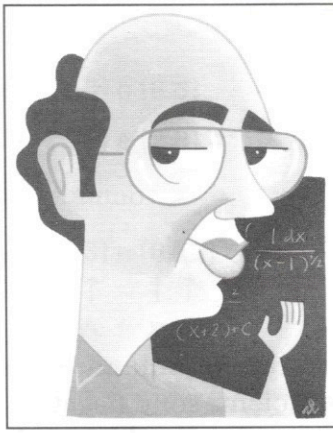


CAPITOLO 1

RETTE

Probabilmente avete già imparato a rappresentare punti e rette sul piano. Ricordiamo ora brevemente come si disegna una retta di cui sia data l'equazione; poi affronteremo il problema inverso (e un po' più difficile), ossia determinare quale equazione corrisponde a una certa retta nel piano.

EQUAZIONE DELLA RETTA

Guardando un'equazione, dovremmo accorgerci immediatamente se si tratta di una retta. Infatti ogni equazione della forma $ax + by + c = 0$, essendo a, b e c dei numeri (a e b non simultaneamente uguali a zero), rappresenta una retta. Naturalmente anche $ax + by = c$ è l'equazione di una retta, essendo riconducibile alla forma precedente.
Le lettere x e y rappresentano le *incognite* (o *variabili*), mentre a, b e c sono dei numeri fissati, detti *coefficienti* delle incognite.

ESEMPIO 1

Per verificare di aver capito bene, consideriamo alcune equazioni e domandiamoci se si tratta di rette.

A. $3x - 4y = 7$

B. $5x = 9$

C. $x/3 - y/7 = 7$

D. $3/x + 5/y = 9$

E. $xy = 7$

F. $x^2 - 3y = 5$

Dunque, le prime tre equazioni rappresentano delle rette (non c'è problema se i coefficienti sono negativi, o in forma frazionaria, o se, come nel secondo caso, b si annulla – purché non si annulli anche a). Le rimanenti tre equazioni non corrispondono a rette: nella quarta, le incognite compaiono al denominatore di frazioni, nella quinta sono moltiplicate tra loro, nell'ultima una delle due è elevata a un esponente diverso dall'unità.

PENDENZA

Definizione. Si dice pendenza di una retta il valore di $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

Dunque la lettera m rappresenta il rapporto sopra indicato. I numerini 1 e 2 all'indice delle incognite si riferiscono a due punti sulla retta, il punto 1 e il punto 2; x_1, x_2, y_1 e y_2 sono dei numeri, non più delle variabili (lo vedremo meglio nell'Esempio 2).
La pendenza può essere scritta anche nella forma $m = \Delta y/\Delta x$, dove Δ, la lettera greca delta, rappresenta la variazione della variabile scritta subito dopo. Pertanto m si ottiene dividendo la variazione della variabile y per quella della variabile x.

ESEMPIO 2

Troviamo la pendenza dei segmenti che congiungono le seguenti coppie di punti (o meglio, la pendenza delle rette cui appartengono tali segmenti).

A. (2,3) e (6,12)

B. (4,–3) e (–1,3)

C. (1,3) e (6,3)

D. (2,5) e (2,8)

Otteniamo

A. (2,3) e (6,12)

$\uparrow\uparrow \quad \uparrow\uparrow$

$x_1 y_1 \quad x_2 y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 3}{6 - 2} = \frac{9}{4}$$

B. (4,–3) e (–1,3)

$\uparrow\uparrow \quad \uparrow\uparrow$

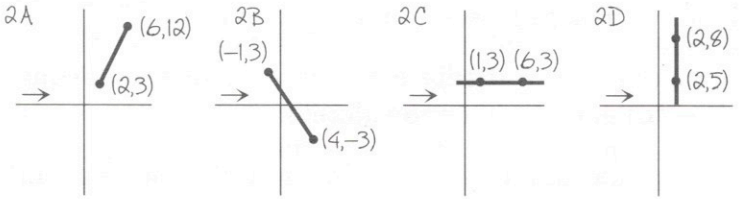
$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-3)}{-1 - 4} = \frac{6}{-5}$$

C. (1,3) e (6,3) $\quad m = (3 - 3)/6 - 1) = 0/5 = 0$

D. (2,5) e (2,8) $\quad m = (8 - 5)/(2 - 2) = 3/0$

Anzitutto, osservate che è indifferente quale punto scegliete come punto 1 o come punto 2: il risultato non cambierebbe, scambiandoli. Badate ai segni: per esempio, nel caso B, il segno negativo della formula di m trasforma (–3) in 3. Nel caso D accade poi un fatto preoccupante: m non è definito, perché il denominatore si annulla; si dice in tal caso che la pendenza è infinita.
Nei disegni sottostanti, dopo aver tracciato sul piano due rette, una orizzontale, l'asse delle x, e una verticale, l'asse delle y, abbiamo rappresentato le coppie di punti (per esempio, (2,3) è il punto la cui "longitudine" e "latitudine" rispetto agli assi sono rispettivamente 2 e 3).



Immaginiamo ora di percorrere ciascun segmento seguendo, come indica la freccia, la direzione rappresen-

tata dall'asse delle x. Nel caso A, la pendenza è positiva e si tratta di "salire" lungo il segmento; nel caso B, la pendenza è negativa e si "scende"; nel caso C ($m = 0$) il segmento è orizzontale; infine, nel caso D, la pendenza è infinita e il segmento è verticale.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Definizione. Il punto in cui una retta interseca l'asse delle x è il punto tale che $y = 0$; quello in cui essa interseca l'asse delle y è tale che $x = 0$.

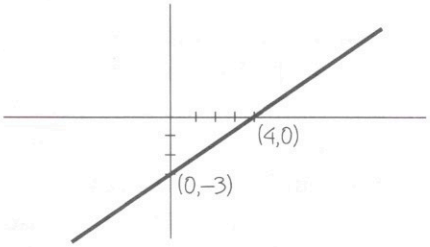
ESEMPIO 3

Data $3x - 4y = 12$, trovate le intersezioni con gli assi e disegnate la retta.

Posto $y = 0$ nell'equazione della retta, ottengo $3x = 12$, da cui $x = 4$; pertanto il punto di intersezione con l'asse delle x è (4,0).

Per $x = 0$, abbiamo $-4y = 12$, ossia $y = -3$; l'intersezione con l'asse delle y è (0,–3).

La retta è mostrata nel seguente disegno.



Notate che basta conoscere due punti appartenenti a una retta, per poterla disegnare; in particolare, le due intersezioni con gli assi sono le più facili da calcolare.

Vi sono però tre casi in cui una retta ha solo un'intersezione. Vediamo un esempio di ciascun caso:

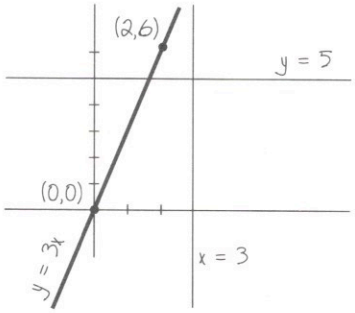
$x = 3$ è una retta verticale, come tutte quelle aventi equazione "x uguale a un certo valore";

$y = 5$ è una retta orizzontale, come tutte quelle aventi equazione "y uguale a un certo valore";

$y = 3x$ ha un'unica intersezione, e con entrambi gli assi,

in (0,0); per disegnare una retta di questo tipo, basta individuare un qualsiasi altro punto, per esempio ponendo $x = 2$, da cui $y = 6$: oltre che per (0,0), la retta passa per (2,6).

Disegniamo le tre rette ora considerate.



Ora che sappiamo disegnare una qualsiasi retta di cui conosciamo l'equazione, ci poniamo il problema inverso: trovare l'equazione di una retta assegnata. Per ottenere il risultato, posso procedere in due modi diversi.
Il primo metodo parte dall'equazione della retta nella forma $y = mx + b$ (ho risolto rispetto a y l'equazione $ax + by = c$, che era la forma implicita data inizialmente), dove m è la pendenza, b l'intersezione con l'asse y (per verificarlo, basta porre $x = 0$).
Il secondo metodo si basa sulla definizione di m, da cui si può ricavare $m = (y - y_1)/(x - x_1)$, dove m e il punto (x_1,y_1) sono fissati, mentre (x, y) rappresenta un punto variabile sulla retta.
Spiegherò i due metodi ricorrendo a un esempio.

ESEMPIO 4

Trovate l'equazione della retta passante per i punti (2,3) e (7,11) e scrivetela in forma implicita.
Primo metodo: calcolo $m = 8/5$ e sostituendolo nell'equazione della retta ottengo $y = (8/5)x + b$; sapendo che la retta passa per (2,3), posso sostituire poi alla x e alla y, rispettivamente, tali valori; ottengo $b = -(1/5)$.
Secondo metodo: calcolo anche qui $m = 8/5$. Conoscendo

m e un punto per cui passa la retta, posso usare la formula indicata, ottenendo un'espressione che è l'equazione cercata.
I singoli passaggi sono presentati qui di seguito (la prima colonna si riferisce al primo metodo, la seconda al secondo):

$$m = \frac{(11-3)}{(7-2)} = \frac{8}{5}$$

$$y = mx + b$$

$$y = \left(\frac{8}{5}\right)x + b$$

$$3 = \left(\frac{8}{5}\right)(2) + b$$

$$3 = \left(\frac{16}{5}\right) + b$$

$$b = 3 - \frac{16}{5} = \frac{15}{5} - \frac{16}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \left(\frac{8}{5}\right)x - \frac{1}{5}$$

$$5y = 8x - 1$$

$$-8x + 5y = -1 \text{ o } 8x - 5y = 1$$

$$m = \frac{(11-3)}{(7-2)} = \frac{8}{5}$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{y-3}{x-2}$$

$$8(x-2) = 5(y-3)$$

$$8x - 16 = 5y - 15$$

$$8x - 5y = 1$$

Il secondo metodo mi sembra migliore, anche perché non genera tutte le frazioni in cui ci si imbatte applicando l'altro. Lavorando con le frazioni, si rischia spesso di sbagliare. La "superiorità" del secondo metodo vale nella grande maggioranza dei casi.
Io darò indifferentemente l'equazione della retta in forma implicita o esplicita, ma vi consiglio di esercitarvi a passare da una forma all'altra.

ESEMPIO 5

Scrivete l'equazione della retta con pendenza pari a 3, intersezione con l'asse y pari a 7.
Se considero l'equazione in forma esplicita, la soluzione

è immediata: da $y = mx + b$, con $m = 3$ e $b = 7$, ottengo $y = 3x + 7$.

ESEMPIO 6

Scrivete l'equazione della retta con pendenza pari a -4, intersezione con l'asse x pari a 9.
So che $m = -4$ e che la retta passa per il punto (9,0); usando il secondo metodo ottengo

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad -4 = \frac{y - 0}{x - 9}$$

ESEMPIO 7

A. Scrivete l'equazione della retta parallela a $3x + 4y = 5$ e passante per il punto (6, 7).

B. Scrivete l'equazione della retta perpendicolare a $3x + 4y = 5$ e passante per il punto (8, -9).

(Ricordo che rette parallele hanno la stessa pendenza, mentre rette perpendicolari hanno pendenze l'una reciproca dell'altra, cambiata di segno.)
In entrambi i casi, dobbiamo risolvere rispetto a y. Da $3x + 4y = 5$ si ricava $4y = -3x + 5$ ossia $y = (-3/4)x + 5/4$.
In questo modo abbiamo ottenuto la pendenza, che è il coefficiente di x, $-3/4$.

A. La retta parallela a quella data ha la stessa pendenza, $m = -3/4$, e deve passare per (6, 7); la sua equazione si ottiene da

$$\frac{-3}{4} = \frac{y - 7}{x - 6}$$

B. La retta perpendicolare a quella data ha per pendenza l'opposto del reciproco di $-3/4$, ossia $4/3$, e deve passare per (8, -9); la sua equazione si ottiene da

$$\frac{4}{3} = \frac{y - (-9)}{x - 8} \qquad \frac{4}{3} = \frac{y + 9}{x - 8}$$