseguaglianza è dunque soddisfatta per $n = 7$, perciò sono necessarie almeno 7 iterazioni per far si che l'errore di approssimazione sia inferiore a $1/200$.
d) Calcoliamo $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{16} > 0$: il nuovo intervallo di incertezza ai cui estremi la funzione cambia di segno è quindi

$$\left[\frac{1}{2},\ 1\right].$$

Soluzione esercizio 4. Affinché la funzione sia continua deve essere

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

che nel nostro caso vuol dire

$$2 = 2 = a + b$$

mentre per la derivabilità dobbiamo considerare i due rapporti incrementali destro e sinistro o le due derivate destra e sinistra

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\ D[x^2 - 2\,x + 3]_{|x=1} &= D[a\,x - b]_{|x=1} \\ 0 &= a. \end{aligned}$$

In conclusione la funzione è continua e derivabile per $a = 0$, $b = 2$.
Soluzione esercizio 5. a) La funzione profitto è data da

$$f(p) := p\,d(p) = -p^2 + 5\,p + 6,$$

dobbiamo determinare

$$\max_{p\in(0,2]} \; -p^2 + 5\,p + 6.$$

Non è possibile stabilire a priori se il problema ammetta soluzione o meno: il teorema di Weierstrass in questo caso non è applicabile.
b) Si tratta di studiare una parabola con la concavità rivolta verso il basso, che ha il suo massimo globale nel vertice della parabola. Vale $-p^2 + 5\,p + 6 = -(p-6)(p+1)$, perciò le radici della parabola sono 6 e -1, e l'ascissa del vertice è nel loro punto medio 5/2, dove la funzione vale $f(\frac{5}{2}) = \frac{49}{4}$. Poiché però

$$\frac{5}{2} > 2,$$

$p = 5/2$ è il punto di massimo globale della funzione f(p) su $(0, +\infty)$. Invece il punto di massimo su $(0, 2]$ è 2, perché la funzione è crescente da 0 a 2. Perciò abbiamo

$$\max_{p\in(0,2]} \; p\,d(p) = f(2) = 12 = \frac{48}{4} < \frac{49}{4} = \max_{p\in\mathbb{R}_+} \; p\,d(p),$$

quindi la cancellazione della legge che impone la limitazione superiore $p \le 2$ permetterebbe all'impresa di aumentare almeno un po' il suo profitto.

Soluzione esercizio 6. a) F si dice derivabile in x_0 se esiste ed è finito il

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2(x_0+h)^2 + x_0 + h + 2x_0^2 - x_0}{h}.$$

Per dimostrare quanto richiesto dobbiamo calcolare il limite appena scritto: abbiamo

$$\frac{-2(x_0+h)^2 + x_0 + h + 2x_0^2 - x_0}{h} = \frac{-4x_0h - 2h^2 + h}{h} = -4x_0 + 1 - 2h \to -4x_0 + 1.$$

b)

$$D\left[\tan(x)\right] = D\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right] = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$\begin{aligned} D\left[\frac{1}{f(x)}\right] &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \\ D\left[\frac{1}{\cos(x)}\right] &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\tan(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 9 dicembre 2014

1. **(8 punti)** Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue
$$f(x) = \begin{cases} -2 + \frac{1}{3}x & \text{se } x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$
Si disegni il grafico di f e si determinino l'immagine di f, l'estremo superiore di f, e l'estremo inferiore di f. Si dica se f e' continua in $\mathbb{R}$. Si dica se f e' invertibile, e nel caso che si ritenga f invertibile, si calcoli $f^{-1}(8)$.

2. **(5 punti)** Data la funzione $g(x) = x^3$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $h(x) = g(f(x))$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in cui f e' la funzione dell'esercizio 1.
Si calcolino $h(0)$, $h(2)$, e si dica se esiste un $x_0 \in (0, 2)$ tale che $h(x_0) = 0$. Si calcoli $h'(2)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{x} + \frac{x^2}{\ln(1 + 3x^2)} \right); \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + x - e^x - x^3}{x^2 - 7x}$$

4. **(8 punti)** (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Lagrange.
(b) Data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, e dati x_1 e x_2 in $(0, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$, e si dimostri che $\ln x_2 - \ln x_1 > \frac{1}{x_2}(x_2 - x_1)$.

5. **(7 punti)** Si studi la funzione.
$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantita', $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene e' 9, e dunque produrre la quantita' x genera un ricavo pari a $9x$. Per produrre la quantita' x, l'impresa sostiene un costo pari a $5x + \frac{1}{27}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantita' x e'
$$\pi(x) = 9x - \left(5x + \frac{1}{27}x^3\right)$$
L'obiettivo dell'impresa e' individuare un punto di massimo globale per la funzione π, che e' definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.
(a) Si determini un punto di massimo globale per la funzione π.
(b) Si determini il punto di massimo globale per la funzione di profitto nel caso che il costo sostenuto dall'impresa per produrre la quantita' x non sia $5x + \frac{1}{27}x^3$, ma $10x + \frac{1}{27}x^3$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame B, 9 dicembre 2014

1. **(8 punti)** Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2}x & \text{se } x \leq 1 \\ 3^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

   Si disegni il grafico di f e si determinino l'immagine di f, l'estremo superiore di f, e l'estremo inferiore di f. Si dica se f e' continua in $\mathbb{R}$. Si dica se f e' invertibile, e nel caso che si ritenga f invertibile, si calcoli $f^{-1}(9)$.

2. **(5 punti)** Data la funzione $g(x) = x^3$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $h(x) = g(f(x))$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in cui f e' la funzione dell'esercizio 1.

   Si calcolino $h(0)$, $h(2)$, e si dica se esiste un $x_0 \in (0, 2)$ tale che $h(x_0) = 0$. Si calcoli $h'(2)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1 + 3 \sin x)}{x} + \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right); \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2 - \ln x}{2x^4 + e^x - x^{10}}$$

4. **(8 punti)** (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, e dati x_1 e x_2 in $(0, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$, e si dimostri che $\ln x_2 - \ln x_1 < \frac{1}{x_1}(x_2 - x_1)$.

5. **(7 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantita', $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene e' 6, e dunque produrre la quantita' x genera un ricavo pari a $6x$. Per produrre la quantita' x, l'impresa sostiene un costo pari a $2x + \frac{1}{27}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantita' x e'

$$\pi(x) = 6x - \left(2x + \frac{1}{27}x^3\right)$$

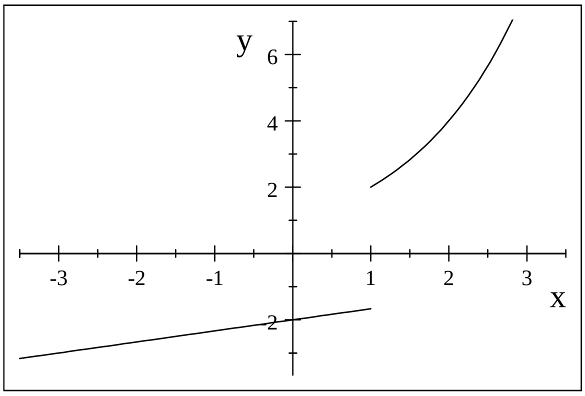
   L'obiettivo dell'impresa e' individuare un punto di massimo globale per la funzione π, che e' definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

   (a) Si determini un punto di massimo globale per la funzione π.

   (b) Si determini il punto di massimo globale per la funzione di profitto nel caso che il costo sostenuto dall'impresa per produrre la quantita' x non sia $2x + \frac{1}{27}x^3$, ma $7x + \frac{1}{27}x^3$.

Soluzioni A

1. Il grafico di f:



Im$(f) = (-\infty, -\frac{5}{3}] \cup (2, +\infty)$, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Nel punto $x_0 = 1$, f non e' continua perche' non esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$, dato che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{5}{3}$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$; f e' continua in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. f e' invertibile in quanto e' monotona strettamente crescente, e $f^{-1}(8)$ si ottiene risolvendo l'equazione $f(x) = 8$, quindi $f^{-1}(8) = 3$.

2. $h(0) = g(f(0)) = g(-2) = (-2)^3 = -8$, $h(2) = g(f(2)) = g(4) = (4)^3 = 64$. Non esiste alcun $x_0 \in (0, 2)$ tale che $h(x_0) = 0$ perche' $h(x) = (-2 + \frac{1}{3}x)^3 < 0$ se $x \in (0, 1]$, $h(x) = (2^x)^3 > 0$ se $x \in (1, 2)$. Per $x > 1$, $h(x) = 2^{3x}$, quindi $h'(x) = 2^{3x} \cdot 3 \ln 2$ e $h'(2) = 2^6 \cdot 3 \ln 2 = 192 \ln 2$.

3. Usando alcuni limiti notevoli, otteniamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x \cdot \sin x} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{3\ln(1+3x^2)} = \frac{1}{3}$, quindi $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\sin x}-1}{x} + \frac{x^2}{\ln(1+3x^2)} \right) = \frac{4}{3}$.

   In base alla gerarchia tra infiniti, otteniamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{4+x-e^x-x^3}{x^2-7x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^x}{x^2} = -\infty$.

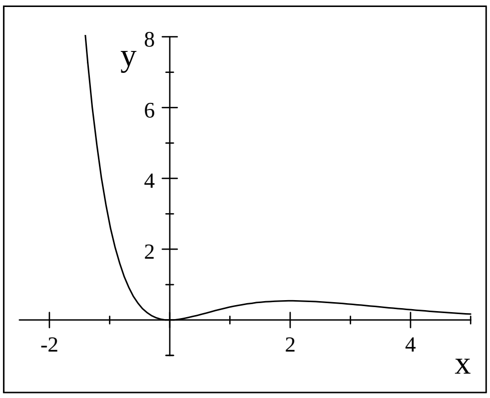
4. (a) Si veda il libro di testo.

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \ln x$ relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$ si deduce che esiste un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$, e dunque $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{1}{x_0}(x_2 - x_1)$. Poiche' $\frac{1}{x_0} > \frac{1}{x_2}$, si conclude che $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{1}{x_2}(x_2 - x_1)$.

5. Il dominio naturale di f e' $\mathbb{R}$; $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   La derivata di f e' $f'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}$, che e' negativa in $(-\infty, 0)$, positiva in $(0, 2)$, negativa in $(2, +\infty)$. Quindi f e' strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, strettamente crescente in $(0, 2)$, strettamente decrescente in $(2, +\infty)$. Il punto $x_0 = 0$ e' punto di minimo globale, il punto $x_1 = 2$ e' di massimo locale.

   La derivata seconda di f e' $f''(x) = \frac{x^2-4x+2}{e^x}$, che e' positiva in $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, negativa in $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, positiva in $(2+\sqrt{2}, +\infty)$. Quindi f e' convessa in $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, concava in $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, convessa in $(2+\sqrt{2}, +\infty)$. Il grafico di f e' pertanto

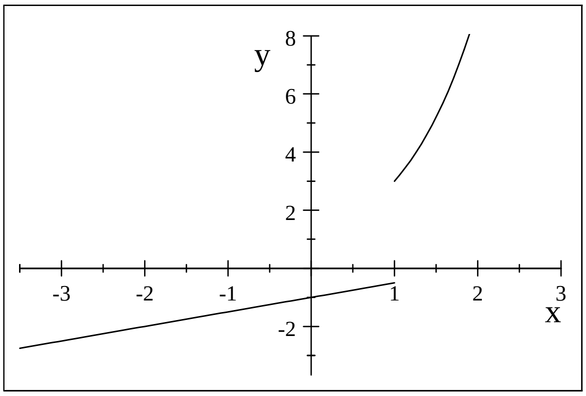


6. (a) Risulta che $\pi'(x) = 4 - \frac{1}{9}x^2$, quindi $\pi'(x) > 0$ per $x \in (0, 6)$ e $\pi'(x) < 0$ per $x \in (6, +\infty)$. Dunque π e' strettamente crescente in $[0, 6)$, strettamente decrescente in $(6, +\infty)$, e il punto $x_0 = 6$ e' punto di massimo globale per π.

   (b) Risulta che $\pi'(x) = -1 - \frac{1}{9}x^2$, quindi $\pi'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Dunque π e' strettamente decrescente in $[0, +\infty)$, e $x = 0$ e' punto di massimo globale per π.

Soluzioni B

1. Il grafico di f:



   $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (3, +\infty)$, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Nel punto $x_0 = 1$, f non e' continua perche' non esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$, dato che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$; f e' continua in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. f e' invertibile in quanto e' monotona strettamente crescente, e $f^{-1}(9)$ si ottiene risolvendo l'equazione $f(x) = 9$, quindi $f^{-1}(9) = 2$.

2. $h(0) = g(f(0)) = g(-1) = (-1)^3 = -1$, $h(2) = g(f(2)) = g(9) = (9)^3 = 729$. Non esiste alcun $x_0 \in (0, 2)$ tale che $h(x_0) = 0$ perche' $h(x) = (-1 + \frac{1}{2}x)^3 < 0$ se $x \in (0, 1]$, $h(x) = (3^x)^3 > 0$ se $x \in (1, 2)$. Per $x > 1$, $h(x) = 3^{3x}$, quindi $h'(x) = 3^{3x} \cdot 3 \ln 3$ e $h'(2) = 3^6 \cdot 3 \ln 2 = 2187 \ln 2$.

3. Usando alcuni limiti notevoli, otteniamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(3\sin x)\ln(1+3\sin x)}{x(3\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{x} = 3$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$, quindi $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+3\sin x)}{x} + \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \right) = 4$.

   In base alla gerarchia tra infiniti, otteniamo che $\lim_{x\to +\infty} \frac{6x^2 - \ln x}{2x^4 + e^x - x^{10}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x^2}{e^x} = 0$.

4. (a) Si veda il libro di testo.

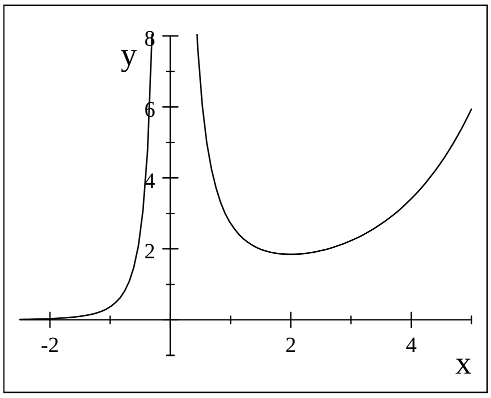
   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \ln x$ relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$ si deduce che esiste un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$, e dunque $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{1}{x_0}(x_2 - x_1)$. Poiche' $\frac{1}{x_0} < \frac{1}{x_1}$, si ottiene che $\ln x_2 - \ln x_1 < \frac{1}{x_1}(x_2 - x_1)$.

5. Il dominio naturale di f e' $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$.

   La derivata di f e' $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, che e' positiva in $(-\infty, 0)$, negativa in $(0, 2)$, positiva in $(2, +\infty)$. Quindi f e' strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, strettamente decrescente in $(0, 2)$, strettamente crescente in $(2, +\infty)$. Il punto $x_0 = 2$ e' punto di minimo locale.

   La derivata seconda di f e' $f''(x) = \frac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}$, che e' positiva in $(-\infty, 0)$, positiva in $(0, +\infty)$. Quindi

f e' convessa in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, +\infty)$. Il grafico di f e' pertanto



6. (a) Risulta che $\pi'(x) = 4 - \frac{1}{9}x^2$, quindi $\pi'(x) > 0$ per $x \in (0, 6)$ e $\pi'(x) < 0$ per $x \in (6, +\infty)$. Dunque π e' strettamente crescente in $[0, 6)$, strettamente decrescente in $(6, +\infty)$, e il punto $x_0 = 6$ e' punto di max globale per π.

   (b) Risulta che $\pi'(x) = -1 - \frac{1}{9}x^2$, quindi $\pi'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Dunque π e' strettamente decrescente in $[0, +\infty)$, e $x = 0$ e' punto di massimo globale per π.

Capitolo 1

Compiti di esame 2015

1.1 Compito del 12 Gennaio 2015

1.1.1 Compito A

Esercizio 1. (9 punti) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, con x_0 e L finiti.
1) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.
2) Calcolare $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ e poi si verifichi il risultato ottenuto usando la definizione di limite data sopra.

Esercizio 2. (5 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) Determinare il dominio D di f e disegnare il suo grafico.
2) Enunciare il teorema su derivabilità e continuità di una funzione in un punto x_0.
3) Dire se f è continua nel suo dominio D, e se è derivabile in D.

Esercizio 3. (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{3x + 6}{x - 1}$.
1) Determinare il dominio $\mathrm{Dom}(f)$ di f e disegnare il suo grafico studiando solo i limiti di f ed il segno della derivata prima.
2) Utilizzando il grafico, determinare l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f.
3) Dire se $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ è invertibile e, in caso di risposta positiva, determinare la sua funzione inversa.

Esercizio 4. (5 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{12}\, b\, x^4 - \frac{5}{6}\, b\, x^3 + 3\, b\, x^2 + 7x + 8,$$

con $b \neq 0$. Si studino gli intervalli di concavità e convessità di f per tutti i valori di $b \neq 0$.

Esercizio 5. (7 punti) Siano date le tre funzioni derivabili f_1, f_2, f_3, ciascuna definita in $\mathbb{R}$ e tali che

$$f_1(x) \in (0,1),\ f_1'(x) > 0, \qquad f_2(x) > 0,\ f_2'(x) > 0, \qquad f_3(x) > 0,\ f_3'(x) > 0.$$

Consideriamo le tre funzioni g_1, g_2, g_3, anche esse definite in $\mathbb{R}$, definite come

$$g_1(x) = f_1\left(x^3 + f_2(x)\right), \qquad g_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \qquad g_3(x) = \frac{\log\left(f_1(x)\right)}{f_3(x)}$$

1) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono derivabili;
2) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono crescenti.

Esercizio 6. (7 punti) Una catena di alberghi vende uno stesso pasto in due diversi mercati, che indichiamo con 1 e 2. Una legge impone che ogni prezzo sia minore o uguale a 4. Nei due mercati le funzioni di domanda, che associano a ciascun prezzo la quantità domandata, sono rispettivamente (l'indice corrisponde al mercato)

$$d_1 : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ d_1(p_1) = 8 - 2p_1, \qquad d_2 : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ d_2(p_2) = 6 - p_2.$$

Le funzioni che descrivono il profitto nei singoli mercati sono rispettivamente

$$\pi_1 : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ \pi_1(p_1) = p_1 \cdot d_1(p_1) - 1, \qquad \pi_2 : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ \pi_2(p_2) = p_2 \cdot d_2(p_2) - 1,$$

dove 1 rappresenta un costo fisso in ciascun mercato.
1) Si calcolino i prezzi p_1^* e p_2^* che massimizzano rispettivamente π_1 e π_2
Si supponga ora che l'autorità locale di politica economica discuta una nuova normativa secondo la quale il prezzo del pasto deve essere lo stesso, p, sui due mercati. Se la funzione di domanda globale sui due mercati è

$$d : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ d(p) = 14 - 3p,$$

il profitto complessivo da massimizzare è il seguente:

$$\pi : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ \pi(p) = p \cdot d(p) - 2.$$

2) Si dica se l'introduzione della nuova normativa incrementa o riduce il profitto complessivo.

1.1.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1.
1) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se

$$x \neq x_0, \ |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ allora } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2) Vedi libro di testo.
3)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-3) = -6.$$

Dato un generico $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \neq -3$ per cui $0 < |x+3| < \delta_\varepsilon$ si abbia $\left|\frac{x^2-9}{x+3} + 6\right| < \varepsilon$. Ma

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3} + 6\right| = |(x-3) + 6| = |x+3|.$$

È dunque sufficiente prendere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$.

Soluzione Esercizio 2.
1) La funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed il grafico è composto da un tratto di parabola prima del punto $x_0 = 1$ e da un tratto di iperbole dopo il punto $x_0 = 1$.

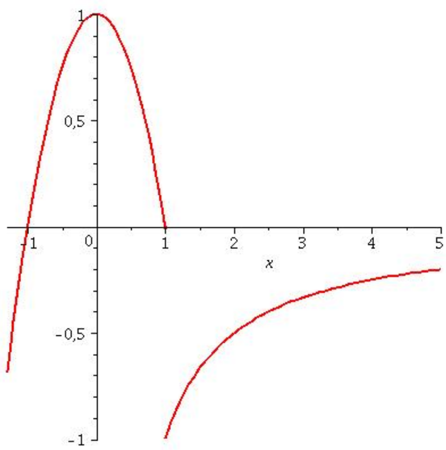


Figura 1.1: Grafico di $f(x)$

2) Teorema : *Se la funzione f è derivabile in un punto x_0 interno al suo* $\mathrm{Dom}(f)$ *allora f è anche continua in x_0.*

3) La funzione non è continua in $x_0 = 1$ poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(-x^2+1\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x} = -1$$

Poiché la funzione non è continua in $x_0 = 1$ allora per il Teorema enunciato non è neanche derivabile in quel punto, mentre lo è ovviamente in tutti gli altri punti in quanto ha un'espressione polinomiale o è una funzione razionale.

Soluzione Esercizio 3.
1) Il dominio della funzione è $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 1\} = (-\infty,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$.
La funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$ poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x+6}{x-1} = 3, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3\,x+6}{x-1} = 3$$

ed uno orizzontale di equazione $x = 1$ poiché

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3\,x+6}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{3\,x+6}{x-1} = -\infty$$

Poiché la sua derivata è

$$D[f](x) = -9\ (x-1)^{-2} < 0$$

la funzione risulta decrescente nei due intervalli $(-\infty,\, 1)$ e $(1,\, +\infty)$ (si tratta di una iperbole e il suo grafico è in figura 1.2
2) Guardando la proiezione del grafico sulla asse verticale vediamo che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{3\}.$$

3) Dal grafico vediamo che la funzione è iniettiva perché ogni retta orizzontale incontra il grafico in al massimo un punto. Possiamo vederlo anche risolvendo rispetto a x l'equazione

$$\frac{3x+6}{x-1} = y$$

per vedere se ha soluzioni e quante ne ha

$$\begin{aligned} 3\,x+6 &= y\,(x-1) \\ x\,(3-y) &= -y-6 \end{aligned}$$

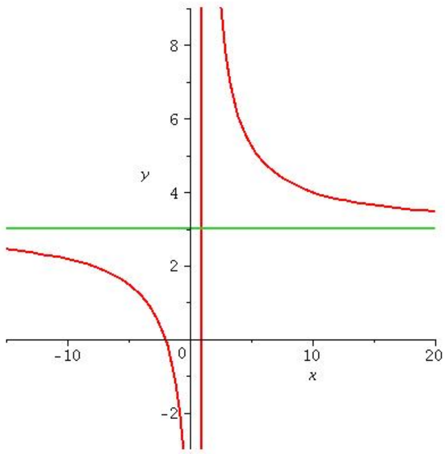


Figura 1.2: Grafico di $f(x)$

Per $y = 3$ l'equazione è impossibile ($y \notin \mathrm{Im}(f)$) mentre per $y \neq 3$ si ha

$$x = \frac{y+6}{y-3}.$$

Quindi per ogni $y \in \mathrm{Im}(f)$ la soluzione è unica e quindi $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ è iniettiva, e perciò invertibile, e la sua funzione inversa è $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f)$ definita come

$$f^{-1}(x) = \frac{y+6}{y-3}.$$

Soluzione Esercizio 4. Data la funzione

$$f\,(x) = \frac{1}{12}\,b\,x^4 - \frac{5}{6}\,b\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 7x + 8$$

calcoliamo le sue prime due derivate

$$\begin{aligned} f'\,(x) &= \frac{1}{3}\,b\,x^3 - \frac{5}{2}\,b\,x^2 + 6\,b\,x + 7 \\ f''\,(x) &= b\,x^2 - 5\,b\,x + 6\,b = b\,(x-2)\,(x-3) \end{aligned}$$

Discutiamo il segno della derivata seconda a seconda del segno di b

Caso 1. Se $b > 0$ si ha $f'' > 0$, e dunque f strettamente convessa negli intervalli $(-\infty,\, 2)$ e $(3,\, +\infty)$ mentre nell'intervallo $(2, 3)$ abbiamo che $f'' < 0$, e dunque f è strettamente concava.

Caso 2. Se $b < 0$, allora la situazione è rovesciata si ha $f'' < 0$, e dunque f strettamente concava negli intervalli $(-\infty,\ 2)$ e $(3,\ +\infty)$ mentre nell'intervallo $(2, 3)$ abbiamo che $f'' > 0$, e dunque f è strettamente convessa.

Soluzione Esercizio 5.
1) la funzione g_1 è ottenuta come somma e composizione di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ ed è dunque derivabile su $\mathbb{R}$.
La funzione g_2 è prodotto di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, ed è dunque derivabile su $\mathbb{R}$.
Poiché $f_1(x) > 0$, la composizione $\log \circ f_1$, (ricordate che

$$(\log \circ f_1)(x) = \log(f_1(x)))$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. La funzione g_3 è quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da 0, perciò anche g_3 è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2)

$$D[g_1](x) = g_1'(x) = f_1'\left(x^3 + f_2(x)\right) \cdot \left(3x^2 + f_2'(x)\right) > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (tutti i fattori sono positivi per ipotesi), dunque g_1 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$$D[g_2](x) = g_2'(x) = f_1'(x)\, f_2(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2'(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2(x)\, f_3'(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (tutti i fattori sono positivi per ipotesi), dunque g_2 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$$D[g_3](x) = g_3'(x) = \frac{\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \cdot f_3(x) - f_3'(x) \log\left(f_1(x)\right)}{\left(f_3(x)\right)^2}$$

poiché f_1 assume solo valori in $(0, 1)$ si ha $\log(f_1(x)) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $g_3'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, (tutti i fattori sono positivi) e allora g_3 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Soluzione Esercizio 6.
I prezzi appartengono all'intervallo $[0,\ 4]$, poiché le funzioni profitto sono tutte continue esse ammettono in questo intervallo massimo e minimo assoluto. Il profitto nel mercato 1 è dato da:

$$\pi_1(p_1) = (8 - 2p_1)\, p_1 - 1 = -2p_1^2 + 8p_1 - 1.$$

Poiché

$$\pi'(p_1) = -4p_1 + 8$$

si ha che $p_1^* = \frac{8}{4} = 2$ è un punto critico con

$$\pi_1\left(p_1^*\right) = \left(8 - 2p_1^*\right)p_1^* - 1 = (8 - 2 \cdot 2) \cdot 2 - 1 = 7.$$

poiché $\pi_1(0) = -1$, $\pi_1(4) = -1$ allora $p_1^* = 2$ è il punto di massimo globale per π_1 con profitto ottimo eguale a 7.
Il profitto nel mercato 2 è dato da

$$\pi_2\left(p_2\right) = \left(6 - p_2\right)p_2 - 1 = -p_2^2 + 6p_2 - 1 :$$

con

$$\pi'\left(p_2\right) = -2p_2 + 6,$$

e dunque $p_2^* = \frac{6}{2} = 3$ è un punto critico con

$$\pi_2\left(p_2^*\right) = \left(6 - p_2^*\right)p_2^* - 1 = (6 - 3)\,3 - 1 = 8$$

poiché $\pi_2(0) = -1$, $\pi_2(4) = 7$ allora $p_2^* = 3$ è il punto di massimo globale per π_2 con profitto ottimo eguale a 8.
Nel caso di un unico prezzo, il profitto è

$$\pi\left(p\right) = p\left(14 - 3p\right) - 2 = -3p^2 + 14p - 2 :$$

con

$$\pi'\left(p\right) = -6p + 14,$$

e dunque $p^* = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ è un punto critico con

$$\pi\left(p^*\right) = p^*\left(14 - 3p^*\right) - 2 = \frac{7}{3}\left(14 - 3\frac{7}{3}\right) - 2 = \frac{7}{3}\left(14 - 7\right) - 2 = \frac{43}{3}.$$

poiché $\pi(0) = -2$, $\pi(4) = 6$ allora $p^* = \dfrac{7}{3}$ è il punto di massimo globale per π con profitto ottimo eguale a $\dfrac{43}{3}$.

Il profitto totale massimo con prezzi diversi nei due mercati (discriminazione di prezzo) è $7 + 8 = 15$, mentre nel caso di un unico prezzo, il profitto totale massimo pari a $\dfrac{43}{3}$ è inferiore. Dunque i responsabili dell'impresa non sono favorevoli alla nuova legge.

1.1.3 Compito B

Esercizio 1. (9 punti) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, con x_0 e L finiti.
2) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.
3) Calcolare $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ e poi si verifichi il risultato ottenuto usando la definizione di limite data sopra.

Esercizio 2. (5 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) Determinare il dominio D di f e disegnare il suo grafico.
2) Enunciare il teorema su derivabilità e continuità di una funzione in un punto x_0.
3) Dire se f è continua nel suo dominio D, e se è derivabile in D.

Esercizio 3. (5 punti) Sia $f(x) = \dfrac{3x + 6}{x - 2}$.
1) Determinare il dominio D di f e disegnare il suo grafico studiando solo i limiti di f ed il segno della derivata prima.
2) Utilizzando il grafico, determinare l'immagine I di f.
3) Dire se $f : D \to I$ è invertibile e, in caso di risposta positiva, determinare la sua funzione inversa.

Esercizio 4. (6 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{12} a\, x^4 - \frac{5}{6} a\, x^3 + 3\, a\, x^2 + 5x + 9,$$

con $a \neq 0$. Si studino gli intervalli di concavità e convessità di f per tutti i valori di $a \neq 0$.

Esercizio 5. (7 punti) Siano date le tre funzioni derivabili f_1, f_2, f_3, ciascuna definita in $\mathbb{R}$ e tali che

$$f_1(x) \in (0, 1), \; f_1'(x) > 0, \qquad f_2(x) > 0, \; f_2'(x) > 0, \qquad f_3(x) > 0, \; f_3'(x) > 0.$$

Consideriamo le tre funzioni g_1, g_2, g_3, anche esse definite in $\mathbb{R}$, definite come

$$g_1(x) = f_1\left(x^5 + f_3(x)\right), \qquad g_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x), \qquad g_3(x) = \frac{\log\left(f_1(x)\right)}{f_1(x)}$$

1) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono derivabili;
2) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono crescenti.

Esercizio 6. (7 punti) Una catena di alberghi vende uno stesso pasto in due diversi mercati, che indichiamo con 1 e 2. Una legge impone che ogni prezzo sia minore o uguale a 2. Nei due mercati le funzioni di domanda, che associano a ciascun prezzo la quantità domandata, sono rispettivamente (l'indice corrisponde al mercato)

$$d_1 : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad d_1(p_1) = 8 - 2p_1, \qquad d_2 : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad d_2(p_2) = 4 - 2\,p_2.$$

Le funzioni che descrivono il profitto nei singoli mercati sono rispettivamente

$$\pi_1 : [0,2] \to \mathbb{R}, \; \pi_1(p_1) = p_1 \cdot d_1(p_1) - 1, \qquad \pi_2 : [0,2] \to \mathbb{R}, \; \pi_2(p_2) = p_2 \cdot d_2(p_2) - 1,$$

dove 1 rappresenta un costo fisso.

1) Si calcolino i prezzi p_1^* e p_2^* che massimizzano rispettivamente π_1 e π_2
Si supponga ora che l'autorità locale di politica economica discuta una nuova normativa secondo la quale il prezzo del pasto deve essere lo stesso, p, sui due mercati. Se la funzione di domanda globale sui due mercati è

$$d : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad d(p) = 12 - 4\,p,$$

il profitto complessivo da massimizzare è il seguente:

$$\pi : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad \pi(p) = p \cdot d(p) - 2.$$

2) Si dica se l'introduzione della nuova normativa incrementa o riduce il profitto complessivo.

1.1.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1.
1) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in < dom(f)$ se

$$x \neq x_0, \; |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ allora } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2) Vedi libro di testo.
3)
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4.$$

Dato un generico $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \neq -2$ per cui $|x+2| < \delta_\varepsilon$ si abbia $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2} + 4\right| < \varepsilon$. Ma

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2} + 4\right| = |(x-2)+4| = |x+2|.$$

È dunque sufficiente prendere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$.

Soluzione Esercizio 2.
1) La funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed il grafico è composto da un tratto di parabola prima del punto $x_0 = 1$ e da un tratto di iperbole dopo il punto $x_0 = 1$.

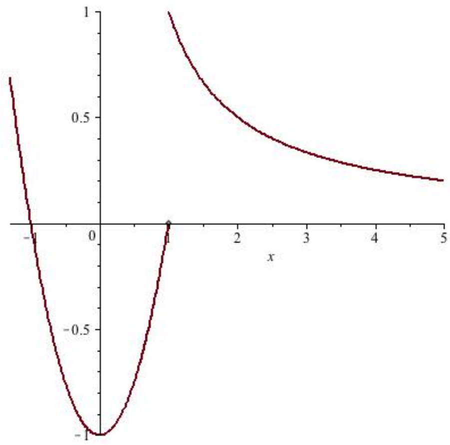


Figura 1.3: Grafico di $f(x)$

2) Teorema : *Se la funzione f è derivabile in un punto x_0 interno al suo* Dom(f) *allora f è anche continua in x_0.*

3) La funzione non è continua in $x_0 = 1$ poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1$$

Poiché la funzione non è continua in $x_0 = 1$ allora per il Teorema enunciato non è neanche derivabile in quel punto, mentre lo è ovviamente in tutti gli altri punti in quanto ha un'espressione polinomiale o è una funzione razionale.

Soluzione Esercizio 3.
1) Il dominio della funzione è $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
La funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$ poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x+6}{x-2} = 3, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3\,x+6}{x-2} = 3$$

ed uno verticale di equazione $x = 2$ poiché

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3\,x+6}{x-2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{3\,x+6}{x-2} = -\infty$$

Poiché la sua derivata è

$$D[f](x) = -12\ (x-2)^{-2} < 0$$

la funzione risulta decrescente nei due intervalli $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$ (si tratta di una iperbole e il suo grafico è in figura 1.4

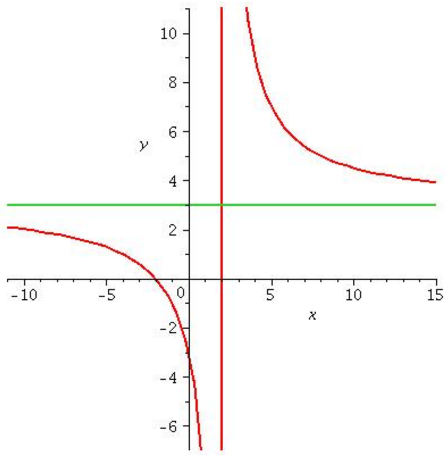


Figura 1.4: Grafico di $f(x)$

2) Guardando la proiezione del grafico sull'asse verticale vediamo che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{3\}.$$

3) Dal grafico vediamo che la funzione è iniettiva perché ogni retta orizzontale incontra il grafico in al massimo un punto. Possiamo vederlo anche risolvendo rispetto a x l'equazione

$$\frac{3x+6}{x-2} = y$$

per vedere se ha soluzioni e quante ne ha

$$
\begin{aligned}
3\,x + 6 &= y\,(x-2) \\
x\,(3-y) &= -2\,y - 6
\end{aligned}
$$

Per $y = 3$ l'equazione è impossibile ($y \notin \mathrm{Im}(f)$) mentre per $y \neq 3$ si ha

$$x = \frac{2\,y+6}{y-3}.$$

Quindi per ogni $y \in \mathrm{Im}(f)$ la soluzione è unica e quindi $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ è iniettiva, e perciò invertibile, e la sua funzione inversa è $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f)$ definita come

$$f^{-1}(y) = \frac{2\,y+6}{y-3}.$$

Soluzione Esercizio 4. Data la funzione

$$f\,(x) = \frac{1}{12}\,a\,x^4 - \frac{5}{6}\,a\,x^3 + 3\,a\,x^2 + 5x + 9$$

calcoliamo le sue prime due derivate

$$
\begin{aligned}
f'\,(x) &= \frac{1}{3}\,a\,x^3 - \frac{5}{2}\,a\,x^2 + 6\,a\,x + 5 \\
f''\,(x) &= a\,x^2 - 5\,a\,x + 6\,a = a\,(x-2)\,(x-3)
\end{aligned}
$$

Discutiamo il segno della derivata seconda a seconda del segno di a
Caso 1. Se $a > 0$ si ha $f'' > 0$, e dunque f strettamente convessa negli intervalli $(-\infty,\,2)$ e $(3,\,+\infty)$ mentre nell'intervallo $(2,3)$ abbiamo che $f'' < 0$, e dunque f è strettamente concava.
Caso 2. Se $a < 0$, allora la situazione è rovesciata si ha $f'' < 0$, e dunque f strettamente concava negli intervalli $(-\infty,\,2)$ e $(3,\,+\infty)$ mentre nell'intervallo $(2,3)$ abbiamo che $f'' > 0$, e dunque f è strettamente convessa.

Soluzione Esercizio 5.
1) la funzione g_1 è ottenuta come somma e composizione di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ ed è dunque derivabile su $\mathbb{R}$.
La funzione g_2 è prodotto di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, ed è dunque derivabile su $\mathbb{R}$.
Poiché $f_1(x) > 0$, la sua composizione con la funzione logaritmo è definita

per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. La funzione g_3 è quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da 0, perciò anche g_3 è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2)
$$D[g_1](x) = g_1'(x) = f_1'\left(x^5 + f_3(x)\right) \cdot \left(5x^4 + f_3'(x)\right) > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (tutti i fattori sono positivi per ipotesi), dunque g_1 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$$D[g_2](x) = g_2'(x) = f_1'(x)\, f_2(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2'(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2(x)\, f_3'(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (tutti i fattori sono positivi per ipotesi), dunque g_2 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} D[g_3](x) = g_3'(x) &= \frac{\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \cdot f_1(x) - f_1'(x) \log(f_1(x))}{(f_1(x))^2} \\ &= \frac{f_1'(x)(1 - \log(f_1(x)))}{(f_1(x))^2} \end{aligned}$$

poiché f_1 assume solo valori in $(0, 1)$ si ha $\log(f_1(x)) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $g_3'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, (tutti i fattori sono positivi) e allora g_3 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Soluzione Esercizio 6.
I prezzi appartengono all'intervallo $[0,\ 2]$, poiché le funzioni profitto sono tutte continue esse ammettono in questo intervallo massimo e minimo assoluto. Il profitto nel mercato 1 è dato da:

$$\pi_1(p_1) = (8 - 2p_1)\, p_1 - 1 = -2p_1^2 + 8p_1 - 1.$$

Poiché
$$\pi'(p_1) = -4p_1 + 8$$

si ha che $p_1^* = \frac{8}{4} = 2$ è un punto critico con

$$\pi_1(p_1^*) = (8 - 2p_1^*)\, p_1^* - 1 = (8 - 2 \cdot 2) \cdot 2 - 1 = 7.$$

poiché $\pi_1(0) = -1$, allora $p_1^* = 2$ (estremo destro dell'intervallo) è il punto di massimo globale per π_1 con profitto ottimo eguale a 7.
Il profitto nel mercato 2 è dato da

$$\pi_2(p_2) = (4 - 2p_2)\, p_2 - 1 = -2p_2^2 + 4p_2 - 1$$

con

$$\pi'(p_2) = -4p_2 + 4,$$

e dunque $p_2^* = \frac{4}{4} = 1$ è un punto critico con

$$\pi_2(p_2^*) = (4 - 2p_2^*)\, p_2^* - 1 = (4-2)\, 1 - 1 = 1$$

poiché $\pi_2(0) = -1$, $\pi_2(2) = -1$ allora $p_2^* = 1$ è il punto di massimo globale per π_2 con profitto ottimo eguale a 1.
Nel caso di un unico prezzo, il profitto è

$$\pi(p) = p(12 - 4p) - 2 = -4p^2 + 12p - 2 :$$

con

$$\pi'(p) = -8p + 12,$$

e dunque $p^* = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ è un punto critico con

$$\pi(p^*) = p^*(12 - 4p^*) - 2 = \frac{3}{2}\left(12 - 4\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{3}{2}(12 - 6) - 2 = 7.$$

poiché $\pi(0) = -2$, $\pi(2) = 6$ allora $p^* = \dfrac{3}{2}$ è il punto di massimo globale per π con profitto ottimo eguale a 7.

Il profitto totale massimo con prezzi diversi nei due mercati (discriminazione di prezzo) è $7 + 1 = 8$, mentre nel caso di un unico prezzo, il profitto totale massimo pari a 7 è inferiore. Dunque i responsabili dell'impresa non sono favorevoli alla nuova legge.

1.1.5 Compito C

Esercizio 1. (9 punti) Dare la definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, con L finito
1) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.
2) Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{5x^2 + 3}$ e poi si verifichi il risultato ottenuto usando la definizione di limite data sopra.

Esercizio 2. (5 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2, & \text{se } x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) Determinare il dominio D di f e disegnare il suo grafico.
2) Enunciare il teorema su derivabilità e continuità di una funzione in un

punto x_0.
3) Dire se f è continua nel suo dominio D, e se è derivabile in D.

Esercizio 3. (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+6}$.
1) Determinare il dominio D di f e disegnare il suo grafico studiando solo i limiti di f ed il segno della derivata prima.
2) Utilizzando il grafico, determinare l'immagine I di f.
3) Dire se $f : D \to I$ è invertibile e, in caso di risposta positiva, determinare la sua funzione inversa.

Esercizio 4. (5 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{12} c\, x^4 + \frac{1}{6} c\, x^3 - c\, x^2 + c\, x + 6,$$

con $c \neq 0$. Si studino gli intervalli di concavità e convessità di f per tutti i valori di $c \neq 0$.

Esercizio 5. (7 punti) Siano date le tre funzioni derivabili f_1, f_2, f_3, ciascuna definita in $\mathbb{R}$ tali che

$$f_1(x) > 0,\ f_1'(x) > 0, \qquad f_2'(x) < 0, \qquad f_3(x) > 0,\ f_3'(x) > 0.$$

Consideriamo le tre funzioni $g_1, g_2, g_3,$ anche esse definite in $\mathbb{R}$, definite come

$$g_1(x) = f_2\left(f_1(x) + x^5\right), \qquad g_2(x) = f_2(x) - f_1(x) \cdot f_3(x), \qquad g_3(x) = \frac{e^{f_2(x)}}{f_1(x)}$$

1) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono derivabili;
2) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono decrescenti.

Esercizio 6. (7 punti) Una catena di alberghi vende uno stesso pasto in due diversi mercati, che indichiamo con 1 e 2. Una legge impone che ogni prezzo sia minore o uguale a 5. Nei due mercati le funzioni di domanda, che associano a ciascun prezzo la quantità domandata, sono rispettivamente (l'indice corrisponde al mercato)

$$d_1 : [0,5] \to \mathbb{R},\ d_1(p_1) = 6 - p_1 \qquad d_2 : [0,5] \to \mathbb{R},\ d_2(p_2) = 10 - 2p_2.$$

Le funzioni che descrivono il profitto nei singoli mercati sono rispettivamente

$$\pi_1 : [0,5] \to \mathbb{R},\ \pi_1(p_1) = p_1 \cdot d_1(p_1) - 2, \qquad \pi_2 : [0,5] \to \mathbb{R},\ \pi_2(p_2) = p_2 \cdot d_2(p_2) - 2,$$

dove 2 rappresenta un costo fisso.
1) Si calcolino i prezzi p_1^* e p_2^* che massimizzano rispettivamente π_1 e π_2
Si supponga ora che l'autorità locale di politica economica discuta una nuova normativa secondo la quale il prezzo del pasto deve essere lo stesso, p, sui due mercati. Se la funzione di domanda globale sui due mercati è

$$d : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad d\,(p) = 16 - 3p.$$

il profitto complessivo da massimizzare è il seguente:

$$\pi : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad \pi\,(p) = p \cdot d\,(p) - 4.$$

2) Si dica se l'introduzione della nuova normativa incrementa o riduce il profitto complessivo.

1.1.6 Soluzioni Compito C

Soluzione Esercizio 1.
1) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in D(f)$ se

$$x > \delta_\varepsilon \text{ allora } |f\,(x) - L| < \varepsilon.$$

2) Vedi libro di testo.
3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2 - 1}{5\,x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \dfrac{1}{x^2}}{5 + \dfrac{3}{x^2}} = \frac{2}{5}.$$

Dato un generico $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x > \delta_\varepsilon$ si abbia $\left|\dfrac{2\,x^2 - 1}{5\,x^2 + 3} - \dfrac{2}{5}\right| < \varepsilon$. Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2\,x^2 - 1}{5\,x^2 + 3} - \frac{2}{5}\right| &= \left|\frac{5\,(2\,x^2 - 1) - 2\,(5\,x^2 + 3)}{5\,(5\,x^2 + 3)}\right| \\
&= \left|\frac{-11}{5\,(5\,x^2 + 3)}\right| \\
&= \frac{11}{5\,(5\,x^2 + 3)} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Se risolviamo rispetto a x otteniamo

$$\begin{aligned}
5\,x^2 + 3 &> \frac{11}{5\,\varepsilon} \\
x^2 &> \frac{1}{5}\left(\frac{11}{5\,\varepsilon} - 3\right)
\end{aligned}$$

Se l'espressione al secondo membro è negativa la disequazione è soddisfatta, altrimenti se prendiamo

$$x > \sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{11}{5\,\varepsilon} - 3\right)} = \delta_\varepsilon$$

la disequazione che definisce il limite è soddisfatta

Soluzione Esercizio 2.

1) La funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed il grafico è composto da un tratto di esponenziale decrescente prima del punto $x_0 = 1$ e da un tratto di parabola dopo il punto $x_0 = 1$.

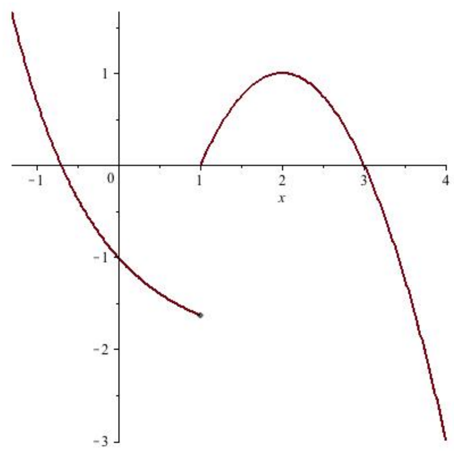


Figura 1.5: Grafico di $f(x)$

2) Teorema : *Se la funzione f è derivabile in un punto x_0 interno al suo* Dom(f) *allora f è anche continua in x_0.*

3) La funzione non è continua in $x_0 = 1$ poiché

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(e^{-x} - 2\right) = \frac{1}{e} - 2 < 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -(x-2)^2 + 1 = 0$$

Poiché la funzione non è continua in $x_0 = 1$ allora per il Teorema enunciato non è neanche derivabile in quel punto, mentre lo è ovviamente in tutti gli altri punti in quanto espressa da funzioni elementari.

Soluzione Esercizio 3.
1) Il dominio della funzione è $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq -2\} = (-\infty,\,-2) \cup (-2,\,+\infty)$.
La funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = \dfrac{1}{3}$ poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{3\,x+6} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{3\,x+6} = \frac{1}{3}$$

ed uno verticale di equazione $x = -2$ poiché

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x-1}{3\,x+6} = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{x-1}{3\,x+6} = +\infty$$

Poiché la sua derivata è

$$D[f](x) = 1\ (x+2)^{-2} > 0$$

la funzione risulta decrescente nei due intervalli $(-\infty,\,-2)$ e $(-2,\,+\infty)$ (si tratta di una iperbole e il suo grafico è in figura 1.6

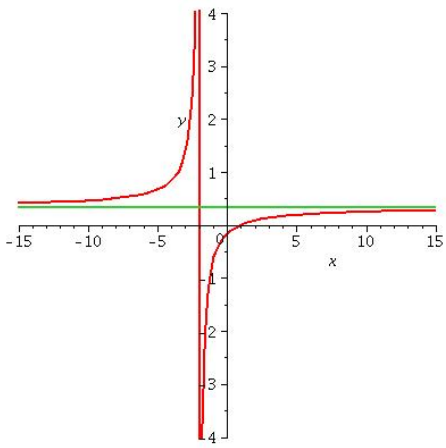


Figura 1.6: Grafico di $f(x)$

2) Guardando la proiezione del grafico sulla asse verticale vediamo che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}.$$

3) Dal grafico vediamo che la funzione è iniettiva perché ogni retta orizzontale incontra il grafico in al massimo un punto. Possiamo vederlo anche risolvendo rispetto a x l'equazione

$$\frac{x-1}{3x+6} = y$$

per vedere se ha soluzioni e quante ne ha

$$x-1=y\,(3\,x+6)$$
$$x\,(1-3\,y)=6y+1$$

Per $y=\dfrac{1}{3}$ l'equazione è impossibile ($y\notin \mathrm{Im}(f)$) mentre per $y\neq\dfrac{1}{3}$ si ha

$$x=\frac{6\,y+1}{1-3\,y}.$$

Quindi per ogni $y\in \mathrm{Im}(f)$ la soluzione è unica e quindi $f:\mathrm{Dom}(f)\to \mathrm{Im}(f)$ è iniettiva, e perciò invertibile, e la sua funzione inversa è $f^{-1}:\mathrm{Im}(f)\to \mathrm{Dom}(f)$ definita come

$$f^{-1}(y)=\frac{6\,y+1}{1-3\,y}.$$

Soluzione Esercizio 4. Data la funzione

$$f\,(x)=\frac{1}{12}\,c\,x^4+\frac{1}{6}\,c\,x^3-cx^2+cx+6$$

calcoliamo le sue prime due derivate

$$f'\,(x)=\frac{1}{3}\,c\,x^3+\frac{1}{2}\,c\,x^2-2\,c\,x+c$$
$$f''\,(x)=c\,x^2+c\,x-2\,c=c\,(x+2)\,(x-1)$$

Discutiamo il segno della derivata seconda a seconda del segno di b
Caso 1. Se $b>0$ si ha $f''>0$, e dunque f strettamente convessa negli intervalli $(-\infty,\,-2)$ e $(1,\,+\infty)$ mentre nell'intervallo $(-2,1)$ abbiamo che $f''<0$, e dunque f è strettamente concava.
Caso 2. Se $b<0$, allora la situazione è rovesciata si ha $f''<0$, e dunque f strettamente concava negli intervalli $(-\infty,\,-2)$ e $(1,\,+\infty)$ mentre nell'intervallo $(-2,1)$ abbiamo che $f''>0$, e dunque f è strettamente convessa.

Soluzione Esercizio 5.
1) la funzione g_1 è ottenuta come somma e composizione di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ ed è dunque derivabile su $\mathbb{R}$.
La funzione g_2 è somma e prodotto di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, ed è dunque derivabile su $\mathbb{R}$.

Poiché l'esponenziale è definita in tutto $\mathbb{R}$ la funzione g_3 è composizione e quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da 0, ed è quindi derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2)

$$D[g_1](x) = g_1'(x) = f_2'\left(x^5 + f_1(x)\right) \cdot \left(5x^4 + f_1'(x)\right) > 0$$

per le ipotesi fatte $D[g_1](x)$ è negativa per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque g_1 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

$$D[g_2](x) = g_2'(x) = f_2'(x) - f_1'(x) f_3(x) - f_1(x) f_3'(x)$$

per le ipotesi fatte $D[g_2](x)$ è negativa per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque g_2 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

$$D[g_3](x) = g_3'(x) = \frac{e^{f_2(x)}\left(f_2'(x) f_1(x) - f_1'(x)\right)}{\left(f_1(x)\right)^2}$$

per le ipotesi fatte $D[g_3](x)$ è negativa per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque g_3 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

Soluzione Esercizio 6.
I prezzi appartengono all'intervallo $[0, 5]$, poiché le funzioni profitto sono tutte continue esse ammettono in questo intervallo massimo e minimo assoluto. Il profitto nel mercato 1 è dato da:

$$\pi_1(p_1) = (6 - p_1) p_1 - 2 = -p_1^2 + 6p_1 - 2.$$

Poiché

$$\pi'(p_1) = -2p_1 + 6$$

si ha che $p_1^* = \frac{6}{2} = 3$ è un punto critico con

$$\pi_1(p_1^*) = (6 - p_1^*) p_1^* - 2 = (6 - 3) \cdot 3 - 2 = 7.$$

poiché $\pi_1(0) = -2$, $\pi_1(5) = 3$ allora $p_1^* = 3$ è il punto di massimo globale per π_1 con profitto ottimo eguale a 7.
Il profitto nel mercato 2 è dato da

$$\pi_2(p_2) = (10 - 2\,p_2)\,p_2 - 2 = -2\,p_2^2 + 10\,p_2 - 2$$

con

$$\pi'(p_2) = -4\,p_2 + 10,$$

e dunque $p_2^* = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ è un punto critico con

$$\pi_2\left(p_2^*\right) = \left(10 - 2\,p_2^*\right) p_2^* - 2 = \left(10 - 2 \cdot \frac{5}{2}\right) \frac{5}{2} - 2 = \frac{21}{2}$$

poiché $\pi_2(0) = -2$, $\pi_2(5) = -2$ allora $p_2^* = \frac{5}{2}$ è il punto di massimo globale per π_2 con profitto ottimo eguale a $\frac{21}{2}$.
Nel caso di un unico prezzo, il profitto è

$$\pi\left(p\right) = p\left(16 - 3p\right) - 4 = -3p^2 + 16\,p - 4 :$$

con

$$\pi'\left(p\right) = -6\,p + 16,$$

e dunque $p^* = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ è un punto critico con

$$\pi\left(p^*\right) = p^*\left(16 - 3p^*\right) - 4 = \frac{8}{3}\left(16 - 3\frac{8}{3}\right) - 4 = \frac{8}{3}\left(16 - 8\right) - 4 = \frac{52}{3}.$$

poiché $\pi(0) = -2$, $\pi(5) = 3$ allora $p^* = \dfrac{8}{3}$ è il punto di massimo globale per π con profitto ottimo eguale a $\dfrac{52}{3}$.

Il profitto totale massimo con prezzi diversi nei due mercati (discriminazione di prezzo) è $7 + \dfrac{21}{2} = \dfrac{35}{2}$, mentre nel caso di un unico prezzo, il profitto totale massimo pari a $\frac{52}{3}$ è inferiore. Poiché $\frac{35}{2} > \frac{52}{3}$ in quanto

$$35 \cdot 3 = 105 > 52 \cdot 2 = 104$$

dunque i responsabili dell'impresa non sono favorevoli alla nuova legge.

1.2 Compito del 09 Febbraio 2015

1.2.1 Compito A

Esercizio 1. (6 punti)
a. Si diano le definizioni di funzione strettamente crescente e di punto di massimo globale per una funzione.
Date le funzioni

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = 1 \ (costante),$$

usando le definizioni fornite sopra e dunque senza usare il concetto di derivata, si dica se
b1. f è strettamente crescente su $[0, +\infty)$; **b2.** f ha un punto di massimo globale in $x_0 = 1$.
c1. g è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; **c2.** g ha un punto di massimo globale in $x_0 = 1$.

Esercizio 2. (6 punti)
a. Si formuli e si dimostri il Teorema di Rolle.
b. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: $a < b < c$ e $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. Si dimostri cha la derivata seconda di f si annulla in almeno un punto dell'intervallo (a, c).
Suggerimento: si applichi il Teorema di Rolle a f sui due intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$.

Esercizio 3. (6 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a.} \lim_{x \to 1} \frac{e^{\sqrt{x}} - e}{\log(x)}; \qquad \textbf{b.} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + e^{2x}}{x^3 + \log(-x)}.$$

Esercizio 4. (8 punti)
Sia data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = xe^{-x/2}.$$

a. Si studi la funzione f e se ne disegni il grafico per $x \geq 0$;
b. Si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.
c. Si dia la definizione di funzione dispari;
Consideriamo ora la funzione g definita su tutto $\mathbb{R}$, che coincide con f per $x \geq 0$, cioé $f(x) = g(x)$ per ogni $x \geq 0$, e che risulta essere dispari.

d. Utilizzando i risultati del punto a) si disegni il grafico di g e si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.
e. Si dica se g è continua in $\mathbb{R}$ e se g è derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. (6 punti)
a. Si scriva la formula di Taylor di grado n per una funzione f in un punto x_0 specificando le proprietà del resto.
b. Siano date le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che $g(0) = g'(0) = 1$ e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, e
la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log(1 + g(x)).$$

Utilizzando la regola di derivata della funzione composta si calcoli la derivata della funzione f e si scriva il polinomio di Taylor di grado 1 per f in $x_0 = 0$.

Esercizio 6. (8 punti)
Un individuo coltiva un orto nel quale lavora per x ore al giorno, con $x \in [0, 8]$. L'individuo ottiene un solo bene dall'orto, la cui quantità è descritta dalla seguente funzione

$$g : [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 32\sqrt{x}.$$

L'individuo vuole massimizzare la propria utilità $u(x)$ e tale utilità è data dalla quantità del bene meno il quadrato del tempo trascorso al lavoro nell'orto (con specifici coefficienti di proporzionalità). Ovvero la funzione di utilità dell'individuo è:

$$u : [0, 8] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = 32\sqrt{x} - x^2.$$

a. Prima di risolvere il problema di massimizzazzione possiamo affermare che esiste un punto di massimo globale per la funzione di utilità?
b. Calcolare la quantità di lavoro che massimizza la funzione di utilità $u(x)$.

1.2.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1.
a. La funzione $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice strettamente crescente se

$$\text{per ogni } x, y \in S,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

x_0 è un punto di massimo globale per $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se

$$(x_0 \in S) \text{ e per ogni } x \in S,\ f(x) \leq f(x_0).$$

b1. La funzione f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$; infatti, se $x < y$ e $x, y \geq 0$, allora

$$x^2 < y^2 \Rightarrow x^2 + 3 < y^2 + 3 \text{ cioé } f(x) < f(y).$$

b2. La funzione f non ha un punto di massimo globale in $x_0 = 1$. Per dimostrarlo facciamo vedere che esiste $x \in [0, +\infty)$ tale che $f(1) < f(x)$; per fare questo si prenda $x = 2$, allora

$$f(1) = 1^2 + 3 = 4 < f(2) = 2^2 + 3 = 7.$$

c1. La funzione g non è strettamente crescente infatti, se $x < y$, allora

$$g(x) = g(y) = 1.$$

c2. g ha un punto di massimo globale in $x_0 = 1$ infatti,

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 \leq 1 = g(1).$$

Soluzione Esercizio 2.
a. L'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si trovano nel libro.
b. Il teorema è applicabile alla funzione $f(x)$ sugli intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$, poiché si tratta di una funzione continua e derivavile e inoltre $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$. Quindi esistono $p \in (a, b)$ e $q \in (b, c)$, tali che $f'(p) = 0, f'(q) = 0$ quindi il Teorema di Rolle è di nuovo applicabile alla funzione continua e derivabile f' sull'intervallo $[p, q]$. Quindi esiste $s \in (p, q) \subset [a, b]$, tale che $f''(s) = 0$.

Soluzione Esercizio 3.
a. Il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{\sqrt{x}} - e}{\log(x)}$$

è una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Possiamo quindi applicare il Teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{\sqrt{x}} - e}{\log(x)} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1/x} = \frac{e}{2}.$$

b. A partire dai limiti

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0, \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty, \lim_{x \to -\infty} \log(-x) = +\infty.$$

vediamo che il limite $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + \log(-x)) = -\infty$ in quanto per il confronto fra infiniti il termine x^3 è quello dominante e quindi il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + e^{2x}}{x^3 + \log(-x)}$$

risulta una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il termine dominante al numeratore è x^2. Quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+e^{2x}}{x^3+\log(-x)} = \boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{e^{2x}}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{\log(-x)}{x^3}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3} = 0.$$

Il passaggio nel riquadro può essere saltato.

Soluzione Esercizio 4.

Per $x \geq 0$ si tratta di una funzione che si annulla soltanto in $x = 0$ e che per $x > 0$ è positiva. Studiamo la sua crescenza e decrescenza, usando la derivata.

$$f'(x) = e^{-x/2}(1 - x/2),\ \ x \geq 0$$

la funzione cresce in $[0, 2)$ e decresce in $(2, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x/2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x/2}} = 0.$$

Il valore della funzione in 2 è $f(2) = 2e^{-1}$ che corrisponde al massimo della funzione per $x \geq 0$ mentre $x = 0$ è il punto di minimo. Il grafico della funzione f è in figura 1.7

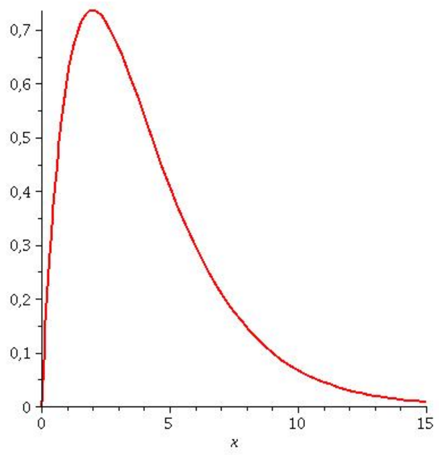


Figura 1.7: Grafico di $f(x)$

b. Da quanto detto possiamo dedurre che

$$\sup f(x) = \max f(x) = \frac{2}{e}$$

$$\inf f(x) = \min f(x) = 0$$
$$\mathrm{Im}(f) = \left[0,\ \frac{2}{e}\right]$$

c. Una funzione $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice dispari, se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e

$$\text{per ogni } x,\ \ f(-x) = -f(x).$$

d. Coerentemente con la definizione deve quindi essere $g(-x) = -g(x)$ e quindi per $x < 0$ la funzione è definita come

$$g(x) = -(-xe^{x/2}) = xe^{x/2}.$$

Abbiamo quindi che

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x/2}, & x \geq 0; \\ xe^{x/2}, & x < 0. \end{cases}$$

ed il suo grafico si ottiene da quello di f per simmetria: Figura 1.8

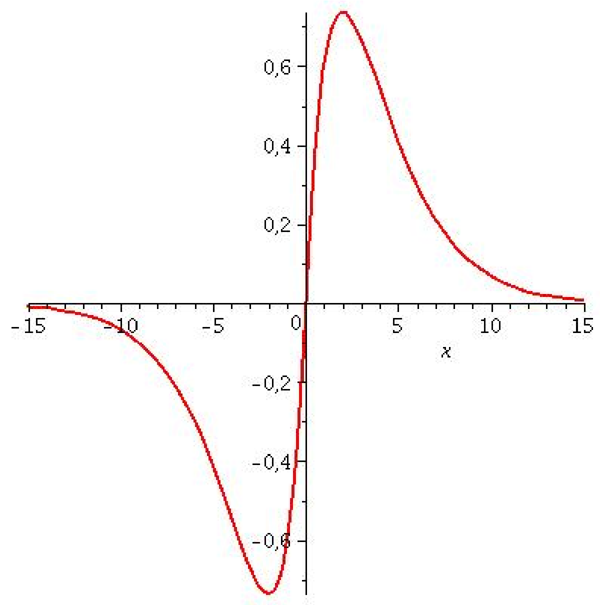


Figura 1.8: Grafico di $g(x)$

e. Da quanto detto possiamo dedurre che

$$\sup g(x) = \max g(x) = \frac{2}{e}$$

$$\inf g(x) = \min g(x) = -\frac{2}{e}$$

$$\mathrm{Im}(g) = \left[-\frac{2}{e}, \frac{2}{e}\right]$$

d. La funzione g è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dato che in ogni tratto è prodotto di una potenza e una funzione esponenziale.
La funzione g è continua in 0, visto che

$$\lim_{x \to 0-} g(x) = 0 = g(0) = \lim_{x \to 0+} g(x)$$

.
La funzione è derivabile in $x = 0$ visto che

$$D^+(g)(x)_{|x=0} = e^{-x/2}(1 - x/2)_{|x=0} = 1,$$

$$D^-(g)(x)_{|x=0} = e^{x/2}(1 + x/2)_{|x=0} = 1$$

Soluzione Esercizio 5.
a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + R_n(x).$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

b. Poichè

$$T_1 f(x) = f(0) + f'(0) x$$

e

$$f(x) = \log(1 + g(x)) \qquad f(0) = \log(1 + g(0)) = \log(2)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + g(x)} \qquad f'(0) = \frac{g'(0)}{1 + g(0)} = \tfrac{1}{2}$$

si ha

$$T_1 f(x) = \log(2) + \frac{1}{2}x.$$

Soluzione Esercizio 6. Come conseguenza del teorema di Weierstrass, un punto di amssimo globale esiste perché $[0, 8]$ è un intervallo chiuso e limitato e la funzione da massimizzare è una funzione continua perché somma di funzioni potenza.
b.

$$u'(x) = 32\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} - 2x = \frac{16 - 2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2(8 - x\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

che è definita per $x \in (0,8]$. Poichè il denominatore è positivo, il segno di u' è il segno del suo numeratore.
L'espressione $8 - x\sqrt{x} = 0$ se e solo se $\sqrt{x^3} = 8$ ovvero $x^3 = 64 = 2^6 = (2^2)^3$ ovvero $x = 4$.
Inoltre $8 - x\sqrt{x} > 0$ se e solo se $\sqrt{x^3} < 8$ ovvero $x \in (0,4]$. Dunque u' è positiva se $x \in (0,4]$ e negativa se $x \in (4,8]$. Dunque u ha il punto di massimo globale in $x = 4$.

1.2.3 Compito B

Esercizio 1. (6 punti)
a. Si diano le definizioni di funzione strettamente decrescente e di punto di minimo globale per una funzione.
Date le funzioni

$$f(x) = -x^2 - 3, \qquad g(x) = 1 \ (\textit{costante}),$$

usando le definizioni fornite sopra e dunque senza usare il concetto di derivata, si dica se
b1. f è strettamente decrescente su $[0, +\infty)$; **b2.** f ha un punto di minimo globale in $x_0 = 1$.
c1. g è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$; **c2.** g ha un punto di minimo globale in $x_0 = 1$.

Esercizio 2. (6 punti)
a. Si formuli e si dimostri il Teorema di Rolle.
b. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: $a < b < c$ e $f(a) = f(b) = f(c) = -1$. Si dimostri che la derivata seconda di f si annulla in almeno un punto dell'intervallo (a, c).
Suggerimento: si applichi il Teorema di Rolle a f sui due intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$.

Esercizio 3. (6 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a.} \ \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2}; \qquad \textbf{b.} \ \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 + 7\log(-x)}{2x + e^{-x}}.$$

Esercizio 4. (8 punti)
Sia data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = -2\,x\,e^{-x}.$$

a. Si studi la funzione f e se ne disegni il grafico per $x \geq 0$;
b. Si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.
c. Si dia la definizione di funzione dispari;
Consideriamo ora la funzione g definita su tutto $\mathbb{R}$, che coincide con f per $x \geq 0$, cioè $g(x) = f(x)$ per ogni $x \geq 0$, e che risulta essere dispari.
d. Utilizzando i risultati del punto a) si disegni il grafico di g e si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.
e. Si dica se g è continua in $\mathbb{R}$ e se g è derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. (6 punti)
a. Si scriva la formula di Taylor di grado n per una funzione f in un punto x_0 specificando le proprietà del resto;
b. Siano date le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che $g(0) = g'(0) = 2$ e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, e
la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log(1 + g(x)).$$

Utilizzando la regola di derivata della funzione composta si calcoli la derivata della funzione f e si scriva il polinomio di Taylor di grado 1 per f in $x_0 = 0$

Esercizio 6. (8 punti)
Un individuo coltiva un orto nel quale lavora per x ore al giorno, con $x \in [0, 8]$. L'individuo ottiene un solo bene dall'orto, la cui quantità è descritta dalla seguente funzione

$$g : [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 64\sqrt{x}.$$

L'individuo vuole massimizzare la propria utilità $u(x)$ e tale utilità è data dalla quantità del bene meno il quadrato del tempo trascorso al lavoro nell'orto (con specifici coefficienti di proporzionalità). Ovvero la funzione di utilità dell'individuo è:

$$u : [0, 8] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = 64\sqrt{x} - 2x^2.$$

a. Prima di risolvere il problema di massimizzazione possiamo affermare che esiste un punto di massimo globale per la funzione di utilità?
b. Calcolare la quantità di lavoro che massimizza la funzione di utilità $u(x)$.

1.2.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1.
a. La funzione $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice strettamente decrescente se

$$\text{per ogni } x, y \in S,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

x_0 è un punto di minimo globale per $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se

$$(x_0 \in S) \text{ e per ogni } x \in S,\ f(x) \geq f(x_0).$$

b1. La funzione f è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$; infatti, se $x < y$ e $x, y \geq 0$, allora

$$x^2 < y^2 \Rightarrow -x^2 > -y^2 \Rightarrow -x^2 - 3 < -y^2 - 3 \text{ cioé } f(x) > f(y).$$

b2. La funzione f non ha un punto di minimo globale in $x_0 = 1$. Per dimostrarlo facciamo vedere che esiste $x \in [0, +\infty)$ tale che $f(1) > f(x)$:
per fare questo si prenda $x = 2$, allora

$$f(1) = -1^2 - 3 = -4 > f(2) = -2^2 - 3 = -7.$$

c1. La funzione g non è strettamente decrescente infatti, se $x < y$, allora

$$g(x) = g(y) = 1.$$

c2. g ha un punto di minimo globale in $x_0 = 1$, infatti,

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 \geq 1 = g(1).$$

Soluzione Esercizio 2.
a. L'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si trovano nel libro.
b. Il teorema è applicabile alla funzione $f(x)$ sugli intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$ poiché si tratta di una funzione continua e derivabile e $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$; quindi esistono $p \in (a, b)$ e $q \in (b, c)$, tali che $f'(p) = 0, f'(q) = 0$. Ora il Teorema di Rolle è di nuovo applicabile alla funzione continua e derivabile f' sull'intervallo $[p, q]$. Quindi esiste $s \in (p, q) \subset [a, b]$, tale che $f''(s) = 0$.

Soluzione Esercizio 3.
a. Il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2}$$

è una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Possiamo quindi applicare il Teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{-2x} = \frac{-\pi}{-2} = \frac{\pi}{2}.$$

b. A partire dai limiti

$$\lim_{x\to-\infty} 6x^2 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} 7\log(-x) = +\infty.$$

vediamo che il limite $\lim_{x\to-\infty}(2x+e^{-x})=+\infty$. in quanto per il confronto fra infiniti il termine e^{-x} è quello dominante e quindi il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2+7\log(-x)}{2x+e^{-x}}$$

risulta una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il termine dominante al numeratore è $6\,x^2$. Quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2+7\log(-x)}{2x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2}{e^{-x}}\overset{(y=-x)}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{6y^2}{e^y}=0.$$

Soluzione Esercizio 4.
Per $x\geq 0$ si tratta di una funzione che si annulla soltanto in $x=0$ e che per $x>0$ è sempre negativa. Studiamo la sua crescenza e decrescenza, usando la derivata.

$$f'(x)=2\,e^{-x}(x-1),$$

la funzione decresce in $[0,\,1)$ e cresce in $(1,+\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-2\,xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\,x}{e^x}=0.$$

Il valore della funzione in 1 è $f(1)=-2e^{-1}=\dfrac{-2}{e}$ che corrisponde al minimo della funzione per $x\geq 0$ mentre $x=0$ è il punto di massimo. Il grafico della funzione f è in figura 1.9

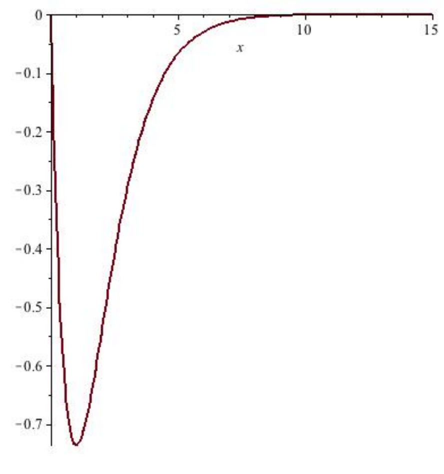


Figura 1.9: Grafico di $f(x)$

b. Da quando detto possiamo dedurre che

$$\sup f(x) = \max f(x) = 0$$

$$\inf f(x) = \min f(x) = \frac{-2}{e}$$

$$\operatorname{Im}(f) = \left[\frac{-2}{e}, 0\right]$$

c. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice dispari se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e

$$\text{per ogni } x,\ f(-x) = -f(x).$$

d. Coerentemente con la definizione deve quindi essere $g(-x) = -g(x)$ e quindi per $x < 0$ la funzione è definita come $g(x) = -(2\,xe^{x}) = -2\,xe^{x}$. Abbiamo quindi che

$$g(x) = \begin{cases} -2\,xe^{-x}, & x \geq 0; \\ -2xe^{x}, & x < 0. \end{cases}$$

ed il suo grafico si ottiene da quello di f per simmetria, vedi figura 1.10

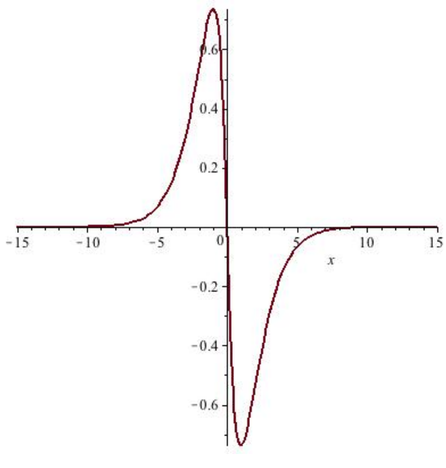


Figura 1.10: Grafico di $g(x)$

e. Da quando detto possiamo dedurre che

$$\sup g(x) = \max g(x) = \frac{2}{e}$$

$$\inf g(x) = \min g(x) = -\frac{2}{e}$$

$$\mathrm{Im}(g) = \left[-\frac{2}{e}, \frac{2}{e}\right]$$

d. La funzione g è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ visto che in ogni tratto è prodotto di una potenza e una funzione esponenziale.
La funzione g è continua in 0, visto che

$$\lim_{x \to 0-} g(x) = 0 = g(0) = \lim_{x \to 0+} g(x)$$

.
La funzione è derivabile in $x = 0$ visto che

$$D^+(g)(x)_{|x=0} = -2\, e^{-x}(1-x)_{|x=0} = -2,$$

$$D^-(g)(x)_{|x=0} = -2e^{x}(1+x)_{|x=0} = -2$$

Soluzione Esercizio 5.
a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_n(x).$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

b.
Poiché

$$T_1 f(x) = f(0) + f'(0)\, x$$

e

$$f(x) = \log(1 + g(x)) \qquad f(0) = \log(1 + g(0)) = \log(3)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + g(x)} \qquad f'(0) = \frac{g'(0)}{1 + g(0)} = \tfrac{2}{3}$$

si ha

$$T_1 f(x) = \log(3) + \frac{2}{3}x.$$

Soluzione Esercizio 6. Come conseguenza del teorema di Weierstrass, un punto di massimo globale esiste perché $[0, 8]$ è un intervallo chiuso e limitato e la funzione da massimizzare è una funzione continua perché somma di funzioni potenza.

b.

$$u'(x) = 64\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4x = \frac{32 - 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{4(8 - x\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

che è definita per $x \in (0, 8]$. Poiché il denominatore è positivo, il segno di u' è il segno del suo numeratore.
L'espressione $8 - x\sqrt{x} = 0$ se e solo se $\sqrt{x^3} = 8$ ovvero $x^3 = 64 = 2^6 = (2^2)^3$ ovvero $x = 4$.
Inoltre $8 - x\sqrt{x} > 0$ se e solo se $\sqrt{x^3} < 8$ ovvero $x \in (0, 4]$. Dunque u' è positiva se $x \in (0, 4]$ e negativa se $x \in (4, 8]$. Dunque u ha il punto di massimo globale in $x = 4$.

1.2.5 Compito C

Esercizio 1. (6 punti)
a. Si diano le definizioni di funzione strettamente crescente e di punto di massimo globale per una funzione.
Date le funzioni

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = 1 \ (\textit{costante}),$$

usando le definizioni fornite sopra e dunque senza usare il concetto di derivata, si dica se
b1. f è strettamente crescente su $[0, +\infty)$; **b2.** f ha un punto di massimo globale in $x_0 = 2$.
c1. g è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; **c2.** g ha un punto di massimo globale in $x_0 = 2$.

Esercizio 2. (6 punti)
a. Si formuli e si dimostri il Teorema di Rolle.
b. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: $a < b < c$ e $f(a) = f(b) = f(c) = 2$. Si dimostri che la derivata seconda f'' di f si annulla in almeno un punto dell'intervallo (a, c).
Suggerimento: si applichi il Teorema di Rolle a f sui due intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$.

Esercizio 3. (6 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a. } \lim_{x\to 4} \frac{8 - \frac{x^2}{2}}{e^{\sqrt{x}} - e^2}; \qquad \textbf{b. } \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + e^{-2x}}{-x^2 + e^x}.$$

Esercizio 4. (8 punti)
Sia data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = -xe^{-x}.$$

a. Si studi la funzione f e se ne disegni il grafico per $x \geq 0$;
b. Si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.
c. Si dia la definizione di funzione dispari;
Consideriamo ora la funzione g definita su tutto $\mathbb{R}$, che coincide con f per $x \geq 0$, cioè $g(x) = f(x)$ per ogni $x \geq 0$, e che risulta essere dispari.
d. Utilizzando i risultati del punto a) si disegni il grafico di g e si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.
e. Si dica se g è continua in $\mathbb{R}$ e se g è derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. (6 punti)
a. Si scriva la formula di Taylor di grado n per una funzione f in un punto x_0 specificando le proprietà del resto;
b. Siano date le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che $g(0) = g'(0) = 1$ e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, e
la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log(1 + g(x)).$$

Utilizzando la regola di derivata della funzione composta si calcoli la derivata della funzione f e si scriva il polinomio di Taylor di grado 1 per f in $x_0 = 0$.

Esercizio 6. (8 punti)
Un individuo coltiva un orto nel quale lavora per x ore al giorno, con $x \in [0, 8]$. L'individuo ottiene un solo bene dall'orto, la cui quantità è descritta dalla seguente funzione

$$g : [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 96\sqrt{x}.$$

L'individuo vuole massimizzare la propria utilità $u(x)$ e tale utilità è data dalla quantità del bene meno il quadrato del tempo trascorso al lavoro nell'orto (con specifici coefficienti di proporzionalità). Ovvero la funzione di utilità dell'individuo è:

$$u : [0, 8] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = 96\sqrt{x} - 3x^2.$$

a. Prima di risolvere il problema di massimizzazione possiamo affermare che certamente esiste un punto di massimo globale per la funzione di utilità?
b. Calcolare la quantità di lavoro che massimizza la funzione di utilità $u(x)$.

1.2.6 Soluzioni Compito C

Soluzione Esercizio 1.
a. La funzione $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice strettamente crescente se

$$\text{per ogni } x, y \in S,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

x_0 è un punto di massimo globale per $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se

$$(x_0 \in S) \text{ e per ogni } x \in S,\ f(x) \leq f(x_0).$$

b1. La funzione f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$, infatti se $x < y$ e $x, y \geq 0$ allora

$$x^2 < y^2 \text{ cioé } f(x) < f(y).$$

b2. La funzione f non ha un punto di massimo globale in $x_0 = 2$. Per dimostrarlo facciamo vedere che esiste $x \in [0, +\infty)$ tale che $f(2) < f(x)$; per fare questo si prenda $x = 3$, allora

$$f(2) = 4 < f(3) = 9.$$

c1. La funzione g non è strettamente crescente infatti, se $x < y$, allora

$$g(x) = g(y) = 1.$$

c2. g ha un punto di massimo globale in $x_0 = 1$: infatti,

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 \leq 1 = g(1).$$

Soluzione Esercizio 2.
a. L'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si trovano nel libro.
b. Il teorema è applicabile alla funzione $f(x)$ sugli intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$ poiché si tratta di una funzione continua e derivabile e $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$; quindi esistono $p \in (a, b)$ e $q \in (b, c)$, tali che $f'(p) = 0, f'(q) = 0$. Ora il Teorema di Rolle è di nuovo applicabile alla funzione continua e derivabile f' sull'intervallo $[p, q]$. Quindi esiste $s \in (p, q) \subset [a, b]$, tale che $f''(s) = 0$.

Soluzione Esercizio 3.
a. Il limite

$$\lim_{x \to 4} \frac{8 - \frac{x^2}{2}}{e^{\sqrt{x}} - e^2}$$

è una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Possiamo quindi applicare il Teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 4}\frac{8-\frac{x^2}{2}}{e^{\sqrt{x}}-e^2}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 4}\frac{-x}{e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{-4}{(e^2/4)}=\frac{-16}{e^2}.$$

b. Valgono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}-x^2=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

Per confronto di infiniti il termine e^x al denominatore è dominante e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+e^x\right)=+\infty.$$

Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+e^{-2x}}{-x^2+e^x}$$

risulta una forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Il termine dominante al numeratore è x^3. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+e^{2x}}{-x^2+e^x}=\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{e^{-2x}}{x^3}\right)}{e^x\left(-\frac{x^2}{e^x}+1\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0.$$

Il passaggio nel riquadro può essere saltato.

Soluzione Esercizio 4.
Per $x\geq 0$ si tratta di una funzione che si annulla soltanto in $x=0$ e che per $x>0$ è sempre negativa. Studiamo la sua crescenza e decrescenza, usando la derivata.

$$f'(x)=e^{-x}(x-1),$$

la funzione decresce in $[0,\,1)$ e cresce in $(1,+\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x}=0.$$

Il valore della funzione in 1 è $f(2)=-e^{-1}=\dfrac{-1}{e}$ che corrisponde al minimo della funzione per $x\geq 0$ mentre $x=0$ è il punto di massimo. Il grafico della funzione f è in figura 1.11

Da quando detto possiamo dedurre che

b.

$$\sup f(x)=\max f(x)=0$$

$$\inf f(x)=\min f(x)=\frac{-1}{e}$$

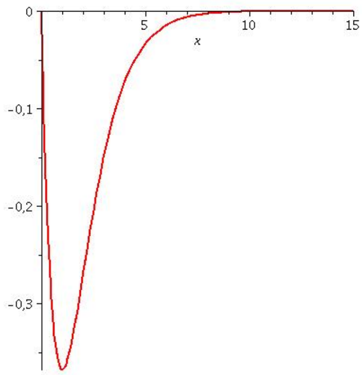


Figura 1.11: Grafico di $f(x)$

$$\mathrm{Im}(f) = \left[\frac{-1}{e}, 0\right]$$

c. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice dispari, se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e

$$\text{per ogni } x,\ f(-x) = -f(x).$$

d. Coerentemente con la definizione deve quindi essere $g(-x) = -g(x)$ e quindi per $x < 0$ la funzione è definita come $g(x) = -(xe^{-x}) = -xe^{x}$. Abbiamo quindi che

$$g(x) = \begin{cases} -x\,e^{-x}, & x \geq 0; \\ -x\,e^{x}, & x < 0. \end{cases}$$

ed il suo grafico si ottiene da quello di f per simmetria, vedi figura 1.12

e. Da quanto detto possiamo dedurre che

$$\sup g(x) = \max g(x) = \frac{1}{e}$$

$$\inf g(x) = \min g(x) = -\frac{1}{e}$$

$$\mathrm{Im}(g) = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$$

d. La funzione g è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ visto, che in ogni tratto è prodotto di una potenza e una funzione esponenziale.

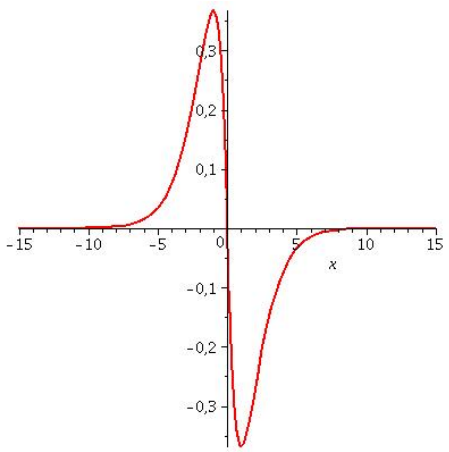


Figura 1.12: Grafico di $g(x)$

La funzione g è continua in 0, visto che

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = 0 = g(0) = \lim_{x\to 0+} g(x)$$

.
La funzione è derivabile in $x = 0$ visto che

$$D^+(g)(x)_{|x=0} = -e^{-x}(1-x)_{|x=0} = -1,$$

$$D^-(g)(x)_{|x=0} = -e^{x}(1+x)_{|x=0} = -1$$

Soluzione Esercizio 5.
a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_n(x).$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

b.
Poiché

$$T_1 f(x) = f(0) + f'(0)\, x$$

e

$$f(x) = \log(1+g(x)) \qquad f(0) = \log(1+g(0)) = \log(2)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g(x)} \qquad f'(0) = \frac{g'(0)}{1+g(0)} = \frac{1}{2}$$

si ha
$$T_1 f\,(x) = \log(2) + \frac{1}{2}\,x.$$

Soluzione Esercizio 6. Come conseguenza del teorema di Weierstrass, un punto di massimo globale esiste perché $[0,8]$ è un intervallo chiuso e limitato e la funzione da massimizzare è una funzione continua perché somma di funzioni potenza.

b.
$$u'\,(x) = 96\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} - 6\,x = \frac{48 - 6\,x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6(8 - \,x\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

che è definita per $x \in (0,8]$. Poiché il denominatore è positivo, il segno di u' è il segno del suo numeratore.

L'espressione $8 - x\sqrt{x} = 0$ se e solo se $\sqrt{x^3} = 8$ ovvero $x^3 = 64 = 2^6 = (2^2)^3$ ovvero $x = 4$.

Inoltre $8 - x\sqrt{x} > 0$ se e solo se $\sqrt{x^3} < 8$ ovvero $x \in (0,4]$. Dunque u' è positiva se $x \in (0,4]$ e negativa se $x \in (4,8]$. Dunque u ha il punto di massimo globale in $x = 4$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 11 giugno 2015

Cognome:________________ Nome:_____________ Numero di matricola:_______

1. **(6 punti)** Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4^x-4}{x^2-5x-6} \geq 0\}$. Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti, e si determinino (se esistono) $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

2. **(8 punti)** (a) Si enunci il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)$, e dati a e b in $\mathbb{R}$ tali che $a < b$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, b]$, e si dimostri che $|\cos(2b) - \cos(2a)| \leq 2(b - a)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\ln(1+2x)}{3x\ln(2+x)}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{5+x-2^x-x^5}{x^4-7x}$$

4. **(7 punti)** Si studi la funzione (senza studiare il segno della derivata seconda)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-1}$$

5. **(6 punti)** Date le due funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(2 + x)$, per ciascuna delle due seguenti funzioni composte si scriva esplicitamente l'espressione, e poi si determinino il dominio e l'immagine:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x))$$

6. **(7 punti)** Un'impresa deve fabbricare 16 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 e l'impianto 2. Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 1, e sia $48\sqrt{x_1}$ il costo per produrre tale quantita'; analogamente sia $x_2 \geq 0$ la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 2, e sia $5x_2$ il costo per produrre tale quantita'. L'impresa vuole determinare x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 16$ (ovvero $x_2 = 16 - x_1$), in modo da minimizzare il costo totale, $48\sqrt{x_1} + 5x_2$.

   (a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

   (b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Soluzioni al Testo d'esame A, 11 giugno 2015

1. Risulta che (i) $4^x - 4 < 0$ per $x < 1$, $4^x - 4 = 0$ per $x = 1$, $4^x - 4 > 0$ per $x > 1$; (ii) $x^2 - 5x - 6 < 0$ per $x \in (-1, 6)$ (cioe' per x interno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado), $x^2 - 5x - 6 = 0$ per $x = -1$ e per $x = 6$, $x^2 - 5x - 6 > 0$ per $x < -1$ e per $x > 6$ (cioe' per x esterno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado). Quindi $A = (-1, 1] \cup (6, +\infty)$, e $\sup A = +\infty$, $\inf A = -1$, $\max A$ non esiste, $\min A$ non esiste.

2. (a) Si veda il libro di testo

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \cos(2x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si conclude che esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\cos(2b) - \cos(2a) = -2\sin(2c)(b - a)$, dunque, dato che $b - a > 0$, si ha $|\cos(2b) - \cos(2a)| = |-2\sin(2c)(b - a)| = 2|\sin(2c)|(b - a) \leq 2(b - a)$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\ln(1+2x)}{3x\ln(2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}}{\ln(2+x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

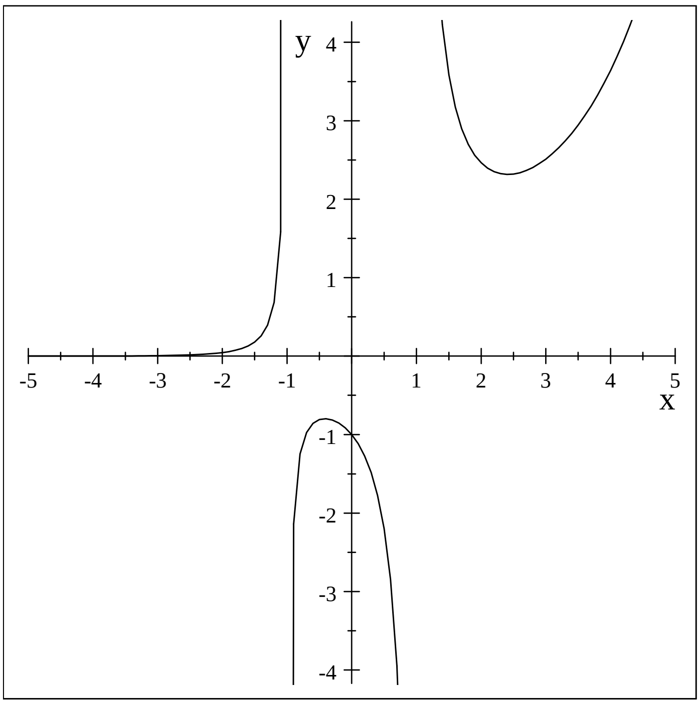
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5 + x - 2^x - x^5}{x^4 - 7x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{1} = +\infty$$

4. Il dominio naturale di f e' l'insieme $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1 + \infty)$, e f non e' ne' pari ne' dispari. Per ogni $x \in D$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di $f(x)$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$, $f(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto tra infiniti.

   $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{e}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{e}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. Dunque $\lim_{x\to-1} f(x)$ e $\lim_{x\to1} f(x)$ non esistono.

   $f'(x) = \frac{e^x(x^2-1) - 2xe^x}{(x^2-1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-1)}{(x^2-1)^2}$ e, per ogni $x \in D$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 1$. Pertanto $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, -\sqrt{2}+1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{2}+1, 1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (1, \sqrt{2}+1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{2}+1, +\infty)$. Dunque f e' strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, -\sqrt{2}+1)$, e' strettamente decrescente negli intervalli $(-\sqrt{2}+1, 1)$ e $(1, \sqrt{2}+1)$, e' strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{2}+1, +\infty)$. Combinando queste informazioni con quelle ricavate dallo studio del segno di f e dei limiti di f si ottiene il seguente grafico



Per questa funzione, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; non esiste alcun punto di max globale ne' di min globale; $x = -\sqrt{2} + 1$ e' punto di max locale, $x = \sqrt{2} + 1$ e' un punto di min locale.

5. Poiche' $h_1(x) = (\ln(2 + x))^2$, si deduce che il dominio di h_1 e' $(-2, +\infty)$, dato che $2 + x > 0$ se e solo se $x > -2$. L'immagine di h_1 si puo' ottenere osservando che l'equazione $(\ln(2 + x))^2 = y$ non ha soluzioni se $y < 0$, e per ogni $y \geq 0$ una soluzione all'equazione e' data da $x = e^{\sqrt{y}} - 2$ (che appartiene al dominio di h_1). Pertanto l'immagine di h_1 e' l'intervallo $(0, +\infty)$.

   Poiche' $h_2(x) = \ln(2 + x^2)$, si deduce che il dominio di h_2 e' $\mathbb{R}$, dato che $2 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'immagine di h_2 si puo' ottenere osservando che l'equazione $\ln(2 + x^2) = y$ equivale a $x^2 = e^y - 2$, che possiede almeno una soluzione (in $\mathbb{R}$) se e solo se $e^y - 2 \geq 0$, cioe' se e solo se $y \geq \ln 2$. Pertanto l'immagine di h_2 e' l'intervallo $(\ln 2, +\infty)$.

6. (a) Utilizzando $x_2 = 16 - x_1$, e' possibile scrivere il costo totale come $48\sqrt{x_1} + 5(16 - x_1) = 48\sqrt{x_1} - 5x_1 + 80$. Pertanto dobbiamo minimizzare la funzione $f(x_1) = 48\sqrt{x_1} - 5x_1 + 80$ rispetto a x_1, tenendo conto del fatto che l'insieme dei valori possibili per x_1 e' dato dall'intervallo $[0, 16]$. Un punto di minimo globale per f certamente esiste perche' f e' una funzione continua, e l'intervallo $[0, 16]$ e' chiuso e limitato; dunque e' possibile applicare il teorema di Weierstrass.

   (b) Risulta $f'(x_1) = \frac{24}{\sqrt{x_1}} - 5$, e per ogni $x_1 \in (0, 16]$ si ha che $f'(x_1) > 0$. Questo rivela che f e' monotona strettamente crescente in $[0, 16]$, e quindi $x_1 = 0$ e' (l'unico) punto di minimo globale per f. La minimizzazione del costo totale si raggiunge quindi scegliendo $x_1 = 0$, $x_2 = 16$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame B, 11 giugno 2015

Cognome:_________________ Nome:______________ Numero di matricola:________

1. **(6 punti)** Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3^x - 9}{x^2 - 6x + 5} \geq 0\}$. Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti, e si determinino (se esistono) $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

2. **(8 punti)** (a) Si enunci il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x)$, e dati a e b in $\mathbb{R}$ tali che $a < b$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, b]$, e si dimostri che $|\cos(3b) - \cos(3a)| \leq 3(b - a)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} \ln(1 + 3x)}{4x \ln(3 + x)}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + 4x - 3^x - x^7}{x^6 - 5x}$$

4. **(7 punti)** Si studi la funzione (senza studiare il segno della derivata seconda)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 4}$$

5. **(6 punti)** Date le due funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(3 + x)$, per ciascuna delle due seguenti funzioni composte si scriva esplicitamente l'espressione, e poi si determinino il dominio e l'immagine:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x))$$

6. **(7 punti)** Un'impresa deve fabbricare 25 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 e l'impianto 2. Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 1, e sia $50\sqrt{x_1}$ il costo per produrre tale quantita'; analogamente sia $x_2 \geq 0$ la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 2, e sia $4x_2$ il costo per produrre tale quantita'. L'impresa vuole determinare x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 25$ (ovvero $x_2 = 25 - x_1$), in modo da minimizzare il costo totale, $50\sqrt{x_1} + 4x_2$.

   (a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

   (b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Soluzioni al Testo d'esame B, 11 giugno 2015

1. Risulta che (i) $3^x - 9 < 0$ per $x < 2$, $3^x - 9 = 0$ per $x = 2$, $3^x - 9 > 0$ per $x > 2$; (ii) $x^2 - 6x + 5 < 0$ per $x \in (1, 5)$ (cioe' per x interno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado), $x^2 - 6x + 5 = 0$ per $x = 1$ e per $x = 5$, $x^2 - 6x + 5 > 0$ per $x < 1$ e per $x > 5$ (cioe' per x esterno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado). Quindi $A = (1, 2] \cup (5, +\infty)$, e $\sup A = +\infty$, $\inf A = 1$, $\max A$ non esiste, $\min A$ non esiste.

2. (a) Si veda il libro di testo

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \cos(3x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si conclude che esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\cos(3b) - \cos(3a) = -3\sin(3c)(b - a)$, dunque, dato che $b - a > 0$, si ha $|\cos(3b) - \cos(3a)| = |-3\sin(3c)(b - a)| = 3|\sin(3c)|(b - a) \le 3(b - a)$.

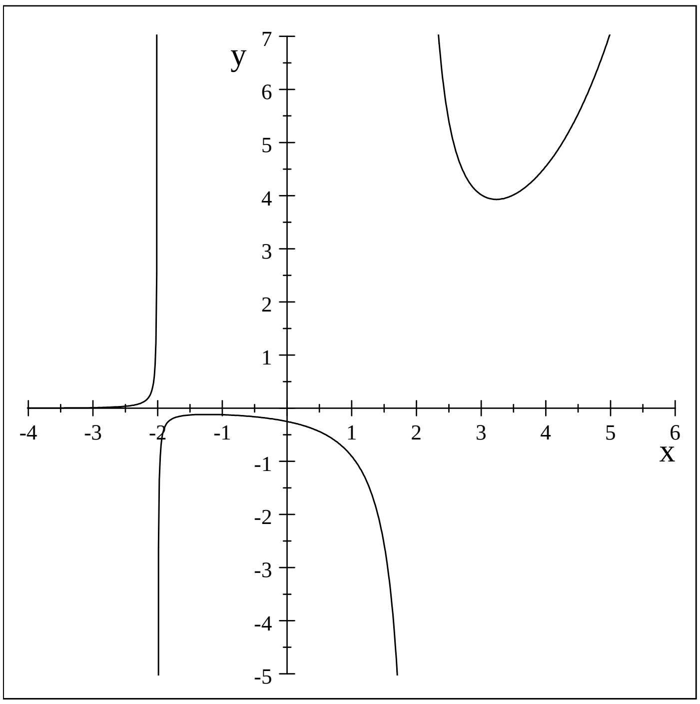
3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\ln(1 + 3x)}{4x\ln(3 + x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{4x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}}{\ln(3 + x)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2 + 4x - 3^x - x^7}{x^6 - 5x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^7}{x^6} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{1} = +\infty$$

4. Il dominio naturale di f e' l'insieme $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2 + \infty)$, e f non e' ne' pari ne' dispari. Per ogni $x \in D$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di $f(x)$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 2)$, $f(x) > 0$ per $x \in (2, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto tra infiniti.

   $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{e^2}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{e^2}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Dunque $\lim_{x\to-2} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ non esistono.

   $f'(x) = \frac{e^x(x^2-4)-2xe^x}{(x^2-4)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-4\right)}{(x^2-4)^2}$ e, per ogni $x \in D$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 4$. Pertanto $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-2, -\sqrt{5} + 1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{5} + 1, 2)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (2, \sqrt{5} + 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{5} + 1, +\infty)$. Dunque f e' strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(-2, -\sqrt{5}+1)$, e' strettamente decrescente negli intervalli $(-\sqrt{5}+1, 2)$ e $(2, \sqrt{5}+1)$, e' strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{5}+1, +\infty)$. Combinando queste informazioni con quelle ricavate dallo studio del segno di f e dei limiti di f si ottiene il seguente grafico



Per questa funzione, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; non esiste alcun punto di max globale ne' di min globale; $x = -\sqrt{5}+1$ e' punto di max locale, $x = \sqrt{5}+1$ e' un punto di min locale.

5. Poiche' $h_1(x) = (\ln(3+x))^2$, si deduce che il dominio di h_1 e' $(-3, +\infty)$, dato che $3+x > 0$ se e solo se $x > -3$. L'immagine di h_1 si puo' ottenere osservando che l'equazione $(\ln(3+x))^2 = y$ non ha soluzioni se $y < 0$, e per ogni $y \geq 0$ una soluzione all'equazione e' data da $x = e^{\sqrt{y}} - 3$ (che appartiene al dominio di h_1). Pertanto l'immagine di h_1 e' l'intervallo $(0, +\infty)$.

   Poiche' $h_2(x) = \ln(3+x^2)$, si deduce che il dominio di h_2 e' $\mathbb{R}$, dato che $3+x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'immagine di h_2 si puo' ottenere osservando che l'equazione $\ln(3+x^2) = y$ equivale a $x^2 = e^y - 3$, che possiede almeno una soluzione (in $\mathbb{R}$) se e solo se $e^y - 3 \geq 0$, cioe' se e solo se $y \geq \ln 3$. Pertanto l'immagine di h_2 e' l'intervallo $(\ln 3, +\infty)$.

6. (a) Utilizzando $x_2 = 25 - x_1$, e' possibile scrivere il costo totale come $50\sqrt{x_1} + 4(25 - x_1) = 50\sqrt{x_1} - 4x_1 + 100$. Pertanto dobbiamo minimizzare la funzione $f(x_1) = 50\sqrt{x_1} - 4x_1 + 100$ rispetto a x_1, tenendo conto del fatto che l'insieme dei valori possibili per x_1 e' dato dall'intervallo $[0, 25]$. Un punto di minimo globale per f certamente esiste perche' f e' una funzione continua, e l'intervallo $[0, 25]$ e' chiuso e limitato; dunque e' possibile applicare il teorema di Weierstrass.

   (b) Risulta $f'(x_1) = \frac{25}{\sqrt{x_1}} - 4$, e per ogni $x_1 \in (0, 25]$ si ha che $f'(x_1) > 0$. Questo rivela che f e' monotona strettamente crescente in $[0, 25]$, e quindi $x_1 = 0$ e' (l'unico) punto di minimo globale per f. La minimizzazione del costo totale si raggiunge quindi scegliendo $x_1 = 0$, $x_2 = 25$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame C, 11 giugno 2015

Cognome:_________________ Nome:______________ Numero di matricola:________

1. **(6 punti)** Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2^x-8}{x^2-5x+4} \geq 0\}$. Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti, e si determinino (se esistono) $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

2. **(8 punti)** (a) Si enunci il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(4x)$, e dati a e b in $\mathbb{R}$ tali che $a < b$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, b]$, e si dimostri che $|\cos(4b) - \cos(4a)| \leq 4(b - a)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}\ln(1+4x)}{5x\ln(4+x)}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1+5x-4^x-x^9}{x^8-2x}$$

4. **(7 punti)** Si studi la funzione (senza studiare il segno della derivata seconda)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-9}$$

5. **(6 punti)** Date le due funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(4 + x)$, per ciascuna delle due seguenti funzioni composte si scriva esplicitamente l'espressione, e poi si determinino il dominio e l'immagine:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x))$$

6. **(7 punti)** Un'impresa deve fabbricare 36 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 e l'impianto 2. Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 1, e sia $40\sqrt{x_1}$ il costo per produrre tale quantita'; analogamente sia $x_2 \geq 0$ la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 2, e sia $3x_2$ il costo per produrre tale quantita'. L'impresa vuole determinare x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 36$ (ovvero $x_2 = 36 - x_1$), in modo da minimizzare il costo totale, $40\sqrt{x_1} + 3x_2$.

   (a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

   (b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Soluzioni al Testo d'esame C, 11 giugno 2015

1. Risulta che (i) $2^x - 8 < 0$ per $x < 3$, $2^x - 8 = 0$ per $x = 3$, $2^x - 8 > 0$ per $x > 3$; (ii) $x^2 - 5x + 4 < 0$ per $x \in (1, 4)$ (cioe' per x interno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado), $x^2 - 5x + 4 = 0$ per $x = 1$ e per $x = 4$, $x^2 - 5x + 4 > 0$ per $x < 1$ e per $x > 4$. (cioe' per x esterno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado). Quindi $A = (1, 3] \cup (4, +\infty)$, e $\sup A = +\infty$, $\inf A = 1$, $\max A$ non esiste, $\min A$ non esiste.

2. (a) Si veda il libro di testo

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \cos(4x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si conclude che esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\cos(4b) - \cos(4a) = -4\sin(4c)(b - a)$, dunque, dato che $b - a > 0$, si ha $|\cos(4b) - \cos(4a)| = |-4\sin(4c)(b - a)| = 4|\sin(4c)|(b - a) \le 4(b - a)$.

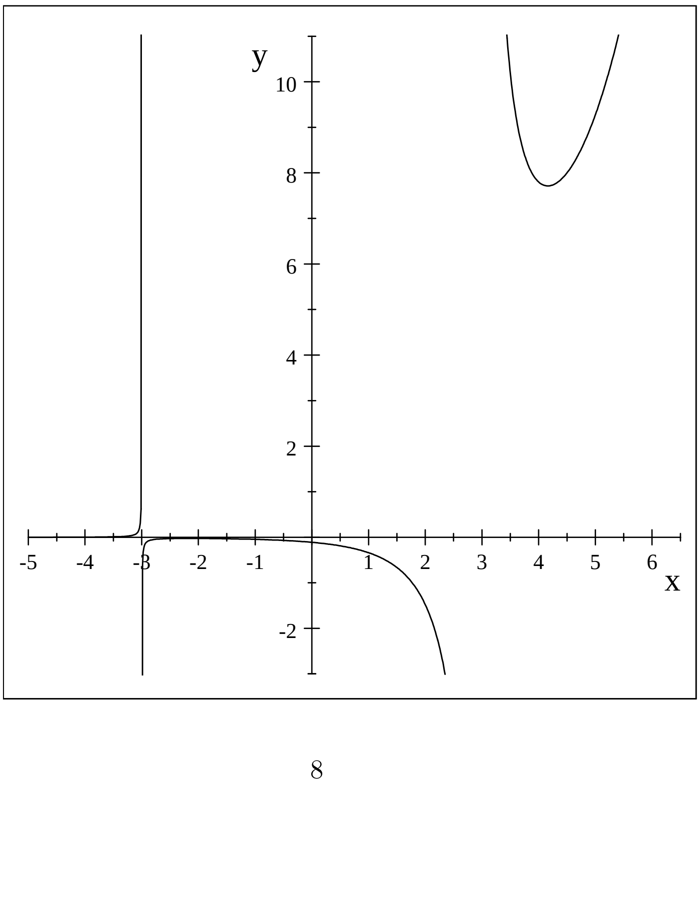
3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}\ln(1+4x)}{5x\ln(4+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{5x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}}{\ln(4+x)} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\ln 4}$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+5x-4^x-x^9}{x^8-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^9}{x^8} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{1} = +\infty$$

4. Il dominio naturale di f e' l'insieme $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3 + \infty)$, e f non e' ne' pari ne' dispari. Per ogni $x \in D$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di $f(x)$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-3, 3)$, $f(x) > 0$ per $x \in (3, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto tra infiniti.

   $\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{e^{-3}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{e^{-3}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{e^3}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{e^3}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$. Dunque $\lim_{x\to-3} f(x)$ e $\lim_{x\to3} f(x)$ non esistono.

   $f'(x) = \frac{e^x(x^2-9)-2xe^x}{(x^2-9)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-9\right)}{(x^2-9)^2}$ e, per ogni $x \in D$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di x^2-2x-9. Pertanto $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-3, -\sqrt{10}+1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{10}+1, 3)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (3, \sqrt{10}+1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{10}+1, +\infty)$. Dunque f e' strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(-3, -\sqrt{10}+1)$, e' strettamente decrescente negli intervalli $(-\sqrt{10}+1, 3)$ e $(3, \sqrt{10}+1)$, e' strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{10}+1, +\infty)$. Combinando queste informazioni con quelle ricavate dallo studio del segno di f e dei limiti di f si ottiene il seguente grafico



Per questa funzione, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; non esiste alcun punto di max globale ne' di min globale; $x = -\sqrt{10} + 1$ e' punto di max locale, $x = \sqrt{10} + 1$ e' un punto di min locale.

5. Poiche' $h_1(x) = (\ln(4 + x))^2$, si deduce che il dominio di h_1 e' $(-4, +\infty)$, dato che $4 + x > 0$ se e solo se $x > -4$. L'immagine di h_1 si puo' ottenere osservando che l'equazione $(\ln(4 + x))^2 = y$ non ha soluzioni se $y < 0$, e per ogni $y \geq 0$ una soluzione all'equazione e' data da $x = e^{\sqrt{y}} - 4$ (che appartiene al dominio di h_1). Pertanto l'immagine di h_1 e' l'intervallo $(0, +\infty)$.

   Poiche' $h_2(x) = \ln(4 + x^2)$, si deduce che il dominio di h_2 e' $\mathbb{R}$, dato che $4 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'immagine di h_2 si puo' ottenere osservando che l'equazione $\ln(4 + x^2) = y$ equivale a $x^2 = e^y - 4$, che possiede almeno una soluzione (in $\mathbb{R}$) se e solo se $e^y - 4 \geq 0$, cioe' se e solo se $y \geq \ln 4$. Pertanto l'immagine di h_2 e' l'intervallo $(\ln 4, +\infty)$.

6. (a) Utilizzando $x_2 = 36 - x_1$, e' possibile scrivere il costo totale come $40\sqrt{x_1} + 3(36 - x_1) = 40\sqrt{x_1} - 3x_1 + 108$. Pertanto dobbiamo minimizzare la funzione $f(x_1) = 40\sqrt{x_1} - 3x_1 + 108$ rispetto a x_1, tenendo conto del fatto che l'insieme dei valori possibili per x_1 e' dato dall'intervallo $[0, 36]$. Un punto di minimo globale per f certamente esiste perche' f e' una funzione continua, e l'intervallo $[0, 36]$ e' chiuso e limitato; dunque e' possibile applicare il teorema di Weierstrass.

   (b) Risulta $f'(x_1) = \frac{20}{\sqrt{x_1}} - 3$, e per ogni $x_1 \in (0, 36]$ si ha che $f'(x_1) > 0$. Questo rivela che f e' monotona strettamente crescente in $[0, 36]$, e quindi $x_1 = 0$ e' (l'unico) punto di minimo globale per f. La minimizzazione del costo totale si raggiunge quindi scegliendo $x_1 = 0$, $x_2 = 36$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame A, 13 luglio 2015

Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi)

1: □; 2: □; 3: □; 4: □; 5: □; 6: □

1. **(7 punti)** Un'azienda deve decidere quante pagine x_1 e x_2 acquistare su due riviste, per pubblicizzare un nuovo prodotto. Ogni pagina costa $p_1 = 1$ euro sulla prima rivista, costa $p_2 = 2$ euro sulla seconda. L'azienda desidera massimizzare il volume delle vendite, che e' dato dall'espressione

$$x_1 + 10x_2 + x_1x_2,$$

e vuole spendere tutta la sua dotazione di 50 Euro.

(a) Si determini la spesa che l'azienda sostiene se compra x_1 pagine sulla prima rivista e x_2 pagine sulla seconda. Imponendo che la spesa sia pari a 50 (vincolo di bilancio), si ricavi x_1 in termini di x_2.

(b) Imponendo che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (vincoli di positività), si ricavi l'intervallo ammissibile per x_2 (cioe' l'intervallo in cui x_2 deve variare).

(c) Si riscriva l'espressione che descrive il volume delle vendite in funzione della sola variabile x_2 e si formuli il problema di massimizzazione di questa funzione nell'intervallo individuato per x_2 al punto (b).

(d) Si determini il punto $\hat{x}_2$ che risolve questo problema di massimizzazione. Si determini poi il corrispondente valore di $\hat{x}_1$, e si dica dunque quante pagine è ottimale per l'azienda comprare su ciascuna rivista.

2. **(7 punti)** Sia data $f(x) = e^x - \log(1 + 2x)$.

(a) Si determini il polinomio P_1 di Taylor di f di grado 1 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.

(b) Si determini il polinomio P_2 di Taylor di f di grado 2 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.

(c) Si dica quale polinomio, tra P_1 e P_2, fornisce una migliore approssimazione dei valori di f, per quali x e perché.

3. **(5 punti)**

(a) Per una funzione f e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si dia la definizione di $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.

(b) Sulla base della definizione appena data, si verifichi che $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}-2} = +\infty$.

4. **(5 punti)**

(a) Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si diano le definizioni di punto di minimo locale (o relativo) e di punto di massimo locale.

(b) Data una funzione f che ha un punto minimo locale nel punto x_0, si dimostri, **usando la definizione fornita sopra**, che x_0 e' un punto di massimo locale per la funzione $g(x) = e^{-3f(x)}$.

5. **(6 punti)** Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono la seguente funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ (a+2)e^{-bx} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6. **(10 punti)**

(a) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x-1},$$

e se ne disegni il grafico; si tralasci lo studio della derivata seconda, ma si verifichi la derivabilitá di f in $x_0 = 0$.

(b) Utilizzando il grafico, si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame B, 13 luglio 2015

Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi)

1: □; 2: □; 3: □; 4: □; 5: □; 6: □

1. **(7 punti)** Un'azienda deve decidere quante pagine x_1 e x_2 acquistare su due riviste, per pubblicizzare un nuovo prodotto. Ogni pagina costa $p_1 = 1$ euro sulla prima rivista, costa $p_2 = 2$ euro sulla seconda. L'azienda desidera massimizzare il volume delle vendite, che e' dato dall'espressione

$$x_1 + 22x_2 + x_1x_2,$$

e vuole spendere tutta la sua dotazione di 50 Euro.

(a) Si determini la spesa che l'azienda sostiene se compra x_1 pagine sulla prima rivista e x_2 pagine sulla seconda. Imponendo che la spesa sia pari a 50 (vincolo di bilancio), si ricavi x_1 in termini di x_2.

(b) Imponendo che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (vincoli di positività), si ricavi l'intervallo ammissibile per x_2 (cioe' l'intervallo in cui x_2 deve variare).

(c) Si riscriva l'espressione che descrive il volume delle vendite in funzione della sola variabile x_2 e si formuli il problema di massimizzazione di questa funzione nell'intervallo individuato per x_2 al punto (b).

(d) Si determini il punto $\hat{x}_2$ che risolve questo problema di massimizzazione. Si determini poi il corrispondente valore di $\hat{x}_1$, e si dica dunque quante pagine è ottimale per l'azienda comprare su ciascuna rivista.

2. **(7 punti)** Sia data $f(x) = e^x - \log(1 + 3x)$.

(a) Si determini il polinomio P_1 di Taylor di f di grado 1 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.

(b) Si determini il polinomio P_2 di Taylor di f di grado 2 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.

(c) Si dica quale polinomio, tra P_1 e P_2, fornisce una migliore approssimazione dei valori di f, per quali x e perché.

3. **(5 punti)**

(a) Per una funzione f e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si dia la definizione di $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

(b) Sulla base della definizione appena data, si verifichi che $\lim_{x \to 9^+} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = +\infty$.

4. **(5 punti)**

(a) Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si diano le definizioni di punto di minimo locale (o relativo) e di punto di massimo locale.

(b) Data una funzione f che ha un punto di minimo locale nel punto x_0, si dimostri, **usando la definizione fornita sopra**, che x_0 e' un punto di massimo locale per la funzione $g(x) = e^{-2f(x)}$.

5. **(6 punti)** Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono la seguente funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b & \text{se } x \leq 0 \\ (a+2)e^{bx} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6. **(10 punti)**

(a) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x+1},$$

e se ne disegni il grafico; si tralasci lo studio della derivata seconda, ma si verifichi la derivabilitá di f in $x_0 = 0$.

(b) Utilizzando il grafico, si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame C, 13 luglio 2015

Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi)

1: ☐; 2: ☐; 3: ☐; 4: ☐; 5: ☐; 6: ☐

1. **(7 punti)** Un'azienda deve decidere quante pagine x_1 e x_2 acquistare su due riviste, per pubblicizzare un nuovo prodotto. Ogni pagina costa $p_1 = 1$ euro sulla prima rivista, costa $p_2 = 2$ euro sulla seconda. L'azienda desidera massimizzare il volume delle vendite, che e' dato dall'espressione

$$2x_1 + 42x_2 + 2x_1x_2,$$

e vuole spendere tutta la sua dotazione di 50 Euro.

(a) Si determini la spesa che l'azienda sostiene se compra x_1 pagine sulla prima rivista e x_2 pagine sulla seconda. Imponendo che la spesa sia pari a 50 (vincolo di bilancio), si ricavi x_1 in termini di x_2.

(b) Imponendo che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (vincoli di positività), si ricavi l'intervallo ammissibile per x_2 (cioe' l'intervallo in cui x_2 deve variare).

(c) Si riscriva l'espressione che descrive il volume delle vendite in funzione della sola variabile x_2 e si formuli il problema di massimizzazione di questa funzione nell'intervallo individuato per x_2 al punto (b).

(d) Si determini il punto $\hat{x}_2$ che risolve questo problema di massimizzazione. Si determini poi il corrispondente valore di $\hat{x}_1$, e si dica dunque quante pagine è ottimale per l'azienda comprare su ciascuna rivista.

2. **(7 punti)** Sia data $f(x) = e^{2x} - \log(1 + x)$.

(a) Si determini il polinomio P_1 di Taylor di f di grado 1 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.

(b) Si determini il polinomio P_2 di Taylor di f di grado 2 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.

(c) Si dica quale polinomio, tra P_1 e P_2, fornisce una migliore approssimazione dei valori di f, per quali x e perché.

3. **(5 punti)**

(a) Per una funzione f e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si dia la definizione di $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.

(b) Sulla base della definizione appena data, si verifichi che $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{4x-4}} = +\infty$.

4. **(5 punti)**

(a) Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si diano le definizioni di punto di minimo locale (o relativo) e di punto di massimo locale.

(b) Data una funzione f che ha un punto di minimo locale nel punto x_0, si dimostri, **usando la definizione fornita sopra**, che x_0 e' un punto di massimo locale per la funzione $g(x) = e^{-f(x)}$.

5. **(6 punti)** Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono la seguente funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - b & \text{se } x \leq 0 \\ (2-a)e^{bx} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6. **(10 punti)**

(a) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x-2},$$

e se ne disegni il grafico; si tralasci lo studio della derivata seconda, ma si verifichi la derivabilitá di f in $x_0 = 0$.

(b) Utilizzando il grafico, si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

SOLUZIONI FILA A

EX1.

1) vincolo di budget: $x_1 + 2x_2 = 50$, quindi $x_1 = 50 - 2x_2$.
2) $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 \geq 0$, ossia $x_2 \leq 25$. Quindi $x_2 \in [0, 25]$.
3) $V = 50 - 2x_2 + 10x_2 + (50 - 2x_2)x_2 = -2x_2^2 + 58x_2 + 50$.
Si cerca $\max_{x_2 \in [0,25]} -2x_2^2 + 58x_2 + 50$.
Si pone $f(x_2) = -2x_2^2 + 58x_2 + 50$, f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, si studia il segno di f': $f'(x_2) = -4x_2 + 58$, quindi f' è positiva strettamente per ogni $x_2 < 58/4 = 14.5$, e negativa per $x > 14.5$, quindi il massimo assoluto di f su $[0, 25]$ è raggiunto in $\hat{x}_2 = 14.5$ [1] . Di conseguenza $\hat{x}_1 = 50 - 2\hat{x}_2 = 21$.

EX2.

1) $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$: $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x - \frac{2}{1+2x}$, quindi $f'(0) = -1$, e $P_1(x) = 1 - x$. Il resto $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ tende a zero più velocemente di x, per $x \to 0$, ossia $R_1(x)$ è più piccolo di x: $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$.
2) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$: $f''(x) = e^x + \frac{4}{(1+2x)^2}$, quindi $f''(0) = 5$ e $P_2(x) = 1 - x + 5\frac{x^2}{2}$. Il resto $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ tende a zero più velocemente di x^2, per $x \to 0$, ossia $R_2(x)$ è più piccolo di x^2: $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.
3) P_2 dà di f una approssimazione migliore rispetto a P_1, perché lo scarto tra f e P_2 è più piccolo di x^2, che, per x in un intorno di zero in cui sia $|x| < 1$, è più piccolo di x, che è il termine di paragone per R_1. In altre parole, per x vixini a zero si ha $x < x^2$, e, mentre $\frac{R_1}{x} \to 0$, non è garantito che sia $\frac{R_1}{x^2} \to 0$, ossia che si abbia $R_1 < x^2$, invece di sicuro $R_2 < x^2$.

EX3.

1) Vale che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall\, M > 0$ si riesce a trovare un $\delta > 0$ per cui per tutti gli $x \in (x_0, x_0+\delta)$ succede che $f(x) > M$.
2) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ è definita per $x \geq 0$ e $x \neq 4$. Prendiamo un $M > 0$ e verifichiamo che tra le soluzioni di $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ si trovino tutti gli x di un intorno destro (da determinare) $(4, 4+\delta)$ di 4. Siamo dunque interessati ai soli $x > 4$ Per $x > 4$, in $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ entrambi i membri sono positivi, se si passa ai reciproci, allora, il segno di disuguaglianza si inverte: $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ sse $\sqrt{x} - 2 < \frac{1}{M}$. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\sqrt{x} < \frac{1}{M} + 2$: anche in questo caso entrambi i membri sono positivi, perciò se si elevano entrambi al quadrato la disuguaglianza resta nello stesso verso: $\sqrt{x} < \frac{1}{M} + 2$ sse $x < \left(\frac{1}{M} + 2\right)^2 = 4 + \frac{4}{M} + \frac{1}{M^2}$. Le soluzioni $x > 4$ di $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ sono le $x \in (4, 4 + \frac{4}{M} + \frac{1}{M^2})$, che è un intorno destro di 4. Ponendo $\delta = \frac{4}{M} + \frac{1}{M^2} > 0$ si può riscrivere quanto trovato come segue: qualunque sia $M > 0$ si è in grado di esibire un $\delta > 0$ per cui tutte le $x \in (4, 4+\delta)$ risolvono $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$. Il limite è dunque verificato.

EX4.

a) x_0 è punto di minimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$.
x_0 è punto di massimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.
b) Se f ha un minimo locale in x_0, allora esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$, allora $-3f(x_0) \geq -3f(x)$, e, poiché e^x è una funzione crescente in $\mathbb{R}$, si ha che $e^{-3f(x_0)} \geq e^{-3f(x)}$, e quindi $g(x_0) \geq g(x)$. Abbiamo ottenuto quindi che per tutti gli $x \in B$, con B intorno di x_0, si ha $g(x_0) \geq g(x)$, ma allora x_0 per g è un punto di massimo locale.

EX5.

Continuità. f è continua su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 insiemi coincide con funzioni elementari (rispettivamente polinomio ed esponenziale moltiplicato per una costante) che un teorema ci dice essere continue. Controlliamo la continuità in 0. Siano $f_1(x) = x^2 + ax + b$ ed $f_2(x) = (a+2)e^{-bx}$, entrambi continue in 0, allora $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = b$. $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} f_2 = f_2(0) = a + 2$. Perciò f è continua in 0 sse $b = a + 2$. In questo caso $f(0) = f_1(0) = f_2(0)$.
Derivabilità. f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 intervalli coincide con le rispettive funzioni elementari $f_1(x), f_2)(x)$ che un teorema ci dice essere derivabili ovunque.

Controlliamo la derivabilitá in 0. La derivata sinistra di f coincide con $f_1'(0) = (2x + a)|_{x=0} = a$. Dallo

[1] ed é uguale a 470.5

studio di continuitá $f(0) = f_2(0)$ e quindi la derivata destra $f'(0+) = f_2'(0) = -b(a+2)$.

Quindi f è derivabile in 0 sse $\begin{cases} a = -b(a+2) \\ a+2 = b. \end{cases}$

Dalla seconda equazione otteniamo $a = b-2$, e sostituendo a nella prima otteniamo $b^2+b-2 = 0$. Quest'ultima equazione di secondo grado in b ha $\Delta = 9$ e radici $b_1 = 1, b_2 = -2$, che corrispondono rispettivamente ad $a_1 = b_1 - 2 = -1$ ed $a_2 = b_2 - 1 = -4$. Quindi f è continua e derivabile per $a = -1$ e $b = 1$ oppure per $a = -4$ e $b = -2$.

EX6.

a) Dominio: $x \neq 1$, il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi f non può essere pari né dispari.
Segno e intersezione con gli assi: $f(0) = 0$; $f = 0$ sse il numeratore fa 0, ossia $x = 0$.
Poiché $\sqrt{|x|} \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ sse $x > 1$.
Limiti. $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$: sia numeratore che denominatore di f tendono a $+\infty$, ma $\sqrt{x} = x^{1/2}$ è una potenza di x inferiore ad 1, quindi tende a ∞ più lentamente, ed il quoziente tende a 0^+.
$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x-1}$: il numeratore di f tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\infty$, e anche questa volta il numeratore diverge più lentamente, perciò il quoziente tende a 0^-.
$\lim_{x\to1} f$: possiamo assumere $x > 0$, visto che x si deve avvicinare ad 1. $\lim_{x\to1^+} f = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^+, perciò il quoziente tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to1^-} f = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^-, perciò il quoziente tende a $-\infty$.
Derivata prima. Distinguiamo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$. Per $x > 0, x \neq 1$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0,$$

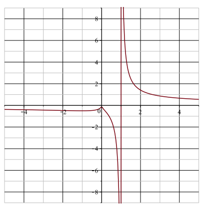
quindi f è decrescente sugli intervalli $(0,1)$ e $(1,+\infty)$.
Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{x-1}\right)' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x-1) - \sqrt{-x}}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{-x}(x-1)^2}$$

(ricordando che $\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x} = -x$). Si ha che $f' \geq 0$ sse $x \geq -1$: quindi f è strettamente decrescente su $(-\infty,-1)$ mentre è strettamente crescente su $(-1,0)$. Si hanno allora: un punto di minimo locale in -1, in cui $f(-1) = -\frac{1}{2}$, ed un punto di massimo locale in 0, dove f fa 0.
In $x = 0$: verifichiamo se il limite del rapporto incrementale in 0 esista finito.

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h-1}}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{1}{(h-1)\sqrt{h}} = -\infty :$$

già solo il limite destro del rapporto incrementale non è finito, f dunque non può essere derivabile in 0.



fila A.pdf

b) $Im(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$, $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

SOLUZIONI FILA B

EX1.

1) vincolo di budget: $x_1 + 2x_2 = 50$, quindi $x_1 = 50 - 2x_2$.
2) $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 \geq 0$, ossia $x_2 \leq 25$. Quindi $x_2 \in [0, 25]$.
3) $V = 50 - 2x_2 + 22x_2 + (50 - 2x_2)x_2 = -2x_2^2 + 70x_2 + 50$.
Si cerca $\max_{x_2 \in [0,25]} -2x_2^2 + 70x_2 + 50$.
Si pone $f(x_2) = -2x_2^2+70x_2+50$, f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, si studia il segno di f': $f'(x_2) = -4x_2+70$, quindi f' è positiva per $x_2 < 70/4 = 17.5$ e negativa per ogni $x_2 > 17.5$, quindi il massimo assoluto di f su $[0, 25]$[1] è raggiunto in $\hat{x}_2 = 17.5$. Di conseguenza $\hat{x}_1 = 50 - 2\hat{x}_2 = 15$.

EX2.

1) $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$: $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x - \frac{3}{1+3x}$, quindi $f'(0) = -2$, e $P_1(x) = 1 - 2x$. Il resto $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ tende a zero più velocemente di x, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$.
2) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$: $f''(x) = e^x + \frac{9}{(1+3x)^2}$, quindi $f''(0) = 10$ e $P_2(x) = 1 - 2x + 5x^2$. Il resto $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ tende a zero più velocemente di x^2, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.
3) P_2 dà di f una approssimazione migliore rispetto a P_1, perché lo scarto tra f e P_2 è più piccolo di x^2, che, per x in un intorno di zero in cui sia $|x| < 1$, è più piccolo di x, che è il termine di paragone per R_1. In altre parole, per x vicini a zero si ha $x < x^2$, e, mentre $\frac{R_1}{x} \to 0$, non è garantito che sia $\frac{R_1}{x^2} \to 0$, ossia che si abbia $R_1 < x^2$, invece di sicuro $R_2 < x^2$.

EX3.

1) Vale che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall\, M > 0$ si riesce a trovare un $\delta > 0$ per cui per tutti gli $x \in (x_0, x_0+\delta)$ succede che $f(x) > M$.
2) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ è definita per $x \geq 0$ e $x \neq 9$. Prendiamo un $M > 0$ e verifichiamo che tra le soluzioni di $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ si trovino tutti gli x di un intorno destro (da determinare) $(9, 9 + \delta)$ di 4. Siamo dunque interessati ai soli $x > 9$ Per $x > 9$, in disuguaglianza $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ entrambi i membri sono positivi, se si passa ai reciproci, allora, il segno di disuguaglianza si inverte: $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ sse $\sqrt{x} - 3 < \frac{1}{M}$. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\sqrt{x} < 3 + \frac{1}{M}$: anche in questo caso entrambi i membri sono positivi, perciò se si elevano entrambi al quadrato la disuguaglianza resta nello stesso verso: $\sqrt{x} < 3 + \frac{1}{M}$ sse $x < \left(3 + \frac{1}{M}\right)^2 = 9 + \frac{6}{M} + \frac{1}{M^2}$. Le soluzioni $x > 9$ di $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ sono le $x \in (9, 9 + \frac{6}{M} + \frac{1}{M^2})$, che è un intorno destro di 9. Ponendo $\delta = \frac{6}{M} + \frac{1}{M^2} > 0$ si può riscrivere quanto trovato come segue: qualunque sia $M > 0$ si è in grado di esibire un $\delta > 0$ per cui tutte le $x \in (9, 9 + \delta)$ risolvono $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$. Il limite è dunque verificato.

EX4.

a) x_0 è punto di minimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$.
x_0 è punto di massimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.
b) Se f ha un minimo locale in x_0, allora esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$, allora $-2f(x_0) \geq -2f(x)$ in B, e, poiché e^x è una funzione crescente in $\mathbb{R}$, si ha che $e^{-2f(x_0)} \geq e^{-2f(x)}$, e quindi $g(x_0) \geq g(x)$ in B. Abbiamo ottenuto quindi che per tutti gli $x \in B$, con B intorno di x_0, si ha $g(x_0) \geq g(x)$, ma allora x_0 per g è un punto di massimo locale.

EX5.

Continuità. f è continua su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 insiemi coincide con funzioni elementari (rispettivamente polinomio ed esponenziale moltiplicato per una costante) che un teorema ci dice essere continue. Controlliamo la continuità in 0. Siano $f_1(x) = x^2 + ax - b$ ed $f_2(x) = (a+2)e^{bx}$, entrambi continue in 0, allora $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = -b$: poiché $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = b$. $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} f_2$: poiché $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = f_2(0) = a + 2$. Perciò f è continua in 0 sse $-b = a + 2$. In questo caso $f(0) = f_1(0) = f_2(0)$.
Derivabilità. f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 intervalli coincide con le rispettive funzioni elementari $f_1(x), f_2(x)$, che un teorema ci dice essere derivabili ovunque.

Controlliamo la derivabilità in 0. La derivata sinistra di f coincide con $f_1'(0) = (2x + a)|_{x=0} = a$. Dallo studio di continuitá $f(0) = f_2(0)$ e quindi la derivata destra $f'(0+) = f_2'(0) = (a + 2)b$.

[1] uguale a 662.5

Quindi f è derivabile in sse $\begin{cases} a = b(a+2) \\ a+2 = -b. \end{cases}$
Dalla seconda equazione otteniamo $b = -a-2$, e sostituendo b nella prima otteniamo $a = -(a+2)^2 \Leftrightarrow a^2+5a+4=0$. Quest'ultima equazione ha ha le radici $a_1 = -1, a_2 = -4$, che corrispondono rispettivamente ad $b_1 = -a_1 - 2 = -1$ ed $b_2 = -a_2 - 2 = 2$. Quindi f é continua e derivabile per $a = -1$ e $b = 1$ oppure per $a = -4$ e $b = 2$.

EX6.
a) Dominio: $x \neq -1$, il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi f non può essere pari né dispari.
Segno e intersezione con gli assi: $f(0) = 0$; $f = 0$ sse il numeratore fa 0, ossia $x = 0$.
Poiché $\sqrt{|x|} \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ sse $x > -1$.
Limiti. $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$: sia numeratore che denominatore di f tendono a $+\infty$, ma $\sqrt{x} = x^{1/2}$ è una potenza di x inferiore ad 1, quindi tende a ∞ più lentamente, ed il quoziente tende a 0^+.
$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x+1}$: il numeratore di f tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\infty$, e anche questa volta il numeratore diverge più lentamente, perciò il quoziente tende a 0^-.
$\lim_{x\to-1} f$: possiamo assumere $x < 0$, visto che x si deve avvicinare ad -1. $\lim_{x\to-1^+} f = \lim_{x\to-1^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x+1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^+, perciò il quoziente tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to-1^-} f = \lim_{x\to-1^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x+1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^-, perciò il quoziente tende a $-\infty$.
Derivata prima. Distinguiamo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$. Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2},$$

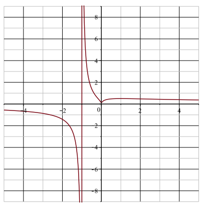
quindi $f' \geq 0$ sse $-x+1 \geq 0$: la funzione è crescente sul $(0,1)$ e decrescente strettamente sul $(1,+\infty)$. Si ha un punto di massimo locale $x = 1$, $f(1) = 1/2$.
Per $x < 0, x \neq -1$, si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x+1) - \sqrt{-x}}{(x+1)^2} = \frac{-1+x}{\frac{1}{2\sqrt{-x}}(x+1)^2} < 0 :$$

quindi f è strettamente decrescente su $(-\infty,-1)$ e su $(-1,0)$. Si hanno allora: un punto di minimo locale in 0, dove f fa 0.
In $x = 0$: verifichiamo se il limite del rapporto incrementale in 0 esista finito.

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h+1}}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{1}{(h+1)\sqrt{h}} = +\infty :$$

già solo il limite destro del rapporto incrementale non è finito, f dunque non può essere derivabile in 0.



fila B.pdf

b) $Im(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$, $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

SOLUZIONI FILA C

EX1.

1) vincolo di budget: $x_1 + 2x_2 = 50$, quindi $x_1 = 50 - 2x_2$.
2) $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 \geq 0$, ossia $x_2 \leq 25$. Quindi $x_2 \in [0, 25]$.
3) $V = 50 - 2x_2 + 42x_2 + (50 - 2x_2)x_2 = -2x_2^2 + 90x_2 + 50$.
Si cerca $\max_{x_2 \in [0,25]} -2x_2^2 + 90x_2 + 50$.
Si pone $f(x_2) = -2x_2^2+90x_2+50$, f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, si studia il segno di f': $f'(x_2) = -4x_2+90$, quindi f' è positiva per $x_2 < 90/4 = 22.5$ e negativa per ogni $x_2 > 22.5$, quindi il massimo assoluto di f su $[0, 25]$ è raggiunto in $\hat{x}_2 = 22.5$. [1]Di conseguenza $\hat{x}_1 = 50 - 2\hat{x}_2 = 5$.

EX2.

1) $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$: $f(0) = 1$, $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{1+x}$, quindi $f'(0) = 1$, e $P_1(x) = 1 + x$. Il resto $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ tende a zero più velocemente di x, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$.
2) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$: $f''(x) = 4e^{2x} + \frac{1}{(1+x)^2}$, quindi $f''(0) = 5$ e $P_2(x) = 1 + x + \frac{5}{2}x^2$. Il resto $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ tende a zero più velocemente di x^2, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.
3) P_2 dà di f una approssimazione migliore rispetto a P_1, perché lo scarto tra f e P_2 è più piccolo di x^2, che, per x in un intorno di zero in cui sia $|x| < 1$, è più piccolo di x, che è il termine di paragone per R_1. In altre parole, per x vicini a zero si ha $x < x^2$, e, mentre $\frac{R_1}{x} \to 0$, non è garantito che sia $\frac{R_1}{x^2} \to 0$, ossia che si abbia $R_1 < x^2$, invece di sicuro $R_2 < x^2$.

EX3.

1) Vale che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall\, M > 0$ si riesce a trovare un $\delta > 0$ per cui per tutti gli $x \in (x_0, x_0+\delta)$ succede che $f(x) > M$.
2) $\frac{1}{\sqrt{4x}-4}$ è definita per $x \geq 0$ e $x \neq 4$. Prendiamo un $M > 0$ e verifichiamo che tra le soluzioni di $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$ si trovino tutti gli x di un intorno destro (da determinare) $(4, 4 + \delta)$ di 4. Siamo dunque interessati ai soli $x > 4$ Per $x > 4$, in disuguaglianza $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$ entrambi i membri sono positivi, se si passa ai reciproci, allora, il segno di disuguaglianza si inverte: $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$ sse $\sqrt{4x} - 4 < \frac{1}{M}$. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\sqrt{4x} < 4 + \frac{1}{M}$: anche in questo caso entrambi i membri sono positivi, perciò se si elevano entrambi al quadrato la disuguaglianza resta nello stesso verso: $\sqrt{4x} < 4+\frac{1}{M}$ sse $4x < \left(4 + \frac{1}{M}\right)^2 = 16+\frac{8}{M} + \frac{1}{M^2} \Leftrightarrow x < 4+\frac{2}{M} + \frac{1}{4M^2}$. Le soluzioni sono le $x \in (4, 4 + \frac{2}{M} + \frac{1}{4M^2})$, che è un intorno destro di 4. Ponendo $\delta = \frac{2}{M} + \frac{1}{4M^2} > 0$ si può riscrivere quanto trovato come segue: qualunque sia $M > 0$ si è in grado di esibire un $\delta > 0$ per cui tutte le $x \in (4, 4 + \delta)$ risolvono $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$. Il limite è dunque verificato.

EX4.

a) x_0 è punto di minimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$.
x_0 è punto di massimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.
b) Se f ha un minimo locale in x_0, allora esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$, allora $-2(x_0) \geq -f(x)$ in B, e, poiché e^x è una funzione crescente in $\mathbb{R}$, si ha che $e^{-f(x_0)} \geq e^{-f(x)}$, e quindi $g(x_0) \geq g(x)$ in B. Abbiamo ottenuto quindi che per tutti gli $x \in B$, con B intorno di x_0, si ha $g(x_0) \geq g(x)$, ma allora x_0 per g è un punto di massimo locale.

EX5.

Continuità. f è continua su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 insiemi coincide con funzioni elementari (rispettivamente polinomio ed esponenziale moltiplicato per una costante) che un teorema ci dice essere continue. Controlliamo la continuità in 0. Siano $f_1(x) = x^2 + ax - b$ ed $f_2(x) = (2 - a)e^{bx}$, entrambi continue in 0, allora $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = -b$: poiché $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = -b$. $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} f_2$: poiché $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = f_2(0) = 2 - a$. Perciò f è continua in 0 sse $b = a - 2$. In questo caso $f(0) = f_1(0) = f_2(0)$.
Derivabilità. f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 intervalli coincide con le rispettive funzioni elementari $f_1(x), f_2(x)$, che un teorema ci dice essere derivabili ovunque.

Controlliamo la derivabilità in 0. La derivata sinistra di f coincide con $f_1'(0) = (2x - a)|_{x=0} = -a$. Dallo studio di continuitá $f(0) = f_2(0)$ e quindi la derivata destra $f'(0+) = f_2'(0) = (2 - a)b$.

[1] ed è uguale 1062.5

Quindi f è derivabile in 0 sse $\begin{cases} -a = b(2-a) \\ a-2 = b. \end{cases}$

Dalla seconda equazione otteniamo $b = a-2$, e sostituendo b nella prima otteniamo $-a = -(a-2)^2 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$. Quest'ultima equazione ha ha le radici $a_1 = 1, a_2 = 4$, che corrispondono rispettivamente ad $b_1 = -1$ ed $b_2 = 2$. Quindi f é continua e derivabile per $a = 1$ e $b = -1$ oppure per $a = 4$ e $b = 2$.

EX6.

a) Dominio: $x \neq 2$, il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi f non può essere pari né dispari.
Segno e intersezione con gli assi: $f(0) = 0$; $f = 0$ sse il numeratore fa 0, ossia $x = 0$.
Poiché $\sqrt{|x|} \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ sse $x > 2$.
Limiti. $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-2}$: sia numeratore che denominatore di f tendono a $+\infty$, ma $\sqrt{x} = x^{1/2}$ è una potenza di x inferiore ad 1, quindi tende a ∞ più lentamente, ed il quoziente tende a 0^+.
$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x-2}$: il numeratore di f tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\infty$, e anche questa volta il numeratore diverge più lentamente, perciò il quoziente tende a 0^-.
$\lim_{x\to2} f$: possiamo assumere $x > 0$, visto che x si deve avvicinare a 2. $\lim_{x\to2^+} f = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x-2}$: il numeratore tende a $\sqrt{2}$, ed il denominatore a 0^+, perciò il quoziente tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to2^-} f = \lim_{x\to2^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x-2}$: il numeratore tende a $\sqrt{2}$, ed il denominatore a 0^-, perciò il quoziente tende a $-\infty$.
Derivata prima. Distinguiamo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$. Per $x > 0, x \neq 2$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-2}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2) - \sqrt{x}}{(x-2)^2} = \frac{-2-x}{2\sqrt{x}(x-2)^2} < 0,$$

quindi la funzione è decrescente sugli intervalli $(0,2)$ e $(2,+\infty)$.

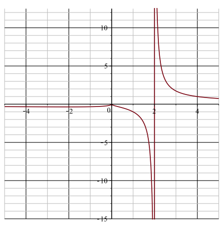
Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{x-2}\right)' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x-2) - \sqrt{-x}}{(x-2)^2} = \frac{2+x}{(x-2)^2}.$$

Si ha che $f' \leq 0$ sse $x \in (-\infty,-2)$ e $f' \geq 0$ se $x \in (-2,0)$: quindi f è strettamente decrescente su $(-\infty,-2)$ ed è crescente su $(-2,0)$. Si hanno allora: un punto di minimo locale in -2, $f(-2) = -\sqrt{2}/4$ e un punto di massimo locale in $x = 0$.
In $x = 0$: verifichiamo se il limite del rapporto incrementale in 0 esista finito.

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h-2}}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{1}{(h-2)\sqrt{h}} = +\infty :$$

già solo il limite destro del rapporto incrementale non è finito, f dunque non può essere derivabile in 0.



fila C.pdf

b) $Im(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$, $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

A del 09 Settembre 2015

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate solo gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square$

Esercizio 1. (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f := x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Si dimostri che la funzione f è iniettiva nel suo dominio, $\mathrm{Dom}(f) = [1, +\infty)$, e quindi invertibile. Si determini $\mathrm{Im}\, f$ e si trovi poi l'espressione esplicita della funzione inversa di f.

Esercizio 2. (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili). Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, 2]$, derivabile in $(0, 2)$ e tale che

$$f(0) = 1\ ,\ f(1) = -1\ ,\ f(2) = 2$$

Dimostrare che esiste $c \in (0, 2)$ tale che $D(f)(c) = 0$.

Esercizio 3. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}\, f$;

(b) $\sup f$;

(c) funzione monotona strettamente crescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente crescente ed è tale che $\mathrm{Im}\, f = [0, 1]$; per tale funzione si ricavi $\sup f$.

Esercizio 4. (10 punti)
Si studi la funzione

$$f := x \mapsto \log(1 + 2\,x) - x^2$$

e si disegni il suo grafico.(suggerimento: non studiare il segno della funzione)

Esercizio 5. (6 punti) Siete stati incaricati di procedere all'acquisto di un macchinario che serve a confezionare un prodotto dell'azienda dove lavorate. Dovete scegliere fra due possibili macchine, A e B. La prima, la A, ha un costo di acquisto di 10 e un costo di esercizio che dipende dalla quantità, $x \geq 0$ di prodotti confezionati e che è dato da $c(x) = x$; per la seconda, la B, i valori sono rispettivamente 12 e $c(x) = \log(1 + 3\,x)$, in modo tale che il costo complessivo di esercizio di ciascuna macchina è

$$f_A(x) = 10 + x, \quad f_B(x) = 12 + \log(1 + 3\,x)$$

Dimostrare che esiste un solo punto $x \geq 0$ in cui $f_A(x) = f_B(x)$ (ovvero $f_B(x) - f_A(x) = 0$).
Sapendo che $f_B(5) < f_A(5)$, (ovvero $f_B(5) - f_A(5) < 0$) impostare l'algoritmo di bisezione per determinare il valore approssimato di questo punto e dire quante iterazioni sono necessarie per trovarne un'approssimazione a meno di $\frac{5}{100}$.

Esercizio 6. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2 + x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^4} \right).$$

Soluzioni Compito A

Soluzione esercizio 1.
Poiché si tratta di una funzione derivabile possiamo dimostrare l'iniettività utilizzando la sua derivata. La derivata della funzione è

$$D[f](x) = -\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

che si annulla per $x=-1$ e $x=1$ e che quindi all'interno del suo dominio è sempre negativa, la funzione è quindi strettamente decrescente e quindi invertibile.

Poiché la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio $\mathrm{Dom}(f) = [1, +\infty)$, possiamo affermare che l'immagine è l'intervallo $(a,\, b]$ che ha per estremo sinistro a (che non appartiene all'immagine)

$$a := \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

e per estremo destro (che appartiene all'immagine)

$$b := f(1) = \frac{1}{2}$$

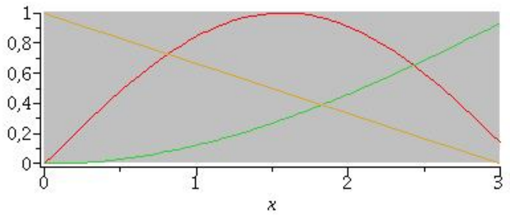
e quindi $\mathrm{Im}\, f = (0,\, \frac{1}{2}]$.
Per il calcolo dell'inversa della funzione occorre osservare che per ogni elemento dell'immagine, $y \in (0,\, \frac{1}{2}]$, abbiamo che l'unica soluzione (accettabile in quanto appartenente al dominio) dell'equazione $f(x) = y$ è $x = \frac{1+\sqrt{1-4\,y^2}}{2y}$. Pertanto si ha che

$$f^{-1} : \left(0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1+\sqrt{1-4\,y^2}}{2y}$$

Soluzione esercizio 2. Teorema di Fermat: *Sia f una funzione che ha nel punto c un estremo locale. Se il punto c è interno al dominio e la funzione f è derivabile in c allora $D(f)(c) = 0$.* La nostra funzione è definita e continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi ammette un minimo globale per il Teorema di Weierstass. Il punto di minimo non può essere agli estremi $x=0$ o $x=2$ poichè

$$f(0) > f\,(1) \;\text{ e }\; f(2) > f\,(1)$$

Quindi il punto di minimo è interno, ovvero $c \in (0, 2)$ e poiché un minimo globale è anche un minimo locale, per il Teorema di Fermat, $D(f)(c) = 0$.
Soluzione esercizio 3.
Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione non monotona strettamente crescente il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[0, 3]$ e sull'asse y l'intervallo $[0, 1]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (decrescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e dall'immagine

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x$$

che ha $\sup f = \max f = 1$, poiché $\operatorname{Im} f = [0,\, 1]$.

Soluzione esercizio 4. Il dominio della funzione

$$f := x \mapsto \log(1 + 2\,x) - x^2$$

è $\operatorname{Dom}(f) = \left(-\frac{1}{2},\, +\infty\right)$. La funzione è continua nel domino essendo la somma e composizione di funzioni elementari continue.
• $f(0) = 0$.
• La funzione non è né pari né dispari.
• Il grafico della funzione ha un asintoto verticale in $x = -\frac{1}{2}$ poiché

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$$

• Il $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ risulta una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$.
Per la gerarchia degli infiniti il termine prevalente è x^2 e quindi se scriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = x^2 \left(\frac{\log(1 + 2\,x)}{x^2} - 1 \right)$$

il termine dentro la parentesi tende a -1 per il confronto fra infiniti e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{\log(1 + 2\,x)}{x^2} - 1 \right) = [+\infty \cdot (-1)] = -\infty.$$

L'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è definito dalle formule $y = kx + \ell$, dove $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, quindi non esistono asintoti obliqui.
La derivata prima della funzione

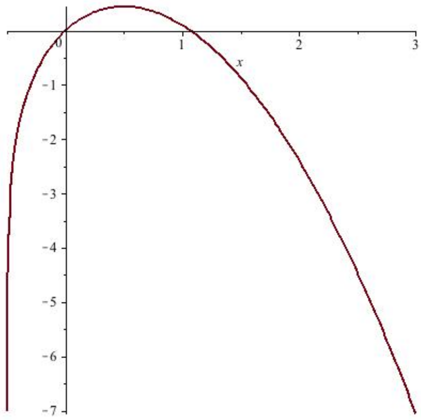
$$f'(x) = D(f)(x) = \frac{2}{(1 + 2\,x)} - 2\,x = -2\,\frac{2\,x^2 + x - 1}{1 + 2\,x},$$

si annulla nei punti $x_1 = -1, x_2 = 1/2$, di cui solo il secondo è ammissibile

La derivata $f'(x) = D(f)(x)$ è negativa nell'intervallo $(1/2, +\infty)$, dove la funzione $f(x)$ decresce, ed è positiva nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$, dove $f(x)$ cresce.
il punto $x_1 = 1/2$ è un punto di massimo locale e globale dove la funzione vale $f(1/6) = \log(2) - 1/4 > 0$. Quest'ultima diseguaglianza è dovuta al fatto che $F(0) = 0$ e f è crescente in $(0,\, 1/2)$.
La derivata seconda

$$f''(x) = D^2(f)(x) = -\frac{4}{(1+2\,x)^2} - 2 = -2\,\frac{4\,x^2+4\,x+3}{(1+2\,x)^2}$$

è negativa nel suo dominio e quindi la funzione risulta concvessa nel suo dominio.



Soluzione esercizio 5. Per confrontare i due costi studiamo per $x \geq 0$ la funzione differenza

$$f(x) = f_B(x) - f_A(x) = 2 + \log(1+3\,x) - x$$

per la quale $f(0) = 2$. La derivata di f è

$$D[f](x) = \frac{3}{(1+3\,x)} - 1 = -\frac{-2+3\,x}{1+3\,x}$$

che sia annulla in $x = 2/3$, che è un punto di massimo poiché la funzione è crescente fino a $2/3$ e decrescente dopo, $f(2/3) = 4/3 + \log(3) > 0$.
Poiché sappiamo che $f(5) < 0$ allora nell'intervallo $(2/3,\, 5)$ deve esserci un punto in cui la funzione si annulla e questo punto è unico poiché la funzione è decrescente in questo intervallo. Prendiamo come intervallo ci incertezza iniziale l'intervallo $[2, 5[$ in quanto $f(2) = \log(5) > 0$.
L'algoritmo di bisezione dimezza ogni volta la lunghezza dell'intervallo di incertezza iniziale $[2, 5]$ di lunghezza 3. Per ottenere l'approssimazione desiderata sono quindi necessarie almeno n iterazioni dove n soddisfa

$$\frac{3}{2^{n+1}} < \frac{5}{100}$$

poiché per $n = 6$ otteniamo $\frac{3}{2^{n+1}} = \frac{3}{128}$ sono necessarie 6 iterazioni.

Soluzione esercizio 6. Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $\sqrt{2+x^2+x^4} + \sqrt{1+x^4}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2+x^2+x^4} - \sqrt{1+x^4} = \\
&\quad = \frac{\left(\sqrt{2+x^2+x^4} - \sqrt{1+x^4}\right)\left(\sqrt{2+x^2+x^4} + \sqrt{1+x^4}\right)}{\sqrt{2+x^2+x^4} + \sqrt{1+x^4}} \quad = \\
&\quad = \frac{\left(2+x^2+x^4\right) - \left(1+x^4\right)}{\sqrt{2+x^2+x^4} + \sqrt{1+x^4}} = \frac{1+x^2}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+x^4}}.
\end{aligned}$$

A questo punto vediamo che numeratore e denominatore sono dello stesso ordine due; numeratore x^2 e denominatore $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$ e quindi il limite è dato dal rapporto dei coefficienti dei termini di grado più alto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2 + x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^4} \right) = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Compito B

COMPITO B DEL 09 SETTEMBRE 2015

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate solo gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f := x \mapsto \frac{-2\,x}{x^2+1}.$$

Si dimostri che la funzione f è iniettiva nel suo dominio, $\mathrm{Dom}(f) = [1, +\infty)$, e quindi invertibile. Si determini $\mathrm{Im}\, f$ e si trovi poi l'espressione esplicita della funzione inversa di f.

Esercizio 2. (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili). Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, 2]$, derivabile in $(0, 2)$ e tale che

$$f(0) = 1\ ,\ f(1) = 3\ ,\ f(2) = 2$$

Dimostrare che esiste $c \in (0, 2)$ tale che $D(f)(c) = 0$.

Esercizio 3. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}\, f$;

(b) $\inf f$;

(c) funzione monotona strettamente crescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente crescente ed è tale che $\mathrm{Im}\, f = [1, 2]$; per tale funzione si ricavi $\inf f$.

Esercizio 4. (10 punti)
Si studi la funzione

$$f := x \mapsto 4\,x^2 - \log(1 + 4\,x)$$

e si disegni il suo grafico. (suggerimento: non studiare il segno della funzione)

Esercizio 5. (6 punti) Siete stati incaricati di procedere all'acquisto di un macchinario che serve a confezionare un prodotto dell'azienda dove lavorate. Dovete scegliere fra due possibili macchine, A e B. La prima, la A, ha un costo di acquisto di 6 e un costo di esercizio che dipende dalla quantità, $x \geq 0$ di prodotti confezionati e che è dato da $c(x) = 2\,x$; per la seconda, la B, i valori sono rispettivamente 8 e $c(x) = \log(1 + 6\,x)$, in modo tale che il costo complessivo per ciascuna macchina è

$$f_A(x) = 6 + 2\,x, \quad f_B(x) = 8 + \log(1 + 6\,x)$$

Dimostrare che esiste un solo punto $x \geq 0$ in cui $f_A(x) = f_B(x)$ (ovvero $f_B(x) - f_A(x) = 0$).
Sapendo che $f_B(3) < f_A(3)$, (ovvero $f_B(3) - f_A(3) < 0$) impostare l'algoritmo di bisezione per determinare il valore approssimato di questo punto e dire quante iterazioni sono necessarie per trovarne un'approssimazione a meno di $\frac{5}{100}$.

Esercizio 6. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

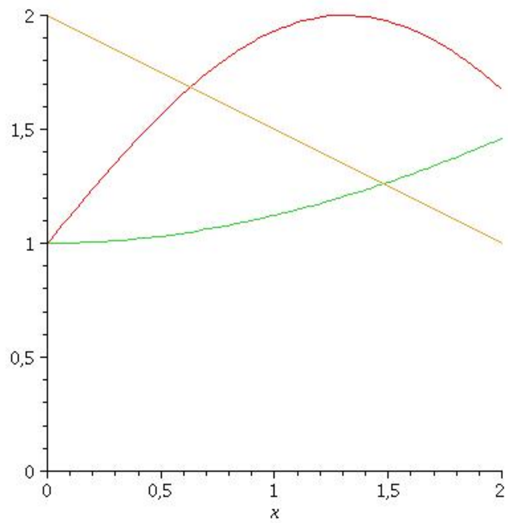
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3 - x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^4} \right).$$

Soluzioni Compito B

Soluzione esercizio 1.
Poiché si tratta di una funzione derivabile possiamo dimostrare l'iniettività utilizzando la sua derivata. La derivata della funzione è
$$D[f](x) = 2\,\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$
che si annulla per $x=-1$ e $x=1$ e che all'interno del suo dominio è sempre positiva. La funzione è quindi strettamente crescente e quindi invertibile.

Poiché la funzione è strettamente crescente nel suo dominio, $\mathrm{Dom}(f) = [1,+\infty)$, possiamo affermare che l'immagine è l'intervallo $[a,\,b)$ che ha per estremo destro (che non appartiene all'immagine)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
e per estremo sinistro (che appartiene all'immagine)
$$f(1) = -1$$
e quindi $\operatorname{Im} f = [-1,\,0)$.
Per il calcolo dell'inversa della funzione occorre osservare che per ogni elemento dell'immagine, $y \in [-1,\,0)$, abbiamo che l'unica soluzione (accettabile in quanto appartenente al dominio) dell'equazione $f(x) = y$ è $x = -\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. Pertanto si ha che
$$f^{-1} : \Big[-1,\,0\Big) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto -\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

Soluzione esercizio 2. Teorema di Fermat: *Sia f una funzione che ha nel punto c un estremo locale. Se il punto c è interno al dominio e la funzione f è derivabile in c allora $D(f)(c) = 0$.* La nostra funzione è definita e continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi ammette un massimo globale per il Teorema di Weierstass. Tale punto di massimo non può essere agli estremi $x=0$ o $x=2$ poichè
$$f(0) < f\,(1) \;\text{ e }\; f(2) < f\,(1)$$
Quindi il punto di massimo è interno, ovvero $c \in (0,2)$ e poiché un massimo globale è anche un massimo locale, per il Teorema di Fermat, $D(f)(c) = 0$.
Soluzione esercizio 3.
Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione non monotona strettamente crescente il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[0,2]$ e sull'asse y l'intervallo $[1,2]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (decrescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e dall'immagine

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

che ha $\inf f = \min f = 1$, poiché $\operatorname{Im} f = [1,\, 2]$.

Soluzione esercizio 4. Il dominio della funzione

$$f := x \mapsto x \mapsto 4\,x^2 - \log\left(1 + 4\,x\right)$$

è $\operatorname{Dom}(f) = \left(-\frac{1}{4},\, +\infty\right)$. La funzione è continua nel domino essendo la somma e composizione di funzioni elementari continue.

- $f(0) = 0$.
- La funzione non è né pari né dispari.
- Il grafico della funzione ha un asintoto verticale in $x = -\frac{1}{4}$ poiché

$$\lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} f(x) = +\infty$$

- Il $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ risulta una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$.

Per la gerarchia degli infiniti il termine prevalente è x^2 e quindi se scriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = x^2 \left(4 - \frac{\log(1 + 4\,x)}{x^2}\right)$$

il termine dentro la parentesi tende a 4 per il confronto fra infiniti e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(4 - \frac{\log(1 + 4\,x)}{x^2}\right) = [+\infty \cdot 4] = +\infty.$$

L'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è definito dalle formule $y = kx + \ell$, dove $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, quindi non esistono asintoti obliqui.

La derivata prima della funzione

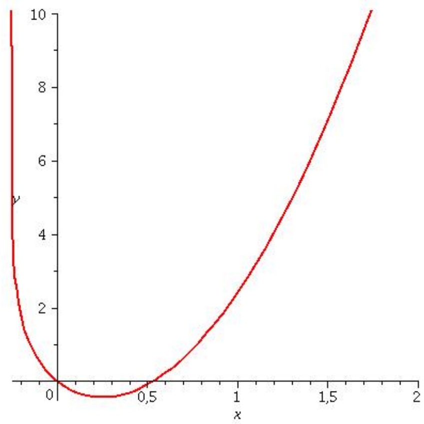
$$f'(x) = D(f)(x) = 8\,x - \frac{4}{(1 + 4\,x)} = 4\,\frac{8\,x^2 + 2\,x - 1}{1 + 4\,x},$$

si annulla nei punti $x_1 = 1/4, x_2 = -1/2$, di cui solo il primo è ammissibile

La derivata $f'(x) = D(f)(x)$ è positiva nell'intervallo $(1/4, +\infty)$, dove la funzione $f(x)$ cresce, ed è negativa nell'intervallo $(-1/4, 1/4)$, dove $f(x)$ decresce.
il punto $x_1 = 1/4$ è un punto di minimo locale dove la funzione vale $f(1/4) = 1/4 - \log(2) < 0$. Quest'ultima diseguaglianza è dovuta al fatto che $f(0) = 0$ e f è decrescente in $(0,\ 1/2)$.
La derivata seconda

$$f''(x) = D^2(f)(x) = 8 + 16\ (1 + 4\,x)^{-2} = 8\,\frac{3 + 8\,x + 16\,x^2}{(1 + 4\,x)^2}$$

è sempre positiva nel suo dominio e quindi la funzione risulta convessa nel suo dominio.



Soluzione esercizio 5. Per confrontare i due costi studiamo per $x \geq 0$ la funzione differenza

$$f(x) = f_B(x) - f_A(x) = 2 + \log(1 + 6\,x) - 2\,x$$

per la quale $f(0) = 2$. La derivata di f è

$$D[f](x) = \frac{6}{1 + 6\,x} - 2 = 4\,\frac{1 - 3\,x}{1 + 6\,x}$$

che sia annulla in $x = 1/3$, che è un punto di massimo poiché la funzione è crescente fino a $1/3$ e decrescente dopo, $f(1/3) = 4/3 + \log(3) > 0$.
Poiché sappiamo che $f(3) < 0$ allora nell'intervallo $(1/3,\ 3)$ deve esserci un punto in cui la funzione si annulla e questo punto è unico poiché la funzione è decrescente in questo intervallo. Prendiamo come intervallo ci incertezza iniziale l'intervallo $[1, 3]$ in quanto $f(1) = \log(7) > 0$.
L'algoritmo di bisezione dimezza ogni volta la lunghezza dell'intervallo di incertezza iniziale $[1, 3]$ di lunghezza 2. Per ottenere l'approssimazione desiderata sono quindi necessarie almeno n iterazioni dove n soddisfa

$$\frac{2}{2^{n+1}} < \frac{5}{100}$$

poiché per $n = 5$ otteniamo $\frac{2}{2^{n+1}} = \frac{2}{64}$ sono necessarie 5 iterazioni.

Soluzione esercizio 6. Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $\sqrt{3 - x^2 + x^4} + \sqrt{1 + x^4}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3 - x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^4} = \\
&\quad = \frac{\left(\sqrt{3 - x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^4}\right)\left(\sqrt{3 - x^2 + x^4} + \sqrt{1 + x^4}\right)}{\sqrt{23 - x^2 + x^4} + \sqrt{1 + x^4}} \quad = \\
&\quad = \frac{\left(3 - x^2 + x^4\right) - \left(1 + x^4\right)}{\sqrt{3 - x^2 + x^4} + \sqrt{1 + x^4}} = \frac{2 - x^2}{\sqrt{3 - 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + x^4}}.
\end{aligned}$$

A questo punto vediamo che numeratore e denominatore sono dello stesso ordine due; numeratore x^2 e denominatore $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$ e quindi il limite è dato dal rapporto dei coefficienti dei termini di grado più alto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3 - 2x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^4} \right) = \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}.$$

Compito C

Compito C del 09 Settembre 2015

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate solo gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square$

Esercizio 1. (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f := x \mapsto \frac{x}{4\,x^2+1}.$$

Si dimostri che la funzione f è iniettiva nel suo dominio, $\mathrm{Dom}(f) = [\frac{1}{2}, +\infty)$, e quindi invertibile. Si determini $\mathrm{Im}\, f$ e si trovi poi l'espressione esplicita della funzione inversa di f.

Esercizio 2. (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili). Sia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[-2, 2]$, derivabile in $(-2, 2)$ e tale che

$$f\,(-2) = 1\ ,\ f\,(0) = 3\ ,\ f\,(2) = 2$$

Dimostrare che esiste $c \in (-2, 2)$ tale che $D(f)(c) = 0$.

Esercizio 3. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}\, f$;

(b) $\sup f$;

(c) funzione monotona strettamente decrescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente decrescente ed è tale che $\mathrm{Im}\, f = [0, 1]$; per tale funzione si ricavi $\sup f$.

Esercizio 4. (10 punti)
Si studi la funzione

$$f := x \mapsto 6\,x^2 - \ln(1 + 3\,x)$$

e si disegni il suo grafico. (suggerimento: non studiare il segno della funzione)

Esercizio 5. (6 punti) Siete stati incaricati di procedere all'acquisto di un macchinario che serve a confezionare un prodotto dell'azienda dove lavorate. Dovete scegliere fra due possibili macchine, A e B. La prima, la A, ha un costo di acquisto di 8 e un costo di esercizio che dipende dalla quantità, $x \geq 0$ di prodotti confezionati e che è dato da $c(x) = 3\,x$; per la seconda, la B, i valori sono rispettivamente 12 e $c(x) = \log(1 + 9\,x)$, in modo tale che il costo do esercizio complessivo di ciascuna macchina è

$$f_A(x) = 8 + 3\,x, \quad f_B(x) = 12 + \log(1 + 9\,x)$$

Dimostrare che esiste un solo punto $x \geq 0$ in cui $f_A(x) = f_B(x)$ $(f_B(x) - f_A(x) = 0)$.
Sapendo che $f_B(3) < f_A(3), (f_B(3) - f_A(3) < 0)$ impostare l'algoritmo di bisezione per determinare il valore approssimato di questo punto e dire quante iterazioni sono necessarie per trovarne un'approssimazione a meno di $\frac{5}{100}$.

Esercizio 6. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} - \sqrt{2 + x^4} \right).$$

Soluzioni Compito C

Soluzione esercizio 1.
Poiché si tratta di una funzione derivabile possiamo dimostrare l'iniettività utilizzando la sua derivata. La derivata della funzione è

$$D[f](x) = -\frac{4\,x^2 - 1}{(4\,x^2 + 1)^2}$$

che si annulla per $x = -1/2$ e $x = 1/2$ e che all'interno del suo dominio è sempre negativa. La funzione è quindi strettamente decrescente e quindi invertibile.

Poiché la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio, Dom $f = [\frac{1}{2}, +\infty)$, possiamo affermare che l'immagine è l'intervallo $(a,\, b]$ che ha per estremo sinistro a (che non appartiene all'immagine)

$$a := \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

e per estremo destro (che appartiene all'immagine)

$$b := f(1/2) = \frac{1}{4}$$

e quindi Im $f = (0,\, \frac{1}{4}]$.
Per il calcolo dell'inversa della funzione occorre osservare che per ogni elemento dell'immagine, $y \in (0,\, \frac{1}{4}]$, abbiamo che l'unica soluzione (accettabile in quanto appartenente al dominio, Dom $f = [\frac{1}{2}, +\infty)$; sono una più piccola e l'altra più grande di 1/2) dell'equazione $f(x) = y$ è $x = \frac{1}{8}\,\frac{1+\sqrt{1-16\,y^2}}{y}$. Pertanto si ha che

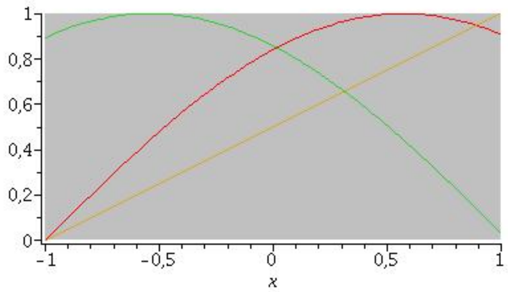
$$f^{-1} : \left(0, \frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{8}\frac{1 + \sqrt{1 - 16\,y^2}}{y}$$

Soluzione esercizio 2. Teorema di Fermat: *Sia f una funzione che ha nel punto c un estremo locale. Se il punto c è interno al dominio e la funzione f è derivabile in c allora* $D(f)(c) = 0$. La nostra funzione è definita e continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi ammette un massimo globale per il Teorema di Weierstass. Tale punto di massimo non può essere agli estremi $x = -2$ o $x = 2$ poichè

$$f(-2) < f\,(0) \text{ e } f(2) < f\,(0)$$

Quindi il punto di massimo è interno, ovvero $c \in (-2, 2)$ e poiché un massimo globale è anche un massimo locale, per il Teorema di Fermat, $D(f)(c) = 0$.

Soluzione esercizio 3.
Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione non monotona strettamente decrescente il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[-1, 1]$ e sull'asse y l'intervallo $[0, 1]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (crescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e dall'immagine

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

che ha $\sup f = \max f = 1$, poiché $\operatorname{Im} f = [0,\, 1]$.

Soluzione esercizio 4. Il dominio della funzione

$$f := x \mapsto 6\,x^2 - \log\left(1 + 3\,x\right)$$

è $\operatorname{Dom}(f) = \left(-\frac{1}{3},\, +\infty\right)$. La funzione è continua nel domino essendo la somma e composizione di funzioni elementari continue.
• $f(0) = 0$.
• La funzione non è né pari né dispari.
• Il grafico della funzione ha un asintoto verticale in $x = -\frac{1}{3}$ poiché

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty$$

• Il $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ risulta una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$.
Per la gerarchia degli infiniti il termine prevalente è x^2 e quindi se scriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = x^2 \left(6 - \frac{\log(1 + 3\,x)}{x^2}\right)$$

il termine dentro la parentesi tende a 6 per il confronto fra infiniti e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(6 - \frac{\log(1 + 3\,x)}{x^2}\right) = [+\infty \cdot 6] = +\infty.$$

L'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è definito dalle formule $y = kx + \ell$, dove $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, quindi non esistono asintoti obliqui.
La derivata prima della funzione

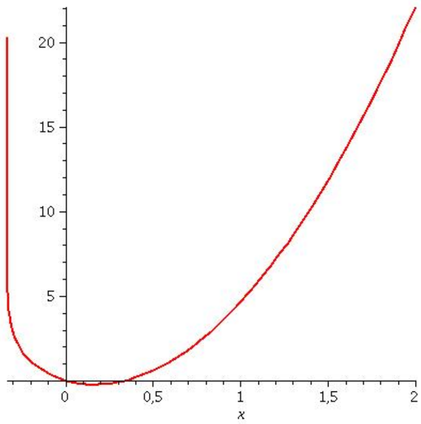
$$f'(x) = D(f)(x) = 12\,x - \frac{3}{1 + 3\,x} = 3\,\frac{4\,x + 12\,x^2 - 1}{1 + 3\,x},$$

si annulla nei punti $x_1 = -1/2, x_2 = 1/6$, di cui solo il secondo è ammissibile

La derivata $f'(x) = D(f)(x)$ è positiva nell'intervallo $(1/6, +\infty)$, dove la funzione $f(x)$ cresce, ed è negativa nell'intervallo $(-1/3, 1/6)$, dove $f(x)$ decresce.
il punto $x_1 = 1/6$ è un punto di minimo locale dove la funzione vale $f(1/2) = 1/6 - \log(3/2) < 0$. Quest'ultima diseguaglianza è dovuta al fatto che $f(0) = 0$ e f è decrescente in $(0,\, 1/6)$.
La derivata seconda

$$f''(x) = D^2(f)(x) = 3\,\frac{7 + 24\,x + 36\,x^2}{(1 + 3\,x)^2}$$

è positiva e quindi la funzione risulta concava nel suo dominio.



Soluzione esercizio 5. Per confrontare i due costi studiamo per $x \geq 0$ la funzione differenza

$$f(x) = f_B(x) - f_A(x) = 4 + \log(1 + 9\,x) - 3\,x$$

per la quale $f(0) = 4$. La derivata di f è

$$D[f](x) = \frac{9}{1 + 9\,x} - 3 = 3\,\frac{2 - 9\,x}{1 + 9\,x}$$

che si annulla in $x = 2/9$, che è un punto di massimo poiché la funzione è crescente fino a $2/9$ e decrescente dopo, $f(2/9) = 10/3 + \log(3) > 0$.
Poiché sappiamo che $f(3) < 0$ allora nell'intervallo $(2/9,\, 3)$ deve esserci un punto in cui la funzione si annulla e questo punto è unico poiché la funzione è decrescente in questo intervallo. Prendiamo come intervallo di incertezza iniziale l'intervallo $[1, 3]$ in quanto $f(1) = 1 + \log(10) > 0$.
L'algoritmo di bisezione dimezza ogni volta la lunghezza dell'intervallo di incertezza iniziale $[1, 3]$ di lunghezza 2. Per ottenere l'approssimazione desiderata sono quindi necessarie almeno n iterazioni dove n soddisfa

$$\frac{2}{2^{n+1}} < \frac{5}{100}$$

poiché per $n = 5$ otteniamo $\frac{2}{2^{n+1}} = \frac{2}{64}$ sono necessarie 5 iterazioni.

Soluzione esercizio 6. Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $[+\infty - \infty]$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} + \sqrt{2 + x^4}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} - \sqrt{2 + x^4} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} - \sqrt{2 + x^4}\right)\left(\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} + \sqrt{2 + x^4}\right)}{\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} + \sqrt{2 + x^4}} \quad = \\
&= \frac{\left(3 - 2\,x^2 + x^4\right) - \left(2 + x^4\right)}{\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} + \sqrt{2 + x^4}} = \frac{1 - 2\,x^2}{\sqrt{3 - 2\,x^2 + x^4} + \sqrt{2 + x^4}}.
\end{aligned}$$

A questo punto vediamo che numeratore e denominatore sono dello stesso ordine due; numeratore x^2 e denominatore $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$ e quindi il limite è dato dal rapporto dei coefficienti dei termini di grado più alto

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3-2\,x^2+x^4} - \sqrt{2+x^4}\right) = \frac{-2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -1.$$

6 Compito del 11 Dicembre 2015

6.1 Compito A

Esercizio 1. (8 punti)
Si studi la funzione (dominio, limiti, asintoti, continuità, derivabilità)

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)x} = (x^2+x)^{\frac{1}{3}}$$

e se ne disegni il grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2. (7 punti)
Siano date le funzioni f, g definite come segue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 1-\frac{4}{x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g : [0,2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \in [0,\ 1] \\ \\ 1-\frac{4}{x+3} & \text{se } x \in (1,\ 2] \end{cases}$$

(a) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di f e si dica se sono il massimo e il minimo di f.
(b) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di g e si dica se sono il massimo e il minimo di g (g ha la stessa espressione di f, ma è definita solo nell'intervallo $[0,2]$).

Esercizio 3. (6 punti)
Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto. Per la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva il polinomio di Taylor di grado due nel punto $x_0 = 0$. Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2+1} - \mathrm{e}}{x^2},$$

possibilmente usando il polinomio di Taylor con resto.

Esercizio 4. (6 punti)
Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
Si consideri la funzione $f : \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+\frac{5}{4} & \textit{se} \quad x \leq -\frac{1}{2} \\ \\ 1-x^2 & \textit{se} \quad x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si verifichi che: (i) f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; (ii) f è derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (iii) f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un'impresa produce un bene in quantità y usando un input x. La funzione di produzione è

$$y = f(x) := -x^2 + 4\,x + 10 \qquad x \in [0, 2]\,.$$

Il prezzo unitario di vendita del prodotto y è 1 e la funzione di costo è $c(x) = x$. L'impresa agisce massimizzando il profitto al netto dell'imposta $t(x)$

$$P\,(x) = 1 \cdot f\,(x) - c\,(x) - t(x) = f\,(x) - c\,(x) - t(x).$$

Il Governo tassa l'input usato dall'impresa con una delle due imposte descritte dalle funzioni:

$$t_1(x) = x \quad \text{o} \quad t_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2\,x.$$

All'impresa verrà comunicata quale sarà l'imposta e quindi massimizzerà il suo profitto di conseguenza. Quale delle due imposte massimizza le entrate per il Governo?

Esercizio 6. (6 punti)
Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{e^{2\,x^2} - 1}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{|x^3 + 2x - 1| + 2\,x^2}{|x^2 - 1| - 2x^3 - x}.$$

6.2 Soluzioni Compito A

Soluzione Esercizio 1. Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)x} = \sqrt[3]{x^2+x},$$

è $\mathbb{R}$, poiché f è la composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio x^2+x), definite ovunque.
La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari,
I limiti della funzione $f(x)$ all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e quindi il suo grafico non ha asintoti verticali.
Per calcolare gli eventuali asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ calcoliamo prima

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1/x+1/x^2} = 0,$$

e dunque non ci sono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} D(f)(x) = f'(x) &= \frac{1}{3}(x^2+x)^{-2/3} D\left[x^2+x\right] = \\ &= \frac{2x+1}{3(x^2+x)^{2/3}} = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x)^2}}. \end{aligned}$$

Vediamo che il denominatore è sempre non-negativo ma si annulla nei due punti $x = 0$ e $x = -1$ che sono pertanto due punti di non derivabilità. Se calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 0} D(f)(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1} D(f)(x) = -\infty$$

vediamo che si tratta di due punti con tangente verticale.

Il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore che è un polinomio di primo grado la cui radice è $x = -1/2$.
La derivata $D(f)(x)$ prende valori negativi per $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,-1/2)$, positivi per $x \in (-1/2,0) \cup (0,+\infty)$. Pertanto la funzione $f(x)$ decresce in $(-\infty,-1/2)$, cresce in $(-1/2,+\infty)$.
Il punto $x_0 = -1/2$ è un punto di minimo locale che è anche globale.
Il valore del minimo è $f(-1/2) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

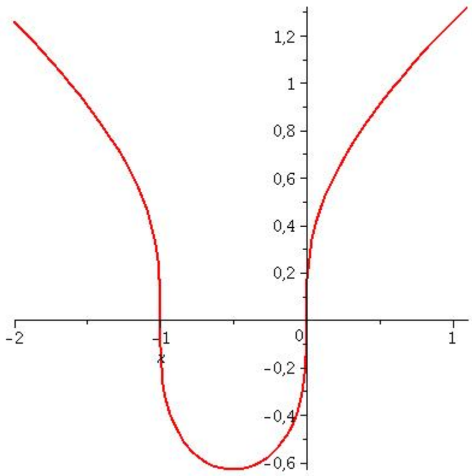


Figura 16: Grafico di $f(x)$

Il grafico della funzione è in Figura 16

Soluzione Esercizio 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \le 1 \\ \\ 1 - \frac{4}{x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

La funzione è composta da un tratto di retta e da un tratto di iperbole, la funzione è continua nel punto $x = 1$ poiché abbiamo

$$f(1) = 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Possiamo quindi facilmente disegnare il grafico di f, vedi Figura 17 Da questo grafico deduciamo che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f = +\infty, \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0,$$

in quanto

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1, \quad f(1) = 0$$

(notate come il punto di minimo locale e globale sia in un punto di non derivabilità, punto angoloso); l'immagine della funzione è $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$ e $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ non esiste, mentre $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ esiste.
(b)

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0,\, 1] \\ \\ 1 - \frac{4}{x+3} & \text{se } x \in (1,\, 2] \end{cases}$$

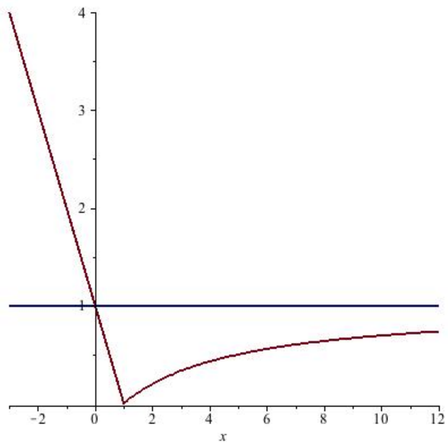


Figura 17: Grafico di $f(x)$

Il grafico di g è in Figura 18.
Dal grafico deduciamo che

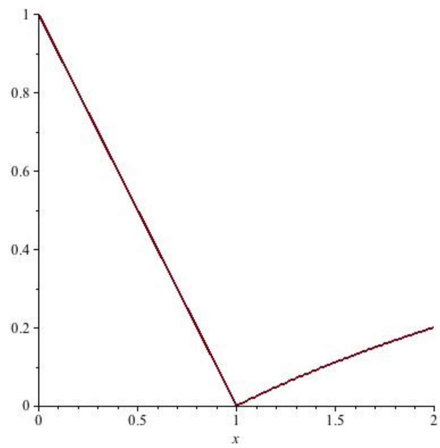


Figura 18: Grafico di $g(x)$

$$\sup_{x\in[0,2]} g(x) = g(0) = 1, \qquad \inf_{x\in[0,2]} g(x) = g(1) = 0,$$

che sono anche massimo e minimo globali

$$\max_{x\in[0,2]} g(x) = 1, \ \min_{x\in[0,2]} g(x) = 0.$$

Soluzione Esercizio 3.
Vedere libro di testo.
Il polinomio di Taylor fino al grado due di f nell'origine si può scrivere come

$$f\,(0) + \mathrm{D}(f)\,(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + \frac{D^3(f)(\theta)}{3!}x^3, \quad \theta \text{ fra } 0 \text{ e } x$$

oppure

$$f\,(0) + \mathrm{D}(f)\,(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1},\ D(f)(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2+1},\ D^2(f)(x) = 2\,\mathrm{e}^{x^2+1}\left(1 + 2\,x^2\right)$$

$$f(0) = \mathrm{e},\ D(f)(0) = 0,\ D^2(f)(0) = 2\,\mathrm{e}$$

e quindi

$$f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2+1} - e}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \mathrm{e}}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}x^2 + R_2(x)}{x^2} =\\ &= \mathrm{e} + \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \mathrm{e}.\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 4. Data la continuità e derivabilità delle funzioni polinomio è sufficiente studiare la continuità e la derivabilità di f nel punto $-\frac{1}{2}$. Dato che la derivabilità implica la continuità è sufficiente verificare la derivabilità di f in quel punto. Notando che abbiamo che $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ calcoliamo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{(1 - x^2) - \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{(x + \frac{5}{4}) - \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2}} = 1.$$

La funzione è quindi derivabile (e continua) anche in $-\frac{1}{2}$, dunque f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Poiché $f(-1) = 1/4 = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

Soluzione Esercizio 5. Il profitto (lordo) dell'impresa prima della tassazione è

$$P(x) = -x^2 + 4\,x + 10 - x = -x^2 + 3\,x + 10$$

Con la tassazione $t_1(x)$ (notate che è specificato che la tassazione è sull'input utilizzato) il profitto dell'impresa al netto della tassazione è

$$P_1(x) = P(x) - t_1(x) = -x^2 + 3\,x + 10 - x = -x^2 + 2\,x + 10.$$

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$D[P_1](x) = -2\,x + 2.$$

Abbiamo che $D[P_1](x) > 0$ in $[0, 1)$, mentre $D[P_1](x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 1)$ e decresce $(1, +\infty)$. Allora $x_1 = 1$ è un punto di massimo globale per P_1 ed è la scelta ottima dell'impresa in questo caso.
Il valore ottimo del profitto (non era richiesto) è

$$f(1) = 11$$

Il gettito della tassazione per $x = 1$ è uguale a $t_1(1) = 1$.
In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = -x^2 + 3\,x + 10 - \left(\frac{x^2}{2} + 2\,x\right) = -\frac{3\,x^2}{2} + x + 10$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = -3\,x + 1,$$

e studiandola per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, 1/3)$, $P_2'(x) < 0$ in $(1/3, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, 1/3)$ e decresce $(1/3, +\infty)$. Allora $x_2 = 1/3$ è il punto di massimo globale per $P_2(x)$ ed è la scelta ottima dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore ottimo del profitto è

$$f(1/3) = 61/6$$

Il gettito della tassazione per $x_2 = 1/3$ è $t_2(1/3) = \frac{13}{18}$.

Vediamo che

$$t_1(x_1) > t_2(x_2)$$

quindi la miglior scelta di tassazione per l'autorità economica è t_1.

Soluzione Esercizio 6. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{e^{2x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,x^2}{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\,2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a meno infinito per eliminare i valori assoluti

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{|x^3+2x-1|+2\,x^2}{|x^2-1|-2x^3-x}. = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^3-2\,x+1+2\,x^2}{x^2-1-2x^3-x} = \frac{1}{2}.$$

6.3 Compito B

Esercizio 1. (8 punti)
Si studi la funzione (dominio, limiti, asintoti, continuità, derivabilità)

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)x} = (x^2 - 2\,x)^{\frac{1}{3}}$$

e se ne disegni il grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2. (7 punti)
Siano date le funzioni f, g definite come segue:

$$f : (-\infty, 3) \to \mathbb{R},\; f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in (-\infty,\, 1] \\ 1 + \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\, 3) \end{cases}$$

$$g : [0, 2] \to \mathbb{R},\; g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0,\, 1] \\ 1 + \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\, 2] \end{cases}$$

(a) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di f e si dica se sono il massimo e il minimo di f.
(b) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di g e si dica se sono il massimo e il minimo di g (g ha la stessa espressione di f, ma è definita solo nell'intervallo $[0, 2]$).

Esercizio 3. (6 punti)
Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto. Per la funzione $f(x) = \log(x^2 + \mathrm{e})$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva il polinomio di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due. Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2 + \mathrm{e}) - 1}{x^2},$$

possibilmente usando il polinomio di Taylor con resto.
Esercizio 4. (6 punti)
Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
Si consideri la funzione $f : \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{5}{4} & se \quad x \leq -\frac{1}{2} \\ x^2 - 1 & se \quad x > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si verifichi che: (i) f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; (ii) f è derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (iii) f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un'impresa produce un bene in quantità y usando un input x. La funzione di produzione è

$$y = f(x) := -x^2 + 5\,x + 7 \qquad x \in [0,\, 5/2]$$

Il prezzo unitario di vendita del prodotto y è 1 e la funzione di costo è $c(x) = x$. L'impresa agisce massimizzando il profitto al netto dell'imposta $t(x)$

$$P\,(x) = 1 \cdot f\,(x) - c\,(x) - t(x) = f\,(x) - c\,(x) - t(x).$$

Il Governo può tassare l'input usato dall'impresa con una delle due imposte descritte dalle funzioni:

$$t_1(x) = x \quad \text{o} \quad t_2(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

All'impresa verrà comunicata quale sarà l'imposta e quindi massimizzerà il suo profitto di conseguenza. Quale delle due imposte massimizza le entrate per il Governo

Esercizio 6. (6 punti)
Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{2\,x^2} - 1}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{|x^2 + 2x - 1| + 2\,x^3}{|x^3 - 1| - 2x^2 - x}.$$

6.4 Soluzioni Compito B

Soluzione Esercizio 1. Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)x} = \sqrt[3]{x^2 - 2\,x} = (x^2 - 2\,x)^{1/3},$$

è $\mathbb{R}$, poiché f è la composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio $x^2 - 2\,x$), definite ovunque.
La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari,
I limiti della funzione $f(x)$ all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2\,x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e quindi il suo grafico non ha asintoti verticali.
Per calcolare gli eventuali asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ calcoliamo prima

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2\,x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1/x - 2/x^2} = 0,$$

e dunque non ci sono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} D(f)(x) = f'(x) &= \frac{1}{3}(x^2 - 2\,x)^{-2/3} D\,[x^2 - 2\,x\,] = \\ &= \frac{2x-2}{3(x^2 - 2\,x)^{2/3}} = \frac{2x-2}{3\,\sqrt[3]{(x^2 - 2\,x)^2}}. \end{aligned}$$

Vediamo che il denominatore è sempre non-negativo ma si annulla nei due punti $x = 0$ e $x = 2$ che sono pertanto due punti di non derivabilità. Se calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 0} D(f)(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2} D(f)(x) = +\infty$$

vediamo che si tratta di due punti con tangente verticale.

Il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore che è un polinomio di primo grado la cui radice è $x = 1$.
La derivata $D(f)(x)$ prende valori negativi per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, positivi per $x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Pertanto la funzione $f(x)$ decresce in $(-\infty, 1)$, cresce in $(1, +\infty)$.
Il punto $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale che è anche globale.
Il valore della funzione nel punto di minimo è $f(1) = -1$.

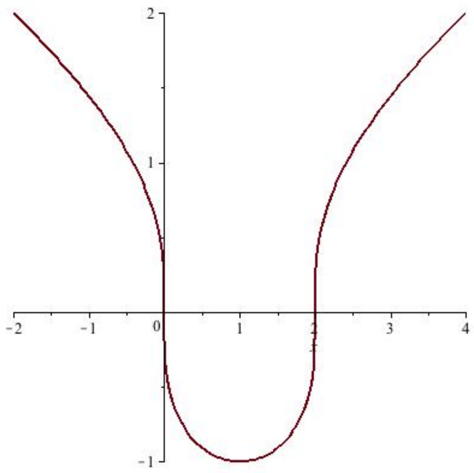


Figura 19: Grafico di $f(x)$

Il grafico della funzione è in Figura 19

Soluzione Esercizio 2.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in (-\infty,\, 1] \\ \\ 1 + \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\, 3) \end{cases}$$

La funzione è composta da un tratto di retta e da un tratto di iperbole ed è continua in quanto nel punto $x = 1$ abbiamo che

$$f(1) = 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Il punto $x = 3$ è un asintoto verticale poiché

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Possiamo quindi facilmente disegnare il grafico di f, vedi Figura 20.
Da questo grafico deduciamo che

$$\inf_{x \in (-\infty,\, 3)} f(x) = -\infty, \quad \sup_{x \in (-\infty,\, 3)} f(x) = \max_{x \in (-\infty,\, 3)} f(x) = 0$$

in quanto

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty, \qquad f(1) = 0$$

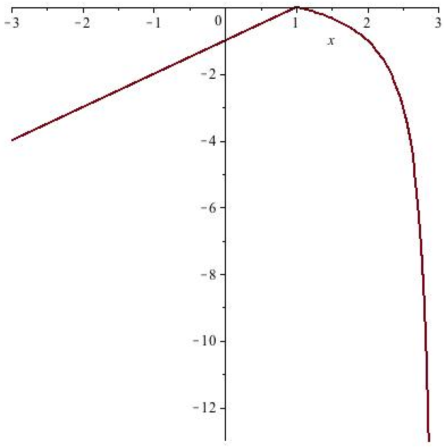


Figura 20: Grafico di $f(x)$

(notate come il punto di massimo locale e globale sia in un punto di non derivabilità, punto angoloso); l'immagine della funzione è $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$ e $\min_{x\in(-\infty,3} f(x)$ non esiste, mentre $\max_{x\in(-\infty,3} f(x)$ esiste.
(b)

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0,\,1] \\ 1+\dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\,2] \end{cases}$$

Il grafico di g è in Figura 21 .
Dal grafico deduciamo che

$$\sup_{x\in[0,\,2]} g(x) = g(1) = 0, \ \inf_{x\in[0,\,2]} g(x) = g(0) = -1 = g(2),$$

che sono anche massimo e minimo globali

$$\max_{x\in[0,\,2]} g(x) = 0, \ \min_{x\in[0,\,2]} g(x) = -1.$$

Soluzione Esercizio 3.
a) Vedere libro di testo.
b) Lo sviluppo di Taylor fino al grado due di f nell'origine si può scrivere come

$$f(0) + \mathrm{D}(f)(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + \frac{D^3(f)(\theta)}{3!}x^3, \quad \theta \text{ fra } 0 \text{ e } x$$

oppure

$$f(0) + \mathrm{D}(f)(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

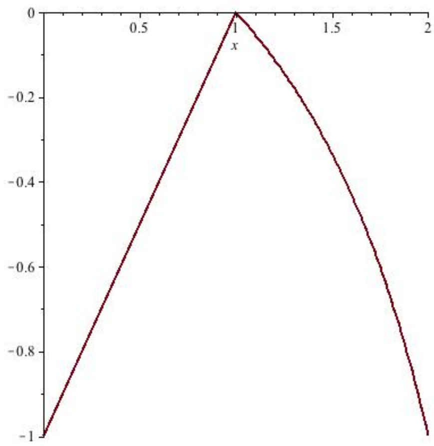


Figura 21: Grafico di $g(x)$

dove

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(x) = \log(x^2 + \mathrm{e}),\ D(f(x)) = 2\,\frac{x}{x^2+\mathrm{e}},\ D^2(f)(x) = 2\,\frac{-x^2+\mathrm{e}}{(x^2+\mathrm{e})^2}$$

$$f(0) = 1,\ D(f)(0) = 0,\ D^2(f)(0) = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

e quindi

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\,x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+\mathrm{e})-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}\,x^2 + R_2(x)}{x^2} = \\ &= 1/\mathrm{e} + \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 4. Data la continuità e derivabilità delle funzioni polinomio è sufficiente studiare la continuità e la derivabilità di f nel punto $-\frac{1}{2}$. Dato che la derivabilità implica la continuità è sufficiente verificare la derivabilità di f in quel punto. Notando che abbiamo che $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ calcoliamo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{(x^2-1)+\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{(-x-\frac{5}{4})+\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}} = -1.$$

La funzione è quindi derivabile (e continua) anche in $-\frac{1}{2}$, dunque f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Poiché $f(-1) = -1/4 = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

Soluzione Esercizio 5. Il profitto (lordo) dell'impresa è

$$P(x) = -x^2 + 5\,x + 7 - x = -x^2 + 4\,x + 7 - t(x)$$

dove la tassazione non è ancora stata scelta. Con la tassazione $t_1(x)$ (notate che è specificato che la tassazione è sull'input utilizzato) il profitto dell'impresa al netto della tassazione è

$$P_1(x) = P(x) - t_1(x) = -x^2 + 4\,x + 7 - x = -x^2 + 3\,x + 7.$$

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$D[P_1 + (x) = -2\,x + 3.$$

Abbiamo che $D[P_1](x) > 0$ in $[0, 3/2)$, mentre $D[P_1](x) < 0$ in $(3/2, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 3/2)$ e decresce $(3/2, +\infty)$. Allora $x_1 = 3/2$ è un punto di massimo globale per P_1 ed è la scelta ottima dell'impresa in questo caso.
Il valore ottimo del profitto (non era richiesto) è

$$P_1(3/2) = 37/4$$

Il gettito della tassazione per $x = 1$ è uguale a $t_1(3/2) = 3/2$.
In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = -x^2 + 4\,x + 7 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) = -\frac{3\,x^2}{2} + 3\,x + 7$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = -3\,x + 3,$$

e studiandola per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, 1)$, $P_2'(x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, 1)$ e decresce $(1, +\infty)$. Allora $x_2 = 1$ è il punto di massimo globale per $P_2(x)$ ed è la scelta ottima dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore ottimo del profitto è

$$P_2(1) = 17/2$$

Il gettito della tassazione per $x_2 = 1$ è $t_2(1) = \frac{3}{2}$.
Vediamo che

$$t_1(x_1) = t_2(x_2)$$

quindi entrambe le scelte portano lo stesso risultato per il Governo.

Soluzione Esercizio 6. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{e^{2x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-cos(x)}{x^2/2}\, x^2/2}{\frac{e^{2x^2-1}}{2x^2} 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{2x^2} = \frac{1}{4}.$$

Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a meno infinito per eliminare i valori assoluti

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{|x^2 + 2x - 1| + 2\,x^3}{|x^3 - 1| - 2x^2 - x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2\,x - 1 + 2\,x^3}{-x^3 + 1 - 2x^2 - x} = -2$$

Esame di Matematica per le Applicazioni Economiche
11 Gennaio 2016

— Fila A —

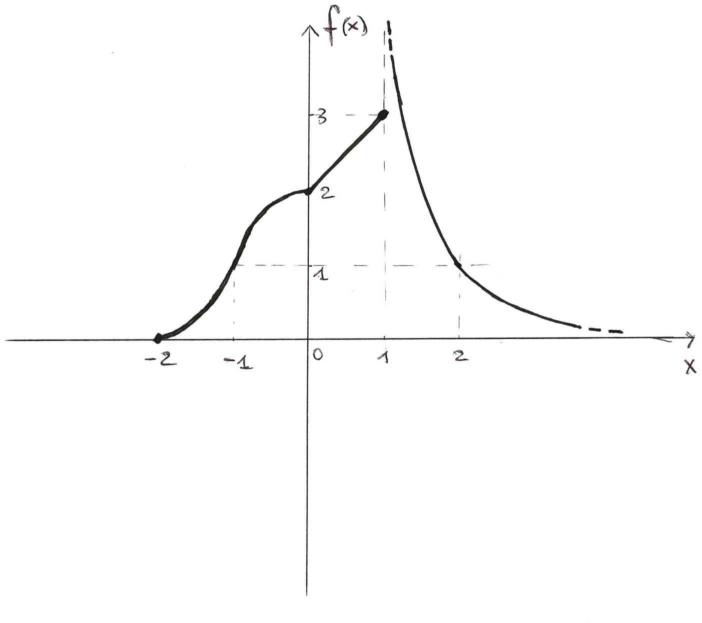
Durata della prova: 2 ore e mezzo.
NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione $D(f)$ della funzione.
(b) Determinare sup e inf della funzione su $D(f)$ e dire se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo.
(c) Stabilire se la funzione è pari, dispari oppure né pari né dispari.
(d) Sia $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [0,+\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[0,+\infty)$). Stabilire se g è iniettiva.

Esercizio 2 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [-2,+\infty) \to \mathbb{R}$ il cui grafico è rappresentato in figura (le rette $x = 1$ e $y = 0$ sono, rispettivamente, asintoto verticale e asintoto orizzontale per il grafico della funzione).



(a) Determinare gli intervalli di monotonia della funzione, specificandone la tipologia (crescente, strettamente crescente, ecc.).
(b) Determinare i punti di minimo e di massimo locale (se ve ne sono) della funzione.
(c) Sia $g : [-2,1] \cup [2,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-2,1] \cup [2,+\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[-2,1] \cup [2,+\infty)$). Si determini l'immagine di g (cioè l'insieme $g([-2,1] \cup [2,+\infty))$).

Esercizio 3 (6 punti)
(a) Utilizzando la definizione di limite si verifichi che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.
(b) Si calcoli (o si dimostri la non esistenza) di <u>uno ed uno solo</u> (a scelta) dei seguenti limiti:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\log(1+\sqrt{x}))}{e^{\sqrt{x}}-1}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}\log(1/x).$$

Esercizio 4 (6 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+5}.$$

(a) Utilizzando la definizione di derivata, si verifichi che f è derivabile in ogni punto $x_0 \in (-5, +\infty)$ e si calcoli la sua derivata.
(b) Si dica se la funzione è concava in $(-5, +\infty)$.

Esercizio 5 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [0,6] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se} \quad x \in [0,3], \\ -x^2 + 10x - 18, & \text{se} \quad x \in (3,6]. \end{cases}$$

(a) Si dica se il teorema di Lagrange è applicabile a tale funzione nell'intervallo $[0,6]$.
(b) In caso affermativo, si determinino i punti (uno o più d'uno) interni all'intervallo $(0,6)$ che verificano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6 (8 punti)
Si disegni il grafico della funzione (si trascuri lo studio della derivata seconda e della concavità/convessità)

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot \log(x+1).$$

SOLUZIONE

Esercizio 1.
(a) L'espressione $\frac{x^2}{1+x^2}$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $D(f) = \mathbb{R}$.
(b) Si noti che $0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Se ne deduce che $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$ e che il primo è anche minimo di f su $\mathbb{R}$, mentre il secondo non è un massimo.
(c) Si ha $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f è pari.
(d) Occorre stabilire se, per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $\frac{x^2}{1+x^2} = y$ ha al più una soluzione in $[0, +\infty)$. Si ha

$$\frac{x^2}{1+x^2} = y \;\Leftrightarrow\; x^2 - y - yx^2 = 0 \Leftrightarrow\; (1-y)\,x^2 = y \Leftrightarrow\; x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

Se ne deduce che l'equazione data

- non ha nessuna soluzione nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \notin [0, 1)$;
- ha l'unica soluzione $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \in [0, 1)$.

Si conclude che g è iniettiva.

Esercizio 2.
(a) f è strettamente crescente nell'intervallo $[-2, 1]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(2, +\infty)$.
(b) Punti di massimo locale: nessuno. Punti di minimo locale: $x = -2$.
(c) Il grafico della funzione g interseca, almeno in un punto, tutte e sole le rette orizzontali della forma $y = k$ con $k \in [0, 3]$. Se ne deduce che $\mathrm{Im}(g) = [0, 3]$.

Esercizio 3.
(a) Occorre verificare che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} :\ x > M \;\Rightarrow\; \left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Cioè, bisogna verificare che l'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon$ contiene un intervallo della forma $[M, +\infty)$, con M (eventualmente) dipendente da ε. Si ha

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < \frac{x^2}{1+x^2} - 1 < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < -\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon.$$

Poiché $1 + x^2 > 0$ la precedente coppia di disuguaglianze si può riscrivere come

$$\varepsilon(1+x^2) + 1 > 0 \;\wedge\; -\varepsilon(1+x^2) + 1 < 0.$$

La prima disuguaglianza è sempre verificata; la seconda si riscrive

$$-\varepsilon - \varepsilon x^2 + 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon x^2 - \ 1 + \varepsilon > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0,$$

per cui è verificata ([1]) per $x > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Dunque (1) resta verificata con $M = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$ ([2])
(b.i) Dividendo e moltiplicando l'espressione di cui si vuole calcolare il limite per $\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})$ si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \left(\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{\log\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1}\right),$$

assumendo che il membro destro sia ben definito. Effettuando le sostituzioni iniettive $y = \log\left(1+\sqrt{x}\right)$ nel primo limite a membro destro e $z = \sqrt{x}$ nel secondo e nel terzo, la precedente espressione si riscrive come

$$\left(\lim_{y\to0^+} \frac{\sin y}{y}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{\left(\log\left(1+z\right)\right)}{z}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{z}{e^z - 1}\right),$$

da cui si deduce che il valore del limite da cui si era partiti è 1.

[1] Assumendo $\varepsilon \in (0, 1]$, altrimenti vale sempre.
[2] Se $\varepsilon \in (0, 1]$, altrimenti con $M = 0$. Ma si noti che la definizione di limite è significativa per ε "piccolo".

(b.ii) Con la sostituzione iniettiva (su $(0,+\infty)$) $y = 1/x$ e tenendo conto dell'ordinamento della gerarchia di infiniti si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}\log(1/x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\log y = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{e^y} = 0.$$

Esercizio 4.
(a) Sia $x_0 \in (-5,+\infty)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x_0+5}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x_0+5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x+5)-(x_0+5)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+5}}.
\end{aligned}$$

Dunque f è derivabile in $(-5,+\infty)$ e, in tale intervallo, risulta $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$.
(b) Poichè $f'(x) = \frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}$, si ha $f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+5)^{-\frac{3}{2}} < 0$ per qualsiasi $x \in (-5,+\infty)$. Dunque la funzione è (strettamente) concava.

Esercizio 5.
(a) Per l'applicabilità del teorema, occorre verificare che f sia continua in $[0,6]$ e derivabile in $(0,6)$.
Poichè le funzioni f_1, f_2 definite da $f_1(x) := x^2 - 2x$ e $f_2(x) := x^2 + 10x + 18$ sono funzioni polinomiali, si ha che f è continua negli intervalli $[0,3)$ e $(3,6]$ e derivabile negli intervalli $(0,3)$ e $(3,6)$.
Restano da verificare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 3$.
Per verificare la derivabilità (e dunque la continuità) in $x = 3$ sarà sufficiente verificare che le derivate destra e sinistra in $x = 3$ esistono finite e coincidono in tale punto. In effetti

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-\left(3^2-2\cdot 3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 4,$$

e

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-x^2+10x-18-\left(3^2-2\cdot 3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-x^2+10x-21}{x-3} =$$

$$= -\lim_{x\to 3} \frac{x^2-10x+21}{x-3} = -\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-7)}{x-3} = 4.$$

Se ne deduce che il teorema di Lagrange è applicabile.
La continuità in $x = 3$ poteva essere verificata direttamente. Infatti

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-2x) = 3,$$

$$f(3) = 3,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(-x^2+10x-18\right) = 3,$$

e dunque

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{se} \quad x \in [0,3), \\ 4, & \text{se} \quad x = 3, \\ -2x+10, & \text{se} \quad x \in (3,6]. \end{cases}$$

Vogliamo trovare le soluzioni $x \in (0,6)$ dell'equazione

$$f'(x) = \frac{f(6)-f(0)}{6-0} = \frac{(-36+60-18)-0}{6} = 1.$$

La precedente equazione si riscrive spezzandosi in due equazioni in due diversi intervalli:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 1, & \text{se } x \in (0,3), \\ -2x + 10 = 1, & \text{se } x \in (3,6)\,, \end{cases}$$

da cui si ricavano le due soluzioni $\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{2}$. Entrambi questi punti soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6

1. Dominio.
dom $f = (-1, +\infty)\,.$

2. Segno di f.
Intanto notiamo che $f(0) = 0$ e che il segno di $(x+1)^2$ è sempre positivo. D'altra parte $\log(x+1) \geq 0$ se e solo se $x + 1 \geq 1$ ovvero se e solo se $x \geq 0$. Dunque il segno di f è il seguente

	$x \in (-1,0)$	$x = 0$	$x \in (0,+\infty)$
Segno di f	$-$	0	$+$

3. Comportamento a -1^+. Si ha

$$\lim_{x \to -1^+} (x+1)^2 \cdot \log(x+1) = \text{“}0 \cdot (-\infty)\text{”}.$$

Per risolvere la forma indeterminata possiamo usare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^{-2}} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{-2(x+1)^{-3}} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)^3}{-2(x+1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)^2}{-2} = 0$$

4. Comportamento a $+\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)^2 \cdot \log(x+1) = +\infty.$$

5. Derivata prima.
Utilizzando le regole di derivazione si ottiene

$$f'(x) = 2(x+1)\log(x+1) + (x+1)^2 \frac{1}{x+1} = 2(x+1)\log(x+1) + (x+1) = (x+1)(2\log(x+1) + 1)\,.$$

Poichè *dom* $f = (-1, +\infty)$, il segno di $f'(x)$ è il segno di $1 + 2\log(x+1)$. Si ha

$$2\log(x+1) + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \log(x+1) \geq -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x + 1 \geq e^{-\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; x \geq e^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 = \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

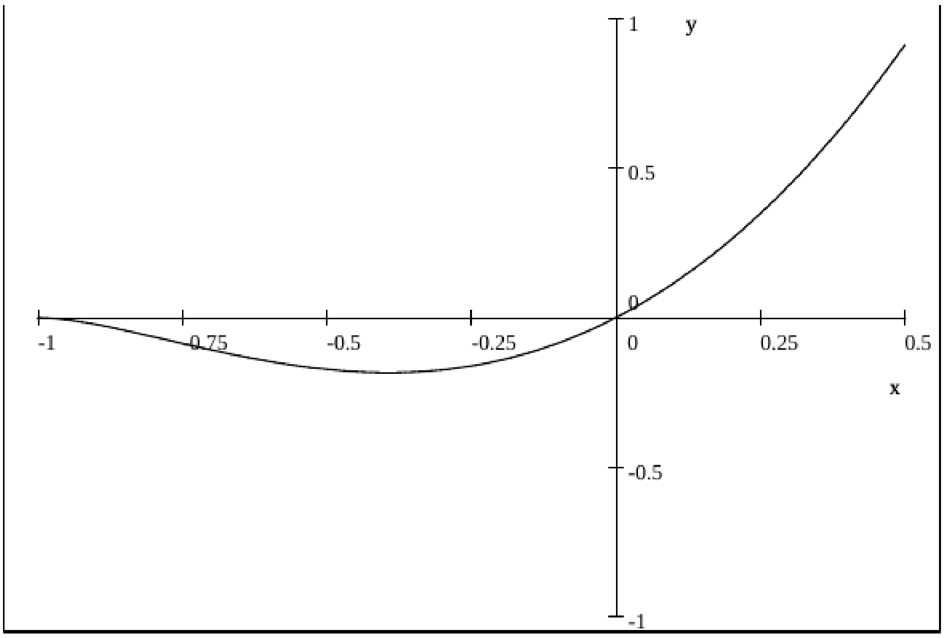
Si noti che $\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}} \in (-1, 0)$. Si ha il seguente schema:

	$x \in (-1, \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}})$	$x = \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$	$x \in (\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}, +\infty)$
Segno di f'	$-$	0	$+$
Monotonia di f	decrescente	p.to min.	crescente

Dunque f ha un punto di minimo (globale) in $x = \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ ed il valore della funzione in tale punto è

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 + 1\right)^2 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 + 1\right) = \frac{1}{e} \cdot \log\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\log e\right) = -\frac{1}{2e}.$$

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot \log(x+1)$$

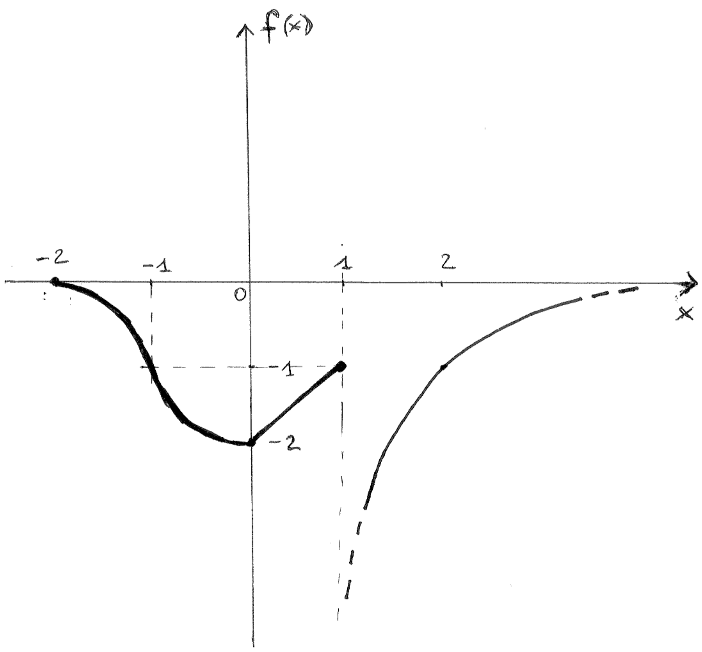


Esame di Matematica per le Applicazioni Economiche
11 Gennaio 2016
— Fila B —

Durata della prova: 2 ore e mezzo.
NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$
(a) Determinare l'insieme di definizione $D(f)$ della funzione.
(b) Determinare sup e inf della funzione su $D(f)$ e dire se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo.
(c) Stabilire se la funzione è pari, dispari oppure né pari né dispari.
(d) Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[0, +\infty)$). Stabilire se g è iniettiva.

Esercizio 2 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ il cui grafico è rappresentato in figura (le rette $x = 1$ e $y = 0$ sono, rispettivamente, asintoto verticale e asintoto orizzontale per il grafico della funzione).



(a) Determinare gli intervalli di monotonia della funzione, specificandone la tipologia (crescente, strettamente crescente, ecc.).
(b) Determinare i punti di minimo e di massimo locale (se ve ne sono) della funzione.
(c) Sia $g : [-2, 1] \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-2, 1] \cup [2, +\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[-2, 1] \cup [2, +\infty)$). Si determini l'immagine di g (cioè l'insieme $g([-2, 1] \cup [2, +\infty))$).

Esercizio 3 (6 punti)
(a) Utilizzando la definizione di limite si verifichi che $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2$.
(b) Si calcoli (o si dimostri la non esistenza) di uno ed uno solo (a scelta) dei seguenti limiti:
$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin\left(\log\left(1 + \sqrt{x}\right)\right)}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} \log(-1/x).$$

Esercizio 4 (6 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt{-x+5}.$$
(a) Utilizzando la definizione di derivata, si verifichi che f è derivabile in ogni punto $x_0 \in (-\infty, 5)$ e si calcoli la sua derivata.
(b) Si dica se la funzione è concava in $(-\infty, 5)$.

Esercizio 5 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [0,4] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x, & \text{se} \quad x \in [0,3], \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 9, & \text{se} \quad x \in (3,4]. \end{cases}$$
(a) Si dica se il teorema di Lagrange è applicabile a tale funzione nell'intervallo $[0,4]$.
(b) In caso affermativo, si determinino i punti (uno o più d'uno) interni all'intervallo $(0,4)$ che verificano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6 (8 punti)
Si disegni il grafico della funzione (si trascuri lo studio della derivata seconda e della concavità/convessità)
$$f(x) = -(x+1)^2 \cdot \log(x+1).$$

SOLUZIONE

Esercizio 1.
(a) L'espressione $\frac{2x^2}{1+x^2}$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $D(f) = \mathbb{R}$.
e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
(b) Si noti che $0 \leq \frac{2x^2}{1+x^2} < 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Se ne deduce che $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ e che il primo è anche minimo di f su $\mathbb{R}$, mentre il secondo non è un massimo.
(c) Si ha $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{2x^2}{1+x^2} = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f è pari.
(d) Occorre stabilire se, per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $\frac{2x^2}{1+x^2} = y$ ha al più una soluzione in $[0, +\infty)$. Si ha

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - y - yx^2 = 0 \Leftrightarrow\; (2-y)\,x^2 = y \Leftrightarrow\; x^2 = \frac{y}{2-y}.$$

Se ne deduce che l'equazione data

- non ha nessuna soluzione in $[0, +\infty)$ se $y \notin [0, 2)$;
- ha l'unica soluzione $x = \sqrt{\frac{y}{2-y}}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \in [0, 2)$.

Si conclude che g è iniettiva.

Esercizio 2.
(a) f è strettamente decrescente nell'intervallo $[-2, 0]$; strettamente crescente (separatamente) negli intervalli $[0, 1]$ e $(1, +\infty)$.
(b) Punti di massimo locale: $x = -2$ e $x = 1$. Punti di minimo locale: $x = 0$.
(c) Il grafico della funzione g interseca, almeno in un punto, tutte e sole le rette orizzontali della forma $y = k$ con $k \in [-2, 0]$. Se ne deduce che $\mathrm{Im}(g) = [-2, 0]$.

Esercizio 3.
(a) Occorre verificare che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} :\ |x| > M \;\Rightarrow\; \left|\frac{2x^2}{1+x^2} - 2\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Cioè, bisogna verificare che l'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|\frac{2x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon$ contiene un intervallo della forma $[M, +\infty)$, con M (eventualmente) dipendente da ε. Si ha

$$\left|\frac{2x^2}{1+x^2} - 2\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < \frac{2x^2}{1+x^2} - 2 < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < -\frac{2}{1+x^2} < \varepsilon.$$

Poiché $1 + x^2 > 0$ la precedente coppia di disuguaglianze si può riscrivere come

$$\varepsilon(1+x^2) + 2 > 0 \;\wedge\; -\varepsilon(1+x^2) + 2 < 0.$$

La prima disuguaglianza è sempre verificata; la seconda si riscrive

$$-\varepsilon - \varepsilon x^2 + 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon x^2 - \ 2 + \varepsilon > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} > 0,$$

per cui è verificata [1] per $x > \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Dunque (1) resta verificata con $M = \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ [2]
(b.i) Dividendo e moltiplicando l'espressione di cui si vuole calcolare il limite per $\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})$ si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)} = \left(\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}\right).$$

assumendo che il membro destro sia ben definito. Effettuando le sostituzioni iniettive $y = \log\left(1+\sqrt{x}\right)$ nel secondo limite e $z = \sqrt{x}$ negli altri due, la precedente espressione si riscrive come

$$\left(\lim_{z\to0^+} \frac{e^z - 1}{z}\right)\left(\lim_{y\to0^+} \frac{y}{\sin y}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{z}{\log\left(1+z\right)}\right),$$

[1] Assumendo $\varepsilon \in (0, 2]$, altrimenti vale sempre.
[2] Se $\varepsilon \in (0, 2]$, altrimenti con $M = 0$. Ma si noti che la definizione di limite è significativa per ε "piccolo".

da cui si deduce che il valore del limite da cui si era partiti è 1.
(b.ii) Con la sostituzione $y = -1/x$ e tenendo conto dell'ordinamento della gerarchia di infiniti si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}\log(-1/x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\log y = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{e^y} = 0.$$

Esercizio 4.
(a) Sia $x_0 \in (-\infty, 5)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{-x+5}-\sqrt{-x_0+5}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\sqrt{-x+5}-\sqrt{-x_0+5}\right)\left(\sqrt{-x+5}+\sqrt{-x_0+5}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{-x+5}+\sqrt{-x_0+5}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(-x+5)-(-x_0+5)}{(x-x_0)\left(\sqrt{-x+5}+\sqrt{-x_0+5}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{\sqrt{-x+5}+\sqrt{-x_0+5}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x_0+5}}.
\end{aligned}$$

Dunque f è derivabile in $(-\infty, 5)$ e, in tale intervallo, risulta $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+5}}$.
(b) Poichè $f'(x) = -\frac{1}{2}(-x+5)^{-\frac{1}{2}}$, si ha $f''(x) = -\frac{1}{2}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(-x+5)^{-\frac{3}{2}} < 0$ per qualsiasi $x \in (-\infty, 5)$. Dunque la funzione è (strettamente) concava.

Esercizio 5.
(a) Per l'applicabilità del teorema, occorre verificare che f sia continua in $[0,4]$ e derivabile in $(0,4)$.
Poichè le funzioni f_1, f_2 definite da $f_1(x) := \frac{1}{2}x^2 - x$ e $f_2(x) := -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 9$ sono funzioni polinomiali, si ha che f è continua negli intervalli $[0,3)$ e $(3,4]$ e derivabile negli intervalli $(0,3)$ e $(3,4)$.
Restano da verificare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 3$.
Per verificare la derivabilità (e dunque la continuità) in $x = 3$ sarà sufficiente verificare che le derivate destra e sinistra in $x = 3$ esistono finite e coincidono in tale punto. In effetti

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{2}x^2 - x - \left(\frac{1}{2}3^2-3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}{x-3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 2,$$

e

$$\lim_{x\to 3^+} \tfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \tfrac{-\frac{1}{2}x^2+5x-9-\left(\frac{1}{2}3^2-3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \tfrac{-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{21}{2}}{x-3} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to 3} \tfrac{x^2-10x+21}{x-3} = -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to 3} \tfrac{(x-3)(x-7)}{x-3} = 2.$$

Se ne deduce che il teorema di Lagrange è applicabile.
La continuità in $x = 3$ poteva essere verificata direttamente. Infatti

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right) = \tfrac{3}{2},$$

$$f(3) = \tfrac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + 5x - 9\right) = \tfrac{3}{2},$$

e dunque

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se} \quad x \in [0,3), \\ 2, & \text{se} \quad x = 3, \\ -x+5, & \text{se} \quad x \in (3,4]. \end{cases}$$

Vogliamo trovare le soluzioni $x \in (0,4)$ all'equazione

$$f'(x) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\cdot 16 + 5\cdot 4 - 9\right) - 0}{4} = \frac{3}{4}$$

La precedente equazione si riscrive spezzandosi in due equazioni in due diversi intervalli:

$$\begin{cases} x-1=\frac{3}{4}, & \text{se } x\in(0,3), \\ -x+5=\frac{3}{4}, & \text{se } x\in(3,4)\,, \end{cases}$$

da cui si ricava come unica soluzione ammissibile $\frac{7}{4}$. Tale punto soddisfa la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6

1. Dominio.
dom $f=(-1,+\infty)\,.$

2. Segno di f.
Intanto notiamo che $f(0)=0$ e che il segno di $(x+1)^2$ è sempre positivo. D'altra parte $\log(x+1)\geq 0$ se e solo se $x+1\geq 1$ ovvero se e solo se $x\geq 0$. Dunque il segno di f è il seguente

	$x\in(-1,0)$	$x=0$	$x\in(0,+\infty)$
Segno di f	$+$	0	$-$

3. Comportamento a -1^+. Si ha

$$\lim_{x\to-1^+}\left[-(x+1)^2\cdot\log(x+1)\right]=\text{“}0\cdot(-\infty)\text{”}.$$

Per risolvere la forma indeterminata possiamo usare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{-\log(x+1)}{(x+1)^{-2}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-\frac{1}{x+1}}{-2(x+1)^{-3}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-(x+1)^3}{-2(x+1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-(x+1)^2}{-2}=0$$

4. Comportamento a $+\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-(x+1)^2\cdot\log(x+1)\right]=-\infty.$$

5. Derivata prima.
Utilizzando le regole di derivazione si ottiene

$$f'(x)=-2(x+1)\log(x+1)-(x+1)^2\,\frac{1}{x+1}=-2(x+1)\log(x+1)-(x+1)=-(x+1)(2\log(x+1)+1)\,.$$

Poichè *dom* $f=(-1,+\infty)$, il segno di $f'(x)$ è l'opposto del segno di $1+2\log(x+1)$. Si ha

$$2\log(x+1)+1\geq 0\ \Leftrightarrow\ \log(x+1)\geq-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x+1\geq e^{-\frac{1}{2}}\ \Leftrightarrow\ x\geq e^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{\sqrt{e}}-1=\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

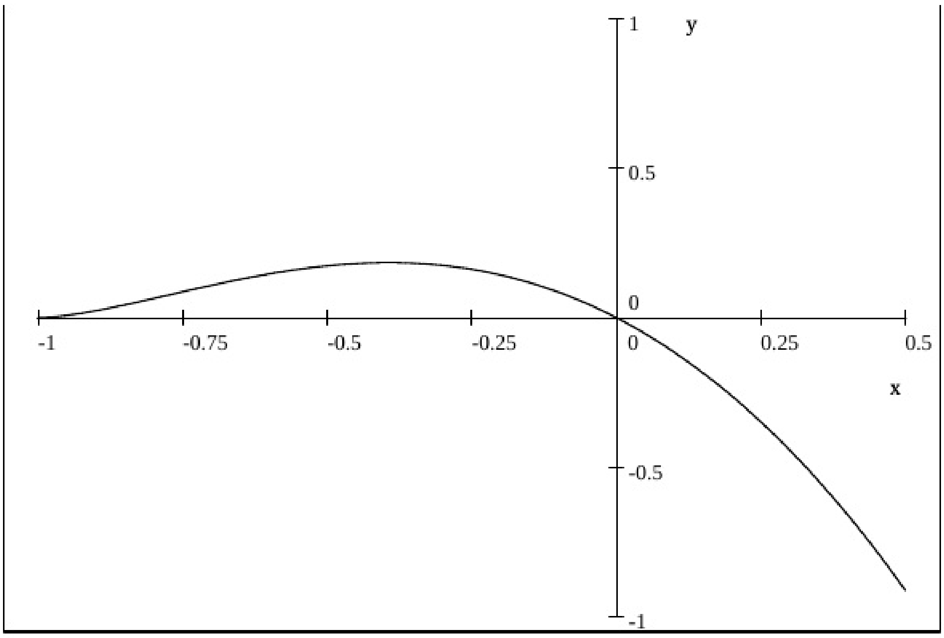
Si noti che $\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}\in(-1,0)$. Si ha il seguente schema:

	$x\in(-1,\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}})$	$x=\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$	$x\in(\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}},+\infty)$
Segno di f'	$+$	0	$-$
Monotonia di f	crescente	p.to max.	decrescente

Dunque f ha un punto di massimo (globale) in $x=\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ ed il valore della funzione in tale punto è

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)=-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1+1\right)^2\cdot\log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1+1\right)=-\frac{1}{e}\cdot\log\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right)=-\frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{1}{2}\log e\right)=\frac{1}{2e}.$$

$$f(x) = -(x+1)^2 \cdot \log(x+1)$$



Esame di Matematica per le Applicazioni Economiche
11 Gennaio 2016
— Fila C —

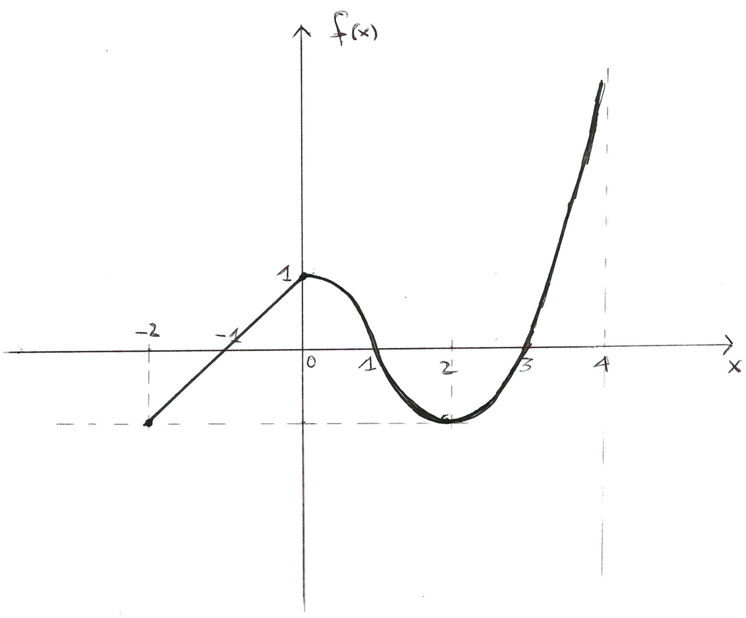
Durata della prova: 2 ore e mezzo.
NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione $D(f)$ della funzione.
(b) Determinare sup e inf della funzione su $D(f)$ e dire se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo.
(c) Stabilire se la funzione è pari, dispari oppure né pari né dispari.
(d) Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[0, +\infty)$). Stabilire se g è iniettiva.

Esercizio 2 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [-2, 4) \to \mathbb{R}$ il cui grafico è rappresentato in figura (la retta $x = 4$ è un asintoto verticale per il grafico della funzione).



(a) Determinare gli intervalli di monotonia della funzione, specificandone la tipologia (crescente, strettamente crescente, ecc.).
(b) Determinare i punti di minimo e di massimo locale (se ve ne sono) della funzione.
(c) Sia $g : [-2, 0] \cup [1, 2) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-2, 0] \cup [1, 2)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[-2, 0] \cup [1, 2)$). Si determini l'immagine di g (cioè l'insieme $g([-2, 0] \cup [1, 2))$).

Esercizio 3 (6 punti)
(a) Utilizzando la definizione di limite si verifichi che $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right) = -1$.
(b) Si calcoli (o si dimostri la non esistenza) di <u>uno ed uno solo</u> (a scelta) dei seguenti limiti:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\log(1+x^2))}{e^{x^2}-1}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} \log(1/x^2).$$

Esercizio 4 (6 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = -\sqrt{x+5}.$$
(a) Utilizzando la definizione di derivata, si verifichi che f è derivabile in ogni punto $x_0 \in (-5, +\infty)$ e si calcoli la sua derivata.
(b) Si dica se la funzione è convessa in $(-5, +\infty)$.

Esercizio 5 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & \text{se} \quad x \in [0, 3], \\ -2x^2 + 20x - 36, & \text{se} \quad x \in (3, 6]. \end{cases}$$
(a) Si dica se il teorema di Lagrange è applicabile a tale funzione nell'intervallo $[0, 6]$.
(b) In caso affermativo, si determinino i punti (uno o più d'uno) interni all'intervallo $(0, 6)$ che verificano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6 (8 punti)
Si disegni il grafico della funzione (si trascuri lo studio della derivata seconda e della concavità/convessità)
$$f(x) = (x+2)^2 \cdot \log(x+2).$$

SOLUZIONE

Esercizio 1.
(a) L'espressione $-\frac{x^2}{1+x^2}$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $D(f) = \mathbb{R}$.
(b) Si noti che $0 \geq -\frac{x^2}{1+x^2} > -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Se ne deduce che $\sup_{\mathbb{R}} f = 0$, $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$ e che il primo è anche massimo di f su $\mathbb{R}$, mentre il secondo non è un minimo.
(c) Si ha $f(-x) = -\frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f è pari.
(d) Occorre stabilire se, per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $-\frac{x^2}{1+x^2} = y$ ha al più una soluzione in $[0, +\infty)$. Si ha

$$-\frac{x^2}{1+x^2} = y \ \Leftrightarrow\ x^2 + y + yx^2 = 0 \Leftrightarrow\ (1+y)\,x^2 = -y \Leftrightarrow\ x^2 = -\frac{y}{1+y}.$$

Se ne deduce che l'equazione data

- non ha nessuna soluzione nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \notin (-1, 0]$;
- ha l'unica soluzione $x = \sqrt{-\frac{y}{1+y}}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \in (-1, 0]$.

Si conclude che g è iniettiva.

Esercizio 2.
(a) f è strettamente crescente nell'intervallo $[-2, 0]$ e nell'intervallo $[2, 4)$; strettamente decrescente nell'intervallo $[0, 2]$.
(b) Punti di massimo locale: $x = 0$. Punti di minimo locale: $x = -2$ e $x = 2$.
(c) Il grafico della funzione g interseca, almeno in un punto, tutte e sole le rette orizzontali della forma $y = k$ con $k \in [-1, 1]$. Se ne deduce che $\mathrm{Im}(g) = [-1, 1]$.

Esercizio 3.
(a) Occorre verificare che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}:\ x > M\ \Rightarrow\ \left|-\frac{x^2}{1+x^2} + 1\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Cioè, bisogna verificare che l'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|-\frac{x^2}{1+x^2} + 1\right| < \varepsilon$ contiene un intervallo della forma $[M, +\infty)$, con M (eventualmente) dipendente da ε. Si ha

$$\left|-\frac{x^2}{1+x^2} + 1\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ -\varepsilon < \frac{x^2}{1+x^2} - 1 < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ -\varepsilon < -\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon.$$

Poiché $1 + x^2 > 0$ la precedente coppia di disuguaglianze si può riscrivere come

$$\varepsilon(1+x^2) + 1 > 0\ \wedge\ -\varepsilon(1+x^2) + 1 < 0.$$

La prima disuguaglianza è sempre verificata; la seconda si riscrive

$$-\varepsilon - \varepsilon x^2 + 1 < 0 \ \Leftrightarrow\ \varepsilon x^2 -\ 1 + \varepsilon > 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0,$$

per cui è verificata ([1]) per $x > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Dunque (1) resta verificata con $M = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$ ([2])
(b.i) Dividendo e moltiplicando l'espressione di cui si vuole calcolare il limite per $x^2 \log(1+x^2)$ si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(\log(1+x^2))}{e^{x^2}-1} = \left(\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(\log(1+x^2))}{\log(1+x^2))}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{(\log(1+x^2))}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{e^{x^2}-1}\right),$$

assumendo che il membro destro sia ben definito. Effettuando le sostituzioni iniettive (su $[0, +\infty)$) $y = \log(1+x^2)$ nel primo limite a membro destro e $z = x^2$ nel secondo e nel terzo, la precedente espressione si riscrive come

$$\left(\lim_{y\to0^+} \frac{\sin y}{y}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{(\log(1+z))}{z}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{z}{e^z-1}\right),$$

[1] Assumendo $\varepsilon \in (0, 1]$, altrimenti vale sempre.
[2] Se $\varepsilon \in (0, 1]$, altrimenti con $M = 0$. Ma si noti che la definizione di limite è significativa per ε "piccolo".

da cui si deduce che il valore del limite da cui si era partiti è 1.
(b.ii) Con la sostituzione iniettiva (su $(0,+\infty)$) $y = 1/x^2$ e tenendo conto dell'ordinamento della gerarchia di infiniti si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2}\log(1/x^2) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\log y = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{e^y} = 0.$$

Esercizio 4.
(a) Sia $x_0 \in (-5,+\infty)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{-\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(-\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{-(x+5)+(x_0+5)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{-1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0+5}}.
\end{aligned}$$

Dunque f è derivabile in $(-5,+\infty)$ e, in tale intervallo, risulta $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$.
(b) Poichè $f'(x) = -\frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}$, si ha $f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+5)^{-\frac{3}{2}} > 0$ per qualsiasi $x \in (-5,+\infty)$. Dunque la funzione è (strettamente) convessa.

Esercizio 5.
(a) Per l'applicabilità del teorema, occorre verificare che f sia continua in $[0,6]$ e derivabile in $(0,6)$.
Poichè le funzioni f_1, f_2 definite da $f_1(x) := 2x^2-4x$ e $f_2(x) := -2x^2+20x-36$ sono funzioni polinomiali, si ha che f è continua negli intervalli $[0,3)$ e $(3,6]$ e derivabile negli intervalli $(0,3)$ e $(3,6)$.
Restano da verificare la continuità e la derivabilità nel punto $x=3$.
Per verificare la derivabilità (e dunque la continuità) in $x=3$ sarà sufficiente verificare che le derivate destra e sinistra in $x=3$ esistono finite e coincidono in tale punto. In effetti

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-\left(2\cdot 3^2-4\cdot 3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+1)}{x-3} = 8,$$

e

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-2x^2+20x-36-\left(2\cdot 3^2-4\cdot 3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-2x^2+20x-42}{x-3} =$$

$$= -2\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+21}{x-3} = -2\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-7)}{x-3} = 8.$$

Se ne deduce che il teorema di Lagrange è applicabile.
La continuità in $x=3$ poteva essere verificata direttamente. Infatti

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(2x^2-4x) = 6,$$

$$f(3) = 6,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(-2x^2+20x-36\right) = 6,$$

e dunque

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 4x-4, & \text{se} \quad x \in [0,3), \\ 8, & \text{se} \quad x = 3, \\ -4x+20, & \text{se} \quad x \in (3,6]. \end{cases}$$

Vogliamo trovare le soluzioni $x \in (0,6)$ dell'equazione

$$f'(x) = \frac{f(6)-f(0)}{6-0} = \frac{(-72+120-36)-0}{6} = 2.$$

La precedente equazione si riscrive spezzandosi in due equazioni in due diversi intervalli:

$$\begin{cases} 4x - 4 = 2, & \text{se } x \in (0,3), \\ -4x + 20 = 2, & \text{se } x \in (3,6), \end{cases}$$

da cui si ricavano le due soluzioni $\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{2}$. Entrambi questi punti soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6

1. Dominio.

dom $f = (-2, +\infty)$.

2. Segno di f.

Intanto notiamo che $f(0) = 0$ e che il segno di $(x+2)^2$ è sempre positivo. D'altra parte $\log(x+2) \geq 0$ se e solo se $x + 2 \geq 1$ ovvero se e solo se $x \geq -1$. Dunque il segno di f è il seguente

	$x \in (-2,-1)$	$x = -1$	$x \in (-1, +\infty)$
Segno di f	$-$	0	$+$

3. Comportamento a -2^+. Si ha

$$\lim_{x \to -2^+} (x+2)^2 \cdot \log(x+2) = \text{“}0 \cdot (-\infty)\text{”}.$$

Per risolvere la forma indeterminata possiamo usare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{\log(x+2)}{(x+2)^{-2}} = \lim_{x \to -2^+} \frac{\frac{1}{x+2}}{-2(x+2)^{-3}} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x+2)^3}{-2(x+2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x+2)^2}{-2} = 0$$

4. Comportamento a $+\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to +\infty} (x+2)^2 \cdot \log(x+2) = +\infty.$$

5. Derivata prima.

Utilizzando le regole di derivazione si ottiene

$$f'(x) = 2(x+2)\log(x+2) + (x+2)^2 \frac{1}{x+2} = 2(x+2)\log(x+2) + (x+2) = (x+2)(2\log(x+2) + 1).$$

Poichè *dom* $f = (-2, +\infty)$, il segno di $f'(x)$ è il segno di $1 + 2\log(x+2)$. Si ha

$$2\log(x+2) + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \log(x+2) \geq -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x + 2 \geq e^{-\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; x \geq e^{-\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 2 = \frac{1 - 2\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

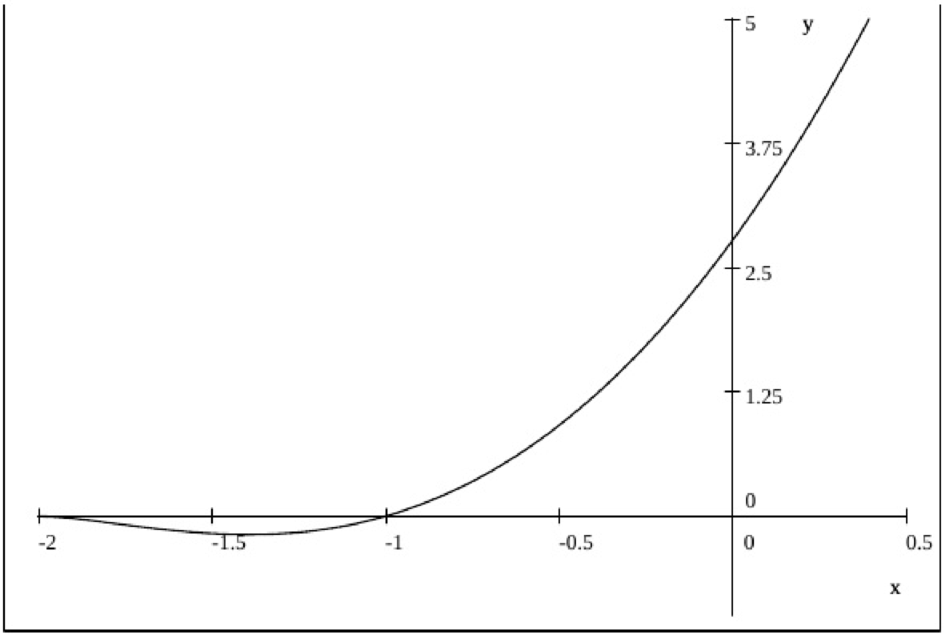
Si noti che $\frac{1-2\sqrt{e}}{\sqrt{e}} \in (-2,-1)$. Si ha il seguente schema:

	$x \in (-1, \frac{1-2\sqrt{e}}{\sqrt{e}})$	$x = \frac{1-2\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$	$x \in (\frac{1-2\sqrt{e}}{\sqrt{e}}, +\infty)$
Segno di f'	$-$	0	$+$
Monotonia di f	decrescente	p.to min.	crescente

Dunque f ha un punto di minimo (globale) in $x = \frac{1-2\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ ed il valore della funzione in tale punto è

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 2 + 2\right)^2 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 + 1\right) = \frac{1}{e} \cdot \log\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\log e\right) = -\frac{1}{2e}.$$

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot \log(x+2)$$



Matematica per le Applicazioni Economiche I, 15 febbraio 2016
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto**

$$\boxed{1 : \square,\ 2 : \square,\ 3 : \square,\ 4 : \square,\ 5 : \square}$$

1. **(7 punti)**

   (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Fermat.

   (b) Si determinino tutti i punti di massimo e di minimo sia locale che globale per $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

2. **(11 punti)**

   (a) Si indichi una condizione su f che implica la sua iniettività, e si dica poi: quali proprietà legano f alla sua funzione inversa f^{-1}, come si può ricavare il grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f, l'espressione della derivata prima di f^{-1} (supponendo che $f'(x) \neq 0$ per ogni x).

   (b) Per la funzione $f(x) = \ln(\frac{x}{3-2x})$, si determinino l'insieme di definizione e l'immagine. Si stabilisca se f è iniettiva, e in caso affermativo si fornisca l'espressione della sua funzione inversa.

3. **(11 punti)**

   Si studi la funzione
   $$f(x) = \frac{x^3 + |2x - 8|}{x},$$
   precisando e giustificando: insieme di definizione, limiti ed eventuali asintoti orizzontali/verticali, continuità ed eventuali punti di discontinuità, derivabilità ed eventuali punti di non derivabilità (si giustifichi bene), monotonia. Si tralascino lo studio del segno di f e lo studio della derivata seconda di f. Si disegni il grafico di f.

4. **(5 punti)** Data la funzione $f(x) = \sin(2x) + x\ln(1 + 4x)$,

   (a) si ricavi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, con $x_0 = 0$;

   (b) si calcoli $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{e^x-1}$.

5. **(6 punti)**

   (a) Si enunci il teorema dei valori intermedi.

   (b) È possibile utilizzare tale teorema per dimostrare che per l'equazione $33x - 2^x = 118$ esiste almeno una soluzione nell'intervallo $(3, 5)$? In caso di risposta affermativa, è possibile dimostrare che tale soluzione è unica?

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 15 febbraio 2016
Soluzioni al testo d'esame A

1. (a) Si veda il teorema 8.4 nel libro di testo.

   (b) Poiche' $f'(x) = 3x^2 - 3$, i punti critici di f sono -1 e 1, entrambi appartenenti a $(-4, 4)$. Quindi calcoliamo $f(-4) = -53$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -3$, $f(4) = 51$ e concludiamo che $x = -4$ e' punto di min globale per f, $x = 4$ e' punto di max globale per f. Poiche' $f''(x) = 6x$, si ha che $f''(-1) = -6 < 0$ e $f''(1) = 6 > 0$, dunque $x = -1$ e' punto di max locale per f, $x = 1$ e' punto di min locale per f.

2. (a) Una condizione sufficiente affinche' f sia iniettiva e' che f sia strettamente monotona. Se $f : A \to \mathbb{R}$ e' iniettiva (cioe' invertibile), allora per ogni $x \in A$ vale $f^{-1}(f(x)) = x$, e per ogni $y \in \text{Im}(f)$ vale $f(f^{-1}(y)) = y$. Il grafico di f^{-1} si puo' ottenere a partire dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero scambiando l'ordine tra le coordinate di ogni punto sul grafico di f. Per ogni y_0 interno per $\text{Im}(f)$ si ha che $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, dove $x_0 \in A$ e' tale che $f(x_0) = y_0$.

   (b) L'insieme di definizione per f e' l'insieme delle x tali che $\frac{x}{3-2x} > 0$, ovvero l'intervallo $(0, \frac{3}{2})$. Poiche' $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty$, e poiche' f e' continua (f e' quoziente e composizione di funzioni continue), una versione del teorema dei valori intermedi (teorema 7.7 nel libro di testo) implica $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. In alternativa, e' possibile verificare che $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ a partire dall'equazione $f(x) = y$ e notando che per ogni $y \in \mathbb{R}$ tale equazione ha una soluzione (nel dominio di f), che e' $x = \frac{3e^y}{1+2e^y}$. Poiche' per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha una unica soluzione, allora si deduce che f e' iniettiva e dunque invertibile. Pertanto per ogni $y \in \text{Im}(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ e' uguale all'unica soluzione trovata sopra, cioe' $f^{-1}(y) = \frac{3e^y}{1+2e^y}$.

3. L'insieme di definizione di f e' $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$, dunque non esistono asintoti orizzontali per $x \to -\infty$, ne' per $x \to +\infty$. Poiche' $\lim_{x\to 0} \big(x^3 + |2x - 8|\big) = 8$, si deduce che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, e dunque la retta verticale $x = 0$ e' asintoto verticale per il grafico di f. Si noti anche che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, dunque f non ha punti di max/min globale.

   Poiche'f e' composizione, somma, quoziente di funzioni continue (si ricordi che la funzione valore assoluto e' continua), si conclude che f e' continua in ogni punto del proprio insieme di definizione.

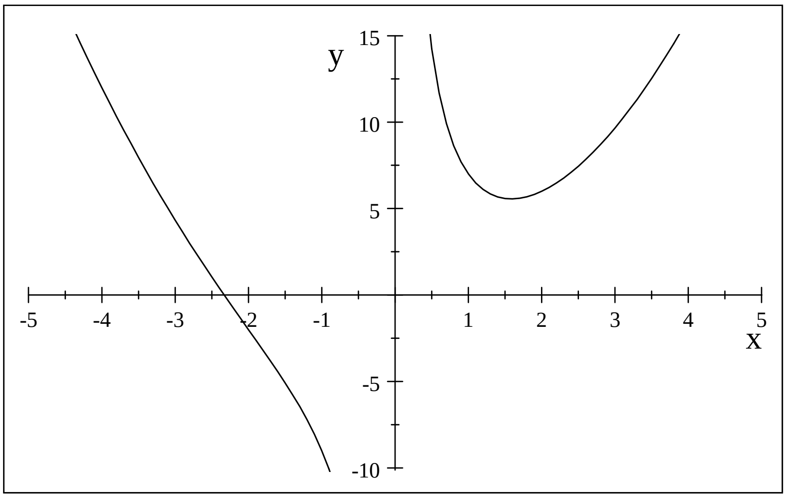
   Poiche' $2x - 8 = 0$ se e solo se $x = 4$, si deduce che per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$, f e' somma e quoziente di funzioni derivabili, e quindi e' derivabile. In particolare,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x+8}{x} & \text{per } x \in (-\infty,0) \cup (0,4 \\ \frac{x^3+2x-8}{x} & \text{per } x \in [4,+\infty) \end{cases} \qquad \text{e dunque} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-8}{x^2} & \text{per } x \in (-\infty,0) \cup (0,4) \\ \frac{2x^3+8}{x^2} & \text{per } x \in (4,+\infty) \end{cases}$$

   Riguardo alla derivabilita' in $x = 4$ (si ricordi che f e' continua in $x = 4$), si ha che $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \frac{15}{2}$ e $\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \frac{17}{2}$. Dunque la derivata sinistra e' diversa dalla derivata destra nel punto 4, e pertanto f non e' derivabile in $x = 4$.

   Risulta che $\frac{2x^3-8}{x^2} < 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[3]{4})$, $\frac{2x^3-8}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (\sqrt[3]{4}, 4)$, e $\frac{2x^3+8}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (4, +\infty)$. Dunque f e' monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, monotona strettamente decrescente in $(0, \sqrt[3]{4})$, monotona strettamente crescente in $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$, quindi $x = \sqrt[3]{4}$ e' punto di min locale per f.

Il grafico di f e'



4. (a) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$ e' $y = f(0) + f'(0)x$. Risulta che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 2\cos(2x) + \ln(1+4x) + \frac{4x}{1+4x}$, $f'(0) = 2$, quindi $y = 2x$ e' l'equazione cercata.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x\ln(1+4x)}{e^x-1} = \frac{0}{0}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x\ln(1+4x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{x\ln(1+4x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{2+0}{1} = 2$.

5. (a) Si veda il teorema 7.6 nel libro di testo

   (b) Si consideri la funzione $f(x) = 33x - 2^x$, $f : [3,5] \to \mathbb{R}$. Tale funzione e' continua e $f(3) = 91$, $f(5) = 133$, $91 < 118 < 133$, quindi il teorema dei valori intermedi implica l'esistenza di un $x \in (3,5)$ tale che $f(x) = 118$, ovvero esiste una soluzione all'equazione $33x - 2^x = 118$. Poiche' $f'(x) = 33 - 2^x \ln 2$ e $2^x < 2^5 = 32$, $\ln 2 < \ln e = 1$, si deduce che $f'(x) > 0$ in $(3,5)$. Questo implica che f sia monotona strettamente crescente in $[3,5]$, e quindi esiste un'unica soluzione all'equazione $f(x) = 118$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 15 febbraio 2016
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto**

$$\boxed{1:\square,\ 2:\square,\ 3:\square,\ 4:\square,\ 5:\square}$$

1. **(7 punti)**

   (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Fermat.

   (b) Si determinino tutti i punti di massimo e di minimo sia locale che globale per $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x + 5$.

2. **(11 punti)**

   (a) Si indichi una condizione su f che implica la sua iniettività, e si dica poi: quali proprietà legano f alla sua funzione inversa f^{-1}, come si può ricavare il grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f, l'espressione della derivata prima di f^{-1} (supponendo che $f'(x) \neq 0$ per ogni x).

   (b) Per la funzione $f(x) = \ln(\frac{2x}{5-3x})$, si determinino l'insieme di definizione e l'immagine. Si stabilisca se f è iniettiva, e in caso affermativo si fornisca l'espressione della sua funzione inversa.

3. **(11 punti)**

   Si studi la funzione
   $$f(x) = \frac{x^3 + |2x-4|}{x},$$
   precisando e giustificando: insieme di definizione, limiti ed eventuali asintoti orizzontali/verticali, continuità ed eventuali punti di discontinuità, derivabilità ed eventuali punti di non derivabilità (si giustifichi bene), monotonia. Si tralascino lo studio del segno di f e lo studio della derivata seconda di f. Si disegni il grafico di f.

4. **(5 punti)** Data la funzione $f(x) = e^{3x} - 1 + x\tan(5x)$,

   (a) si ricavi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, con $x_0 = 0$;

   (b) si calcoli $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

5. **(6 punti)**

   (a) Si enunci il teorema dei valori intermedi.

   (b) È possibile utilizzare tale teorema per dimostrare che per l'equazione $8x - 3^x = 1$ esiste almeno una soluzione nell'intervallo $(2,4)$? In caso di risposta affermativa, è possibile dimostrare che tale soluzione è unica?

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 15 febbraio 2016
Soluzioni al testo d'esame B

1. (a) Si veda il teorema 8.4 nel libro di testo.

   (b) Poiche' $f'(x) = 3 - 3x^2$, i punti critici di f sono -1 e 1, entrambi appartenenti a $(-3, 3)$. Quindi calcoliamo $f(-3) = 23$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 7$, $f(3) = -13$ e concludiamo che $x = -3$ e' punto di max globale per f, $x = 3$ e' punto di min globale per f. Poiche' $f''(x) = -6x$, si ha che $f''(-1) = 6 > 0$ e $f''(1) = -6 < 0$, dunque $x = -1$ e' punto di min locale per f, $x = 1$ e' punto di max locale per f.

2. (a) Una condizione sufficiente affinche' f sia iniettiva e' che f sia strettamente monotona. Se $f : A \to \mathbb{R}$ e' iniettiva (cioe' invertibile), allora per ogni $x \in A$ vale $f^{-1}(f(x)) = x$, e per ogni $y \in \mathrm{Im}(f)$ vale $f(f^{-1}(y)) = y$. Il grafico di f^{-1} si puo' ottenere a partire dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero scambiando l'ordine tra le coordinate di ogni punto sul grafico di f. Per ogni y_0 interno per $\mathrm{Im}(f)$ si ha che $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, dove $x_0 \in A$ e' tale che $f(x_0) = y_0$.

   (b) L'insieme di definizione per f e' l'insieme delle x tali che $\frac{2x}{5-3x} > 0$, ovvero l'intervallo $(0, \frac{5}{3})$. Poiche' $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to \frac{5}{3}^-} f(x) = +\infty$, e poiche' f e' continua (f e' quoziente e composizione di funzioni continue), una versione del teorema dei valori intermedi (teorema 7.7 nel libro di testo) implica $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. In alternativa, e' possibile verificare che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ a partire dall'equazione $f(x) = y$ e notando che per ogni $y \in \mathbb{R}$ tale equazione ha una soluzione (nel dominio di f), che e' $x = \frac{5e^y}{3e^y+2}$. Poiche' per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha una unica soluzione, allora si deduce che f e' iniettiva e dunque invertibile. Pertanto per ogni $y \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ e' uguale all'unica soluzione trovata sopra, cioe' $f^{-1}(y) = \frac{5e^y}{3e^y+2}$.

3. L'insieme di definizione di f e' $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$, dunque non esistono asintoti orizzontali per $x \to -\infty$, ne' per $x \to +\infty$. Poiche' $\lim_{x\to 0} \big(x^3 + |2x - 4|\big) = 4$, si deduce che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, e dunque la retta verticale $x = 0$ e' asintoto verticale per il grafico di f. Si noti anche che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, dunque f non ha punti di max/min globale.

   Poiche'f e' composizione, somma, quoziente di funzioni continue (si ricordi che la funzione valore assoluto e' continua), si conclude che f e' continua in ogni punto del proprio insieme di definizione.

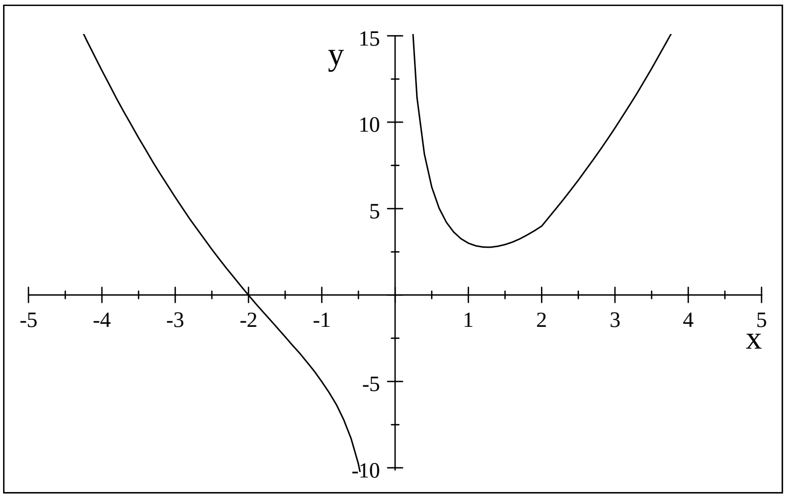
   Poiche' $2x - 4 = 0$ se e solo se $x = 2$, si deduce che per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$, f e' somma e quoziente di funzioni derivabili, e quindi e' derivabile. In particolare,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x+4}{x} & \text{per } x \in (-\infty,0) \cup (0,2 \\ \frac{x^3+2x-4}{x} & \text{per } x \in [2,+\infty) \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-4}{x^2} & \text{per } x \in (-\infty,0) \cup (0,2) \\ \frac{2x^3+4}{x^2} & \text{per } x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

   Riguardo alla derivabilita' in $x = 2$ (si ricordi che f e' continua in $x = 2$), si ha che $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 3$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 5$. Dunque la derivata sinistra e' diversa dalla derivata destra nel punto 2, e pertanto f non e' derivabile in $x = 2$.

   Risulta che $\frac{2x^3-4}{x^2} < 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[3]{2})$, $\frac{2x^3-4}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (\sqrt[3]{2}, 2)$ e $\frac{2x^3+4}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (2, +\infty)$. Dunque f e' monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, monotona strettamente decrescente in $(0, \sqrt[3]{2})$, monotona strettamente crescente in $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ e $x = \sqrt[3]{2}$ e' punto di min locale per f.

Il grafico di f e'



4. (a) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$ e' $y = f(0) + f'(0)x$. Risulta che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 3e^{3x} + \tan(5x) + x(1 + (\tan(5x))^2)5$, $f'(0) = 3$, quindi $y = 3x$ e' l'equazione cercata.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1+x\tan(5x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1+x\tan(5x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{3x}-1}{x}+\frac{x\tan(5x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{3+0}{1} = 3$.

5. (a) Si veda il teorema 7.6 nel libro di testo

   (b) Si consideri la funzione $f(x) = 8x - 3^x$, $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$. Tale funzione e' continua e $f(2) = 7$, $f(4) = -49$, $7 > 1 > -49$, quindi il teorema dei valori intermedi implica l'esistenza di un $x \in (2, 4)$ tale che $f(x) = 1$, ovvero esiste una soluzione all'equazione $8x - 3^x = 1$. Poiche' $f'(x) = 8 - 3^x \ln 3$ e $3^x > 3^2 = 9$, $\ln 3 > \ln e = 1$, si deduce che $f'(x) < 0$ in $(2, 4)$. Questo implica che f sia monotona strettamente decrescente in $[2, 4]$, e quindi esiste un'unica soluzione all'equazione $f(x) = 1$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 15 febbraio 2016
Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto**

$$\boxed{1:\square,\ 2:\square,\ 3:\square,\ 4:\square,\ 5:\square}$$

1. **(7 punti)**

   (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Fermat.

   (b) Si determinino tutti i punti di massimo e di minimo sia locale che globale per $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

2. **(11 punti)**

   (a) Si indichi una condizione su f che implica la sua iniettività, e si dica poi: quali proprieta' legano f alla sua funzione inversa f^{-1}, come si può ricavare il grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f, l'espressione della derivata prima di f^{-1} (supponendo che $f'(x) \neq 0$ per ogni x).

   (b) Per la funzione $f(x) = \ln(\frac{3x}{5-4x})$ si determinino l'insieme di definizione e l'immagine. Si stabilisca se f è iniettiva, e in caso affermativo si fornisca l'espressione della sua funzione inversa.

3. **(11 punti)**

   Si studi la funzione
   $$f(x) = \frac{x^3 + |2x - 6|}{x},$$
   precisando e giustificando: insieme di definizione, limiti ed eventuali asintoti orizzontali/verticali, continuità ed eventuali punti di discontinuità, derivabilità ed eventuali punti di non derivabilità (si giustifichi bene), monotonia. Si tralascino lo studio del segno di f e lo studio della derivata seconda di f. Si disegni il grafico di f.

4. **(5 punti)** Data la funzione $f(x) = \tan(4x) + x \sin(7x)$,

   (a) si ricavi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, con $x_0 = 0$;

   (b) si calcoli $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln(1+x)}$.

5. **(6 punti)**

   (a) Si enunci il teorema dei valori intermedi.

   (b) È possibile utilizzare tale teorema per dimostrare che per l'equazione $34x - 4^x = 17$ esiste almeno una soluzione nell'intervallo $(0, 2)$? In caso di risposta affermativa, è possibile dimostrare che tale soluzione è unica?

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 15 febbraio 2016
Soluzioni al testo d'esame C

1. (a) Si veda il teorema 8.4 nel libro di testo.

   (b) Poiche' $f'(x) = 6x^2 - 6$, i punti critici di f sono -1 e 1, entrambi appartenenti a $(-3, 3)$. Quindi calcoliamo $f(-3) = -35$, $f(-1) = 5$, $f(1) = -3$, $f(3) = 37$ e concludiamo che $x = -3$ e' punto di min globale per f, $x = 3$ e' punto di max globale per f. Poiche' $f''(x) = 12x$, si ha che $f''(-1) = -12 < 0$ e $f''(1) = 12 > 0$, dunque $x = -1$ e' punto di max locale per f, $x = 1$ e' punto di min locale per f.

2. (a) Una condizione sufficiente affinche' f sia iniettiva e' che f sia strettamente monotona. Se $f : A \to \mathbb{R}$ e' iniettiva (cioe' invertibile), allora per ogni $x \in A$ vale $f^{-1}(f(x)) = x$, e per ogni $y \in \mathrm{Im}(f)$ vale $f(f^{-1}(y)) = y$. Il grafico di f^{-1} si puo' ottenere a partire dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero scambiando l'ordine tra le coordinate di ogni punto sul grafico di f. Per ogni y_0 interno per $\mathrm{Im}(f)$ si ha che $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, dove $x_0 \in A$ e' tale che $f(x_0) = y_0$.

   (b) L'insieme di definizione per f e' l'insieme delle x tali che $\frac{3x}{5-4x} > 0$, ovvero l'intervallo $(0, \frac{5}{4})$. Poiche' $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to \frac{5}{4}^-} f(x) = +\infty$, e poiche' f e' continua (f e' quoziente e composizione di funzioni continue), una versione del teorema dei valori intermedi (teorema 7.7 nel libro di testo) implica $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. In alternativa, e' possibile verificare che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ a partire dall'equazione $f(x) = y$ e notando che per ogni $y \in \mathbb{R}$ tale equazione ha una soluzione (nel dominio di f), che e' $x = \frac{5e^y}{4e^y+3}$. Poiche' per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha una unica soluzione, allora si deduce che f e' iniettiva e dunque invertibile. Pertanto per ogni $y \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ e' uguale all'unica soluzione trovata sopra, cioe' $f^{-1}(y) = \frac{5e^y}{4e^y+3}$.

3. L'insieme di definizione di f e' $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$, dunque non esistono asintoti orizzontali per $x \to -\infty$, ne' per $x \to +\infty$. Poiche' $\lim_{x\to 0} \big(x^3 + |2x - 6|\big) = 6$, si deduce che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, e dunque la retta verticale $x = 0$ e' asintoto verticale per il grafico di f. Si noti anche che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, dunque f non ha punti di max/min globale.

   Poiche'f e' somma e quoziente di funzioni continue (si ricordi che la funzione valore assoluto e' continua), si conclude che f e' continua in ogni punto del proprio insieme di definizione.

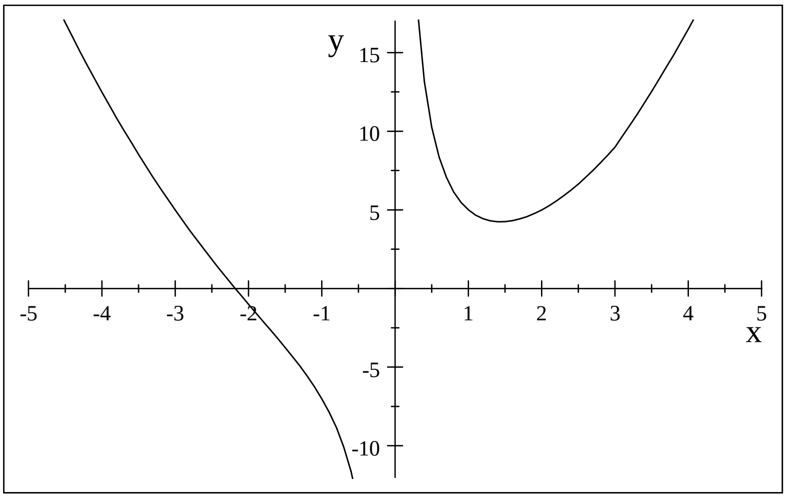
   Poiche' $2x - 6 = 0$ se e solo se $x = 3$, si deduce che per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$, f e' composizione, somma, quoziente di funzioni derivabili, e quindi e' derivabile. In particolare,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x+6}{x} & \text{per } x \in (-\infty,0)\cup(0,3) \\ \frac{x^3+2x-6}{x} & \text{per } x \in [3,+\infty) \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-6}{x^2} & \text{per } x \in (-\infty,0)\cup(0,3) \\ \frac{2x^3+6}{x^2} & \text{per } x \in (3,+\infty) \end{cases}$$

   Riguardo alla derivabilita' in $x = 3$ (si ricordi che f e' continua in $x = 3$), si ha che $\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \frac{16}{3}$ e $\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \frac{20}{3}$. Dunque la derivata sinistra e' diversa dalla derivata destra nel punto 3, e pertanto f non e' derivabile in $x = 3$.

   Risulta che $\frac{2x^3-6}{x^2} < 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[3]{3})$, $\frac{2x^3-6}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (\sqrt[3]{3}, 3)$ e $\frac{2x^3+6}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (3, +\infty)$. Dunque f e' monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, monotona strettamente decrescente in $(0, \sqrt[3]{3})$, monotona strettamente crescente in $(\sqrt[3]{3}, +\infty)$, quindi $x = \sqrt[3]{3}$ e' un punto di min locale per f.

Il grafico di f e'



4. (a) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$ e' $y = f(0) + f'(0)x$. Risulta che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 4(1+(\tan(4x))^2)+\sin(7x)+7x\cos(7x)$, $f'(0) = 4$, quindi $y = 4x$ e' l'equazione cercata.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(4x)+x\sin(7x)}{\ln(1+x)} = \frac{0}{0}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(4x)+x\sin(7x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan(4x)}{x}+\frac{x\sin(7x)}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4+0}{1} = 4.$

5. (a) Si veda il teorema 7.6 nel libro di testo

   (b) Si consideri la funzione $f(x) = 34x - 4^x$, $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$. Tale funzione e' continua e $f(0) = -1$, $f(2) = 52$, $-1 < 17 < 52$, quindi il teorema dei valori intermedi implica l'esistenza di un $x \in (0, 2)$ tale che $f(x) = 17$, ovvero esiste una soluzione all'equazione $34x - 4^x = 17$. Poiche' $f'(x) = 34 - 4^x \ln 4$ e $4^x < 4^2 = 16$, $\ln 4 < \ln e^2 = 2$, si deduce che $f'(x) > 0$ in $(0, 2)$. Questo implica che f sia monotona strettamente crescente in $[0, 2]$, e quindi esiste un'unica soluzione all'equazione $f(x) = 17$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 giugno 2016
Testo d'esame A

Durata della prova: 2 ore e mezza. **NOTA:** Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (5 punti) Sia a un numero reale e si consideri la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \sin x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ x - a & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

- (a) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f.
- (b) Si stabilisca per quali valori di a in $\mathbb{R}$ (se esistono) la funzione è continua nel punto di ascissa $x = \pi$.
- (c) Si tracci il grafico della funzione quando $a = 1$.

Esercizio 2 (6 punti)

- (a) Si enunci il teorema di Weierstrass.
- (b) Si dimostri, con un controesempio, che la tesi del teorema non è in generale vera se si elimina l'ipotesi di continuità.
- (c) Si fornisca l'espressione analitica (eventualmente definita a tratti) di una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ discontinua in $x = 0$ e per la quale esistono punto di massimo e punto di minimo.

Esercizio 3 (4 punti)

- (a) Si determini l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\log x) \sin \left(\frac{1}{\log x} \right).$$

- (b) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Esercizio 4 (12 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| \, e^{-\frac{1}{x}}.$$

- (a) Se ne disegni il grafico, studiandone insieme di definizione, segno, limiti (giustificati opportunamente), monotonia. Si tralasci lo studio della convessità/concavità.
- (b) Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f e si dica se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo globali per f.
- (c) Si dia la definizione di funzione iniettiva, ed esaminando il grafico di f ricavato al punto (a) si dica se f è iniettiva.

Esercizio 5 (5 punti)

- (a) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dia la definizione di

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

- (b) Si calcoli il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0^+} \left(x+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 6 (8 punti)

- (a) Si diano le definizioni di

  (a1) funzione crescente in $\mathbb{R}$

  (a2) funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

- (b) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con una dimostrazione o con un controesempio (la risposta "vero" o "falso" senza spiegazione dà zero punti anche se corretta).

  (b1) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.

  (b2) Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile in $\mathbb{R}$.

  (b3) Se la funzione f è crescente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\geq 0$.

  (b4) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$ ed esiste $x_0\in\mathbb{R}$ tale che $f'(x_0)=0$, allora x_0 è un punto di massimo locale per f o di minimo locale per f.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 giugno 2016
Testo d'esame B

Durata della prova: 2 ore e mezza. **NOTA:** Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (5 punti) Sia a un numero reale e si consideri la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ -\sin x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ x - a & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

- (a) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f.
- (b) Si stabilisca per quali valori di a in $\mathbb{R}$ (se esistono) la funzione è continua nel punto di ascissa $x = \pi$.
- (c) Si tracci il grafico della funzione quando $a = 1$.

Esercizio 2 (6 punti)

- (a) Si enunci il teorema di Weierstrass.
- (b) Si dimostri, con un controesempio, che la tesi del teorema non è in generale vera se si elimina l'ipotesi di continuità.
- (c) Si fornisca l'espressione analitica (eventualmente definita a tratti) di una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua per la quale esiste un punto di minimo ma non esiste un punto di massimo.

Esercizio 3 (4 punti)

- (a) Si determini l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\log(x-1)) \sin\left(\frac{1}{\log(x-1)}\right).$$

- (b) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Esercizio 4 (12 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x|\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

- (a) Se ne disegni il grafico, studiandone insieme di definizione, segno, limiti (giustificati opportunamente), monotonia. Si tralasci lo studio della convessità/concavità.
- (b) Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f e si dica se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo globali per f.
- (c) Si dia la definizione di funzione iniettiva, ed esaminando il grafico di f ricavato al punto (a) si dica se f è iniettiva.

Esercizio 5 (5 punti)

- (a) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dia la definizione di

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

- (b) Si calcoli il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0^+} \left(x+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 6 (8 punti)

- (a) Si diano le definizioni di

  (a1) funzione crescente in $\mathbb{R}$

  (a2) funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

- (b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con una dimostrazione o con un controesempio (la risposta "vero" o "falso" senza spiegazione dà zero punti anche se corretta).

  (b1) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.

  (b2) Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile in $\mathbb{R}$.

  (b3) Se la funzione f è crescente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

  (b4) Siano a e b numeri reali. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ è derivabile in $\mathbb{R}$, e se $b > 0$ allora f è crescente.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 giugno 2016
Testo d'esame C

Durata della prova: 2 ore e mezza. **NOTA:** Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (5 punti) Sia a un numero reale e si consideri la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ x + a & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

- (a) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f.
- (b) Si stabilisca per quali valori di a in $\mathbb{R}$ (se esistono) la funzione è continua nel punto di ascissa $x = \pi$.
- (c) Si tracci il grafico della funzione quando $a = 1$.

Esercizio 2 (6 punti)

- (a) Si enunci il teorema di Weierstrass.
- (b) Si dimostri, con un controesempio, che la tesi del teorema non è in generale vera se si elimina l'ipotesi di continuità.
- (c) Si fornisca l'espressione analitica (eventualmente definita a tratti) di una funzione $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ continua per la quale esistono punto di massimo e punto di minimo.

Esercizio 3 (4 punti)

- (a) Si determini l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\log(x+1)) \sin\left(\frac{1}{\log(x+1)}\right).$$

- (b) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Esercizio 4 (12 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| \, e^{-\frac{1}{x}}.$$

- (a) Se ne disegni il grafico, studiandone insieme di definizione, segno, limiti (giustificati opportunamente), monotonia. Si tralasci lo studio della convessità/concavità.
- (b) Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f e si dica se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo globali per f.
- (c) Si dia la definizione di funzione iniettiva, ed esaminando il grafico di f ricavato al punto (a) si dica se f è iniettiva.

Esercizio 5 (5 punti)

- (a) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dia la definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

- (b) Si calcoli il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 6 (8 punti)

- (a) Si diano le definizioni di

  (a1) funzione decrescente in $\mathbb{R}$

  (a2) funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

- (b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con una dimostrazione o con un controesempio (la risposta "vero" o "falso" senza spiegazione dà zero punti anche se coretta).

  (b1) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.

  (b2) Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile in $\mathbb{R}$.

  (b3) Se la funzione f è decrescente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$.

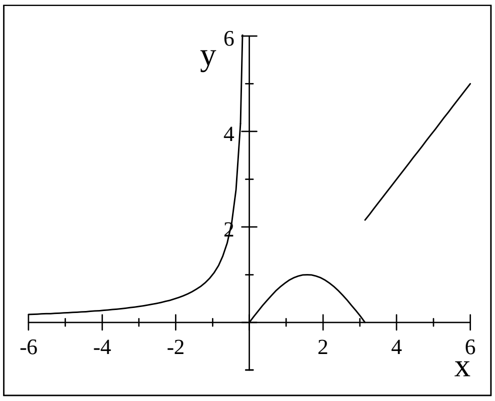
  (b4) Siano a e b numeri reali. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ è derivabile in $\mathbb{R}$, e se $b < 0$ allora f è decrescente.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 giugno 2016
Soluzioni al testo d'esame A

Esercizio 1.
(a) L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$.
(b) Si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \sin x = \sin\pi = 0, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (x-a) = \pi - a.$$

Inoltre $f(\pi) = 0$, dunque la condizione di continuità porta ad imporre $0 = \pi - a$. Se ne deduce che f è continua in $x = \pi$ se e solo se $a = \pi$.
(c) Il grafico di f quando $a = 1$ e'



Esercizio 2.
(a) Si veda il libro.
(b) La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

non ha punto di minimo.
(c) La funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x \in [-1,0) \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x+1 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

è discontinua in $x = 0$, ma ammette massimo (valore 2 ottenuto per $x = \pm 1$) e minimo (valore 0 ottenuto in $x = 0$).

Esercizio 3.
(a) Si deve imporre la condizione per l'esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$, e la condizione di non annullamento del denominatore, cioè $x \neq 1$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è l'insieme $(0,1) \cup (1,+\infty)$.
(b) Per ogni x nel dominio di f, vale $-1 \leq \sin(\frac{1}{\log x}) \leq 1$. Dunque $|\log x|$ e $-|\log x|$ soddisfano $-|\log x| \leq f(x) \leq |\log x|$ per ogni x nel dominio di f, e poiche' $\lim_{x\to 1} \log x = 0$ si deduce che $\lim_{x\to 1}(-|\log x|) = \lim_{x\to 1}(|\log x|) = 0$. Il teorema dei carabinieri implica quindi che $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Esercizio 4.
(a) <u>Dominio.</u> $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
<u>Segno di f.</u> Poichè $|x| > 0$ e $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha

$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Comportamento nei punti di discontinuità. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} \overset{y:=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \left|-\frac{1}{y}\right| e^{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = "0 \cdot e^{-\infty}" = 0.$$

Dunque l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per il grafico della funzione.

Comportamento a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = "\,(+\infty)\cdot e^{0}" = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = "\,(+\infty)\cdot e^{0}" = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali.

1. Calcolo di f' e studio del suo segno. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x>0 \\ -xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x<0 \end{cases}$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) & se \quad x>0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) & se \quad x<0 \end{cases}$$

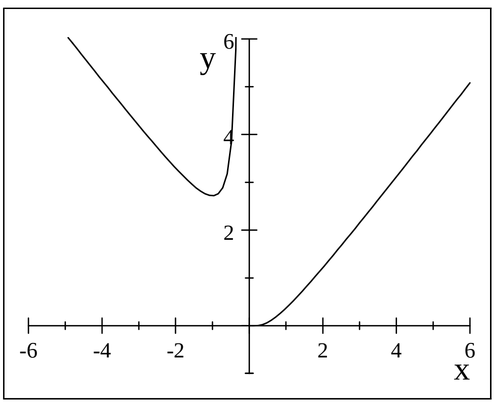
Pertanto

- $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$;
- Per $x < 0$ si nota che $-\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,0)$, dunque

$$f'(x) \begin{cases} >0 & \text{se } x\in(-1,0), \\ =0 & \text{se } x=-1, \\ <0 & \text{se } x<-1. \end{cases}$$

Monotonia di f. Dallo studio del segno di f' si deduce che

- f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty,-1]$;
- f ha un minimo locale in $x=-1$;
- f è strettamente crescente nell'intervallo $[-1,0)$ e nell'intervallo $(0,+\infty)$.



(b) Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si ha $\sup f = +\infty$ e tale valore non è un massimo. Poichè $f(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, risulta $\inf f = 0$ e tale valore non è un minimo.

$$e$$

(c) Definizione: Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$$\text{per ogni } x_1 \text{ e } x_2 \text{ in } A \text{ tali che } x_1 \neq x_2 \text{ vale } f(x_1) \neq f(x_2).$$

La funzione studiata sopra non è iniettiva: osservando il grafico si ricava che la retta orizzontale $y = 4$ (ad esempio) interseca il grafico di f in tre punti.

Esercizio 5.
(a) La definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

è la seguente:

$$\text{per ogni } M > 0, \text{ esiste } a \in \mathbb{R} \text{ tale che per ogni } x < a \text{ risulta } f(x) > M.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \text{"}\left(0^+\right)^{+\infty}\text{"} = 0.$$

Esercizio 6.
(a1) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice crescente se

$$\text{per ogni } x_1 \text{ e } x_2 \text{ in } A \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ vale } f(x_1) \leq f(x_2).$$

(a2) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(b1) Vero. Si veda il libro di testo.
(b2) Falso. Controesempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.
(b3) Falso. Non è detto che una funzione crescente sia derivabile dappertutto (quindi non ha senso l'espressione $f'(x) \geq 0$): per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0)$ non esiste.
(b4) Falso. Contresempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$, con derivata $f'(x) = 3x^2$; dunque $f'(0) = 0$ e tuttavia $x_0 = 0$ non è né un punto di massimo locale, né un punto di minimo locale, poichè la funzione è strettamente crescente. Si tratta di un punto stazionario di tipo flesso a tangente orizzontale.

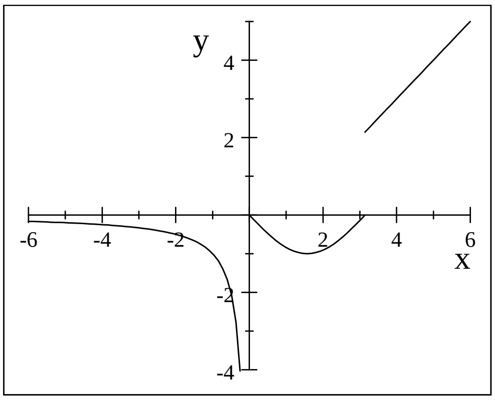
Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 giugno 2016
Soluzioni al testo d'esame B

Esercizio 1.
(a) L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$.
(b) Si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} (-\sin x) = -\sin\pi = 0, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (x - a) = \pi - a.$$

Inoltre $f(\pi) = 0$, dunque la condizione di continuità porta ad imporre $0 = \pi - a$. Se ne deduce che f è continua in $x = \pi$ se e solo se $a = \pi$.

(c) Il grafico di f quando $a = 1$ e'



Esercizio 2.
(a) Si veda il libro.
(b) La funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ x, & \text{se } x \in (0, 1], \end{cases}$$

non ha punto di minimo.
(c) La funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua in $[0, +\infty)$, ha punto di minimo ($x = 0$) ma non ha punto di massimo dato che $\sup f = +\infty$.

Esercizio 3.
(a) Si deve imporre la condizione per l'esistenza del logaritmo, cioè $x - 1 > 0$, e la condizione di non annullamento del denominatore, cioè $x - 1 \neq 1$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è l'insieme $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.
(b) Per ogni x nel dominio di f, vale $-1 \leq \sin(\frac{1}{\log(x-1)}) \leq 1$. Dunque $|\log(x - 1)|$ e $-|\log(x - 1)|$ soddisfano $-|\log(x - 1)| \leq f(x) \leq |\log(x - 1)|$ per ogni x nel dominio di f, e poiche' $\lim_{x\to 2} \log(x - 1) = 0$ si deduce che $\lim_{x\to 2} (-|\log(x - 1)|) = \lim_{x\to 2} (|\log(x - 1)|) = 0$. Il teorema dei carabinieri implica quindi che $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.

Esercizio 4.
(a) Dominio. $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Segno di f. Poichè $|x| > 0$ e $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha

$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Comportamento nei punti di discontinuità. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} \overset{y:=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \left|-\frac{1}{y}\right| e^y = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}0 \cdot e^{-\infty}\text{"} = 0.$$

Dunque l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per il grafico della funzione.
Comportamento a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}(+\infty) \cdot e^{0}\text{"} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}(+\infty) \cdot e^{0}\text{"} = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali.

1. Calcolo di f' e studio del suo segno. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \\ \\ -xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x > 0 \\ \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

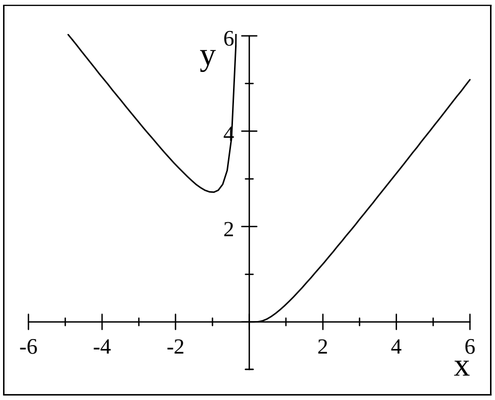
Pertanto

- $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$;
- Per $x < 0$ si nota che $-\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$, dunque

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1, 0), \\ = 0 & \text{se } x = -1, \\ < 0 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Monotonia di f. Dallo studio del segno di f' si deduce che

- f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1]$;
- f ha un minimo locale in $x = -1$;
- f è strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 0)$ e nell'intervallo $(0, +\infty)$.



(b) Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si ha $\sup f = +\infty$ e tale valore non è un massimo. Poichè $f(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f e $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$, risulta $\inf f = 0$ e tale valore non è un minimo.

(c) Definizione: Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$$\text{per ogni } x_1 \text{ e } x_2 \text{ in } A \text{ tali che } x_1 \neq x_2 \text{ vale } f(x_1) \neq f(x_2).$$

La funzione studiata sopra non è iniettiva: osservando il grafico si ricava che la retta orizzontale $y = 4$ (ad esempio) interseca il grafico di f in tre punti.

Esercizio 5.

(a) La definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

è la seguente:

$$\text{per ogni } M > 0, \text{ esiste } a \in \mathbb{R} \text{ tale che per ogni } x < a \text{ risulta } f(x) < -M.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \text{"} \left(0^+\right)^{+\infty} \text{"} = 0.$$

Esercizio 6.
(a1) Una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice crescente se

$$\text{per ogni } x_1 \text{ e } x_2 \text{ in } A \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ vale } f(x_1) \leq f(x_2).$$

(a2) Una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice derivabile in $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0\in\mathbb{R}$ il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(b1) Vero. Si veda il libro di testo.
(b2) Falso. Controesempio: la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ è continua ma non derivabile in $x=0$.
(b3) Falso. Non è detto che una funzione crescente sia derivabile dappertutto (quindi non ha senso l'espressione $f'(x)\geq 0$): per esempio la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x\leq 0, \\ 0, & \text{se } x>0, \end{cases}$$

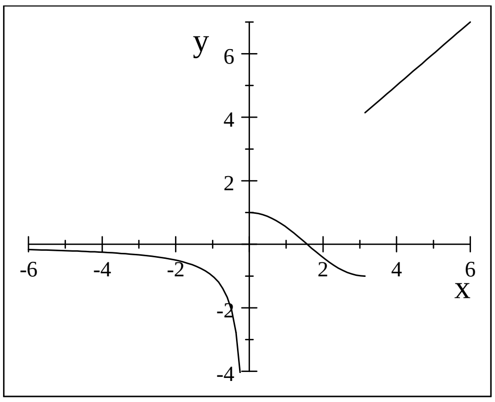
è crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0)$ non esiste.
(b4) Falso. La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ in effetti è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $f'(x)=a$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. La funzione è crescente se e solo se $a\geq 0$. Quindi la seconda parte della affermazione è falsa. Controesempio: $f(x)=-x+1$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 giugno 2016
Soluzioni al testo d'esame C

Esercizio 1.
(a) L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ per ogni valore del parametro $a\in\mathbb{R}$.
(b) Si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \cos x = \cos\pi = -1, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (x+a) = \pi + a.$$

Inoltre $f(\pi)=-1$, dunque la condizione di continuità porta ad imporre $-1=\pi+a$. Se ne deduce che f è continua in $x=\pi$ se e solo se $a=-(\pi+1)$.
(c) Il grafico di f quando $a=1$ e'



Esercizio 2.
(a) Si veda il libro.

(b) La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ x, & \text{se } x \in (0,1], \end{cases}$$

non ha punto di minimo.

(c) La funzione $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$) è continua, e ogni $x \in (-\infty, 0)$ e' sia punto di massimo che punto di minimo per f.

Esercizio 3.

(a) Si deve imporre la condizione per l'esistenza del logaritmo, cioè $x+1 > 0$, ovvero $x > -1$ e la condizione di non annullamento del denominatore, cioè $x + 1 \neq 1$, ovvero $x \neq 0$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è l'insieme $(-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

(b) Per ogni x nel dominio di f, vale $-1 \leq \sin(\frac{1}{\log(x+1)}) \leq 1$. Dunque $|\log(x+1)|$ e $-|\log(x+1)|$ soddisfano $-|\log(x+1)| \leq f(x) \leq |\log(x+1)|$ per ogni x nel dominio di f, e poiche' $\lim_{x\to 0} \log(x+1) = 0$ si deduce che $\lim_{x\to 0} (-|\log(x+1)|) = \lim_{x\to 0} (|\log(x+1)|) = 0$. Il teorema dei carabinieri implica quindi che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Esercizio 4

(a) Dominio. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Segno di f. Poichè $|x| > 0$ e $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$f(x) > 0 \;\; \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Comportamento nei punti di discontinuità. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} \overset{y:=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \left| -\frac{1}{y} \right| e^y = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}0 \cdot e^{-\infty}\text{"} = 0.$$

Dunque l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per il grafico della funzione.

Comportamento a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} = \text{"} (+\infty) \cdot e^{0}\text{"} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} = \text{"} (+\infty) \cdot e^{0}\text{"} = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali.

1. Calcolo di f' e studio del suo segno. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \\ \\ -xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x > 0 \\ \\ -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

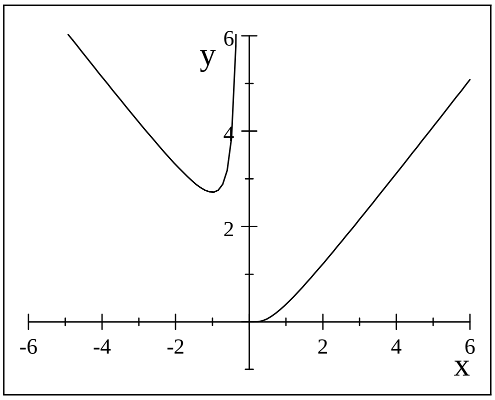
Pertanto

- $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$;
- Per $x < 0$ si nota che $-\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$, dunque

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1, 0), \\ = 0 & \text{se } x = -1, \\ < 0 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Monotonia di f. Dallo studio del segno di f' si deduce che

- f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1]$;
- f ha un minimo locale in $x = -1$;
- f è strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 0)$ e nell'intervallo $(0, +\infty)$.



(b) Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si ha $\sup f = +\infty$ e tale valore non è un massimo. Poichè $f(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f e $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$, risulta $\inf f = 0$ e tale valore non è un minimo.

(c) Definizione: Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$$\text{per ogni } x_1 \text{ e } x_2 \text{ in } A \text{ tali che } x_1 \neq x_2 \text{ vale } f(x_1) \neq f(x_2).$$

La funzione studiata sopra non è iniettiva: osservando il grafico si ricava che la retta orizzontale $y = 4$ (ad esempio) interseca il grafico di f in tre punti.

Esercizio 5.

(a) La definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

è la seguente:

$$\text{per ogni } M > 0, \text{ esiste } a \in \mathbb{R} \text{ tale che per ogni } x > a \text{ risulta } f(x) < -M.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \text{"}\left(0^+\right)^{+\infty}\text{"} = 0.$$

Esercizio 6.

(a1) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice decrescente se

$$\text{per ogni } x_1 \text{ e } x_2 \text{ in } A \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ vale } f(x_1) \geq f(x_2).$$

(a2) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(b1) Vero. Si veda il libro di testo.

(b2) Falso. Controesempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

(b3) Falso. Non è detto che una funzione decrescente sia derivabile dappertutto (quindi non ha senso l'espressione $f'(x) \leq 0$): per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è decrescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0)$ non esiste.

(b4) Falso. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ in effetti è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $f'(x) = a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione è decrescente se e solo se $a \leq 0$. Quindi la seconda parte della affermazione è falsa. Controesempio: $f(x) = x - 1$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 Luglio 2016
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. (11 punti) La funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, data da $f(t) = \frac{1}{6}t$, rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata $t > 0$ secondi.
   Una tariffa alternativa offerta dalla mia compagnia telefonica è rappresentata dalla funzione
   $$g(t) = \begin{cases} 10 + \frac{1}{8}t & \text{se } t \in (0, 120] \\ 22 + \frac{1}{15}t & \text{se } t \in (120, 300] \\ 37 + \frac{1}{30}t & \text{se } t > 300 \end{cases}$$
   (a) [pti 2] Si calcoli la spesa, secondo le due tariffe, per una telefonata di 120 secondi, per una di 5 minuti e per una di 500 secondi.

   (b) [pti 1] Si calcoli $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ e si interpreti il risultato. Si calcoli $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ e si interpreti il risultato.

   (c) [pti 3] Si calcolino $\lim_{t\to 120^+} g(t)$, $\lim_{t\to 300^+} g(t)$ e si disegnino sullo stesso piano cartesiano i grafici delle due tariffe in funzione di t.

   Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:

   (d) [pti 3] avendo a disposizione 35 centesimi (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna tariffa?

   (e) [pti 2] per quali t è più conveniente la tariffa f?[1]

2. (9 punti) Dato un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, si consideri una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

   (a) [pti 1] Si dia la definizione di funzione superiormente limitata.

   (b) [pti 1] Si dia la definizione di $\max f$.

   (c) [pti 1] Si dia la definizione di $\sup f$.

   Si dica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa, fornendo una dimostrazione nel primo caso ed un controesempio nel secondo.

   (d) [pti 2] Se f è limitata superiormente, allora f ha massimo.

   (e) [pti 2] Se $\sup f$ è finito, allora f ha massimo.

   (f) [pti 2] Se f è limitata superiormente, allora $\sup f$ è finito.

3. (7 punti)

   (a) [pti 3] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.

   (b) [pti 4] Data la funzione $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{x-1}$, si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e si determinino i punti (uno o piu' di uno) che soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Rolle.

4. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti
   $$\text{(a) [pti 3]} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 5x}}{\sin(7x)}, \qquad \text{(b) [pti 3]} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{|x - 2^x| + 6x^3 + 4}{|x^2 - \ln x|}$$

5. (7 punti) Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ ricavando l'insieme di definizione e il segno di f, calcolando gli opportuni limiti, studiando la monotonia di f ed individuando eventuali punti di max/min globali/locali per f, e infine studiando la concavità/convessità di f.

[1] Le funzioni f e g in questo esercizio sono una semplificazione di quelle più complicate che rappresentano tariffe realistiche.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 Luglio 2016
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. (11 punti) La funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, data da $f(t) = \frac{1}{5}t$, rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata $t > 0$ secondi.
   Una tariffa alternativa offerta dalla mia compagnia telefonica è rappresentata dalla funzione
   $$g(t) = \begin{cases} 11 + \frac{1}{8}t & \text{se } t \in (0, 120] \\ 22 + \frac{1}{16}t & \text{se } t \in (120, 300] \\ 35 + \frac{1}{30}t & \text{se } t > 300 \end{cases}$$
   (a) [pti 2] Si calcoli la spesa, secondo le due tariffe, per una telefonata di 120 secondi, per una di 5 minuti e per una di 500 secondi.

   (b) [pti 1] Si calcoli $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ e si interpreti il risultato. Si calcoli $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ e si interpreti il risultato.

   (c) [pti 3] Si calcolino $\lim_{t\to 120^+} g(t)$, $\lim_{t\to 300^+} g(t)$ e si disegnino sullo stesso piano cartesiano i grafici delle due tariffe in funzione di t.

   Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:

   (d) [pti 3] avendo a disposizione 37 centesimi (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna tariffa?

   (e) [pti 2] per quali t è più conveniente la tariffa f?[1]

2. (9 punti) Dato un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, si consideri una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

   (a) [pti 1] Si dia la definizione di funzione inferiormente limitata.

   (b) [pti 1] Si dia la definizione di $\min f$.

   (c) [pti 1] Si dia la definizione di $\inf f$.

   Si dica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa, fornendo una dimostrazione nel primo caso ed un controesempio nel secondo.
   (d) [pti 2] Se f è limitata inferiormente, allora f ha minimo.

   (e) [pti 2] Se $\inf f$ è finito, allora f ha minimo.

   (f) [pti 2] Se f è limitata inferiormente, allora $\inf f$ è finito.

3. (7 punti)

   (a) [pti 3] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.

   (b) [pti 4] Data la funzione $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{x-2}$, si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e si determinino i punti (uno o piu' di uno) che soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Rolle.

4. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti
   $$\text{(a) [pti 3]} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 3x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 7x}}{\sin(9x)}, \qquad \text{(b) [pti 3]} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{|3^x - x^2| - 5x^4 + 6}{|\ln x - x^3|}$$

5. (7 punti) Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$ ricavando l'insieme di definizione e il segno di f, calcolando gli opportuni limiti, studiando la monotonia di f e individuando eventuali punti di max/min globali/locali per f, infine studiando la concavità/convessità di f.

[1] Le funzioni f e g in questo esercizio sono una semplificazione di quelle più complicate che rappresentano tariffe realistiche.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 Luglio 2016
Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. (11 punti) La funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, data da $f(t)=\frac{1}{4}t$, rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata $t>0$ secondi.
   Una tariffa alternativa offerta dalla mia compagnia telefonica è rappresentata dalla funzione
   $$g(t)=\begin{cases} 22+\frac{1}{8}t & \text{se } t\in(0,140] \\ 35+\frac{1}{14}t & \text{se } t\in(140,280] \\ 55+\frac{1}{30}t & \text{se } t>280 \end{cases}$$
   (a) [pti 2] Si calcoli la spesa, secondo le due tariffe, per una telefonata di 2 minuti e 20 secondi, per una di 280 secondi e per una di 600 secondi.

   (b) [pti 1] Si calcoli $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ e si interpreti il risultato. Si calcoli $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ e si interpreti il risultato.

   (c) [pti 3] Si calcolino $\lim_{t\to 140^+} g(t)$, $\lim_{t\to 280^+} g(t)$ e si disegnino sullo stesso piano cartesiano i grafici delle due tariffe in funzione di t.

   Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:

   (d) [pti 3] avendo a disposizione 38 centesimi (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna tariffa?

   (e) [pti 2] per quali t è più conveniente la tariffa g?[1]

2. (9 punti) Dato un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, si consideri una funzione $f:D\to\mathbb{R}$.

   (a) [pti 1] Si dia la definizione di $\sup f$.

   (b) [pti 1] Si dia la definizione di funzione superiormente limitata.

   (c) [pti 1] Si dia la definizione di $\max f$.

   Si dica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa, fornendo una dimostrazione nel primo caso ed un controesempio nel secondo.

   (d) [pti 2] Se f è limitata superiormente, allora $\sup f$ è finito.

   (e) [pti 2] Se $\sup f$ appartiene all'immagine di f, allora f ha massimo.

   (f) [pti 2] Se f è limitata superiormente, allora f ha massimo.

3. (7 punti)

   (a) [pti 3] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.

   (b) [pti 4] Data la funzione $f:[4,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{x^2}{x-3}$, si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e si determinino i punti (uno o piu' di uno) che soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Rolle.

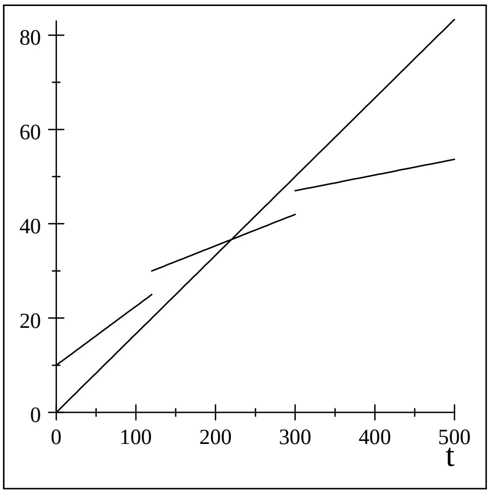
4. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti
   $$\text{(a) [pti 3]} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+6x}-\sqrt{\frac{1}{4}-9x}}{\sin(11x)}, \qquad \text{(b) [pti 3]} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{|x^3-4^x|-x^5+8}{|x^4-\ln x|}$$

5. (7 punti) Si studi il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{x}$ ricavando l'insieme di definizione e il segno di f, calcolando gli opportuni limiti, studiando la monotonia di f e individuando eventuali punti di max/min globali/locali per f, infine studiando la concavità/convessità di f

[1] Le funzioni f e g in questo esercizio sono una semplificazione di quelle più complicate che rappresentano tariffe realistiche.

Soluzioni
Fila A

1. EX 1. 1) $f(120) = 20, g(120) = 25; f(300) = 50, g(300) = 42; f(500) \approx 83.3, g(500) \approx 53.6$
2) $g(0^+) = 10$, è l'ammontare dello scatto alla risposta; $f(0^+) = 0$: la tariffa f non ha scatto alla risposta.
3) $g(120^+) = 22 + 120/15 = 30, g(300^+) = 37 + 300/30 = 47$. Il grafico delle due tariffe è sotto riportato: la linea spezzata è il grafico della tariffa g.



4) $f(t) = \frac{t}{6} \leq 35$ per $t \leq 210$, ossia la telefonata può durare al massimo 3 minuti e mezzo, con la tariffa f.
$g(120^+) = 30, g(300) = 42$: essendo la funzione g iniettiva su $\mathbb{R}_+$ e continua da (120, 300) in (30, 42), può raggiungere il valore 35 solo lungo il suo secondo tratto, quindi va risolta la disequazione $22 + \frac{t}{15} \leq 35$, da cui risulta che $t \leq 195$, ossia la telefonata può al massimo durare 3 minuti e 15 secondi con la tariffa g (che è quindi più costosa per le telefonate di lunghezza almeno fino a 3 minuti e 15 secondi).
5) Si cercano i t per cui $f(t) \leq g(t)$. Dalla figura si vede che i due grafici si incontrano in corrispondenza del secondo tratto di g, e che prima del punto di incontro la tariffa f è sempre più bassa della g, mentre dopo è sempre più alta. Risolviamo allora $\frac{t}{6} \leq 22 + \frac{t}{15}$, ossia $t\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15}\right) \leq 22$. Risulta $t \leq 220$, corrispondente a 3 minuiti e 40 secondi.

EX 2.
1), 2), 3): si veda libro di testo.
4) Falsa, ad es. $f(x) = x$ definita su $D = [0, 1)$, è limitata superiormente da 1, ma non ha massimo perché il candidato valore massimo 1 non è raggiunto su D.
5) Falsa, stessa f del punto 4): $\sup f = 1 < \infty$, ma 1 non è raggiunto.
6) Vero. Si osservi che il caso $\sup f = -\infty$ non si pone perché $D \neq \emptyset$. Quindi dobbiamo dimostrare che $\sup f < +\infty$.
Per ipotesi sappiamo che esiste un $M < +\infty$ per cui $f(x) \leq M \;\; \forall x \in D$. Quindi M è un maggiorante,

allora il minimo m dei maggioranti soddisfa $m \leq M < +\infty$, ossia $\sup f < +\infty$.

EX 3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) f e' continua nell'intervallo $[2,4]$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni continue; f e' derivabile nell'intervallo $(2,4)$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni derivabili; per finire, $f(2) = f(4) = \frac{8}{3}$. La derivata di f e' $f'(x) = -\frac{2}{3} + \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, e $f'(x) = 0$ per $x = 1 + \sqrt{3}$.

EX 4. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}}{\sin(7x)} = \frac{0}{0}$, e $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}}{\sin(7x)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x}\right)}{\sin(7x)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x}\right)} = \frac{6x}{\sin(7x)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x}\right)}$.

Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}}{\sin(7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin(7x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x}} = \frac{6}{7} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{6}{7}$.

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{|x-2^x|+6x^3+4}{|x^2-\ln x|} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x-x+6x^3+4}{x^2-\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$.

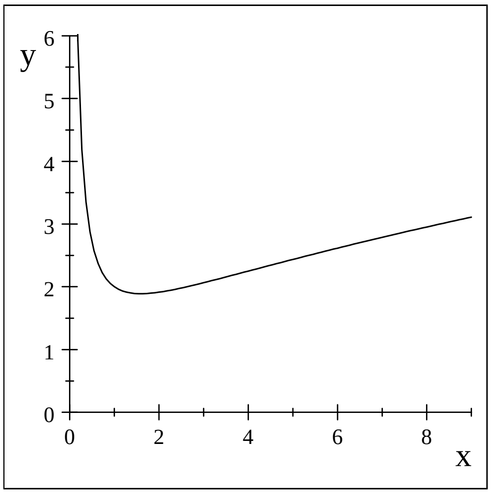
EX 5. $A = (0, +\infty)$.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = 0$ e' asintoto verticale.

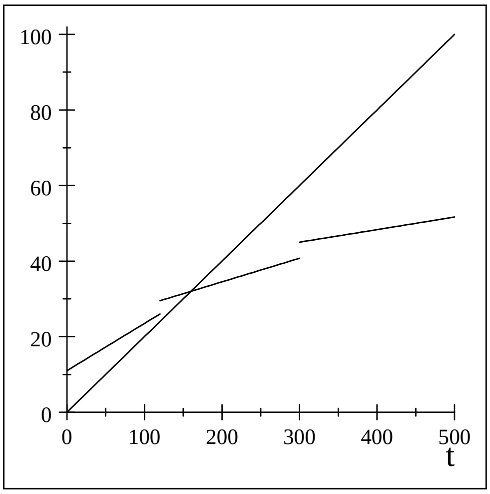
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 2)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 2^{2/3})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (2^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 2^{2/3})$, monotona strettamente crescente nell'intervallo $(2^{2/3}, +\infty)$ e $x = 2^{2/3}$ e' punto di min globale per f, $\inf f = \min f = f(2^{2/3})$, $\sup f = +\infty$, $\max f$ non esiste, non esistono punti di max locale/globale per f.

$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{8-x^{3/2}}{4x^3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (0,4)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (4, +\infty)$, dunque f e' convessa nell'intervallo $(0,4)$, concava nell'intervallo $(4, +\infty)$ e $x = 4$ e' punto di flesso per f.



Soluzioni
Fila B

1. EX 1. 1) $f(120) = 24, g(120) = 26; f(300) = 60, g(300) = 40.75; f(500) = 100, g(500) \approx 51.7$
   2) $g(120^+) = 22 + 120/16 = 29.5, g(300^+) = 35 + 300/30 = 45$. Il grafico delle due tariffe è sotto riportato: la linea spezzata è il grafico della tariffa g.



3) $g(0^+) = 11$, è l'ammontare dello scatto alla risposta; $f(0^+) = 0$: la tariffa f non ha scatto alla risposta.
4) $f(t) = \frac{t}{5} \leq 37$ per $t \leq 185$, ossia la telefonata può durare al massimo 3 minuti e 5 secondi, con la tariffa f.
Dobbiamo trovare i $t > 0$ per cui $g(t) \leq 37$. Si osservi che essendo $g(120^+) = 29.5, g(300) = 40.75$, ed essendo la funzione g iniettiva su $\mathbb{R}_+$ e continua da (120, 300) in (29.5, 40.75), g può raggiungere il valore 37 solo lungo il suo secondo tratto, quindi va risolta la disequazione $22 + \frac{t}{16} \leq 37$, da cui risulta che $t \leq 240$, ossia la telefonata può al massimo durare 4 minuti con la tariffa g (che è quindi meno costosa per le telefonate di lunghezza almeno fino a 4 minuti).
5) Si cercano i t per cui $f(t) \geq g(t)$. Dalla figura si vede che i due grafici si incontrano in corrispondenza del secondo tratto di g, e che prima del punto di incontro la tariffa f è sempre più bassa della g, mentre dopo è sempre più alta. Risolviamo allora $\frac{t}{5} \geq 22 + \frac{t}{16}$, ossia $t\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{16}\right) \geq 22$. Risulta $t \geq 160$, corrispondente a 2 minuiti e 40 secondi.

EX 2.
1), 2), 3): si veda libro di testo.
4) Falsa, ad es. $f(x) = x$ definita su $D = (0, 1)$, è limitata inferiormente da 0, ma non ha minimo perché il candidato valore minimo 0 non è raggiunto su D.
5) Falsa, stessa f del punto 4): $\inf f = 0 \in \mathbb{R}$, ma 0 non è raggiunto.
6) Vero. Si osservi che il caso $\inf f = +\infty$ non si pone perché $D \neq \emptyset$. Quindi dobbiamo dimostrare che $\inf f > -\infty$.
Per ipotesi sappiamo che esiste un $m > -\infty$ per cui $f(x) \geq m \quad \forall x \in D$. Quindi m è un minorante,

allora il massimo M dei minoranti soddisfa $\inf f = M \geq m > -\infty$, come si voleva.

EX 3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) f e' continua nell'intervallo $[3,5]$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni continue; f e' derivabile nell'intervallo $(3,5)$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni derivabili; per finire, $f(3) = f(5) = 10$. La derivata di f e' $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, e $f'(x) = 0$ per $x = 2 + \sqrt{3}$.

Ex 4. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}}{\sin(9x)} = \frac{0}{0}$, e $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}}{\sin(9x)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x}\right)}{\sin(9x)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x}\right)} = \frac{10x}{\sin(9x)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x}\right)}$. Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}}{\sin(9x)} = \lim_{x\to 0} \frac{10x}{\sin(9x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x}} = \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{10}{9}$.

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|3^x-x^2\right|-5x^4+6}{|\ln x - x^3|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-x^2-5x^4+6}{x^3-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^3} = +\infty$.

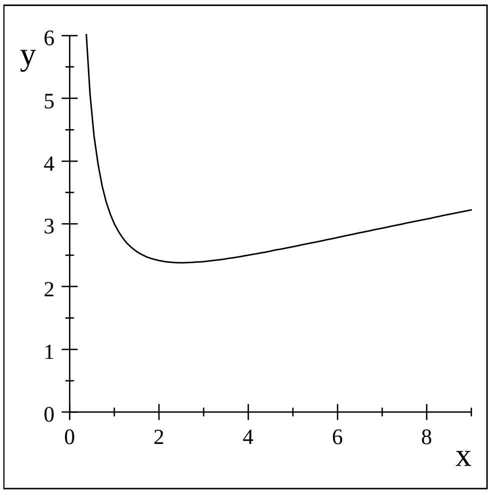
EX 5. $A = (0, +\infty)$.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = 0$ e' asintoto verticale.

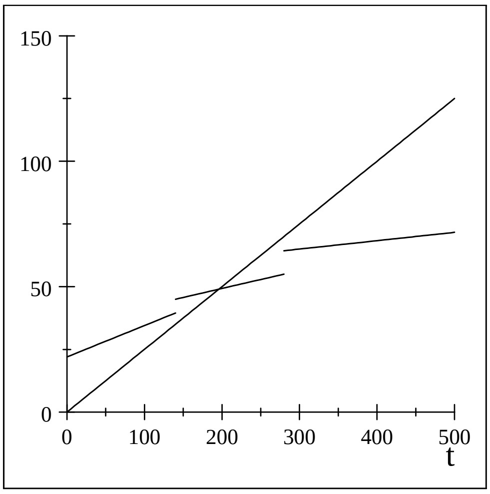
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 4)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 4^{2/3})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (4^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 4^{2/3})$, monotona strettamente crescente nell'intervallo $(4^{2/3}, +\infty)$ e $x = 4^{2/3}$ e' punto di min globale per f, $\inf f = \min f = f(4^{2/3})$, $\sup f = +\infty$, $\max f$ non esiste, non esistono punti di max locale/globale per f.

$f''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{16-x^{3/2}}{4x^3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (0, 16^{2/3})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (16^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' convessa nell'intervallo $(0, 16^{2/3})$, concava nell'intervallo $(16^{2/3}, +\infty)$ e $x = 16^{2/3}$ e' punto di flesso per f.



Soluzioni
Fila C

1. EX 1. 1) $f(140) = \frac{140}{4}, g(140) = 22+140/8 = 39.5; f(280) = 70, g(280) = 35+280/14 = 35; f(600) = 150, g(600) = 75 : 23.333\,333$
   2) $g(0^+) = 22$, è l'ammontare dello scatto alla risposta; $f(0^+) = 0$: la tariffa f non ha scatto alla risposta.
   3) $g(140^+) = 35 + 140/14 = 45, g(280^+) = 55 + 280/30 \approx 64.3$. Il grafico delle due tariffe è sotto riportato: la linea spezzata è il grafico della tariffa g.



4) Si cercano i t per cui $g(t) \leq f(t)$. Dalla figura si vede che i due grafici si incontrano in corrispondenza del secondo tratto di g, e che prima del punto di incontro la tariffa f è sempre più bassa della g, mentre dopo è sempre più alta. Risolviamo allora $35 + \frac{t}{14} \leq \frac{t}{4}$, ossia $t\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{14}\right) \geq 35$. Risulta $t \geq 196$, corrispondente a 3 minuiti e 16 secondi.

5) $f(t) = \frac{t}{4} \leq 38$ per $t \leq 152$, ossia la telefonata può durare al massimo 2 minuti e 32 secondi, con la tariffa f.
Dobbiamo trovare i $t > 0$ per cui $g(t) \leq 38$. Si osservi che essendo $g(0^+) = 22, g(140^+) = 45$, ed essendo la funzione g iniettiva su $\mathbb{R}_+$ e continua da $(0, 140)$ in $(22, 45)$, g può raggiungere il valore 38 solo lungo il suo primo tratto, quindi va risolta la disequazione $22 + \frac{t}{8} \leq 38$, da cui risulta che $t \leq 128$, ossia la telefonata può al massimo durare 2 minuti e 8 secondi con la tariffa g (che è quindi più costosa per le telefonate di lunghezza almeno fino a 2 minuti e 8 secondi).

EX 2.
1), 2), 3): si veda libro di testo.
4) Vero. Si osservi che il caso $\sup f = -\infty$ non si pone perché $D \neq \emptyset$. Quindi dobbiamo dimostrare che $\sup f < +\infty$.
Per ipotesi sappiamo che esiste un $M < +\infty$ per cui $f(x) \leq M \ \ \forall x \in D$. Quindi M è un maggiorante, allora il minimo m dei maggioranti soddisfa $m \leq M < +\infty$, ossia $\sup f < +\infty$.
5) Vera. Sappiamo per ipotesi che esiste un $\bar{x} \in D$ tale che $f(\bar{x}) = \sup f$. Allora $\sup f$, che è un

maggiorante per f, è anche assunto, ossia vale $\forall x \in D,\ f(x) \leq f(\bar{x})$, ma allora $\bar{x}$ è un punto di massimo assoluto per f su D e $f(\bar{x})$ è il massimo assoluto, ossia $\sup f = \max f$.
6) Falsa, ad es. $f(x) = x$ definita su $D = (0, 1)$, è limitata superiormente da 1, ma non ha massimo perché il candidato valore massimo 1 non è raggiunto su D.

EX 3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) f e' continua nell'intervallo $[4, 6]$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni continue; f e' derivabile nell'intervallo $(4, 6)$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni derivabili; per finire, $f(4) = f(6) = 24$. La derivata di f e' $f'(x) = 2 + \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$, e $f'(x) = 0$ per $x = 3 + \sqrt{3}$.

EX 4. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+6x}-\sqrt{\frac{1}{4}-9x}}{\sin(11x)} = \frac{0}{0}$, e $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+6x}-\sqrt{\frac{1}{4}-9x}}{\sin(11x)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+6x}-\sqrt{\frac{1}{4}-9x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+6x}+\sqrt{\frac{1}{4}-9x}\right)}{\sin(11x)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+6x}+\sqrt{\frac{1}{4}-9x}\right)} = \frac{15x}{\sin(11x)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+6x}+\sqrt{\frac{1}{4}-9x}\right)}$. Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+6x}-\sqrt{\frac{1}{4}-9x}}{\sin(11x)} = \lim_{x\to 0} \frac{15x}{\sin(11x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+6x}+\sqrt{\frac{1}{4}-9x}} = \frac{15}{11} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{15}{11}$.
(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3-4^x|-x^5+8}{|x^4-\ln x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x-x^3-x^5+8}{x^4-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{x^4} = +\infty$.

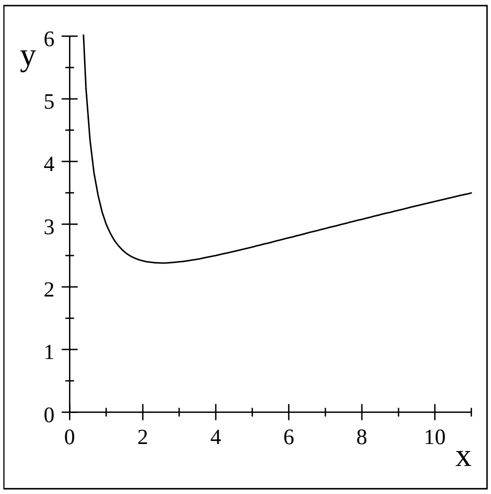
EX 5. $A = (0, +\infty)$.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = 0$ e' asintoto verticale.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 6)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 6^{2/3})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (6^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 6^{2/3})$, monotona strettamente crescente nell'intervallo $(6^{2/3}, +\infty)$ e $x = 6^{2/3}$ e' punto di min globale per f, $\inf f = \min f = f(6^{2/3})$, $\sup f = +\infty$, $\max f$ non esiste, non esistono punti di max locale/globale per f.

$f''(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{24-x^{3/2}}{4x^3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (0, 24^{2/3})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (24^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' convessa nell'intervallo $(0, 24^{2/3})$, concava nell'intervallo $(24^{2/3}, +\infty)$ e $x = 24^{2/3}$ e' punto di flesso per f.



Matematica per le Applicazioni Economiche I, 30 Agosto 2016
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1.

- (a) [3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
- (b) [3pt] Si calcoli (citando i teoremi usati) uno tra i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{(\sin x)^2}}.$$

Esercizio 2.

- (a) [2pt] Si dia la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto il dominio.
- (b) [2pt] Si esibisca un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua su tutto il dominio ed un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia discontinua in qualche punto del dominio.

Esercizio 3. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. (Si motivino le risposte "vero" citando ed enunciando proposizioni o teoremi contenuti nel programma del corso oppure fornendone una dimostrazione, e le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione; le risposte "vero" o "falso" senza spiegazione danno zero punti.)

- (a) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è continua e $f(-1) < f(1)$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
- (b) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$, allora esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.
- (c) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
- (d) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile ed esistono punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 4. [7pt] Si scriva il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{2x}.$$

In quale senso il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0?

Esercizio 5. Si consideri la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x < 0 \\ \tan x & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (a) [3pt] Si disegni il grafico della funzione.
- (b) [2pt] Si determini l'immagine di f.
- (c) [2pt] Si stabilisca quali sono i valori di $\inf f$ e $\sup f$ e si dica se essi sono, rispettivamente, minimo e massimo per f.

Esercizio 6. Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2 x + d$, dove $b \in (0, +\infty)$ e $d \in \mathbb{R}$.

- (a) [2pt] Dopo aver posto $b = 3$ e $d = -4$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è strettamente monotona.
- (b) [3pt] Dopo aver posto $b = 3$ e $d = -4$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è contemporaneamente strettamente decrescente e convessa.
- (c) [3pt] Si determino gli intervalli aperti di concavità e convessità per f al variare dei parametri b e d.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 30 Agosto 2016
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1.

- (a) [3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
- (b) [3pt] Si calcoli (citando i teoremi usati) uno tra i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}.$$

Esercizio 2.

- (a) [2pt] Si dia la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su tutto il dominio.
- (b) [2pt] Si esibisca un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia derivabile su tutto il dominio ed un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non derivabile in qualche punto del dominio.

Esercizio 3. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. (Si motivino le risposte "vero" citando ed enunciando proposizioni o teoremi contenuti nel programma del corso oppure fornendone una dimostrazione, e le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione; le risposte "vero" o "falso" senza spiegazione danno zero punti.)

- (a) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è continua e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
- (b) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile ed esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$, allora esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.
- (c) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
- (d) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile ed esistono punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 4. [7pt] Si scriva il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{x^2}.$$

In quale senso il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0?

Esercizio 5. Si consideri la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (a) [3pt] Si disegni il grafico della funzione.
- (b) [2pt] Si determini l'immagine di f.
- (c) [2pt] Si stabilisca quali sono i valori di $\inf f$ e $\sup f$ e si dica se essi sono, rispettivamente, minimo e massimo per f.

Esercizio 6. Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2x + d$, dove $b \in (0, +\infty)$ e $d \in \mathbb{R}$.

- (a) [2pt] Dopo aver posto $b = -1$ e $d = -2$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è strettamente monotona.
- (b) [3pt] Dopo aver posto $b = -1$ e $d = -2$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è contemporaneamente strettamente decrescente e convessa.
- (c) [3pt] Si determino gli intervalli aperti di concavità e convessità per f al variare dei parametri b e d.

Soluzioni Testo A

Esercizio 1.

(a) La definizione è la seguente: Per ogni $M > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ vale $f(x) > M$.

(b) *Primo limite.* Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x} \log\left(1+x^2\right)}.$$

e $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log\left(1 + x^2\right) = \frac{0}{0^+}$. Applicando il teorema de l'Hopital si ottiene $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, dunque $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log\left(1 + x^2\right) = 0$ e il limite cercato è $e^0 = 1$.

Secondo limite. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 0 \cdot (+\infty).$$

Per risolvere scriviamo

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\sin^2 x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sin^2 x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}}\right).$$

Si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty$, e posto $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ (notando che $y \to +\infty$ quando $x \to 0^+$), otteniamo $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{\sin^2 x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$. Dunque il limite cercato è $+\infty$.

Esercizio 2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua su tutto il dominio se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esempio di funzione continua in $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 14x + x^3 - e^x$$

Esempio di funzione non continua:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 5 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.

(a) *Falso.* Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Essa è strettamente crescente e quindi $f(-1) < f(1)$. Ma per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $f(x) > 0$.

(b) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)^2$.

(c) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 5 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

L'affermazione diventa vera se si considera una funzione continua (per il teorema degli zeri).

(d) *Vero.* Poichè f è derivabile su $\mathbb{R}$, essa è anche continua su $\mathbb{R}$. Dunque l'affermazione segue dal teorema degli zeri.

Esercizio 4. Il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{2x}$$

si ottiene come segue. Si calcolano i valori della funzione e delle derivate fino al terzo ordine in $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^2 e^{2x} \qquad f(0) = 0^2 e^{2 \cdot 0} = 0$$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2xe^{2x}(1 + x) = 2e^{2x}\left(x + x^2\right) \qquad f'(0) = 0 + 0 = 0$$

$$f''(x) = 2\left[2e^{2x}\left(x + x^2\right) + e^{2x}(1 + 2x)\right] = 2e^{2x}\left(2x^2 + 4x + 1\right) \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2\left[2e^{2x}\left(2x^2 + 4x + 1\right) + e^{2x}(4x + 4)\right] = 4e^{2x}\left(2x^2 + 6x + 3\right) \qquad f'''(0) = 4 \cdot 3 = 12$$

Il polinomio cercato è

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} + f'''(0)\,\frac{x^3}{6} = 0 + 0 \cdot x + x^2 + 2x^3 = x^2 + 2x^3.$$

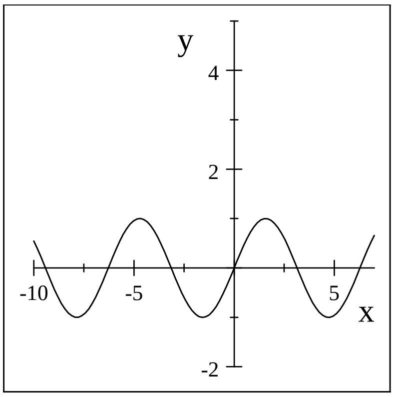
Il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0 nel senso che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_3(x)}{x^3} = 0,$$

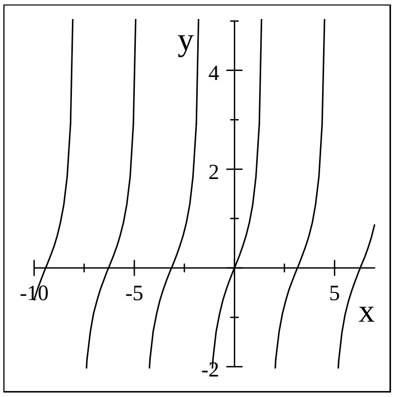
ovvero il resto (l'errore di approssimazione) è un infinitesimo di ordine superiore a x^3.

Esercizio 5.

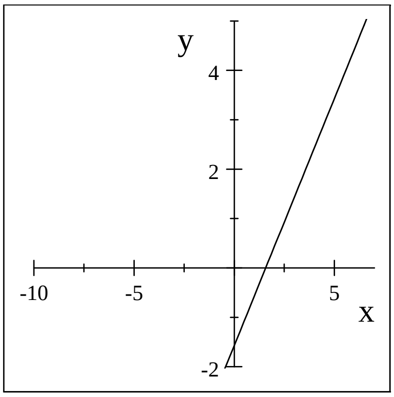
I grafici delle tre funzioni $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \tan x$, $f_3(x) = x - \frac{\pi}{2}$ sono riportati di seguito:



$y = \sin x$

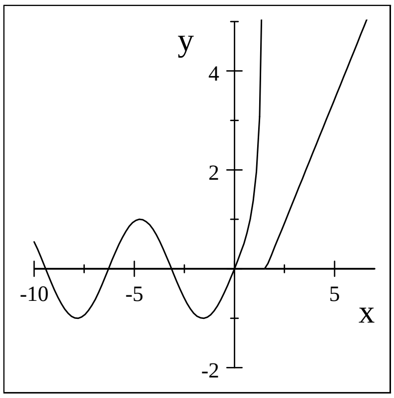


$y = \tan x$



$y = x - \frac{\pi}{2}$

il grafico di f e' ottenuto selezionando il grafico di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 0)$, di f_2 nell'intervallo $[0, \pi/2)$, di f_3 nell'intervallo $[\pi/2, +\infty)$:



(b) Dal grafico si deduce che $\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty)$.

(c) Dal punto (b) segue che $\min f = \inf\, f = -1$; non esiste $\max f$; $\sup f = +\infty$.

Esercizio 6.

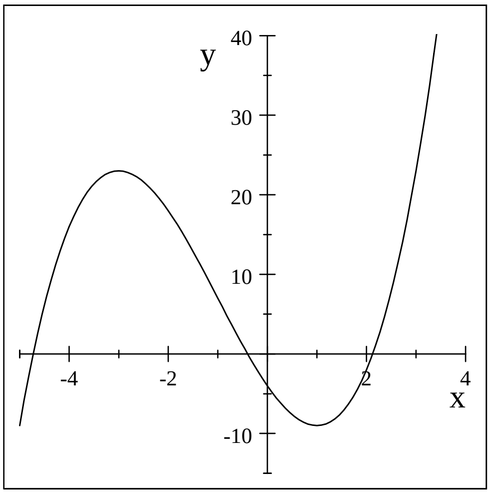
(a) Se $b = 3$ e $d = -4$, si ha

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 4$$

e quindi $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$. Poiche' $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-3, 1)$, si conclude che f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -3)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(-3, 1)$, strettamente crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$.

(b) Se $b = 3$ e $d = -4$, si ha $f''(x) = 6x + 6$. Dunque f è convessa nell'intervallo $(-1, +\infty)$, concava nell'intervallo $(-\infty, -1)$. Pertanto f è contemporaneamente strettamente decrescente e convessa nell'intervallo

$(-3,1)\cap(-1,+\infty)=(-1,1)$:



(c) Data $f(x)=x^3+bx^2-b^2x+d$, si ha $f'(x)=3x^2+2bx-b^2$, $f''(x)=6x+2b$. Dunque f è convessa nell'intervallo $\left(-\frac{b}{3},+\infty\right)$, concava nell'intervallo $\left(-\infty,-\frac{b}{3}\right)$.

Soluzioni Testo B

Esercizio 1.

(a) La definizione è la seguente: Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\nu>0$ tale che per ogni $x>\nu$ vale $1-\varepsilon<f(x)<1+\varepsilon$.

(b) *Primo limite.* Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

e $\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=(+\infty)\cdot 0$.

Posto $y=\frac{1}{x}$, si ha $y\to 0^+$ quando $x\to+\infty$ e dunque

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=+\infty\cdot 1=+\infty$$

Dunque il limite cercato è $+\infty$.

Secondo limite. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}=0\cdot(+\infty)$$

Per risolvere scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$$

Posto $y=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$, si ha $y\to+\infty$ quando $x\to+\infty$, dunque $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}=+\infty$. Posto $y=\frac{1}{x}$, si ha $y\to 0^+$ quando $x\to+\infty$, dunque $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\sin y}=1$. Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}=+\infty\cdot 1=+\infty.$$

Esercizio 2.

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice derivabile su tutto il dominio se, per ogni $x_0\in\mathbb{R}$, esiste finito il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(b) Esempio di funzione derivabile:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + \sin x - 3^x.$$

Esempio di funzione non derivabile (ma continua) in $x_0 = 0$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Esercizio 3.

(a) *Falso.* Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Essa è continua su $\mathbb{R}$ e soddisfa la condizione $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ma $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

(c) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 5 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

L'affermazione diventa vera se si considera una funzione continua (per il teorema degli zeri).

(d) *Vero.* Poichè f è derivabile su $\mathbb{R}$, essa è anche continua su $\mathbb{R}$. Dunque l'affermazione segue dal teorema degli zeri.

Esercizio 4. Il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{x^2}$$

si ottiene come segue. Si calcolano i valori della funzione e delle derivate fino al terzo ordine in $x_0 = 0$:

$$f(x) = xe^{x^2} \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^{x^2} + x2xe^{x^2} = e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2xe^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) + e^{x^2} \cdot 4x = e^{x^2}\left(2x + 4x^3 + 4x\right) = e^{x^2}\left(4x^3 + 6x\right) \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2xe^{x^2}\left(4x^3 + 6x\right) + e^{x^2}\left(12x^2 + 6\right) = e^{x^2}\left(8x^4 + 24x^2 + 6\right) \qquad f'''(0) = 6$$

Il polinomio cercato è

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + x^3 = x + x^3.$$

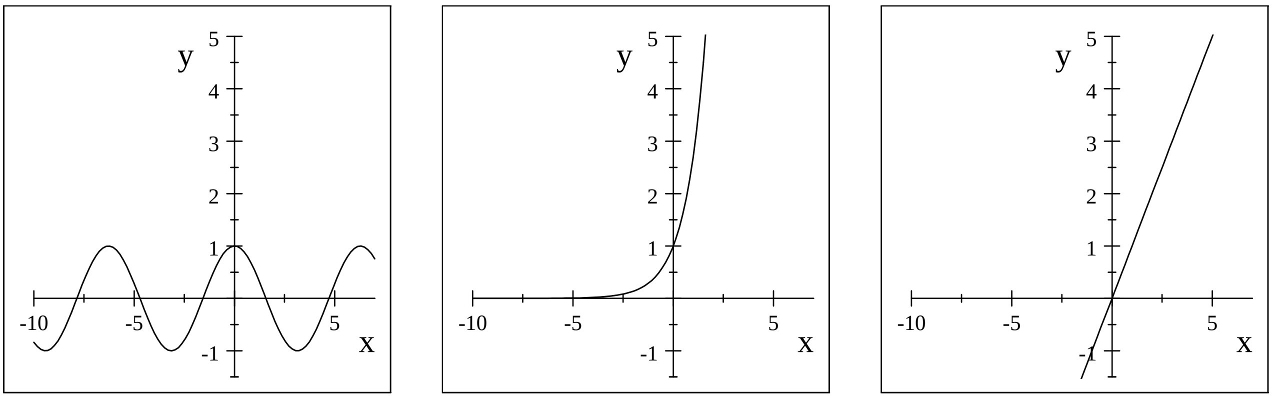
Il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0 nel senso che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_3(x)}{x^3} = 0,$$

ovvero il resto (l'errore di approssimazione) è un infinitesimo di ordine superiore a x^3.

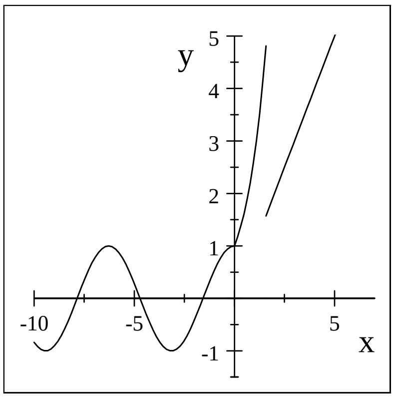
Esercizio 5.

I grafici delle tre funzioni $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = x$ sono riportati di seguito:



$y = \cos x$ $\quad$ $y = e^x$ $\quad$ $y = x$

il grafico di f e' ottenuto selezionando il grafico di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 0)$, di f_2 nell'intervallo $[0, \pi/2)$, di f_3 nell'intervallo $[\pi/2, +\infty)$:



(b) Dal grafico si deduce che $\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty)$.

(c) Dal punto (b) segue che $\min f = \inf\, f = -1$; non esiste $\max f$; $\sup f = +\infty$.

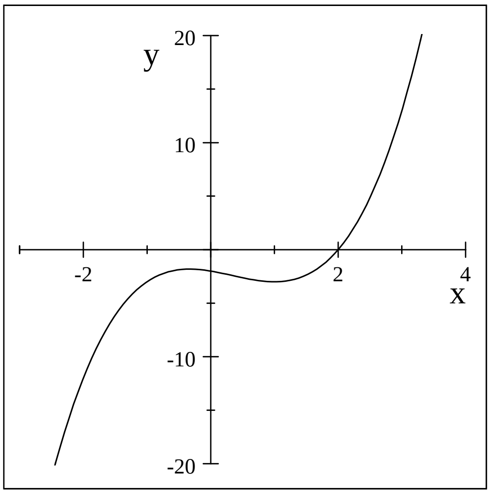
Esercizio 6.

(a) Se $b = -1$ e $d = -2$, si ha

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

e quindi $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Poiche' $f'(x) > 0$ per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$, si conclude che f e' strettamente crescente nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, strettamente crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$.

(b) Se $b = -1$ e $d = -2$, si ha $f''(x) = 6x - 2$. Dunque f è convessa nell'intervallo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, concava nell'intervallo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$. Pertanto f è contemporaneamente strettamente decrescente e convessa nell'intervallo $\left(-\frac{1}{3}, 1\right) \cap \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$:



(c) Data $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2x + d$, si ha $f'(x) = 3x^2 + 2bx - b^2$, $f''(x) = 6x + 2b$. Dunque f è convessa nell'intervallo $\left(-\frac{b}{3}, +\infty\right)$, concava nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{b}{3}\right)$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 Dicembre 2016
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. [12pt] Si studi il grafico della funzione $f(x) = x - \ln(3 + x^2)$. Si dimostri che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_1) = 0$. Si stabilisca il segno di x_1. Si determinino infine $\text{Im}(f)$, $\sup f, \inf f$.
   NOTA: risulta $f(\sqrt{3}) < 0$.

2. Per un'impresa, la funzione
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 10x \text{ per } x \in (0, 100] \\ 100 + 12x \text{ per } x \in (100, 400] \end{cases}$$
   rappresenta il costo di produzione (in migliaia di Euro) di x quintali di merce.
   [2pt] 1) Si dica qual è l'insieme di definizione (campo di esistenza) di C e si disegni il grafico di C.
   [2pt] 2) Si stabilisca che C è iniettiva, si calcolino $C^{-1}(120)$ e $C^{-1}(10)$ e se ne dia l'interpretazione economica.
   [3pt] 3) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{C(x)}{x}$, chiamata *costo medio* della produzione dei primi x quintali di merce. Si determinino il punto di minimo globale e il minimo per la funzione g. NOTA: A questo fine può essere utile disegnare il grafico di g.
   [2pt] 4) Per $x \in (1, 400]$, si scriva l'espressione di $C(x) - C(x - 1)$. Tale differenza è chiamata *costo marginale per l'incremento della produzione da $x - 1$ quintali a x quintali di merce.*

3. [3pt] 1) Per la funzione $f(x) = e^{5x^2}$ si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 0$, specificando con precisione le proprietà del resto.

   [3pt] 2) Si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x^2} - 1 - 3(\sin x)^2}{2x^2}.$$
   NOTA: Il polinomio di Taylor ricavato sopra può essere utilizzato per calcolare il limite.

4. [3pt] 1) Si enunci e si dimostri il teorema che lega la derivabilità di una funzione alla sua continuità.

   [3pt] 2) Si dia un esempio, se esiste, di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in $\mathbb{R}$ ma in almeno due punti non è derivabile.

5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è presente un errore nell'affermazione oppure no; nel caso ci sia un errore, si corregga tale errore. Ogni risposta deve essere giustificata.
   [1pt] 1) Per la funzione $f(x) = 2x^2$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{2h^2-2x_0^2}{h}$.
   [2pt] 2) Il teorema di Fermat stabilisce che: *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è un punto di massimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*
   [2pt] 3) Un insieme è aperto se e solo se contiene ogni suo punto.
   [2pt] 4) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e strettamente monotona e se in $x \in (a, b)$ si ha $f'(x) \neq 0$, allora la derivata della funzione inversa in x, cioè $\left[f^{-1}\right]'(x)$, è uguale a $\frac{1}{f'(x)}$.

Soluzioni Testo A

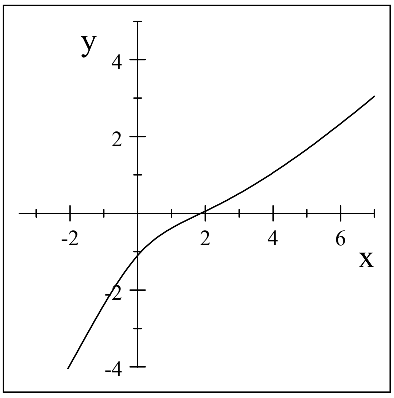
1. Poiche' $3 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f e' $\mathbb{R}$. Questa funzione non e' pari, ne' dispari, ne' periodica; e' derivabile (e dunque continua) in $\mathbb{R}$ in quanto composizione e differenza di funzioni derivabili.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$, ma $\lim_{x\to+\infty}(x - \ln(3+x^2)) = \lim_{x\to+\infty}(x - (\ln(x^2)) = \lim_{x\to+\infty}(x - 2\ln x) = +\infty$ in virtu' della gerarchia tra infiniti. Questi due limiti implicano che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, e poiche' f e' continua nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ e' possibile applicare una versione del teorema dei valori intermedi per concludere che $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$. Ancora dai due limiti discende che esista un a (negativo e grande in valore assoluto) tale che $f(a) < 0$, e che esista un b (positivo e grande in valore assoluto) tale che $f(b) > 0$. Poiche' f e' continua in $[a, b]$, il teorema degli zeri implica che esista almeno un $x_1 \in (a, b)$ tale che $f(x_1) = 0$.

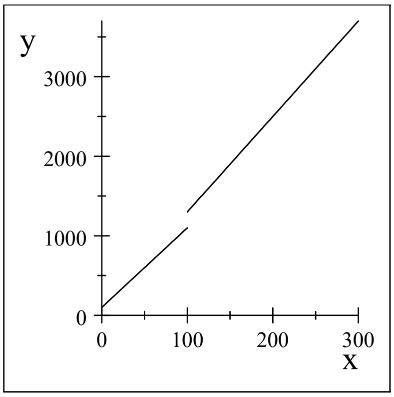
   $f'(x) = 1 - \frac{2x}{3+x^2} = \frac{x^2-2x+3}{x^2+3} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque f e' strettamente crescente in $\mathbb{R}$; questo implica l'esistenza di un <u>unico</u> $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) = 0$. Poiche' $f(0) = -\ln 3 < 0$ ed f e' strettamente crescente, si deduce che $x_1 > 0$.

   $f''(x) = \frac{(2x-2)(x^2+3)-(x^2-2x+3)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2-6}{(x^2+3)^2}$, e $f''(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Dunque f e' convessa in $(-\infty, -\sqrt{3})$, concava in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, convessa in $(\sqrt{3}, +\infty)$.

   Pertanto il grafico di f e'



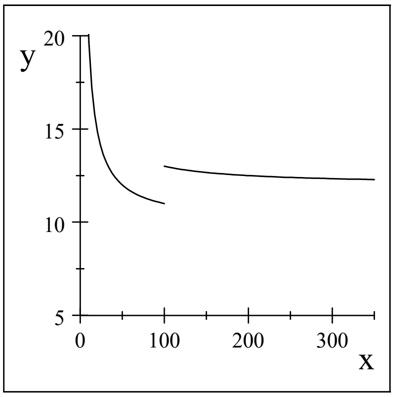
2. 1) L'insieme di definizione di C e' $(0, 400]$. Il grafico di C e'



   2) Poiche' C e' monotona strettamente crescente (come risulta dal grafico), si deduce che C e' iniettiva, e dunque esiste la funzione inversa C^{-1}. $C^{-1}(120)$ e' il valore di x tale che $C(x) = 120$, ovvero tale che $100 + 10x = 120$, cioe' $x = 2$ (l'equazione $100 + 12x = 120$ non ha soluzioni nell'intervallo $(100, 400]$). In termini economici, 2 e' la quantita' il cui costo di produzione e' uguale a 120. $C^{-1}(10)$ non esiste perche' $C(x) \neq 10$ per ogni $x \in (0, 400]$ (per la precisione, $C(x) > 100$ per ogni $x \in (0, 400]$), e dunque 10 non e' un elemento dell'insieme immagine di C.

   3) $g(x) = \begin{cases} \frac{100}{x} + 10 & \text{per } x \in (0, 100] \\ \frac{100}{x} + 12 & \text{per } x \in (100, 400] \end{cases}$ e' una funzione strettamente decrescente in $(0, 100]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e' strettamente decrescente e 10 e' costante) e strettamente decrescente in $(100, 400]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e'

strettamente decrescente e 12 e' costante). Dunque calcoliamo $g(100) = 11$ e $g(300) = 12.25$ e concludiamo che 100 e' il punto di minimo globale per g e $\min g = 11$. Il grafico di g e'



4) $C(x) - C(x-1) = \begin{cases} 10 & \text{se } 1 < x \le 100 \\ 2x + 10 & \text{se } 100 < x \le 101 \\ 12 & \text{se } 101 < x \le 300 \end{cases}$

3. 1) Risulta che $f(0) = 1$, $f'(x) = 10xe^{5x^2}$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = 10e^{5x^2} + 100x^2e^{5x^2}$, $f''(0) = 10$, quindi $P_2(x) = 1 + 5x^2$. Pertanto $e^{5x^2} = 1 + 5x^2 + R_2(x, 0)$ con $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x,0)}{x^2} = 0$.

   2)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x^2} - 1 - 3(\sin x)^2}{2x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 5x^2 + R_2(x, 0) - 1 - 3(\sin x)^2}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{5x^2 - 3(\sin x)^2 + R_2(x, 0)}{2x^2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 0 = 1 \end{aligned}$$

4. 1) Si veda il teorema 8.1 nel libro di testo.

   2) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \le 3 \\ x - 1 & \text{se } 3 < x < 5 \\ 4 & \text{se } x \ge 5 \end{cases}$ e' continua in $\mathbb{R}$ ma non derivabile nel punto $x_0 = 3$ e nel punto $x_1 = 5$. In dettaglio, $f'_-(3) = 0 \ne f'_+(3) = 1$, dunque $f'(3)$ non esiste; $f'_-(5) = 1 \ne f'_+(5) = 0$, dunque $f'(5)$ non esiste.

5. 1) Data $f(x) = 2x^2$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{2(x_0+h)^2-2x_0^2}{h}$, che non e' uguale a $\frac{2h^2-2x_0^2}{h}$.

   2) L'affermazione e' errata in quanto l'enunciato del teorema di Fermat richiede che x_0 sia punto interno per il dominio di f, ma la condizione $x_0 \in [a, b]$ permette che x_0 sia uguale ad a, oppure uguale a b, i quali non sono punti interni per il dominio di f. In aggiunta, il teorema di Fermat consente anche che x_0 sia un punto di min locale per f.

   3) L'affermazione e' errata in quanto ogni insieme contiene ogni suo punto; ad esempio, $A = [2, 5]$. Un insieme si dice aperto se e solo se ogni suo punto e' punto interno.

   4) L'affermazione e' errata. La funzione inversa puo' essere calcolata in $f(x)$, non in x. Sotto le ipotesi date, e' vero che $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 Dicembre 2016
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. [12pt] Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln(3 + x^2) - x$. Si dimostri che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_1) = 0$. Si stabilisca il segno di x_1. Si determinino infine $\text{Im}(f)$, $\sup f, \inf f$.
   NOTE: risulta $f(\sqrt{3}) > 0$.

2. Per un'impresa, la funzione
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 11x \text{ per } x \in (0, 100] \\ 100 + 12x \text{ per } x \in (100, 300] \end{cases}$$
   rappresenta il costo di produzione (in migliaia di Euro) di x quintali di merce.
   [2pt] 1) Si dica qual è l'insieme di definizione (campo di esistenza) di C e si disegni il grafico di C.
   [2pt] 2) Si stabilisca che C è iniettiva, si calcolino $C^{-1}(210)$ e $C^{-1}(10)$ e se ne dia l'interpretazione economica.
   [3pt] 3) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{C(x)}{x}$, chiamata *costo medio* della produzione dei primi x quintali di merce. Si determinino il punto di minimo globale e il minimo per la funzione g. NOTA: A questo fine può essere utile disegnare il grafico di g.
   [2pt] 4) Per $x \in (1, 300]$, si scriva l'espressione di $C(x) - C(x - 1)$. Tale differenza è chiamata *costo marginale per l'incremento della produzione da $x - 1$ quintali a x quintali di merce.*

3. [3pt] 1) Per la funzione $f(x) = e^{-3x^2}$ si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 0$, specificando con precisione le proprietà del resto.

   [3pt] 2) Si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x^2} - 2 + \cos x}{x^2}.$$
   NOTA: Il polinomio di Taylor ricavato sopra può essere utilizzato per calcolare il limite.

4. [3pt] 1) Si dica se è vera la seguente affermazione: "una funzione non derivabile in un punto x_0 e' discontinua in x_0". Se si ritiene l'affermazione vera, allora la si dimostri, altrimenti si dia un controesempio.
   [3pt] 2) Si enunci e si dimostri il teorema che lega la derivabilità di una funzione alla sua continuità.

5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è presente un errore nell'affermazione oppure no; nel caso ci sia un errore, si corregga tale errore. Ogni risposta deve essere giustificata.
   [1pt] 1) Per la funzione $f(x) = 3\ln(x+1)$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{3\ln(h+1)-3\ln(x_0+1)}{h}$.
   [2pt] 2) Il teorema di Fermat stabilisce che: *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è un punto interno di $[a, b]$, allora $f'(x_0) = 0$.*
   [2pt] 3) Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A.
   [2pt] 4) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e strettamente monotona, allora la sua funzione inversa è derivabile.

Soluzioni Testo B

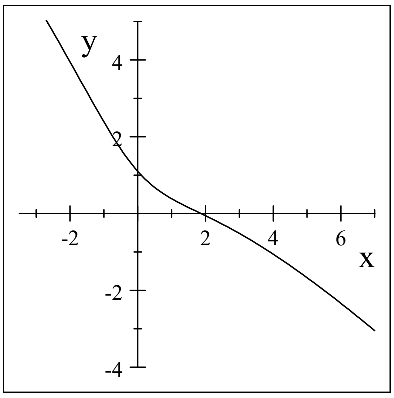
1. Poiche' $3 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f e' $\mathbb{R}$. Questa funzione non e' pari, ne' dispari, ne' periodica; e' derivabile (e dunque continua) in $\mathbb{R}$ in quanto composizione e differenza di funzioni derivabili.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty-(-\infty)$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-\infty$, ma $\lim_{x\to+\infty}(\ln(3+x^2) - x) = \lim_{x\to+\infty}((\ln(x^2)) - x) = \lim_{x\to+\infty}(2(\ln x) - x) = -\infty$ in virtu' della gerarchia tra infiniti. Questi due limiti implicano che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, e poiche' f e' continua nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ e' possibile applicare una versione del teorema dei valori intermedi per concludere che $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$. Ancora dai due limiti discende che esista un a (negativo e grande in valore assoluto) tale che $f(a) > 0$, e che esista un b (positivo e grande in valore assoluto) tale che $f(b) < 0$. Poiche' f e' continua in $[a, b]$, il teorema degli zeri implica che esista almeno un $x_1 \in (a, b)$ tale che $f(x_1) = 0$.

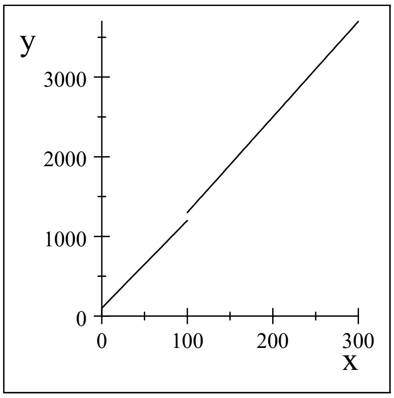
   $f'(x) = \frac{2x}{3+x^2} - 1 = \frac{-x^2+2x-3}{x^2+3} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque f e' strettamente decrescente in $\mathbb{R}$; questo implica l'esistenza di un <u>unico</u> $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) = 0$. Poiche' $f(0) = \ln 3 > 0$ ed f e' strettamente decrescente, si deduce che $x_1 > 0$.

   $f''(x) = \frac{(-2x+2)(x^2+3)-(-x^2+2x-3)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{6-2x^2}{(x^2+3)^2}$, e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Dunque f e' concava in $(-\infty, -\sqrt{3})$, convessa in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, concava in $(\sqrt{3}, +\infty)$.

   Pertanto il grafico di f e'



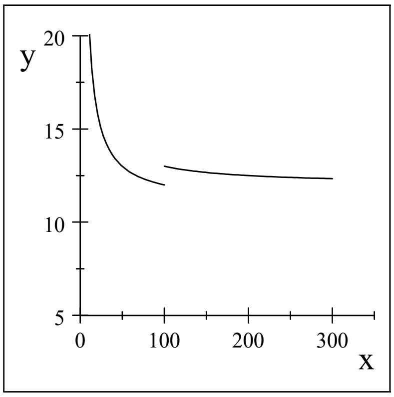
2. 1) L'insieme di definizione di C e' $(0, 300]$. Il grafico di C e'



   2) Poiche' C e' monotona strettamente crescente (come risulta dal grafico), si deduce che C e' iniettiva, e dunque esiste la funzione inversa C^{-1}. $C^{-1}(210)$ e' il valore di x tale che $C(x) = 210$, ovvero tale che $100 + 11x = 210$, cioe' $x = 10$ (l'equazione $100 + 12x = 210$ non ha soluzioni nell'intervallo $(100, 300]$). In termini economici, 10 e' la quantita' il cui costo di produzione e' uguale a 210. $C^{-1}(10)$ non esiste perche' $C(x) \neq 10$ per ogni $x \in (0, 300]$ (per la precisione, $C(x) > 100$ per ogni $x \in (0, 300]$), e dunque 10 non e' un elemento dell'insieme immagine di C.

   3) $g(x) = \begin{cases} \frac{100}{x} + 11 & \text{per } x \in (0, 100] \\ \frac{100}{x} + 12 & \text{per } x \in (100, 300] \end{cases}$ e' una funzione strettamente decrescente in $(0, 100]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e' strettamente decrescente e 11 e' costante) e strettamente decrescente in $(100, 300]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e'

strettamente decrescente e 12 e' costante). Dunque calcoliamo $g(100) = 12$ e $g(300) = 12.\bar{3}$ e concludiamo che 100 e' il punto di minimo globale per g e $\min g = 12$. Il grafico di g e'



4) $C(x) - C(x-1) = \begin{cases} 11 & \text{se } 1 < x \leq 100 \\ x + 11 & \text{se } 100 < x \leq 101 \\ 12 & \text{se } 101 < x \leq 300 \end{cases}$.

3. 1) Risulta che $f(0) = 1$, $f'(x) = -6xe^{-3x^2}$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -6e^{-3x^2} + 36x^2e^{-3x^2}$, $f''(0) = -6$, quindi $P_2(x) = 1 - 3x^2$. Pertanto $e^{-3x^2} = 1 - 3x^2 + R_2(x, 0)$ con $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x,0)}{x^2} = 0$.

   2)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x^2} - 2 + \cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 3x^2 + R_2(x, 0) - 2 + \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 - (1 - \cos x) + R_2(x, 0)}{x^2} = -3 - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

4. 1) L'affermazione e' falsa, ovvero se una funzione e' non derivabile in un punto x_0, allora e' non e' detto che sia discontinua. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^{1/3}$ e' non derivabile in $x_0 = 0$, ma in tale punto essa e' continua.

   2) Si veda il teorema 8.1 nel libro di testo.

5. 1) Data $f(x) = 3\ln(x + 1)$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{3\ln(x_0+h+1)-3\ln(x_0+1)}{h}$, che non e' uguale a $\frac{3\ln(h+1)-3\ln(x_0+1)}{h}$.

   2) L'affermazione e' errata in quanto l'enunciato del teorema di Fermat richiede che x_0 sia anche punto di max/min locale per f.

   3) L'affermazione e' errata in quanto un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A. In base alla condizione enunciata nel testo dell'esame, il punto $x_0 = 5$ e' punto di accumulazione per l'insieme $A = [1, 3] \cup \{5\}$, in quanto ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A, ovvero x_0 stesso.

   4) L'affermazione e' errata. Per vedere perche', consideriamo la funzione $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la quale e' derivabile in $\mathbb{R}$ e monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Ma la sua funzione inversa, cioe' la funzione radice terza, non e' derivabile nel punto 0.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 Dicembre 2016
Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. [12pt] Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 + 2) - x$. Si dimostri che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_1) = 0$. Si stabilisca il segno di x_1. Si determinino infine $\mathrm{Im}(f)$, $\sup f, \inf f$.
   NOTE: risulta $f(\sqrt{2}) < 0$.

2. Per un'impresa, la funzione
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 10x \text{ per } x \in (0, 100] \\ 100 + 12x \text{ per } x \in (100, 400] \end{cases}$$
   rappresenta il costo di produzione (in migliaia di Euro) di x quintali di merce.
   [2pt] 1) Si dica qual è l'insieme di definizione (campo di esistenza) di C e si disegni il grafico di C.
   [2pt] 2) Si stabilisca che C è iniettiva, si calcolino $C^{-1}(220)$ e $C^{-1}(20)$ e se ne dia l'interpretazione economica.
   [3pt] 3) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{C(x)}{x}$, chiamata *costo medio* della produzione dei primi x quintali di merce. Si determinino il punto di minimo globale e il minimo per la funzione g. NOTA: A questo fine può essere utile disegnare il grafico di g.
   [2pt] 4) Per $x \in (1, 400]$, si scriva l'espressione di $C(x) - C(x - 1)$. Tale differenza è chiamata *costo marginale per l'incremento della produzione da $x - 1$ quintali a x quintali di merce.*

3. [3pt] 1) Per la funzione $f(x) = e^{5(x-1)^2}$ si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 1$, specificando con precisione le proprietà del resto.

   [3pt] 2) Si calcoli
$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{5(x-1)^2} - 4 + 3\cos(x - 1)}{(x - 1)^2}.$$
   NOTA: Il polinomio di Taylor ricavato sopra può essere utilizzato per calcolare il limite.

4. [3pt] 1) Si enunci e si dimostri il teorema che lega la derivabilità di una funzione alla sua continuità.

   [3pt] 2) Si dia un esempio, se esiste, di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è discontinua in un solo punto e non derivabile in un diverso punto.

5. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è presente un errore nell'affermazione oppure no; nel caso ci sia un errore, si corregga tale errore. Ogni risposta deve essere giustificata.
   [1pt] 1) Per la funzione $f(x) = -x^3$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{-h^3+x_0^3}{h}$.
   [2pt] 2) Il teorema di Fermat stabilisce che: *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è un punto di minimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*
   [2pt] 3) Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è interno per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se esiste un intorno di x_0 che contiene infiniti punti di A.
   [2pt] 4) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e strettamente monotona e se in $x \in (a, b)$ si ha $f'(x) = 0$, allora la funzione inversa è derivabile in $f(x)$.

Soluzioni Testo C

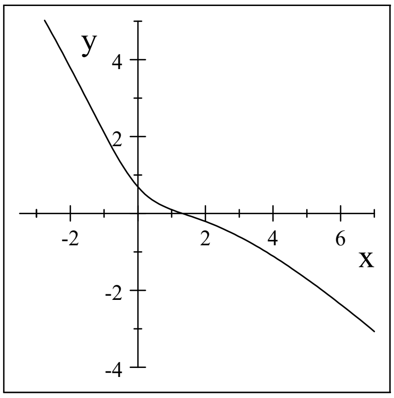
1. Poiche' $x^2 + 2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f e' $\mathbb{R}$. Questa funzione non e' pari, ne' dispari, ne' periodica; e' derivabile (e dunque continua) in $\mathbb{R}$ in quanto composizione e differenza di funzioni derivabili.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty-(-\infty)$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-\infty$, ma $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x^2+2)-x) = \lim_{x\to+\infty}((\ln(x^2))-x) = \lim_{x\to+\infty}(2(\ln x)-x) = -\infty$ in virtu' della gerarchia tra infiniti. Questi due limiti implicano che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, e poiche' f e' continua nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ e' possibile applicare una versione del teorema dei valori intermedi per concludere che $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$. Ancora dai due limiti discende che esista un a (negativo e grande in valore assoluto) tale che $f(a) > 0$, e che esista un b (positivo e grande in valore assoluto) tale che $f(b) < 0$. Poiche' f e' continua in $[a, b]$, il teorema degli zeri implica che esista almeno un $x_1 \in (a, b)$ tale che $f(x_1) = 0$.

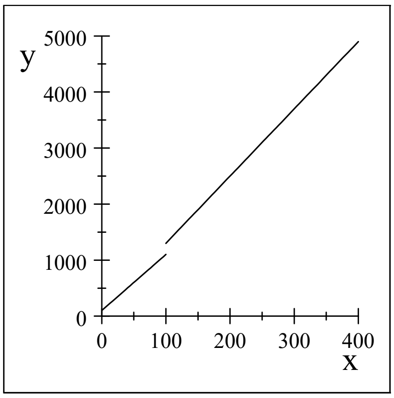
   $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - 1 = \frac{-x^2+2x-2}{x^2+2} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque f e' strettamente decrescente in $\mathbb{R}$; questo implica l'esistenza di un <u>unico</u> $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) = 0$. Poiche' $f(0) = \ln 2 > 0$ ed f e' strettamente decrescente, si deduce che $x_1 > 0$.

   $f''(x) = \frac{(-2x+2)(x^2+2)-2x(-x^2+2x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$, e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Dunque f e' concava in $(-\infty, -\sqrt{2})$, convessa in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, concava in $(\sqrt{2}, +\infty)$.

   Pertanto il grafico di f e'



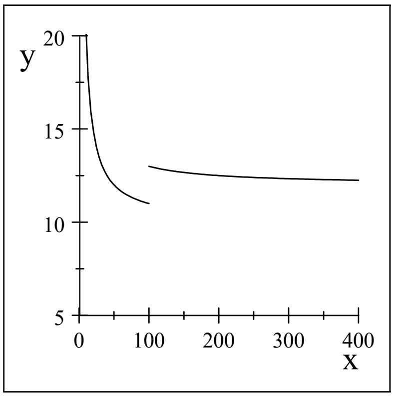
2. 1) L'insieme di definizione di C e' $(0, 400]$. Il grafico di C e'



   2) Poiche' C e' monotona strettamente crescente (come risulta dal grafico), si deduce che C e' iniettiva, e dunque esiste la funzione inversa C^{-1}. $C^{-1}(220)$ e' il valore di x tale che $C(x) = 220$, ovvero tale che $100 + 10x = 220$, cioe' $x = 12$ (l'equazione $100 + 12x = 220$ non ha soluzioni nell'intervallo $(100, 400]$). In termini economici, 12 e' la quantita' il cui costo di produzione e' uguale a 220. $C^{-1}(20)$ non esiste perche' $C(x) \neq 20$ per ogni $x \in (0, 400]$ (per la precisione, $C(x) > 100$ per ogni $x \in (0, 400]$), e dunque 20 non e' un elemento dell'insieme immagine di C.

   3) $g(x) = \begin{cases} \frac{100}{x} + 10 & \text{per } x \in (0, 100] \\ \frac{100}{x} + 12 & \text{per } x \in (100, 400] \end{cases}$ e' una funzione strettamente decrescente in $(0, 100]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e' strettamente decrescente e 10 e' costante) e strettamente decrescente in $(100, 400]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e'

strettamente decrescente e 12 e' costante). Dunque calcoliamo $g(100) = 11$ e $g(400) = 12.25$ e concludiamo che 100 e' il punto di minimo globale per g e $\min g = 11$. Il grafico di g e'



4) $C(x) - C(x-1) = \begin{cases} 10 & \text{se } 1 < x \le 100 \\ 2x + 10 & \text{se } 100 < x \le 101 \\ 12 & \text{se } 101 < x \le 400 \end{cases}$

3. 1) Risulta che $f(1) = 1$, $f'(x) = e^{5(x-1)^2} \cdot 10(x-1)$, $f'(1) = 0$, $f''(x) = e^{5(x-1)^2} \cdot 10(x-1) \cdot 10(x-1) + e^{5(x-1)^2} \cdot 10 = e^{5(x-1)^2}\left(-200x + 100x^2 + 110\right)$, $f''(1) = 10$, quindi $P_2(x) = 1 + 5(x-1)^2$. Pertanto $e^{5(x-1)^2} = 1 + 5(x-1)^2 + R_2(x,1)$ con $\lim_{x\to 1} \frac{R_2(x,1)}{(x-1)^2} = 0$.

   2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{e^{5(x-1)^2} - 4 + 3\cos(x-1)}{(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{1 + 5(x-1)^2 + R_2(x,1) - 4 + 3\cos(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{5\,(x-1)^2 - 3\,(1 - \cos(x-1)) + R_2(x,1)}{(x-1)^2} = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

4. 1) Si veda il teorema 8.1 nel libro di testo.

   2) Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in (-\infty, 4] \\ 7 & \text{se } x \in (4, 7] \\ x & \text{se } x \in (7, +\infty) \end{cases}$. Questa funzione e' discontinua in $x_0 = 4$ (perche' $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2 \ne \lim_{x\to 4^+} f(x) = 7$, quindi $\lim_{x\to 4} f(x)$ non esiste e non puo' essere uguale a $f(4)$) e non derivabile in $x_1 = 7$ (perche' $f'_-(7) = 0 \ne f'_+(7) = 1$, quindi $f'(7)$ non esiste).

5. 1) Data $f(x) = -x^3$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{-(x_0+h)^3 + x_0^3}{h} = -h^2 - 3hx_0 - 3x_0^2$, non uguale a $\frac{-h^3 + x_0^3}{h}$.

   2) L'affermazione e' errata in quanto l'enunciato del teorema di Fermat richiede che x_0 sia punto interno per il dominio di f, e la condizione $x_0 \in [a,b]$ permette che x_0 sia uguale ad a, oppure uguale a b, i quali non sono punti interni per il dominio di f. In aggiunta, il teorema di Fermat consente che x_0 sia un punto di max locale per f.

   3) L'affermazione e' errata in quanto un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice interno per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se esiste un intorno di x_0 che e' sottoinsieme di A. In base alla condizione enunciata nel testo dell'esame, il punto $x_0 = 5$ e' punto interno per l'insieme $A = [1,3]$, in quanto esiste un intorno di 5 che contiene infiniti punti di A: ad esempio si consideri $I(5) = (2,8)$.

   4) L'affermazione e' errata. Per vedere perche', consideriamo la funzione $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la quale e' derivabile in $\mathbb{R}$ e monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Per questa funzione, $x_0 = 0$ e' tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ma f^{-1} (cioe' la funzione radice terza) non e' derivabile nel punto 0.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 Gennaio 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (6 punti)
(a) Si scrivano le definizioni di insieme aperto e di insieme chiuso.
(b) Si stabilisca quali dei seguenti insiemi sono aperti, quali sono chiusi e quali sono né aperti né chiusi:

$$A = [0, 1] \cup \{2\}, \quad B = (0, 1) \cup \{2\}, \quad C = A - B$$

Esercizio 2 (8 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro. Si consideri la funzione definita a tratti come segue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ a - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua.
(b) Si tracci il grafico di f corrispondente al valore $a = 0$ e quello corrispondente al valore $a = 1$.
(c) Si ricavi l'insieme $f^{-1}(D)$ con $D = \{1\}$ nel caso $a = 0$ e nel caso $a = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Sia scriva la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

(b) Utilizzando la definizione del punto (a), si dimostri che

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| = -\infty$$

(c) Si calcoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|1 - x| - x^2 + e^x}{|2e^x - \ln x|}$$

Esercizio 4 (12 punti)
Si studi

$$f(x) = \frac{x - 1}{\ln(x - 1)}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 5 (6 punti)
Sia data la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[5]{x^2}$$

(a) Si scriva la definizione di funzione derivabile in un punto e si dica se f è derivabile in 0;
(b) Si scriva la definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un punto e si calcoli l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ per il quale $f(x_0) = 1$ e $x_0 > 0$.

Soluzioni Testo d'esame A

Esercizio 1 (a) Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se ogni suo punto è punto interno per A. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se il suo insieme complementare è aperto.

(b) A è chiuso, B e' né chiuso né aperto; $C = \{0, 1\}$ è chiuso.

Esercizio 2 (a) Questa funzione e' continua in ogni punto $x_0 \neq 0$ poiche' $y = e^x$ e $y = a - x$ sono funzioni continue. Relativamente al punto $x_0 = 0$ si ha

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a - x) = a$$

Dunque f è continua in $x_0 = 0$ (e quindi in $\mathbb{R}$) se e solo se $a = 1$.

(b)

grafico di f quando $a = 0$:

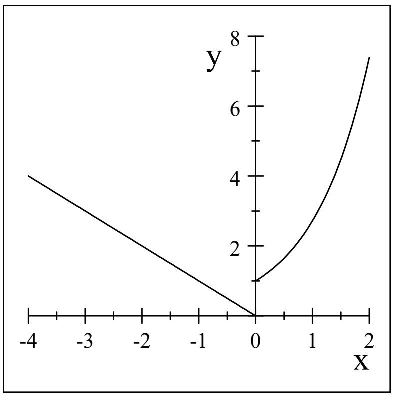
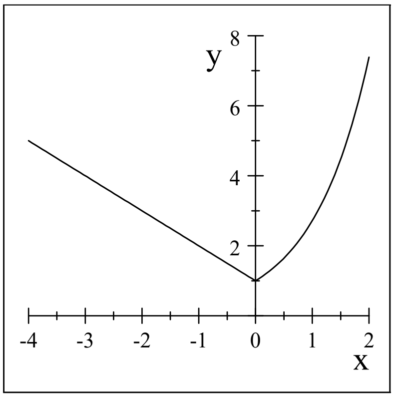


grafico di f quando $a = 1$:



(c) I grafici al punto (b) rivelano che $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 0\}$ se $a = 0$, $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ se $a = 1$.

Esercizio 3 (a) Data $f : A \to \mathbb{R}$, se x_0 e' un punto di accumulazione per A allora si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in (I(x_0) - \{x_0\}) \cap A$ vale $f(x) < -M$.

(b) Si noti che l'insieme di definizione di $\ln\left|x - \frac{1}{2}\right|$ è $A = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, per cui $x_0 = \frac{1}{2}$ e' un punto di accumulazione per A. Per dimostrare che $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln\left|x - \frac{1}{2}\right| = -\infty$ in base alla definizione, consideriamo la disequazione

$$\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| < -M$$

che e' equivalente (per $x \neq \frac{1}{2}$) a $\left|x - \frac{1}{2}\right| < e^{-M}$ e ha per soluzione l'insieme $(\frac{1}{2} - e^{-M}, \frac{1}{2} + e^{-M})$. Dunque $\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| < -M$ se e solo se $x \in \left((\frac{1}{2} - e^{-M}, \frac{1}{2} + e^{-M}) - \{\frac{1}{2}\}\right)$, e $I(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - e^{-M}, \frac{1}{2} + e^{-M})$ soddisfa la definizione (anche un qualsiasi altro intorno di $\frac{1}{2}$ che sia sottoinsieme di $(\frac{1}{2} - e^{-M}, \frac{1}{2} + e^{-M})$ soddisfa la definizione).

(c) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|1-x| - x^2 + e^x}{|2e^x - \ln x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1 + x - x^2 + e^x}{2e^x - \ln x}$$

e sia al numeratore che al denominatore compaiono termini che hanno per limite $+\infty$ o $-\infty$. Risulta che e^x e' l'infinito di ordine superiore al numeratore, e^{2x} e' l'infinito di ordine superiore al denominatore. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|1-x| - x^2 + e^x}{|2e^x - \ln x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 4 Un numero reale x appartiene all'insieme di definizione A di f se e solo se $x-1>0$ e $\ln(x-1)\neq 0$. Quindi $A=(1,2)\cup(2,+\infty)$, e in tale insieme f e' derivabile (perche' e' il quoziente di funzioni derivabili), dunque continua.

Il numeratore di f e' positivo per ogni $x\in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di f. Quindi $f(x)>0$ se e solo se $\ln(x-1)>0$, ovvero se e solo se $x>2$; $f(x)<0$ se e solo se $\ln(x-1)<0$, ovvero se e solo se $x\in(1,2)$; $f(x)\neq 0$ per ogni $x\in A$.

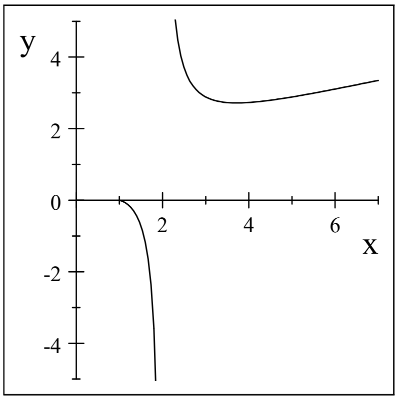
I limiti da calcolare sono

- $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{0^+}{-\infty}$, dunque $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0^-$;
- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{1}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ e la retta verticale $x=2$ e' asintoto verticale per f;
- $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$;
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ per la gerarchia tra infiniti (dopo aver applicato la sostituzione $y=x-1$).

La derivata prima di f e'

$$f'(x)=\frac{\ln(x-1)-(x-1)\frac{1}{x-1}}{(\ln(x-1))^2}=\frac{\ln(x-1)-1}{(\ln(x-1))^2}$$

e $(\ln(x-1))^2>0$ per ogni $x\in A$, dunque il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\ln(x-1)-1$ in A. Risulta che $\ln(x-1)-1>0$ se e solo se $x>e+1$, e $\ln(x-1)-1<0$ se e solo se $x\in(1,e+1)-\{2\}$ (si ricordi che 2 non appartiene ad A). Pertanto f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(1,2)$ e nell'intervallo $(2,1+e)$; f e' monotona strettamente crescente nell'intervallo $(1+e,+\infty)$. Il grafico di f e' il seguente:



Dai limiti sappiamo che $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$, dunque non esistono $\max f$ ne' $\min f$. Esiste un punto di minimo relativo, $x=1+e$, tale che $f(1+e)=e$.

Esercizio 5 (a) Data $f:A\to\mathbb{R}$ e dato $x_0\in A$ punto di accumulazione per A, si dice che f e' derivabile in x_0 se $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste ed e' finito.

Per $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$, il calcolo del limite del rapporto incrementale in $x_0=0$ e'

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2/5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{3/5}}$$

e questo limite non esiste: $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{3/5}}=+\infty$, $\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{3/5}}=-\infty$. Dunque f non è derivabile in $x_0=0$.

(b) Se una funzione f e' derivabile in un punto x_0, allora la retta di equazione $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ si dice retta tangente al grafico di f in $(x_0,f(x_0))$. La funzione considerata e' derivabile in ogni punto $x_0\neq 0$, con $f'(x_0)=\frac{2}{5}x_0^{-3/5}$. Il punto $x_0>0$ tale che $f(x_0)=1$ soddisfa $x_0^{2/5}=1$, quindi $x_0=\pm 1$, ma poiche' $x_0>0$ si deduce che $x_0=1$. Poiche' $f'(1)=\frac{2}{5}$, la retta tangente al grafico di f in $(1,1)$ ha equazione

$$y=1+\frac{2}{5}(x-1)=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}.$$

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 Gennaio 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (6 punti)

(a) Si scrivano le definizioni di insieme aperto e di insieme chiuso.

(b) Si stabilisca quali dei seguenti insiemi sono aperti, quali sono chiusi e quali sono né aperti né chiusi:

$$A = [0,2] \cup \{3\}, \quad B = (0,2) \cup \{3\}, \quad C = A - B$$

Esercizio 2 (8 punti)

Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro. Si consideri la funzione definita a tratti come segue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \geq 1 \\ a - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua.

(b) Si tracci il grafico di f corrispondente al valore $a = 0$ e quello corrispondente al valore $a = 1$.

(c) Si ricavi l'insieme $f^{-1}(D)$ con $D = \{1\}$ nel caso $a = 0$ e nel caso $a = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Sia scriva la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

(b) Utilizzando la definizione del punto (a), si dimostri che

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

(c) Si calcoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|5 - x| - x^3 + e^x}{|e^x - 2\ln x|}$$

Esercizio 4 (12 punti)

Si studi

$$f(x) = \frac{x - 2}{\ln(x - 2)}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 5 (6 punti)

Sia data la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

(a) Si scriva la definizione di funzione derivabile in un punto e si dica se f è derivabile in 0;

(b) Si scriva la definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un punto e si calcoli l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ per il quale $f(x_0) = 1$ e $x_0 > 0$.

Soluzioni Testo d'esame B

Esercizio 1 (a) Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se ogni suo punto è punto interno per A. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se il suo insieme complementare è aperto.

(b) A è chiuso, B e' né chiuso né aperto; $C = \{0, 2\}$ è chiuso.

Esercizio 2 (a) Questa funzione e' continua in ogni punto $x_0 \neq 1$ poiche' $y = \ln x$ e $y = a - x$ sono funzioni continue. Relativamente al punto $x_0 = 1$ si ha

$$f(1) = 0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln x = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (a - x) = a - 1$$

Dunque f è continua in $x_0 = 1$ (e quindi in $\mathbb{R}$) se e solo se $a = 1$.

(b)

grafico di f quando $a = 0$:

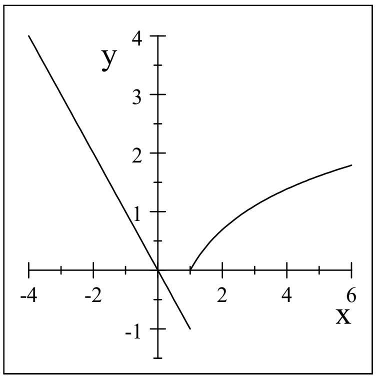
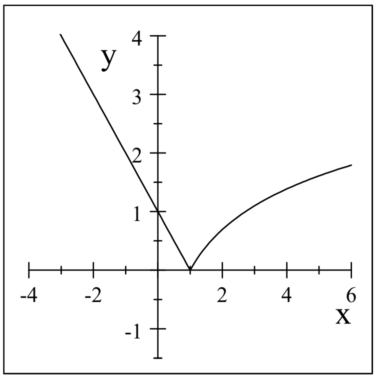


grafico di f quando $a = 1$:



(c) I grafici al punto (b) rivelano che $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, e\}$ se $a = 0$, $f^{-1}(\{1\}) = \{0, e\}$ se $a = 1$.

Esercizio 3 (a) Data $f : A \to \mathbb{R}$, se x_0 e' un punto di accumulazione per A allora si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in (I(x_0) - \{x_0\}) \cap A$ vale $f(x) > M$.

(b) Si noti che l'insieme di definizione di $e^{\frac{1}{x^2}}$ è $A = \mathbb{R} - \{0\}$, per cui $x_0 = 0$ e' un punto di accumulazione per A. Per dimostrare che $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$ in base alla definizione, consideriamo la disequazione (con $M > 0$ e grande)

$$e^{\frac{1}{x^2}} > M$$

che e' equivalente a $\frac{1}{x^2} > \ln M$, ovvero a (per $x \neq 0$, e dato $M > 1$, dato che $M > 0$ e' grande) $\frac{1}{\ln M} > x^2$ e ha per soluzione l'insieme $(-\sqrt{\frac{1}{\ln M}}, \sqrt{\frac{1}{\ln M}})$. Dunque $e^{\frac{1}{x^2}} > M$ se e solo se $x \in \left((-\sqrt{\frac{1}{\ln M}}, \sqrt{\frac{1}{\ln M}}) - \{0\}\right)$, e $I(0) = (-\sqrt{\frac{1}{\ln M}}, \sqrt{\frac{1}{\ln M}})$ soddisfa la definizione (anche un qualsiasi altro intorno di 0 che sia sottoinsieme di $(-\sqrt{\frac{1}{\ln M}}, \sqrt{\frac{1}{\ln M}})$ soddisfa la definizione).

(c) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|5 - x| - x^3 + e^x}{|e^x - 2\ln x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5 + x - x^3 + e^x}{e^x - 2\ln x}$$

e sia al numeratore che al denominatore compaiono termini che hanno per limite $+\infty$ o $-\infty$. Risulta che e^x e' l'infinito di ordine superiore al numeratore, e^x e' l'infinito di ordine superiore al denominatore. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5+x-x^3+e^x}{e^x-2\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Esercizio 4 Un numero reale x appartiene all'insieme di definizione A di f se e solo se $x-2>0$ e $\ln(x-2)\neq 0$. Quindi $A=(2,3)\cup(3,+\infty)$, e in tale insieme f e' derivabile (perche' e' il quoziente di funzioni derivabili), dunque continua.

Il numeratore di $f(x)$ e' positivo per ogni $x\in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore. Quindi $f(x)>0$ se e solo se $\ln(x-2)>0$, ovvero se e solo se $x>3$; $f(x)<0$ se e solo se $\ln(x-2)<0$, ovvero se e solo se $x\in(2,3)$; $f(x)\neq 0$ per ogni $x\in A$.

I limiti da calcolare sono

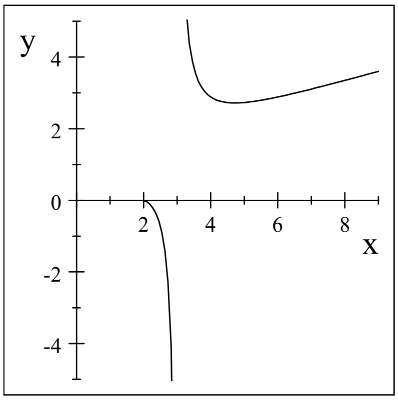
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{0^+}{-\infty}$, dunque $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0^-$;
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ e la retta verticale $x=3$ e' asintoto verticale per f;
- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per la gerarchia tra infiniti (dopo aver applicato la sostituzione $y=x-2$).

La derivata prima di f e'

$$f'(x) = \frac{\ln(x-2)-(x-2)\frac{1}{x-2}}{(\ln(x-2))^2} = \frac{\ln(x-2)-1}{(\ln(x-2))^2}$$

e $(\ln(x-2))^2>0$ per ogni $x\in A$, dunque il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\ln(x-2)-1$ in A. Risulta che $\ln(x-2)-1>0$ se e solo se $x>2+e$, e $\ln(x-1)-1<0$ se e solo se $x\in(2,2+e)-\{3\}$ (si ricordi che 3 non appartiene ad A). Pertanto f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(2,3)$ e nell'intervallo $(3,2+e)$; f e' monotona strettamente crescente nell'intervallo $(2+e,+\infty)$.

Grafico di f :



Dai limiti sappiamo che $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$, dunque non esistono $\max f$ ne' $\min f$. Esiste un punto di minimo locale, $x=2+e$, tale che $f(2+e)=e$.

Esercizio 5 (a) Data $f: A\to\mathbb{R}$ e dato $x_0\in A$ punto di accumulazione per A, si dice che f e' derivabile in x_0 se $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste ed e' finito.

Per $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, il calcolo del limite del rapporto incrementale in $x_0=0$ e'

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

e questo limite non esiste: $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{1/3}}=+\infty$, $\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{1/3}}=-\infty$. Dunque f non è derivabile in $x_0=0$.

(b) Se una funzione f e' derivabile in un punto x_0, allora la retta di equazione $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ si dice retta tangente al grafico di f in $(x_0,f(x_0))$. La funzione considerata e' derivabile in ogni punto $x_0\neq 0$, con $f'(x_0) = \frac{2}{3}x_0^{-1/3}$. Il punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) = 1$ soddisfa $x_0^{2/3} = 1$, quindi $x_0 = \pm 1$, ma poiche' $x_0 > 0$ si deduce che $x_0 = 1$. Poiche' $f'(1) = \frac{2}{3}$, la retta tangente al grafico di f in $(1, 1)$ ha equazione

$$y = 1 + \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 Gennaio 2017
Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (6 punti)
(a) Si scrivano le definizioni di insieme aperto e di insieme chiuso.
(b) Si stabilisca quali dei seguenti insiemi sono aperti, quali sono chiusi e quali sono né aperti né chiusi:

$$A = (1, 2) \cup \{0\}, \quad B = [1, 2] \cup \{0\}, \quad C = B - A$$

Esercizio 2 (8 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro. Si consideri la funzione definita a tratti come segue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x - a & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua.
(b) Si tracci il grafico di f corrispondente al valore $a = 0$ e quello corrispondente al valore $a = 1$.
(c) Si ricavi l'insieme $f^{-1}(D)$ con $D = \{-1\}$ nel caso $a = 0$ e nel caso $a = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Sia scriva la definizione di

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(b) Utilizzando la definizione del punto (a), si dimostri che

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

(c) Si calcoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x - 1| + x^2 - e^x}{|2e^x - \ln x|}$$

Esercizio 4 (12 punti)
Si studi

$$f(x) = \frac{x + 1}{\ln(x + 1)}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 5 (6 punti)
Sia data la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[7]{x^4}$$

(a) Si scriva la definizione di funzione derivabile in un punto e si dica se f è derivabile in 0;
(b) Si scriva la definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un punto e si calcoli l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ per il quale $f(x_0) = 1$ e $x_0 > 0$.

Soluzioni Testo d'esame C

Esercizio 1 (a) Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se ogni suo punto è punto interno per A. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se il suo insieme complementare è aperto.

(b) A è né chiuso né aperto, B e' chiuso; $C = \{1, 2\}$ è chiuso.

Esercizio 2 (a) Questa funzione e' continua in ogni punto $x_0 \neq 0$ poiche' $y = -e^x$ e $y = x - a$ sono funzioni continue. Relativamente al punto $x_0 = 0$ si ha

$$f(0) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-e^x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - a) = -a$$

Dunque f è continua in $x_0 = 0$ (e quindi in $\mathbb{R}$) se e solo se $a = 1$.

(b)

grafico di f quando $a = 0$:

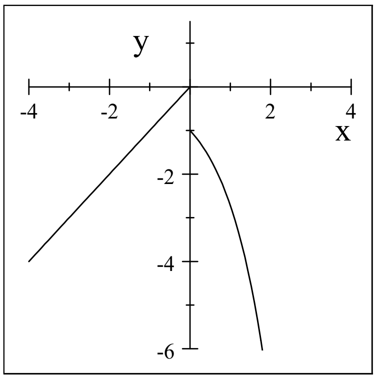
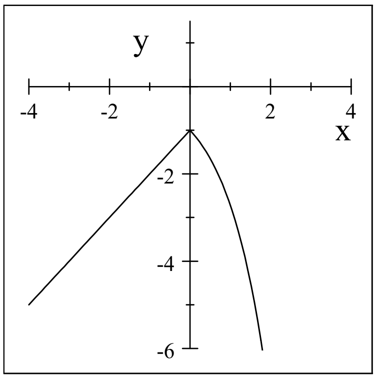


grafico di f quando $a = 1$:



(c) I grafici al punto (b) rivelano che $f^{-1}(\{-1\}) = \{-1, 0\}$ se $a = 0$, $f^{-1}(\{-1\}) = \{0\}$ se $a = 1$.

Esercizio 3 (a) Data $f : A \to \mathbb{R}$, se A e' superiormente illimitato allora si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste ν tale che per ogni $x \in A$ e $x > \nu$ vale $f(x) > M$.

(b) Si noti che l'insieme di definizione di $\ln x$ è $A = (0, +\infty)$, un insieme superiormente illimitato. Per dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ in base alla definizione, consideriamo la disequazione

$$\ln x > M$$

che e' equivalente a $x > e^M$. Dunque $\ln x > M$ se e solo se $x > e^M$, ovvero $\nu = e^M$ soddisfa la definizione (anche un qualsiasi altro ν che sia maggiore di e^M soddisfa la definizione).

(c) Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x - 1| + x^2 - e^x}{|2e^x - \ln x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1 + x^2 - e^x}{2e^x - \ln x}$$

e sia al numeratore che al denominatore compaiono termini che hanno per limite $+\infty$ o $-\infty$. Risulta che $-e^x$ e' l'infinito di ordine superiore al numeratore, $2e^x$ e' l'infinito di ordine superiore al denominatore. Dunque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1 + x^2 - e^x}{2e^x - \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 4 Un numero reale x appartiene all'insieme di definizione A di f se e solo se $x+1>0$ e $\ln(x+1)\neq 0$. Quindi $A=(-1,0)\cup(0,+\infty)$, e in tale insieme f e' derivabile (perche' e' il quoziente di funzioni derivabili), dunque continua.

Il numeratore di $f(x)$ e' positivo per ogni $x\in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore. Quindi $f(x)>0$ se e solo se $\ln(x+1)>0$, ovvero se e solo se $x>0$; $f(x)<0$ se e solo se $\ln(x+1)<0$, ovvero se e solo se $x\in(-1,0)$; $f(x)\neq 0$ per ogni $x\in A$.

I limiti da calcolare sono

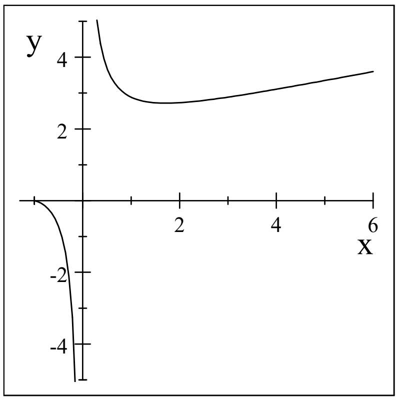
- $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{0^+}{-\infty}$, dunque $\lim_{x\to -1^+} f(x)=0^-$;
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ e la retta verticale $x=0$ (cioe' l'asse delle y) e' asintoto verticale per f;
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$;
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ per la gerarchia tra infiniti (dopo aver applicato la sostituzione $y=x+1$).

La derivata prima di f e'

$$f'(x)=\frac{\ln(x+1)-(x+1)\frac{1}{x+1}}{(\ln(x+1))^2}=\frac{\ln(x+1)-1}{(\ln(x+1))^2}$$

e $(\ln(x+1))^2>0$ per ogni $x\in A$, dunque il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\ln(x+1)-1$ in A. Risulta che $\ln(x+1)-1>0$ se e solo se $x>e-1$, e $\ln(x+1)-1<0$ se e solo se $x\in(-1,e-1)-\{0\}$ (si ricordi che 0 non appartiene ad A). Pertanto f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(-1,0)$ e nell'intervallo $(0,e-1)$; f e' monotona strettamente crescente nell'intervallo $(e-1,+\infty)$.

Grafico di f :



Dai limiti sappiamo che $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$, dunque non esistono $\max f$ ne' $\min f$. Esiste un punto di minimo locale, $x=e-1$, tale che $f(e-1)=e$.

Esercizio 5 (a) Data $f:A\to\mathbb{R}$ e dato $x_0\in A$ punto di accumulazione per A, si dice che f e' derivabile in x_0 se $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste ed e' finito.

Per $f(x)=\sqrt[7]{x^4}$, il calcolo del limite del rapporto incrementale in $x_0=0$ e'

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{4/7}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{3/7}}$$

e questo limite non esiste: $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{3/7}}=+\infty$, $\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{3/7}}=-\infty$. Dunque f non è derivabile in $x_0=0$.

(b) Se una funzione f e' derivabile in un punto x_0, allora la retta di equazione $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ si dice retta tangente al grafico di f in $(x_0,f(x_0))$. La funzione considerata e' derivabile in ogni punto $x_0\neq 0$, con $f'(x_0)=\frac{4}{7}x_0^{-3/7}$. Il punto $x_0>0$ tale che $f(x_0)=1$ soddisfa $x_0^{4/7}=1$, quindi $x_0=\pm 1$, ma poiche' $x_0>0$ si deduce che $x_0=1$. Poiche' $f'(1)=\frac{4}{7}$, la retta tangente al grafico di f in $(1,1)$ ha equazione

$$y=1+\frac{4}{7}(x-1)=\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}.$$

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 17 Febbraio 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (3 punti) Si scrivano le seguenti definizioni: funzione continua in un punto, funzione iniettiva, funzione concava.

Esercizio 2 (7 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(2a) Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(0) < f(3)$, allora $\mathrm{Im}(f) = [f(0), f(3)]$.

(2b) Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ è iniettiva, allora f è monotona strettamente crescente o monotona strettamente decrescente.

(2c) Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ è concava e $f(0) < f(3)$, allora 0 è punto di minimo globale per f.

Esercizio 3 (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)x}{(\sin(2x))(\ln(1+x))}$$

Esercizio 4 (5 punti) Data la funzione $f(x) = 2x^5 \ln(x)$,

(4a) si determini l'insieme di definizione A di f;

(4b) si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di f;

(4c) si determinino gli intervalli di concavità/convessità di f in A.

Esercizio 5 (9 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x < 0\}$$

(5a) si esprima A come unione di intervalli disgiunti;

(5b) si determinino l'insieme dei maggioranti e l'estremo superiore dell'insieme A;

(5c) si determinino l'insieme dei punti interni per A e l'insieme dei punti di accumulazione per A.

Esercizio 6 (10 punti) Si studi la funzione

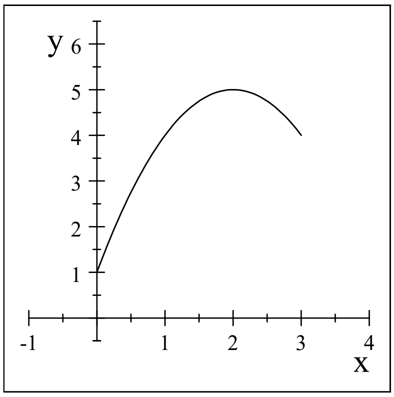
$$f(x) = \frac{xe^x}{4x+3}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

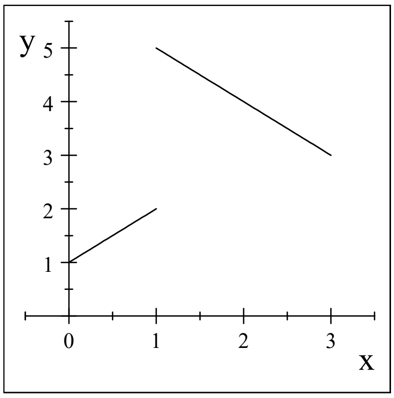
Soluzioni per il testo d'esame A

Esercizio 1 Si veda il libro di testo.

Esercizio 2 (2a) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, che ha il seguente grafico:



Allora $f(0) = 1$, $f(3) = 4$, ma $\mathrm{Im}(f)$ non è uguale a $[1, 4]$ poiché, ad esempio, $f(2) = 5$ e $5 \notin [1, 4]$.
(2b) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 6-x & \text{se } x \in (1,3] \end{cases}$, che ha il seguente grafico:



Questa funzione è iniettiva ma non è monotona strettamente crescente né monotona strettamente decrescente.
(2c) L'affermazione è vera. Dimostriamo qui che $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in [0, 3]$. Ponendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ nella definizione di funzione concava si ottiene la seguente proprietà: $f(x) \geq f(0) + \frac{f(3)-f(0)}{3}x$ per ogni $x \in [0, 3]$. Poiché $f(3) > f(0)$, si deduce che $\frac{f(3)-f(0)}{3} > 0$ e dunque $\frac{f(3)-f(0)}{3}x \geq 0$ per ogni $x \in [0, 3]$. Pertanto $f(x) \geq f(0) + \frac{f(3)-f(0)}{3}x \geq f(0)$ per ogni $x \in [0, 3]$.

Esercizio 3 (3a) $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x+1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4} \frac{x-4}{(x+1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}$.
(3b) $\lim_{x\to0} \frac{(e^x-1)x}{(\sin(2x))(\ln(1+x))} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to0} \frac{\frac{e^x-1}{x}\frac{x}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1\cdot1}{2\cdot1} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 (4a) L'insieme di definizione A di f è $(0, +\infty)$.
(4b) $f'(x) = 10x^4\ln(x) + 2x^4$, $f''(x) = 10\left(4x^3\ln(x) + x^3\right) + 8x^3 = 2x^3\left(20\ln(x) + 9\right)$.
(4c) Per ogni $x \in A$ si ha che $2x^3 > 0$, e $20\ln(x) + 9 \geq 0$ equivale a $\ln(x) \geq -\frac{9}{20}$, ovvero $x \geq e^{-9/20}$ ($20\ln(x) + 9 \leq 0$ equivale a $0 < x \leq e^{-9/20}$). Pertanto f è convessa nell'intervallo $[e^{-9/20}, +\infty)$, f è concava nell'intervallo $(0, e^{-9/20}]$.

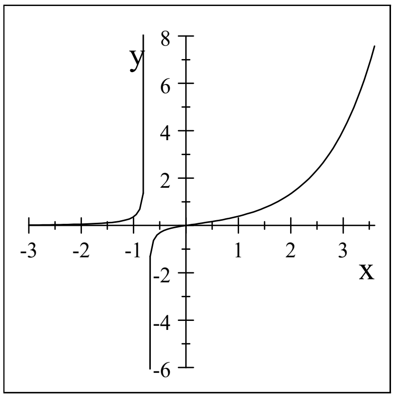
Esercizio 5 (5a) Per la disequazione $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. Per la disequazione $x^2 - 8x < 0$ l'insieme delle soluzioni è $(0, 8)$. Pertanto $A = ((-\infty, 1] \cup [4, +\infty)) \cap (0, 8) = (0, 1] \cup [4, 8)$.

(5b) L'insieme dei maggioranti per A è $[8, +\infty)$, quindi $\sup A = 8$.
(5c) L'insieme dei punti interni per A è $(0, 1) \cup (4, 8)$. L'insieme dei punti di accumulazione per A è $[0, 1] \cup [4, 8]$.

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : 4x + 3 \neq 0\} = (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}, +\infty)$.
Per studiare il segno di $f(x)$ è utile osservare che $e^x > 0$ per ogni $x \in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{x}{4x+3}$. Poiché $4x + 3 < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{3}{4})$ e $4x + 3 > 0$ per $x \in (-\frac{3}{4}, +\infty)$, risulta che $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{3}{4})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{3}{4}, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.
f non è pari, né dispari, né periodica.
Per calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{4x+3} = \frac{1}{4}$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x\to-\frac{3}{4}^-} f(x) = \frac{-\frac{3}{4}e^{-3/4}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{3}{4}^-} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to-\frac{3}{4}^+} f(x) = \frac{-\frac{3}{4}e^{-3/4}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{3}{4}^+} f(x) = -\infty$.
Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4x+3} = \frac{1}{4}$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(4x + 3) - 4xe^x}{(4x + 3)^2} = (4x^2 + 3x + 3)\frac{e^x}{(4x + 3)^2}$$

Al fine di studiarne il segno in A, è utile osservare che $\frac{e^x}{(4x+3)^2} > 0$ per ogni $x \in A$, e quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $4x^2 + 3x + 3$. Poiché $4x^2 + 3x + 3 > 0$ per ogni $x \in A$, si deduce che f è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{3}{4})$ ed è monotona strettamente crescente anche nell'intervallo $(-\frac{3}{4}, +\infty)$. Pertanto non esistono per questa funzione punti di max/min locali/globali; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Il grafico di f è



Matematica per le Applicazioni Economiche I, 17 Febbraio 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (3 punti) Si scrivano le seguenti definizioni: funzione continua in un punto, funzione iniettiva, funzione concava.

Esercizio 2 (7 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(2a) Se $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(1) > f(4)$, allora $\mathrm{Im}(f) = [f(4), f(1)]$.

(2b) Se $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ è iniettiva, allora f è monotona strettamente crescente o monotona strettamente decrescente.

(2c) Se $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ è concava e $f(1) > f(4)$, allora 4 è punto di minimo globale per f.

Esercizio 3 (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 7x - 18}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x \sin(x)}{(e^x - 1)(\ln(1 + 3x))}$$

Esercizio 4 (5 punti) Data la funzione $f(x) = 3x^4 \ln(x)$,

(4a) si determini l'insieme di definizione A di f;

(4b) si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di f;

(4c) si determinino gli intervalli di concavità/convessità di f in A.

Esercizio 5 (9 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 10 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9x < 0\}$$

(5a) si esprima A come unione di intervalli disgiunti;

(5b) si determinino l'insieme dei maggioranti e l'estremo superiore dell'insieme A;

(5c) si determinino l'insieme dei punti interni per A e l'insieme dei punti di accumulazione per A.

Esercizio 6 (10 punti) Si studi la funzione

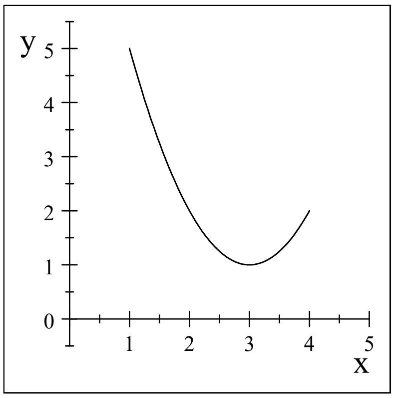
$$f(x) = \frac{xe^x}{2x + 5}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

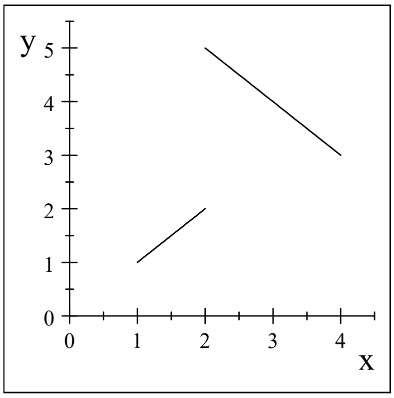
Soluzioni per il testo d'esame B

Esercizio 1 Si veda il libro di testo.

Esercizio 2 (2a) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $f : [1,4] \to \mathbb{R}$, che ha il seguente grafico:



Allora $f(1) = 5$, $f(4) = 2$, ma $\mathrm{Im}(f)$ non è uguale a $[2,5]$ poiché, ad esempio, $f(3) = 1$ e $1 \notin [2,5]$.
(2b) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [1,2] \\ 7-x & \text{se } x \in (2,4] \end{cases}$, che ha il seguente grafico:



Questa funzione è iniettiva ma non è monotona strettamente crescente né monotona strettamente decrescente.
(2c) L'affermazione è vera. Dimostriamo qui che $f(x) \geq f(4)$ per ogni $x \in [1,4]$. Ponendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$ nella definizione di funzione concava si ottiene la seguente proprietà: $f(x) \geq f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)$ per ogni $x \in [1,4]$. Poiché $f(1) > f(4)$, si deduce che $\frac{f(4)-f(1)}{3} < 0$ e dunque $y = f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)$ è una funzione strettamente decrescente in x, dunque $f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1) \geq f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(4-1) = f(4)$ per ogni $x \in [1,4]$. Dunque $f(x) \geq f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1) \geq f(4)$ per ogni $x \in [1,4]$.

Esercizio 3 (3a) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x^2-7x-18} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(x+2)(x-9)} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x+2)(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x+2)(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{66}$.
(3b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{(e^x-1)(\ln(1+3x))} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4 (4a) L'insieme di definizione A di f è $(0,+\infty)$.
(4b) $f'(x) = 12x^3\ln(x) + 3x^3$, $f''(x) = 12\left(3x^2\ln(x) + x^2\right) + 9x^2 = 3x^2\left(12\ln(x) + 7\right)$.
(4c) Per ogni $x \in A$ si ha che $3x^2 > 0$, e $12\ln(x) + 7 \geq 0$ equivale a $\ln(x) \geq -\frac{7}{12}$, ovvero $x \geq e^{-7/12}$ ($12\ln(x) + 7 \leq 0$ equivale a $0 < x \leq e^{-7/12}$). Pertanto f è convessa nell'intervallo $[e^{-7/12}, +\infty)$, f è concava nell'intervallo $(0, e^{-7/12}]$.

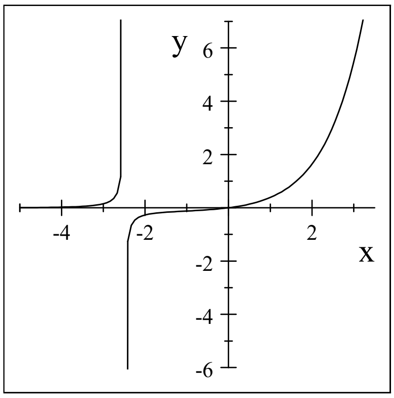
Esercizio 5 (5a) Per la disequazione $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$. Per la disequazione $x^2 - 9x < 0$ l'insieme delle soluzioni è $(0,9)$. Pertanto $A = ((-\infty,2] \cup [5,+\infty)) \cap (0,9) = (0,2] \cup [5,9)$.

(5b) L'insieme dei maggioranti per A è $[9, +\infty)$, quindi $\sup A = 9$.
(5c) L'insieme dei punti interni per A è $(0, 2) \cup (5, 9)$. L'insieme dei punti di accumulazione per A è $[0, 2] \cup [5, 9]$.

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 \neq 0\} = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$.
Per studiare il segno di $f(x)$ è utile osservare che $e^x > 0$ per ogni $x \in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{x}{2x+5}$. Poiché $2x + 5 < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$ e $2x + 5 > 0$ per $x \in (-\frac{5}{2}, +\infty)$, risulta che $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{5}{2}, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.
f non è pari, né dispari, né periodica.
Per calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+5} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^-} f(x) = \frac{-\frac{5}{2}e^{-5/2}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{5}{2}^-} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+} f(x) = \frac{-\frac{5}{2}e^{-5/2}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+} f(x) = -\infty$.
Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+5} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(2x + 5) - 2xe^x}{(2x + 5)^2} = (2x^2 + 5x + 5)\frac{e^x}{(2x + 5)^2}$$

Al fine di studiarne il segno in A, è utile osservare che $\frac{e^x}{(2x+5)^2} > 0$ per ogni $x \in A$, e quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $2x^2 + 5x + 5$. Poiché $2x^2 + 5x + 5 > 0$ per ogni $x \in A$, si deduce che f è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{5}{2})$ ed è monotona strettamente crescente anche nell'intervallo $(-\frac{5}{2}, +\infty)$. Pertanto non esistono per questa funzione punti di max/min locali/globali; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Il grafico di f è



Matematica per le Applicazioni Economiche I, 17 Febbraio 2017
Testo d'esame C

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (3 punti) Si scrivano le seguenti definizioni: funzione continua in un punto, funzione iniettiva, funzione convessa.

Esercizio 2 (7 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(2a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 12$, allora $\mathrm{Im}(f) = (7, 12)$.

(2b) Se $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ è iniettiva, allora f è monotona strettamente crescente o monotona strettamente decrescente.

(2c) Se $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ è convessa e $f(2) < f(5)$, allora 5 è punto di massimo globale per f.

Esercizio 3 (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+6x-7}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{x\ln(1+x)}{(e^{4x}-1)(\sin(x))}$$

Esercizio 4 (5 punti) Data la funzione $f(x) = 5x^3 \ln(x)$,

(4a) si determini l'insieme di definizione A di f;

(4b) si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di f;

(4c) si determinino gli intervalli di concavità/convessità di f in A.

Esercizio 5 (9 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9x + 18 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x < 0\}$$

(5a) si esprima A come unione di intervalli disgiunti;

(5b) si determinino l'insieme dei maggioranti e l'estremo superiore dell'insieme A;

(5c) si determinino l'insieme dei punti interni per A e l'insieme dei punti di accumulazione per A.

Esercizio 6 (10 punti) Si studi la funzione

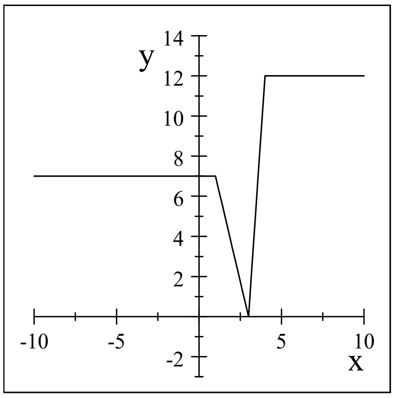
$$f(x) = \frac{xe^x}{3x+2}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

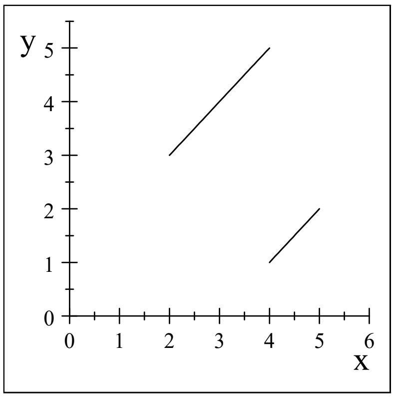
Soluzioni per il testo d'esame C

Esercizio 1 Si veda il libro di testo.

Esercizio 2 (2a) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x < 1 \\ -\frac{7}{2}x + \frac{21}{2} & \text{se } x \in [1,3] \\ 12x - 36 & \text{se } x \in (3,4) \\ 12 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che ha il seguente grafico:



Allora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 12$, ma $\mathrm{Im}(f) = [0, 12]$, che è un insieme diverso dall'intervallo $(7, 12)$.
(2b) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [2,4] \\ x-3 & \text{se } x \in (4,5] \end{cases}$, che ha il seguente grafico:



Questa funzione è iniettiva ma non è monotona strettamente crescente né monotona strettamente decrescente.
(2c) L'affermazione è vera. Dimostriamo qui che $f(x) \leq f(5)$ per ogni $x \in [2, 5]$. Ponendo $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ nella definizione di funzione convessa si ottiene la seguente proprietà: $f(x) \leq f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2)$ per ogni $x \in [2, 5]$. Poiché $f(5) > f(2)$, si deduce che $\frac{f(5)-f(2)}{3} > 0$ e dunque $y = f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2)$ è una funzione strettamente crescente, dunque $f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2) \leq f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(5-2) = f(5)$ per ogni $x \in [2, 5]$. Dunque $f(x) \leq f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2) \leq f(5)$ per ogni $x \in [2, 5]$.

Esercizio 3 (3a) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+6x-7} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x+7)(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+7)(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x+7)(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{(x+7)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{16}$.
(3b) $\lim_{x\to0} \frac{x\ln(1+x)}{(e^{4x}-1)(\sin(x))} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{e^{4x}-1}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1\cdot1}{4\cdot1} = \frac{1}{4}$.

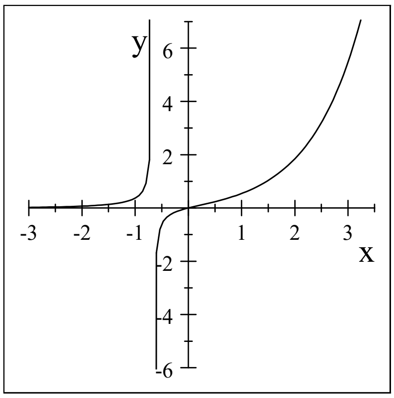
Esercizio 4 (4a) L'insieme di definizione A di f è $(0, +\infty)$.
(4b) $f'(x) = 15x^2\ln(x) + 5x^2$, $f''(x) = 15\,(2x\ln(x) + x) + 10x = 5x\,(6\ln(x) + 5)$.
(4c) Per ogni $x \in A$ si ha che $5x > 0$, e $6\ln(x) + 5 \geq 0$ equivale a $\ln(x) \geq -\frac{5}{6}$, ovvero $x \geq e^{-5/6}$ ($6\ln(x) + 5 \leq 0$ equivale a $0 < x \leq e^{-5/6}$). Pertanto f è convessa nell'intervallo $[e^{-5/6}, +\infty)$, f è concava nell'intervallo $(0, e^{-5/6}]$.

Esercizio 5 (5a) Per la disequazione $x^2 - 9x + 18 \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$. Per la disequazione $x^2 - 7x < 0$ l'insieme delle soluzioni è $(0, 7)$. Pertanto $A = ((-\infty, 3] \cup [6, +\infty)) \cap (0, 7) = (0, 3] \cup [6, 7)$.
(5b) L'insieme dei maggioranti per A è $[7, +\infty)$, quindi $\sup A = 7$.
(5c) L'insieme dei punti interni per A è $(0, 3) \cup (6, 7)$. L'insieme dei punti di accumulazione per A è $[0, 3] \cup [6, 7]$.

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 2 \neq 0\} = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.
Per studiare il segno di $f(x)$ è utile osservare che $e^x > 0$ per ogni $x \in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{x}{3x+2}$. Poiché $3x + 2 < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$ e $3x + 2 > 0$ per $x \in (-\frac{2}{3}, +\infty)$, risulta che $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{2}{3}, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.
f non è pari, né dispari, né periodica.
Per calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-} f(x) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-2/3}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+} f(x) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-2/3}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty$.
Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(3x + 2) - 3xe^x}{(3x + 2)^2} = (3x^2 + 2x + 2)\frac{e^x}{(3x + 2)^2}$$

Al fine di studiarne il segno in A, è utile osservare che $\frac{e^x}{(3x+2)^2} > 0$ per ogni $x \in A$, e quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $3x^2 + 2x + 2$. Poiché $3x^2 + 2x + 2 > 0$ per ogni $x \in A$, si deduce che f è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{2}{3})$ ed è monotona strettamente crescente anche nell'intervallo $(-\frac{2}{3}, +\infty)$. Pertanto non esistono per questa funzione punti di max/min locali/globali; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Il grafico di f è



Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 giugno 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. $\log(x)$ o $\ln(x)$ indicano il logaritmo in base e.

Esercizio 1. (8 punti) Si studi
$$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x^2},$$
e si disegni il suo grafico. **NON** si tralasci lo studio della derivata seconda di f. Si tralasci lo studio del segno di f [Dominio: punti 1; limiti: punti 2; argomentazioni sulla eventuale continuità/derivabilità sul dominio: punti 1; monotonia: punti 2; concavità/convessità: punti 1; grafico: punti 1]

Esercizio 2. (8 punti) Sia data
$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$
a. [punti 3] Si dica se la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.
b. [punti 2] Si calcoli l'espressione di $g = f \circ f$, cioè l'espressione di $g(x) = f(f(x))$.
c. [punti 3] Si determini la funzione inversa f^{-1} e si disegnino i grafici di f e f^{-1}.

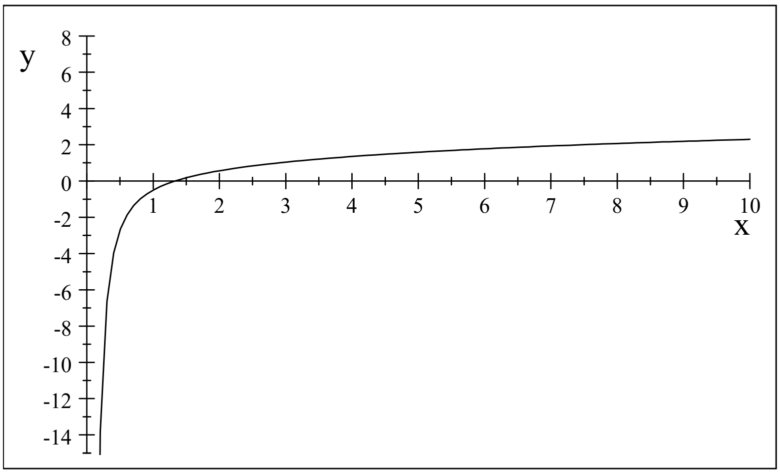
Esercizio 3. (8 punti)
a. [punti 3] Usando la definizione di limite si verifichi che
$$\lim_{x \to 16} \sqrt{x} = 4.$$
b. Si calcolino
$$\text{[punti 3]} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{2(\sin(x))^2}. \qquad\qquad \text{[punti 2]} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{4}{3^x}\right)^x.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. [punti 2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-3) = 2$. Allora esiste $x_0 < 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
b. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$
è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
c. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
è continua nel punto $x_0 = 0$.
d. [punti 2] Se una funzione è strettamente crescente sul suo dominio allora è anche continua.

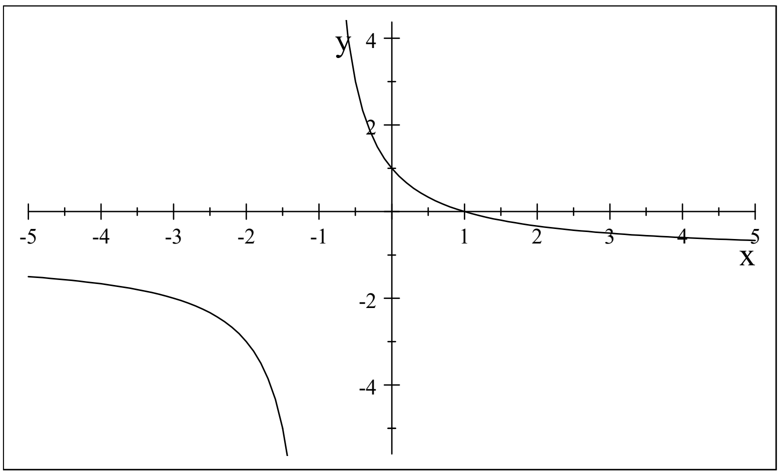
Esercizio 5. (8 punti) Un agente finanziario avente a disposizione una certa somma di denaro deve scegliere tra due opportunità di investimento in titoli. Il suo obiettivo è quello di fare la scelta che minimizzi il rischio di perdita di denaro. L'opportunità 1 consiste nell'acquisto di due titoli e comporta un rischio stimato in $r_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{55}{6}$, dove $x \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita nel primo dei due titoli. In alternativa, l'opportunità 2 consiste nell'acquisto di due titoli, diversi dai precedenti, e comporta un rischio stimato in $r_2(z) = 2z^2 - 6z + 11$, dove $z \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita nel primo dei due titoli. Determinare
a. [punti 3] il valore di x che minimizza $r_1(x)$
b. [punti 3] il valore di z che minimizza $r_2(z)$
c. [punti 2] su quale opportunità ricade la scelta dell'investitore e con quale proporzione.

Soluzioni Testo A

1. L'insieme di definizione di f è $(0,+\infty)$. I limiti da calcolare sono
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x)-\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty-\infty$$
dunque $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x)-\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$ e la retta verticale $x=0$ è asintoto verticale per f. Inoltre, $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\frac{1}{2x^2}\right)=+\infty-0$, dunque $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\frac{1}{2x^2}\right)=+\infty$. La derivata prima di f è
$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(-2)\,x^{-3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$$
la quale è positiva per ogni $x\in(0,+\infty)$. Dunque f è monotona strettamente crescente in $(0,+\infty)$. La derivata seconda di f è
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}$$
la quale è negativa per ogni $x\in(0,+\infty)$. Dunque f è concava in $(0,+\infty)$ e il grafico di f è



2. (a) Fissato $y\in\mathbb{R}$, l'equazione $\frac{1-x}{1+x}=y$ equivale a $1-x=yx+y$ (per $x\neq-1$), ossia $x(1+y)=1-y$. Se $y=-1$ allora non esiste alcuna soluzione; se $y\neq-1$, allora esiste una soluzione: $x=\frac{1-y}{1+y}$. Quindi f è iniettiva e $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ (l'insieme dei valori di y per cui esiste almeno una soluzione all'equazione $f(x)=y$).
(b) Si ha
$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x$$
(c) Dal punto (a) si deduce che $f^{-1}:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ e per ogni $y\in(\mathbb{R}-\{-1\})$ vale $f^{-1}(y)=\frac{1-y}{1+y}$. Pertanto f e f^{-1} hanno lo stesso grafico:



3. (a) Si deve verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (16-\delta, 16) \cup (16, 16+\delta)$ vale $4-\varepsilon < \sqrt{x} < 4+\varepsilon$. Dato ε positivo ma minore di 4, la disuguaglianza $4-\varepsilon < \sqrt{x}$ equivale a $16+\varepsilon^2-8\varepsilon < x$; la disuguaglianza $\sqrt{x} < 4+\varepsilon$ equivale a $0 < x < 16+\varepsilon^2+8\varepsilon$. Quindi

$$4-\varepsilon < \sqrt{x} < 4+\varepsilon \qquad \text{vale se e solo se} \qquad 16+\varepsilon^2-8\varepsilon < x < 16+\varepsilon^2+8\varepsilon$$

Scegliendo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, ad esempio $\delta = 4\varepsilon$, risulta che

$$16+\varepsilon^2-8\varepsilon < 16-\delta \qquad \text{e} \qquad 16+\delta < 16+\varepsilon^2+8\varepsilon$$

dunque con $\delta = 4\varepsilon$ si ha che per ogni $x \in (16-\delta, 16) \cup (16, 16+\delta)$ vale $4-\varepsilon < \sqrt{x} < 4+\varepsilon$.

(b) Il primo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Per applicare il teorema di de l'Hopital si calcola

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{4\sin(x)\cos(x)} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{4\sin(x)\cos(x)} &= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\frac{e^x}{\cos(x)} = -\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x)-1}{2(\sin(x))^2} = -\frac{1}{4}$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{4}{3^x}\right)^x = 2^{+\infty}$, si deduce immediatamente che $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{4}{3^x}\right)^x = +\infty$.

4. (a) L'affermazione è vera perché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ implica che $f(x)$ sia negativa se x è negativo e grande in valore assoluto (si usi la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$). Sia x_1 un numero negativo e grande in valore assoluto (dunque minore di -3) tale che $f(x_1) < 0$. Allora è possibile applicare il teorema degli zeri ad f relativamente all'intervallo $[x_1, -3]$ (f è continua in questo intervallo e $f(-3) > 0$) e concludere che esiste almeno un $x_0 \in (x_1, -3)$ tale che $f(x_0) = 0$. Poiché $x_0 < -3$, si deduce che $x_0 < 0$.

   (b) L'affermazione è falsa perché f non è continua in $x_0 = 0$: $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e la continuità è una condizione necessaria per la derivabilità.

   (c) L'affermazione è falsa: f non è continua in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, ma $f(0) = -1$.

   (d) L'affermazione è falsa, e per dimostrarlo è sufficiente il seguente esempio: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Questa funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma è discontinua nel punto 0.

5. (a) Per individuare un punto di minimo globale per r_1 in $[0,1]$, indicato con x_m (tale punto certamente esiste in virtù del teorema di Weierstrass) si calcola $r_1'(x) = 3x - 1$. Dunque $\frac{1}{3}$ è l'unico punto critico per r_1 in $(0,1)$. Per individuare x_m si calcolano $r_1(0) = \frac{55}{6}$, $r_1(\frac{1}{3}) = 9$, $r_1(1) = \frac{29}{3}$; quindi $x_m = \frac{1}{3}$ e $\min r_1 = 9$.

   (b) Per individuare un punto di minimo globale per r_2 in $[0,1]$, indicato con z_m (tale punto certamente esiste in virtù del teorema di Weierstrass) si calcola $r_2'(z) = 4z - 6$. Dunque non esistono punti critici per r_2 in $(0,1)$. Per individuare z_m si calcolano $r_2(0) = 11$, $r_2(1) = 7$; quindi $z_m = 1$, $\min r_2 = 7$.

   (c) La scelta migliore è la seconda opportunità, il cui minimo rischio (uguale a 7) è inferiore al minimo rischio per l'opportunità 1 (uguale a 9). Inoltre la proporzione da scegliere è $z = 1$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 giugno 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. $\log(x)$ o $\ln(x)$ indicano il logaritmo in base e.

Esercizio 1. (8 punti) Si studi

$$f(x) = \ln(x) - \frac{3}{x^2},$$

e si disegni il suo grafico. **NON** si tralasci lo studio della derivata seconda di f. Si tralasci lo studio del segno di f [Dominio: punti 1; limiti: punti 2; argomentazioni sulla eventuale continuità/derivabilità sul dominio: punti 1; monotonia: punti 2; concavità/convessità: punti 1; grafico: punti 1]

Esercizio 2. (8 punti) Sia data

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

a. [punti 3] Si dica se la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.
b. [punti 2] Si calcoli l'espressione di $g = f \circ f$, cioè l'espressione di $g(x) = f(f(x))$.
c. [punti 3] Si determini la funzione inversa f^{-1} e si disegnino i grafici di f e f^{-1}.

Esercizio 3. (8 punti)
a. [punti 3] Usando la definizione di limite si verifichi che

$$\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3.$$

b. Si calcolino

$$\text{[punti 3]} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(\cos(x))^2 - 1}{1 - e^x (1-x)} \qquad\qquad \text{[punti 2]} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{5}{4^x}\right)^x.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. [punti 2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-2) = 2$. Allora esiste $x_0 < 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
b. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
c. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x - 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è continua nel punto $x_0 = 0$.
d. [punti 2] Se una funzione è decrescente sul suo dominio allora è anche continua.

Esercizio 5. (8 punti) Un agente finanziario avente a disposizione una certa somma di denaro deve scegliere tra due opportunità di investimento in titoli. Il suo obiettivo è quello di fare la scelta che minimizzi il rischio di perdita di denaro. L'opportunità 1 consiste nell'acquisto di due titoli e comporta un rischio stimato in $r_1(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{13}{2}$, dove $x \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita nel primo dei due titoli. In alternativa, l'opportunità 2 consiste nell'acquisto di due titoli, diversi dai precedenti, e comporta un rischio stimato in $r_2(z) = \frac{3}{2}z^2 - z + \frac{55}{6}$, dove $z \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita nel primo dei due titoli. Determinare
a. [punti 3] il valore di x che minimizza $r_1(x)$
b. [punti 3] il valore di z che minimizza $r_2(z)$
c. [punti 2] su quale opportunità ricade la scelta dell'investitore e con quale proporzione.

Soluzioni Testo B

1. L'insieme di definizione di f è $(0,+\infty)$. I limiti da calcolare sono

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x)-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty-\infty$$

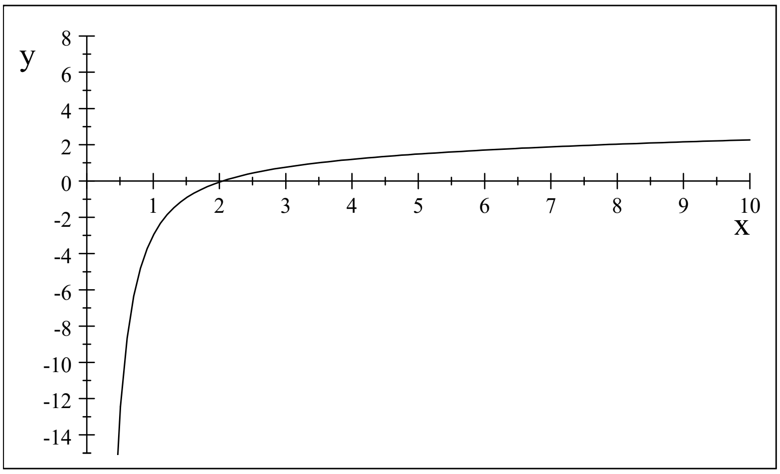
dunque $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x)-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$ e la retta verticale $x=0$ è asintoto verticale per f. Inoltre, $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty-0$, dunque $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$. La derivata prima di f è

$$f'(x)=\frac{1}{x}-3\,(-2)\,x^{-3}=\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}$$

la quale è positiva per ogni $x\in(0,+\infty)$. Dunque f è monotona strettamente crescente in $(0,+\infty)$. La derivata seconda di f è

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{18}{x^4}$$

la quale è negativa per ogni $x\in(0,+\infty)$. Dunque f è concava in $(0,+\infty)$ e il grafico di f è

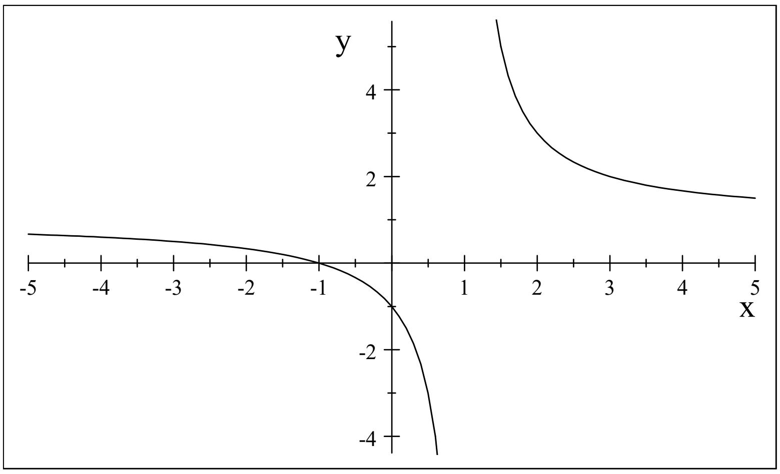


2. (a) Fissato $y\in\mathbb{R}$, l'equazione $\frac{x+1}{x-1}=y$ equivale a $x+1=yx-y$ (per $x\neq 1$), ossia $x(y-1)=1+y$. Se $y=1$ allora non esiste alcuna soluzione; se $y\neq 1$, allora esiste una soluzione: $x=\frac{y+1}{y-1}$. Quindi f è iniettiva e $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ (l'insieme dei valori di y per cui esiste almeno una soluzione all'equazione $f(x)=y$).

(b) Si ha

$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=x$$

(c) Dal punto (a) si deduce che $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ e per ogni $y\in(\mathbb{R}-\{1\})$ vale $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1}$. Pertanto f e f^{-1} hanno lo stesso grafico:



3. (a) Si deve verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (9-\delta, 9) \cup (9, 9+\delta)$ vale $3-\varepsilon < \sqrt{x} < 3+\varepsilon$. Dato ε positivo ma minore di 3, la disuguaglianza $3-\varepsilon < \sqrt{x}$ equivale a $9+\varepsilon^2-6\varepsilon < x$; la disuguaglianza $\sqrt{x} < 3+\varepsilon$ equivale a $0 < x < 9+\varepsilon^2+6\varepsilon$. Quindi

$$3-\varepsilon < \sqrt{x} < 3+\varepsilon \qquad \text{vale se e solo se} \qquad 9+\varepsilon^2-6\varepsilon < x < 9+\varepsilon^2+6\varepsilon$$

Scegliendo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, ad esempio $\delta = 3\varepsilon$, risulta che

$$9+\varepsilon^2-6\varepsilon < 9-\delta \qquad \text{e} \qquad 9+\delta < 9+\varepsilon^2+6\varepsilon$$

dunque con $\delta = 3\varepsilon$ si ha che per ogni $x \in (9-\delta, 9) \cup (9, 9+\delta)$ vale $3-\varepsilon < \sqrt{x} < 3+\varepsilon$.

(b) Il primo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Per applicare il teorema di de l'Hopital si calcola

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{xe^x} &= \frac{0}{0} \\
\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{xe^x} &= \lim_{x\to 0}(-2)\frac{\cos(x)}{e^x}\frac{\sin(x)}{x} = (-2)\cdot 1\cdot 1 = -2
\end{aligned}$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x))^2-1}{1-e^x(1-x)} = -2$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \left(3+\frac{5}{4^x}\right)^x = 3^{+\infty}$, si deduce immediatamente che $\lim_{x\to+\infty} \left(3+\frac{5}{4^x}\right)^x = +\infty$.

4. (a) L'affermazione è vera perché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ implica che $f(x)$ sia negativa se x è negativo e grande in valore assoluto (si usi la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$). Sia x_1 un numero negativo e grande in valore assoluto (dunque minore di -2) tale che $f(x_1) < 0$. Allora è possibile applicare il teorema degli zeri ad f relativamente all'intervallo $[x_1, -2]$ (f è continua in questo intervallo e $f(-2) > 0$) e concludere che esiste almeno un $x_0 \in (x_1, -2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Poiché $x_0 < -2$, si deduce che $x_0 < 0$.

(b) L'affermazione è falsa perché f non è continua in $x_0 = 0$: $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e la continuità è una condizione necessaria per la derivabilità.

(c) L'affermazione è falsa: f non è continua in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, ma $f(0) = 2$.

(d) L'affermazione è falsa, e per dimostrarlo è sufficiente il seguente esempio: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ -x-1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Questa funzione è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, ma è discontinua nel punto 0.

5. (a) Per individuare un punto di minimo globale per r_1 in $[0,1]$, indicato con x_m (tale punto certamente esiste in virtù del teorema di Weierstrass) si calcola $r_1'(x) = \frac{4}{3}x+2$. Dunque non esistono punti critici per r_1 in $(0,1)$. Per individuare x_m si calcolano $r_1(0) = \frac{13}{2}$, $r_1(1) = \frac{55}{6}$; quindi $x_m = 0$ e $\min r_1 = \frac{13}{2}$.

(b) Per individuare un punto di minimo globale per r_2 in $[0,1]$, indicato con z_m (tale punto certamente esiste in virtù del teorema di Weierstrass) si calcola $r_2'(z) = 3z-1$. Dunque $\frac{1}{3}$ è l'unico punto critico per r_2 in $(0,1)$. Per individuare z_m si calcolano $r_2(0) = \frac{55}{6}$, $r_2(\frac{1}{3}) = 9$, $r_2(1) = \frac{29}{3}$; quindi $z_m = \frac{1}{3}$, $\min r_2 = 9$.

(c) La scelta migliore è la prima opportunità, il cui minimo rischio (uguale a $\frac{13}{2}$) è inferiore al minimo rischio per l'opportunità 2 (uguale a 9). Inoltre la proporzione da scegliere è $x = 0$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 giugno 2017
Testo d'esame C

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. $\log(x)$ o $\ln(x)$ indicano il logaritmo in base e.

Esercizio 1. (8 punti) Si studi

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} - \ln(x),$$

e si disegni il suo grafico. **NON** si tralasci lo studio della derivata seconda di f. Si tralasci lo studio del segno di f [Dominio: punti 1; limiti: punti 2; argomentazioni sulla eventuale continuità/derivabilità sul dominio: punti 1; monotonia: punti 2; concavità/convessità: punti 1; grafico: punti 1]

Esercizio 2. (8 punti) Sia data

$$f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{2x-1}{x-2}.$$

a. [punti 3] Si dica se la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.
b. [punti 2] Si calcoli l'espressione di $g = f \circ f$, cioè l'espressione di $g(x) = f(f(x))$.
c. [punti 3] Si determini la funzione inversa f^{-1} e si disegnino i grafici di f e f^{-1}.

Esercizio 3. (8 punti)
a. [punti 3] Usando la definizione di limite si verifichi che

$$\lim_{x\to 25} \sqrt{x} = 5.$$

b. Si calcolino

$$\text{[punti 3]} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x)-1}{1-(\cos(x))^2} \qquad\qquad \text{[punti 2]} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(4 + \frac{7}{3^x}\right)^x.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. [punti 2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-1) = 2$. Allora esiste $x_0 < 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
b. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
c. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

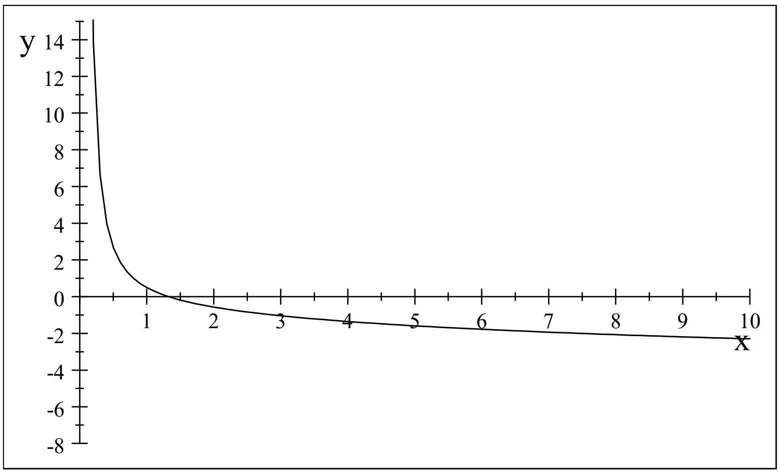
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 2x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x_0 = 0$.
d. [punti 2] Se una funzione è crescente sul suo dominio allora è anche continua.

Esercizio 5. (8 punti) Un agente finanziario avente a disposizione una certa somma di denaro deve scegliere tra due opportunità di investimento in titoli. Il suo obiettivo è quello di fare la scelta che minimizzi il rischio di perdita di denaro. L'opportunità 1 consiste nell'acquisto di due titoli e comporta un rischio stimato in $r_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$, dove $x \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita nel primo dei due titoli. In alternativa, l'opportunità 2 consiste nell'acquisto di due titoli, diversi dai precedenti, e comporta un rischio stimato in $r_2(z) = \frac{2}{3}z^2 + 2z + \frac{13}{2}$, dove $z \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita nel primo dei due titoli. Determinare
a. [punti 3] il valore di x che minimizza $r_1(x)$
b. [punti 3] il valore di z che minimizza $r_2(z)$
c. [punti 2] su quale opportunità ricade la scelta dell'investitore e con quale proporzione.

Soluzioni Testo C

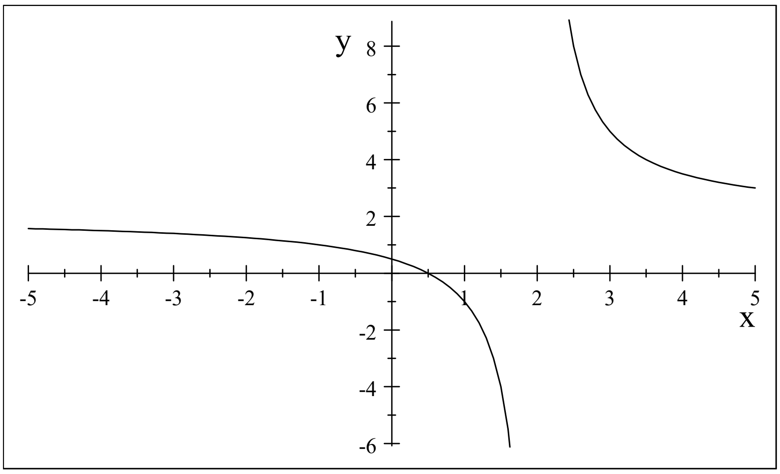
1. L'insieme di definizione di f è $(0,+\infty)$. I limiti da calcolare sono
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2x^2}-\ln(x)\right)=+\infty-(-\infty)$$
dunque $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2x^2}-\ln(x)\right)=-\infty$ e la retta verticale $x=0$ è asintoto verticale per f. Inoltre, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-\ln(x)\right)=0-\infty$, dunque $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-\ln(x)\right)=-\infty$. La derivata prima di f è
$$f'(x)=\frac{1}{2}(-2)x^{-3}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}$$
la quale è negativa per ogni $x\in(0,+\infty)$. Dunque f è monotona strettamente decrescente in $(0,+\infty)$. La derivata seconda di f è
$$f''(x)=\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^2}$$
la quale è positiva per ogni $x\in(0,+\infty)$. Dunque f è convessa in $(0,+\infty)$ e il grafico di f è



2. (a) Fissato $y\in\mathbb{R}$, l'equazione $\frac{2x-1}{x-2}=y$ equivale a $2x-1=yx-2y$ (per $x\neq 2$), ossia $x(y-2)=2y-1$. Se $y=2$ allora non esiste alcuna soluzione; se $y\neq 2$, allora esiste una soluzione: $x=\frac{2y-1}{y-2}$. Quindi f è iniettiva e $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$ (l'insieme dei valori di y per cui esiste almeno una soluzione all'equazione $f(x)=y$).

   (b) Si ha
$$f(f(x))=f\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=\frac{2\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)-1}{\frac{2x-1}{x-2}-2}=x$$

   (c) Dal punto (a) si deduce che $f^{-1}:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$ e per ogni $y\in(\mathbb{R}-\{2\})$ vale $f^{-1}(y)=\frac{2y-1}{y-2}$. Pertanto f e f^{-1} hanno lo stesso grafico:



3. (a) Si deve verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (25-\delta, 25) \cup (25, 25+\delta)$ vale $5 - \varepsilon < \sqrt{x} < 5 + \varepsilon$. Dato ε positivo ma minore di 5, la disuguaglianza $5 - \varepsilon < \sqrt{x}$ equivale a $25 + \varepsilon^2 - 10\varepsilon < x$; la disuguaglianza $\sqrt{x} < 5 + \varepsilon$ equivale a $0 < x < 25 + \varepsilon^2 + 10\varepsilon$. Quindi

$$5 - \varepsilon < \sqrt{x} < 5 + \varepsilon \qquad \text{vale se e solo se} \qquad 25 + \varepsilon^2 - 10\varepsilon < x < 25 + \varepsilon^2 + 10\varepsilon$$

Scegliendo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, ad esempio $\delta = 5\varepsilon$, risulta che

$$25 + \varepsilon^2 - 10\varepsilon < 25 - \delta \qquad \text{e} \qquad 25 + \delta < 25 + \varepsilon^2 + 10\varepsilon$$

dunque con $\delta = 5\varepsilon$ si ha che per ogni $x \in (25-\delta, 25) \cup (25, 25+\delta)$ vale $5 - \varepsilon < \sqrt{x} < 5 + \varepsilon$.

(b) Il primo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Per applicare il teorema di de l'Hopital si calcola

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2\cos(x)\sin(x)} &= \frac{0}{0} \\
\lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2\cos(x)\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} (-\frac{1}{2}) \frac{e^x}{\cos(x)} \frac{x}{\sin(x)} = (-\frac{1}{2}) \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x)-1}{1-(\cos(x))^2} = -\frac{1}{2}$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \left(4 + \frac{7}{3^x}\right)^x = 4^{+\infty}$, si deduce immediatamente che $\lim_{x\to+\infty} \left(4 + \frac{7}{3^x}\right)^x = +\infty$.

4. (a) L'affermazione è vera perché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ implica che $f(x)$ sia negativa se x è negativo e grande in valore assoluto (si usi la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$). Sia x_1 un numero negativo e grande in valore assoluto (dunque minore di -1) tale che $f(x_1) < 0$. Allora è possibile applicare il teorema degli zeri ad f relativamente all'intervallo $[x_1, -1]$ (f è continua in questo intervallo e $f(-1) > 0$) e concludere che esiste almeno un $x_0 \in (x_1, -1)$ tale che $f(x_0) = 0$. Poiché $x_0 < -1$, si deduce che $x_0 < 0$.

(b) L'affermazione è falsa perché f non è continua in $x_0 = 0$: $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e la continuità è una condizione necessaria per la derivabilità.

(c) L'affermazione è falsa: f non è continua in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, ma $f(0) = 0$.

(d) L'affermazione è falsa, e per dimostrarlo è sufficiente il seguente esempio: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Questa funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma è discontinua nel punto 0.

5. (a) Per individuare un punto di minimo globale per r_1 in $[0,1]$, indicato con x_m (tale punto certamente esiste in virtù del teorema di Weierstrass) si calcola $r_1'(x) = 3x - 1$. Dunque $x = \frac{1}{3}$ è l'unico punto critico per r_1 in $(0,1)$. Per individuare x_m si calcolano $r_1(0) = \frac{15}{2}$, $r_1(\frac{1}{3}) = \frac{22}{3}$, $r_1(1) = 8$ quindi $x_m = \frac{1}{3}$ e $\min r_1 = \frac{22}{3}$.

(b) Per individuare un punto di minimo globale per r_2 in $[0,1]$, indicato con z_m (tale punto certamente esiste in virtù del teorema di Weierstrass) si calcola $r_2'(z) = \frac{4}{3}z + 2$. Dunque non esistono punti critici per r_2 in $(0,1)$. Per individuare z_m si calcolano $r_2(0) = \frac{13}{2}$, $r_2(1) = \frac{55}{6}$; quindi $z_m = 0$, $\min r_2 = \frac{13}{2}$.

(c) La scelta migliore è la seconda opportunità, il cui minimo rischio (uguale a $\frac{13}{2}$) è inferiore al minimo rischio per l'opportunità 1 (uguale a $\frac{22}{3}$). Inoltre la proporzione da scegliere è $z = 0$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 6 luglio 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (10 punti)
Si studi la seguente funzione (incluso lo studio della concavità e convessità):

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 3)$$

Esercizio 2. (9 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 4\ln(x) + x^{10}}{8x^2 + e^{2x} - 200}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 3}}{\ln(x) - 5}$$

e si determini l'insieme dei punti di accumulazione di tale insieme.

Esercizio 4. (4 punti)
Si dia la definizione di funzione strettamente crescente.
Si dimostri, utilizzando la definizione di funzione strettamente crescente, che la seguente funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[1, +\infty)$:

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

Esercizio 5. (6 punti)
Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali a e b definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3ax + b & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ e^{7x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(i) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia derivabile nel punto 0;

(ii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia continua ma non derivabile nel punto 0;

(iii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f non sia continua nel punto 0.

Esercizio 6. (6 punti)
Siano

$$A = (-\infty, 1] \cup [3, 8) \cup (10, 11), \quad B = (0, 4] \cup [7, 12)$$

(i) si stabilisca se $(4, 6) \subseteq A \cap B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cap B$;

(iii) si stabilisca se $[3, 11] \subseteq A \cup B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cup B$.

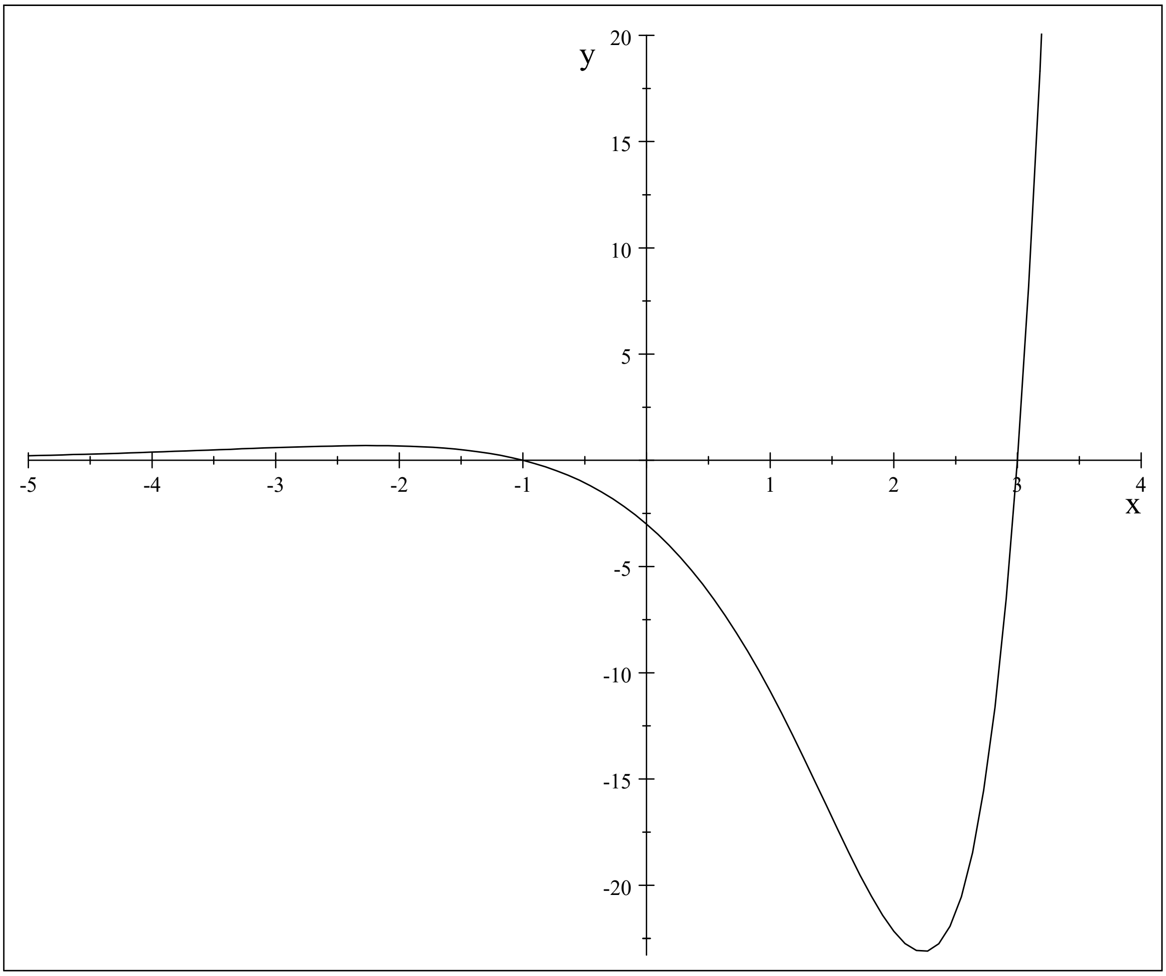
Soluzioni Testo A

1. L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 3$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f(-1) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 3)$, $f(3) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (3, +\infty)$.

   Calcolo dei limiti:
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty)$$
   dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$$
   Poiché questa è una forma indeterminata, utilizziamo il cambio di variabile $y = -x$ (si noti che la funzione $y = -x$ è monotona strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva) e otteniamo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(y^2+2y-3) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2+2y-3}{e^y} = 0$ per la gerarchia tra infiniti. Dunque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   La derivata prima di f è
   $$f'(x) = e^x(x^2 - 5)$$
   e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{5})$, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, è strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{5}, +\infty)$. La derivata seconda di f è
   $$f''(x) = e^x(2x + x^2 - 5)$$
   e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{6} - 1) \cup (\sqrt{6} - 1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{6} - 1, \sqrt{6} - 1)$; dunque f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{6}-1)$, è concava nell'intervallo $(-\sqrt{6}-1, \sqrt{6}-1)$, è convessa nell'intervallo $(\sqrt{6} - 1, +\infty)$.

   Il grafico di f è



Dunque $x = \sqrt{5}$ è punto di min globale per f e $\min f = -2\left(\sqrt{5}-1\right)e^{\sqrt{5}}$; $x = -\sqrt{5}$ è punto di max locale per f. Non esiste alcun punto di max globale per f, $\sup f = +\infty$.

2. Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos(x)-1}{\mathrm{sen}(x)} = \frac{0}{0}$, e per applicare il (primo) teorema di de l'Hopital si calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos(x) - e^x \mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = 1$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos(x)-1}{\mathrm{sen}(x)} = 1$.

Nel calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 4\ln(x)+x^{10}}{8x^2+e^{2x}-200}$ è utile ricorrere alla gerarchia tra infiniti, la quale implica che $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-4\ln(x)+x^{10}}{8x^2+e^{2x}-200} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{0}{0}$ ed è utile notare che $\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}$.
Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 3 \geq 0,\ x > 0,\ \ln(x) - 5 \neq 0\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x - 3 \geq 0$ è l'intervallo $[\ln(3), +\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $x > 0$ e $\ln(x) - 5 \neq 0$ è l'insieme $(0, e^5) \cup (e^5, +\infty)$. Dunque $A = [\ln(3), e^5) \cup (e^5, +\infty)$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[\ln(3), +\infty)$.

4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si dice strettamente crescente se per ogni x_1, x_2 in A tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$. Per la funzione in oggetto, si dimostra che se x_1, x_2 sono in $[1, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, allora vale $f(x_1) < f(x_2)$, ovvero $x_1^3 - 2x_1 + 5 < x_2^3 - 2x_2 + 5$. Questa disuguaglianza equivale a $2x_2 - 2x_1 < x_2^3 - x_1^3$, e $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right)$, dunque

$$2x_2 - 2x_1 < x_2^3 - x_1^3 \quad\Leftrightarrow\quad 2x_2 - 2x_1 < (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right) \quad\Leftrightarrow\quad 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$$

(si noti che la seconda equivalenza si basa su $x_2 - x_1 > 0$). L'ultima disuguaglianza e' soddisfatta in quanto $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 1$, quindi $x_1^2 \geq 1$, $x_2^2 \geq 1$, $x_1x_2 \geq 1$.

5. (i) La derivabilità nel punto 0 richiede che f sia continua in 0, il che equivale a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, e queste uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $b = 1$. Adesso calcoliamo $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2 + 3ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2h + 3a) = 3a$$

Inoltre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{7h}-1}{h} = \frac{0}{0}$$

e usando la sostituzione $k = 7h$ (si noti che $k = 7h$ è una funzione monotona strettamente crescente di h, dunque iniettiva) si ottiene $f'_+(0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{e^k-1}{k/7} = 7$. Pertanto $f'_-(0) = f'_+(0)$ se e solo se $3a = 7$. Dunque f è derivabile nel punto 0 se e solo se $b = 1$ e $a = \frac{7}{3}$.

(ii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 1$ e $a = 5$, allora f è continua in 0 ma non è derivabile in 0 perché $f'_-(0) = 15 \neq f'_+(0) = 7$.

(iii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 4$ e $a = 2$, allora f non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 4$ ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

6. (i) L'insieme $A \cap B$ coincide con $(0, 1] \cup [3, 4] \cup [7, 8) \cup (10, 11)$, quindi non è vero che $(4, 6) \subseteq A \cap B$, ad esempio perché $5 \notin A \cap B$.

(ii) L'insieme dei minoranti di $A \cap B$ è l'intervallo $(-\infty, 0]$.

(iii) L'insieme $A \cup B$ coincide con $(-\infty, 12)$, quindi è vero che $[3, 11] \subseteq A \cup B$.

(iv) Non esiste alcun minorante per $A \cup B$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 6 luglio 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (10 punti)
Si studi la seguente funzione (incluso lo studio della concavità e convessità):

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 8)$$

Esercizio 2. (9 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x(1+x)}{\tan(x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} + x^8 - 7\ln(x)}{6x^4 + e^x + 120}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+5} - \sqrt{5}}{x}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 4}}{\ln(x) - 7}$$

e si determini l'insieme dei punti di accumulazione di tale insieme.

Esercizio 4. (4 punti)
Si dia la definizione di funzione strettamente crescente.
Si dimostri, utilizzando la definizione di funzione strettamente crescente, che la seguente funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[2, +\infty)$:

$$f(x) = x^3 - 5x + 7$$

Esercizio 5. (6 punti)
Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali a e b definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4ax + b & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ e^{5x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(i) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia derivabile nel punto 0;

(ii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia continua ma non derivabile nel punto 0;

(iii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f non sia continua nel punto 0.

Esercizio 6. (6 punti)
Siano

$$A = (1, 3] \cup [6, 11), \quad B = (-\infty, 4] \cup [7, 10) \cup (12, 15)$$

(i) si stabilisca se $(8, 9) \subseteq A \cap B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cap B$;

(iii) si stabilisca se $[3, 7] \subseteq A \cup B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cup B$.

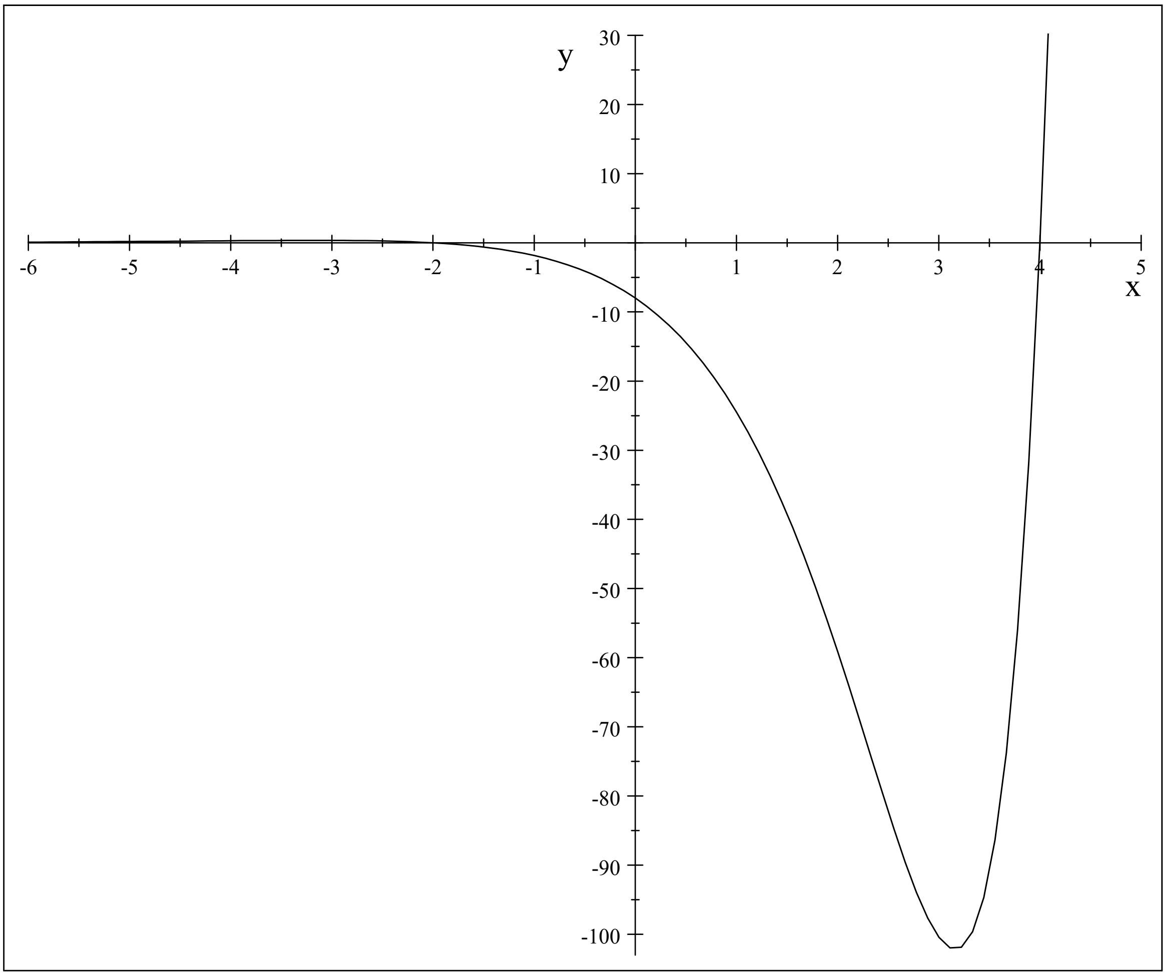
Soluzioni Testo B

1. L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 8$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f(-2) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 4)$, $f(4) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (4, +\infty)$.

   Calcolo dei limiti:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty)$$
   dunque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$$
   Poiché questa è una forma indeterminata, utilizziamo il cambio di variabile $y = -x$ (si noti che la funzione $y = -x$ è monotona strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva) e otteniamo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} e^{-y}(y^2 + 2y - 8) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2+2y-8}{e^y} = 0$ per la gerarchia tra infiniti. Dunque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   La derivata prima di f è
$$f'(x) = e^x(x^2 - 10)$$
   e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$; dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{10})$, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$, è strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{10}, +\infty)$. La derivata seconda di f è
$$f''(x) = e^x(2x + x^2 - 10)$$
   e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{11} - 1) \cup (\sqrt{11} - 1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{11} - 1, \sqrt{11} - 1)$; dunque f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{11} - 1)$, è concava nell'intervallo $(-\sqrt{11} - 1, \sqrt{11} - 1)$, è convessa nell'intervallo $(\sqrt{11} - 1, +\infty)$.

   Il grafico di f è



Dunque $x = \sqrt{10}$ è punto di min globale per f e $\min f = -2(\sqrt{10} - 1)e^{\sqrt{10}}$; $x = -\sqrt{10}$ è punto di max locale per f. Non esiste alcun punto di max globale per f, $\sup f = +\infty$.

2. Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x(1+x)}{\tan(x)} = \frac{0}{0}$, e per applicare il (primo) teorema di de l'Hopital si calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x(1+x) - e^x}{1 + (\tan(x))^2} = -2$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x(1+x)}{\tan(x)} = -2$.

Nel calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+x^8-7\ln(x)}{6x^4+e^x+120}$ è utile ricorrere alla gerarchia tra infiniti, la quale implica che $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+x^8-7\ln(x)}{6x^4+e^x+120} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{x} = \frac{0}{0}$ ed è utile notare che $\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{x} = \frac{(\sqrt{3x+5}-\sqrt{5})(\sqrt{3x+5}+\sqrt{5})}{x(\sqrt{3x+5}+\sqrt{5})} = \frac{3}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}$.
Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$.

3. L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 4 \geq 0,\ x > 0,\ \ln(x) - 7 \neq 0\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x - 4 \geq 0$ è l'intervallo $[\ln(4), +\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $x > 0$ e $\ln(x) - 7 \neq 0$ è l'insieme $(0, e^7) \cup (e^7, +\infty)$. Dunque $A = [\ln(4), e^7) \cup (e^7, +\infty)$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[\ln(4), +\infty)$.

4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si dice strettamente crescente se per ogni x_1, x_2 in A tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$. Per la funzione in oggetto, si dimostra che se x_1, x_2 sono in $[2, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, allora vale $f(x_1) < f(x_2)$, ovvero $x_1^3 - 5x_1 + 7 < x_2^3 - 5x_2 + 7$. Questa disuguaglianza equivale a $5x_2 - 5x_1 < x_2^3 - x_1^3$, e $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right)$, dunque

$$5x_2 - 5x_1 < x_2^3 - x_1^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x_2 - 5x_1 < (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5 < x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$$

(si noti che la seconda equivalenza si basa su $x_2 - x_1 > 0$). L'ultima disuguaglianza e' soddisfatta in quanto $x_1 \geq 2$ e $x_2 \geq 2$, quindi $x_1^2 \geq 4$, $x_2^2 \geq 4$, $x_1x_2 \geq 4$.

5. (i) La derivabilità nel punto 0 richiede che f sia continua in 0, il che equivale a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, e queste uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $b = 1$. Adesso calcoliamo $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2 + 4ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2h + 4a) = 4a$$

Inoltre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{5h} - 1}{h} = \frac{0}{0}$$

e usando la sostituzione $k = 5h$ (si noti che $k = 5h$ è una funzione monotona strettamente crescente di h, dunque iniettiva) si ottiene $f'_+(0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{e^k-1}{k/5} = 5$. Pertanto $f'_-(0) = f'_+(0)$ se e solo se $4a = 5$. Dunque f è derivabile nel punto 0 se e solo se $b = 1$ e $a = \frac{5}{4}$.

(ii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 1$ e $a = 3$, allora f è continua in 0 ma non è derivabile in 0 perché $f'_-(0) = 12 \neq f'_+(0) = 5$.

(iii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 4$ e $a = 2$, allora f non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 4$ ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

6. (i) L'insieme $A \cap B$ coincide con $(1, 3] \cup [7, 10)$, quindi è vero che $(8, 9) \subseteq A \cap B$.

(ii) L'insieme dei minoranti di $A \cap B$ è l'intervallo $(-\infty, 1]$.

(iii) L'insieme $A \cup B$ coincide con $(-\infty, 4] \cup [6, 11) \cup (12, 15)$, quindi non è vero che $[3, 7] \subseteq A \cup B$, ad esempio perché $5 \notin A \cup B$.

(iv) Non esiste alcun minorante per $A \cup B$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 6 luglio 2017
Testo d'esame C

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (10 punti)
Si studi la seguente funzione (incluso lo studio della concavità e convessità):

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 15)$$

Esercizio 2. (9 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+x)\cos(x)-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^5 + 4\ln(x) + e^x}{80 - e^{4x} + 6x^7}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 5}}{\ln(x) - 8}$$

e si determini l'insieme dei punti di accumulazione di tale insieme.

Esercizio 4. (4 punti)
Si dia la definizione di funzione strettamente crescente.
Si dimostri, utilizzando la definizione di funzione strettamente crescente, che la seguente funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[3, +\infty)$:

$$f(x) = x^3 - 14x + 11$$

Esercizio 5. (6 punti)
Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali a e b definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5ax + b & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ e^{3x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(i) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia derivabile nel punto 0;

(ii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia continua ma non derivabile nel punto 0;

(iii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f non sia continua nel punto 0.

Esercizio 6. (6 punti)
Siano

$$A = (-5, 2] \cup [6, 9) \cup (11, +\infty), \quad B = (0, 4] \cup [8, 14)$$

(i) si stabilisca se $(3, 6) \subseteq A \cap B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei maggioranti di $A \cap B$;

(iii) si stabilisca se $[7, 13] \subseteq A \cup B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei maggioranti di $A \cup B$.

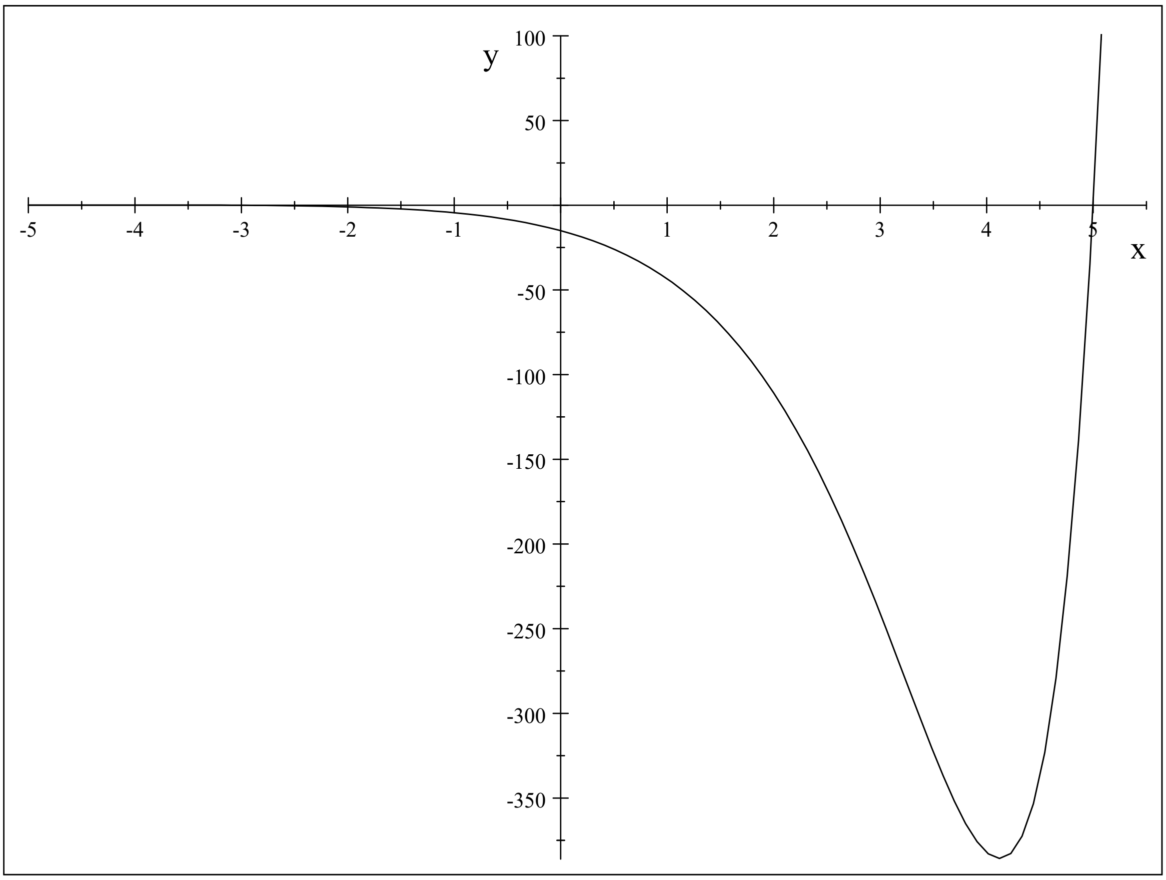
Soluzioni Testo C

1. L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 15$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3)$, $f(-3) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (-3, 5)$, $f(5) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (5, +\infty)$.

   Calcolo dei limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty)$$
   dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$$
   Poiché questa è una forma indeterminata, utilizziamo il cambio di variabile $y = -x$ (si noti che la funzione $y = -x$ è monotona strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva) e otteniamo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(y^2+2y-15) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2+2y-15}{e^y} = 0$ per la gerarchia tra infiniti. Dunque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   La derivata prima di f è
$$f'(x) = e^x(x^2 - 17)$$
   e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{17}) \cup (\sqrt{17}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{17}, \sqrt{17})$; dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{17})$, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{17}, \sqrt{17})$, è strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{17}, +\infty)$. La derivata seconda di f è
$$f''(x) = e^x(2x + x^2 - 17)$$
   e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3\sqrt{2} - 1) \cup (3\sqrt{2} - 1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-3\sqrt{2} - 1, 3\sqrt{2} - 1)$; dunque f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -3\sqrt{2} - 1)$, è concava nell'intervallo $(-3\sqrt{2} - 1, 3\sqrt{2} - 1)$, è convessa nell'intervallo $(3\sqrt{2} - 1, +\infty)$.

   Il grafico di f è



Dunque $x = \sqrt{17}$ è punto di min globale per f e $\min f = -2(\sqrt{17}-1)e^{\sqrt{17}}$; $x = -\sqrt{17}$ è punto di max locale per f. Non esiste alcun punto di max globale per f, $\sup f = +\infty$.

2. Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{(1+x)\cos(x)-1} = \frac{0}{0}$, e per applicare il (primo) teorema di de l'Hopital si calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\cos(x)-(1+x)\mathrm{sen}(x)} = 1$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{(1+x)\cos(x)-1} = 1$.

Nel calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^5+4\ln(x)+e^x}{80-e^{4x}+6x^7}$ è utile ricorrere alla gerarchia tra infiniti, la quale implica che $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^5+4\ln(x)+e^x}{80-e^{4x}+6x^7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-e^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-e^{3x}} = 0$.

Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x} = \frac{0}{0}$ ed è utile notare che $\frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x} = \frac{(\sqrt{5x+7}-\sqrt{7})(\sqrt{5x+7}+\sqrt{7})}{x(\sqrt{5x+7}+\sqrt{7})} = \frac{5}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{7}}$.
Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

3. L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 5 \geq 0,\ x > 0,\ \ln(x) - 8 \neq 0\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x - 5 \geq 0$ è l'intervallo $[\ln(5), +\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $x > 0$ e $\ln(x) - 8 \neq 0$ è l'insieme $(0, e^8) \cup (e^8, +\infty)$. Dunque $A = [\ln(5), e^8) \cup (e^8, +\infty)$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[\ln(5), +\infty)$.

4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si dice strettamente crescente se per ogni x_1, x_2 in A tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$. Per la funzione in oggetto, si dimostra che se x_1, x_2 sono in $[3, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, allora vale $f(x_1) < f(x_2)$, ovvero $x_1^3 - 14x_1 + 11 < x_2^3 - 14x_2 + 11$. Questa disuguaglianza equivale a $14x_2 - 14x_1 < x_2^3 - x_1^3$, e $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right)$, dunque

$$14x_2 - 14x_1 < x_2^3 - x_1^3 \quad \Leftrightarrow \quad 14x_2 - 14x_1 < (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 14 < x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$$

(si noti che la seconda equivalenza si basa su $x_2 - x_1 > 0$). L'ultima disuguaglianza e' soddisfatta in quanto $x_1 \geq 3$ e $x_2 \geq 3$, quindi $x_1^2 \geq 9$, $x_2^2 \geq 9$, $x_1x_2 \geq 9$.

5. (i) La derivabilità nel punto 0 richiede che f sia continua in 0, il che equivale a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, e queste uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $b = 1$. Adesso calcoliamo $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2 + 5ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2h + 5a) = 5a$$

Inoltre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{3h} - 1}{h} = \frac{0}{0}$$

e usando la sostituzione $k = 3h$ (si noti che $k = 3h$ è una funzione monotona strettamente crescente di h, dunque iniettiva) si ottiene $f'_+(0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{e^k - 1}{k/3} = 3$. Pertanto $f'_-(0) = f'_+(0)$ se e solo se $5a = 3$. Dunque f è derivabile nel punto 0 se e solo se $b = 1$ e $a = \frac{3}{5}$.

(ii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 1$ e $a = 8$, allora f è continua in 0 ma non è derivabile in 0 perché $f'_-(0) = 40 \neq f'_+(0) = 3$.

(iii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 4$ e $a = 2$, allora f non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 4$ ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

6. (i) L'insieme $A \cap B$ coincide con $(0, 2] \cup [8, 9) \cup (11, 14)$, quindi non è vero che $(3, 6) \subseteq A \cap B$, ad esempio perché $5 \notin A \cap B$.

(ii) L'insieme dei maggioranti di $A \cap B$ è l'intervallo $[14, +\infty)$.

(iii) L'insieme $A \cup B$ coincide con $(-5, 4] \cup [6, +\infty)$, quindi è vero che $[7, 13] \subseteq A \cup B$.

(iv) Non esiste alcun maggiorante per $A \cup B$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 30 agosto 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (10 punti)
Si studi

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x^2 - 1}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (10 punti)
Si calcolino i seguenti limiti

$$\text{(a)} \lim_{x \to 6} \frac{\left(x^2 + 5x - 6\right) \sin(x-6)}{x^2 - 12x + 36}, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(3 + x^2\right) - \ln\left(5 + 2x^2\right)}{\ln(x+1) - \ln(2x+3)},$$

$$\text{(c)} \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3 + 3x^2 + x^4} - \sqrt{3 + 3x + x^4}\right)$$

Esercizio 3 (7 punti)
Siano date le funzioni f e g tali che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si supponga che f e g siano entrambe crescenti e derivabili. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false come conseguenza di tali ipotesi. Si motivino le risposte.

- (a) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (b) $f'(x) \geq 0$ e $g'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (c) la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $h(x) = f(x) + g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è una funzione crescente;
- (d) se, oltre alle ipotesi citate all'inizio dell'esercizio, è vero che $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora la funzione $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $\ell(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è una funzione derivabile e crescente.

Esercizio 4 (7 punti)
Si considerino i seguenti insiemi

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 < 0\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 9 < 0\}$$

$$A_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -3 - \frac{1}{n} \text{ al variare di } n \text{ in } \{1, 2, 3, 4, 5\}\right\}$$

Se possibile,

- (a) si ricavi l'insieme $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
- (b) per l'insieme $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ si calcolino $\inf B, \min B, \sup B, \max B$.

Esercizio 5 (3 punti)
Usando la appropriata definizione di limite, si verifichi che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Esercizio 6 (3 punti)
Si consideri la funzione $f : (-3, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x + 3}$$

Fissato un arbitrario $x_0 \in (-3, +\infty) \in \mathbb{R}$, si calcoli la derivata di f nel punto x_0 **usando la definizione di derivata**.

Soluzioni Testo A

Esercizio 1

L'insieme di definizione di f è $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Per ogni $x \in A$, il segno di $f(x)$ è uguale al segno di $x^2 - 1$, dato che $e^{x+1} > 0$ per ogni $x \in A$. Dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$; l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni, ovvero il grafico di f non tocca l'asse delle ascisse. D'altra parte, poiché $f(0) = -e$, il grafico di f tocca l'asse delle ordinate nel punto $(0, -e)$.

Questa funzione è continua e derivabile in A in quanto è il quoziente di funzioni continue e derivabili. Inoltre

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{1}{0^+}, \text{ quindi } \lim_{x\to-1^-} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{1}{0^-}, \text{ quindi } \lim_{x\to-1^+} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{e^2}{0^-}, \text{ quindi } \lim_{x\to1^-} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = -\infty; \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{e^2}{0^+}, \text{ quindi } \lim_{x\to1^+} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = +\infty$$

dunque le rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ sono entrambe asintoto verticale per f. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{0^+}{+\infty}, \text{ quindi } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = 0^+$$

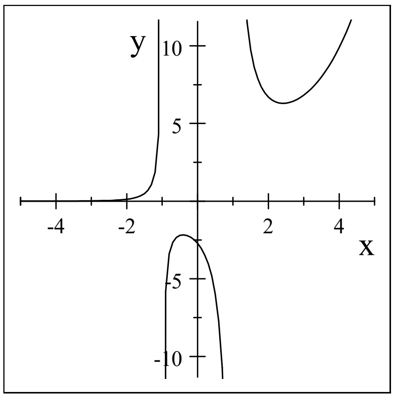
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2-1} = +\infty \text{ per la gerarchia tra infiniti}$$

dunque la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{e^{x+1}(x^2-1) - 2xe^{x+1}}{(x^2-1)^2} = \frac{e^{x+1}\left(x^2-2x-1\right)}{(x^2-1)^2}$$

Dunque per ogni $x \in A$, il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $x^2 - 2x - 1$, ovvero $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (1-\sqrt{2}, 1) \cup (1, 1+\sqrt{2})$. Pertanto f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, strettamente crescente in $\left(-1, 1-\sqrt{2}\right)$, strettamente decrescente in $\left(1-\sqrt{2}, 1\right)$, strettamente decrescente in $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$, strettamente crescente in $(1+\sqrt{2}, +\infty)$. Inoltre, $x = 1-\sqrt{2}$ è punto di max locale per f; $x = 1+\sqrt{2}$ è punto di min locale per f. Non esistono punti di max/min globali per f. Il grafico di f è



Esercizio 2

(a)

$$\lim_{x\to6} \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-6)}{x^2-12x+36} = \frac{0}{0} \qquad \text{e} \qquad \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-6)}{x^2-12x+36} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-6}\frac{\sin(x-6)}{x-6}$$

quindi $\lim_{x\to6^-} \frac{(x-1)(x+6)}{x-6}\frac{\sin(x-6)}{x-6} = -\infty$, $\lim_{x\to6^+} \frac{(x-1)(x+6)}{x-6}\frac{\sin(x-6)}{x-6} = +\infty$ e $\lim_{x\to6} \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-6)}{x^2-12x+36}$ non esiste.

(b) Usando le proprietà dei logaritmi si può scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(3+x^2\right)-\ln\left(5+2x^2\right)}{\ln\left(x+1\right)-\ln\left(2x+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{3+x^2}{5+2x^2}}{\ln\frac{x+1}{2x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{1}{2}}=1.$$

(c) Il limite è una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{3+3x^2+x^4}+\sqrt{3+3x+x^4}$ e otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt{3+3x^2+x^4}-\sqrt{3+3x+x^4} &= \frac{\left(\sqrt{3+3x^2+x^4}-\sqrt{3+3x+x^4}\right)\left(\sqrt{3+3x^2+x^4}+\sqrt{3+3x+x^4}\right)}{\sqrt{3+3x^2+x^4}+\sqrt{3+3x+x^4}}\\ &= \frac{3x^2-3x}{\sqrt{3+3x^2+x^4}+\sqrt{3+3x+x^4}}=\frac{3x^2-3x}{x^2\sqrt{\frac{3}{x^4}+\frac{3}{x^2}+1}+x^2\sqrt{\frac{3}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}}\end{aligned}$$

dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3+3x^2+x^4}-\sqrt{3+3x+x^4}\right)=\frac{3}{2}$$

Esercizio 3.

(a) Falso. Ad esempio, la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $f(x)=2$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ (una funzione costante) è crescente ma $f'(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

(b) Vero, in base al teorema 8.9 del libro di testo.

(c) Vero. Risulta che $h'(x)=f'(x)+g'(x)$ e sappiamo che $f'(x)\geq 0$, $g'(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, dunque $h'(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e pertanto h è una funzione crescente.

(d) Vero. E' ovvio che ℓ è una funzione derivabile in quanto è il quoziente di funzioni derivabili. Inoltre,

$$\ell'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

è un quoziente non negativo per ogni $x\in\mathbb{R}$ perché $f'(x)\geq 0$, $g(x)>0$ (dunque $f'(x)g(x)\geq 0$) e $-g'(x)\leq 0$, $f(x)<0$ (dunque $-g'(x)f(x)\geq 0$). Pertanto ℓ è una funzione crescente.

Esercizio 4

(a) $A_1=(-3,3)$, $A_2=\varnothing$, $A_3=\{-4,-\frac{7}{2},-\frac{10}{3},-\frac{13}{4},-\frac{16}{5}\}$, quindi $A_1\cap A_2\cap A_3=\varnothing$.

(b) $B=A_1\cup A_2\cup A_3=\{-4,-\frac{7}{2},-\frac{10}{3},-\frac{13}{4},-\frac{16}{5}\}\cup(-3,3)$ e $\inf B=\min B=-4$, $\sup B=3$, $\max B$ non esiste.

Esercizio 5

Vogliamo dimostrare che

$$\text{per ogni } \varepsilon>0 \text{ esiste un } \nu \text{ tale che se } x>\nu,\text{ allora } 1-\varepsilon<1-\frac{1}{x}<1+\varepsilon$$

Dato $x>0$, la disuguaglianza $1-\frac{1}{x}<1+\varepsilon$ è certamente soddisfatta perché $1-\frac{1}{x}<1$ e $1<1+\varepsilon$. La disuguaglianza $1-\varepsilon<1-\frac{1}{x}$ equivale a $\frac{1}{x}<\varepsilon$, ovvero (dato $x>0$) equivale a $\frac{1}{\varepsilon}<x$. Dunque, se $x>\frac{1}{\varepsilon}$ allora è vero che $1-\varepsilon<1-\frac{1}{x}<1+\varepsilon$. Quindi, dato $\varepsilon>0$ possiamo porre $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$.

Esercizio 6

$$\begin{aligned}f'\left(x_0\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+3+h}-\sqrt{x_0+3}}{h}=\frac{0}{0}\\ \frac{\sqrt{x_0+3+h}-\sqrt{x_0+3}}{h} &= \frac{\sqrt{x_0+3+h}-\sqrt{x_0+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x_0+3+h}+\sqrt{x_0+3}}{\sqrt{x_0+3+h}+\sqrt{x_0+3}}=\frac{1}{\sqrt{x_0+3+h}+\sqrt{x_0+3}}\end{aligned}$$

dunque $f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+3+h}-\sqrt{x_0+3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+3+h}+\sqrt{x_0+3}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0+3}}$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 30 agosto 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (10 punti)
Si studi

$$f(x) = \frac{e^{x+2}}{x^2 - 4}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (10 punti)
Si calcolino i seguenti limiti

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-1)}{x^2-2x+1}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(1+2x^2\right)}{\ln(x+3) - \ln(2x+1)},$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4}\right)$$

Esercizio 3 (7 punti)
Siano date le funzioni f e g tali che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si supponga che f e g siano entrambe crescenti e derivabili. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false come conseguenza di tali ipotesi. Si motivino le risposte.

- (a) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (b) $f'(x) \geq 0$ e $g'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (c) la funzione $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tale che $h(x) = f(x) + g(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, è una funzione crescente;
- (d) se, oltre alle ipotesi citate all'inizio dell'esercizio, è vero che $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora la funzione $\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tale che $\ell(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, è una funzione derivabile e crescente.

Esercizio 4 (7 punti)
Si considerino i seguenti insiemi

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 < 0\}$$
$$A_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -2 - \frac{1}{n} \text{ al variare di } n \text{ in } \{1,2,3,4,5\}\right\}$$

Se possibile,

- (a) si ricavi l'insieme $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
- (b) per l'insieme $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ si calcolino $\inf B, \min B, \sup B, \max B$.

Esercizio 5 (3 punti)
Usando la appropriata definizione di limite, si verifichi che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

Esercizio 6 (3 punti)
Si consideri la funzione $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

Fissato un arbitrario $x_0 \in (-1,+\infty) \in \mathbb{R}$, si calcoli la derivata di f nel punto x_0 **usando la definizione di derivata**.

Soluzioni Testo B

Esercizio 1

L'insieme di definizione di f è $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Per ogni $x \in A$, il segno di $f(x)$ è uguale al segno di $x^2 - 4$, dato che $e^{x+2} > 0$ per ogni $x \in A$. Dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 2)$; l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni, ovvero il grafico di f non tocca l'asse delle ascisse. D'altra parte, poiché $f(0) = -\frac{e^2}{4}$, il grafico di f tocca l'asse delle ordinate nel punto $(0, -\frac{e^2}{4})$.

Questa funzione è continua e derivabile in A in quanto è il quoziente di funzioni continue e derivabili. Inoltre

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = \frac{1}{0^+}, \text{ quindi } \lim_{x\to-2^-} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = \frac{1}{0^-}, \text{ quindi } \lim_{x\to-2^+} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = \frac{e^4}{0^-}, \text{ quindi } \lim_{x\to2^-} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = -\infty; \qquad \lim_{x\to2^+} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = \frac{e^4}{0^+}, \text{ quindi } \lim_{x\to2^+} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = +\infty$$

dunque le rette di equazione $x = -2$ e $x = 2$ sono entrambe asintoto verticale per f. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = \frac{0^+}{+\infty}, \text{ quindi } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = 0^+$$

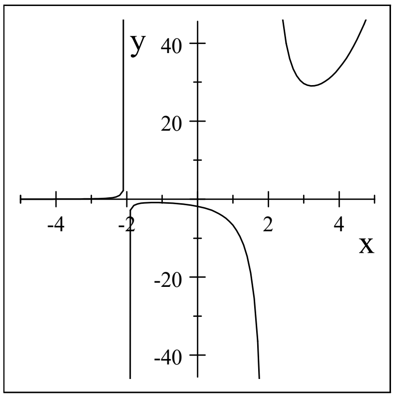
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{x^2-4} = +\infty \text{ per la gerarchia tra infiniti}$$

dunque la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{e^{x+2}(x^2-4) - 2xe^{x+2}}{(x^2-4)^2} = \frac{e^{x+2}\left(x^2-2x-4\right)}{(x^2-4)^2}$$

Dunque per ogni $x \in A$, il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $x^2 - 2x - 4$, ovvero $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1-\sqrt{5}) \cup (1+\sqrt{5}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (1-\sqrt{5}, 2) \cup (2, 1+\sqrt{5})$. Pertanto f è strettamente crescente in $(-\infty, -2)$, strettamente crescente in $(-2, 1-\sqrt{5})$, strettamente decrescente in $(1-\sqrt{5}, 2)$, strettamente decrescente in $(2, 1+\sqrt{5})$, strettamente crescente in $(1+\sqrt{5}, +\infty)$. Inoltre, $x = 1-\sqrt{5}$ è punto di max locale per f; $x = 1+\sqrt{5}$ è punto di min locale per f. Non esistono punti di max/min globali per f. Il grafico di f è



Esercizio 2

(a)

$$\lim_{x\to1} \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-1)}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0} \qquad \text{e} \qquad \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-1)}{x^2-2x+1} = (x+6)\frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

dunque $\lim x_{\to1} \frac{\left(x^2+5x-6\right)\sin(x-1)}{x^2-2x+1} = 7$.

(b) Usando le proprietà dei logaritmi si può scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(1+2x^2\right)}{\ln(x+3) - \ln(2x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{1+x^2}{1+2x^2}}{\ln\frac{x+3}{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{1}{2}} = 1.$$

(c) Il limite è una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}$ e otteniamo

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4} &= \frac{\left(\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4}\right)\left(\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}\right)}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}} \\
&= \frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{2+2x^2+x^4} + \sqrt{1+3x+x^4}} = \frac{2x^2-3x+1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1} + x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}}
\end{aligned}
$$

dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4}\right) = 1$$

Esercizio 3

(a) Falso. Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (una funzione costante) è crescente ma $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Vero, in base al teorema 8.9 del libro di testo.

(c) Vero. Risulta che $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ e sappiamo che $f'(x) \geq 0$, $g'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $h'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e pertanto h è una funzione crescente.

(d) Vero. E' ovvio che ℓ è una funzione derivabile in quanto è il quoziente di funzioni derivabili. Inoltre,

$$\ell'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

è un quoziente non negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché $f'(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ (dunque $f'(x)g(x) \geq 0$) e $-g'(x) \leq 0$, $f(x) < 0$ (dunque $-g'(x)f(x) \geq 0$). Pertanto ℓ è una funzione crescente.

Esercizio 4

(a) $A_1 = (-2, 2)$, $A_2 = \varnothing$, $A_3 = \{-3, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{9}{4}, -\frac{11}{5}\}$, quindi $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$.

(a) $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{-3, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{9}{4}, -\frac{11}{5}\} \cup (-2, 2)$ e $\inf B = \min B = -3$, $\sup B = 2$, $\max B$ non esiste.

Esercizio 5

Vogliamo dimostrare che

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste un } \nu \text{ tale che se } x > \nu, \text{ allora } 1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \varepsilon$$

Dato $x > 0$, la disuguaglianza $1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{x}$ è certamente soddisfatta perché $1 - \varepsilon < 1$ e $1 < 1 + \frac{1}{x}$. La disuguaglianza $1 + \frac{1}{x} < 1 + \varepsilon$ equivale a $\frac{1}{x} < \varepsilon$, ovvero (dato $x > 0$) equivale a $\frac{1}{\varepsilon} < x$. Dunque, se $x > \frac{1}{\varepsilon}$ allora è vero che $1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \varepsilon$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$ possiamo porre $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$.

Esercizio 6

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+1+h}-\sqrt{x_0+1}}{h} = \frac{0}{0} \\
\frac{\sqrt{x_0+1+h}-\sqrt{x_0+1}}{h} &= \frac{\sqrt{x_0+1+h}-\sqrt{x_0+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x_0+1+h}+\sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x_0+1+h}+\sqrt{x_0+1}} = \frac{1}{\sqrt{x_0+1+h}+\sqrt{x_0+1}}
\end{aligned}
$$

dunque $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+1+h}-\sqrt{x_0+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+1+h}+\sqrt{x_0+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+1}}$.