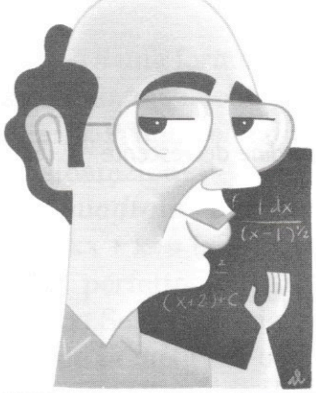

CAPITOLO 2

# EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Anche le equazioni di secondo grado (o quadratiche) come quelle di primo grado del Capitolo precedente sono probabilmente un argomento a voi già familiare, ma non possiamo tralasciarlo.

## SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

Ricordo che se il prodotto di due numeri è nullo, almeno uno dei due deve essere nullo. In formule, se $a \cdot b = 0$, allora $a = 0$ o $b = 0$ (*legge di annullamento del prodotto*).

**ESEMPIO 1**

$(x - 4)(x + 5) = 0$

Vale $x - 4 = 0$, ossia $x = 4$, oppure $x + 5 = 0$, ossia $x = -5$. Le due soluzioni sono 4 e $-5$.

**ESEMPIO 2**

$x(x - 4)(x + 7)(2x - 9)(3x + 1) = 0$

non è un'equazione di secondo grado, ma è molto semplice.
Ponendo uguale a zero ciascun fattore, si ottengono le soluzioni $x = 0$, $x = 4$, $x = -7$, $x = 9/2$ e $x = -1/3$.

**ESEMPIO 3**

$x^2 - 2x = 8$

*(porto "tutto da una parte" e metto in ordine decrescente di esponente)*

$x^2 - 2x - 8 = 0$

*(raccolgo in fattori, e poi annullo ciascun fattore)*

$(x - 4)(x + 2) = 0$
Pertanto $x = 4$ e $x = -2$.

**ESEMPIO 4**

$x^3 - 7x^2 - 8x = 0$

*(un'equazione di terzo grado, o cubica: in generale ha tre soluzioni)*

$x(x - 8)(x + 1) = 0$
Pertanto $x = 0$, $x = 8$, $x = -1$.

**ESEMPIO 5**

$(x - 2)(x - 3) = 2$

*(sembrerebbe innocua, a un'occhiata superficiale, ma per poter applicare la legge di annullamento del prodotto, l'espressione al primo membro deve essere uguagliata a 0; intanto eseguo il prodotto)*

$x^2 - 5x + 6 = 2$

*(porto tutto da una parte)*

$x^2 - 5x + 4 = 0$

*(scompongo di nuovo in fattori)*

$(x - 4)(x - 1) = 0$
Le soluzioni sono 4 e 1.
Se non siete già abili nella scomposizione in fattori, è opportuno che vi esercitiate bene!

## FORMULA QUADRATICA

Cosa si può fare se non è possibile scomporre in fattori un'equazione? Se è un'equazione quadratica, si può ricorrere a una formula. La ricaveremo, non solo perché è istruttivo, ma anche perché vi potrebbe essere richiesto di farlo. Prima della dimostrazione, premettiamo alcune considerazioni.

Un *quadrato perfetto* è un'espressione del tipo $x^2 + 2kx + k^2 = (x + k)^2$. Vediamo come costruire un quadrato perfetto partendo da un'espressione del tipo $x^2 + ax$. Se il coefficiente di $x^2$ è 1, come in questo caso, prendo la metà del coefficiente di x (ossia la metà di a, che è a/2) e lo elevo al quadrato ottenendo $a^2/4$. Allora se sommo a $x^2 + ax$ quest'ultimo termine ottengo un quadrato perfetto. Infatti $x^2 + ax + a^2/4$ può essere scomposto nel prodotto di due fattori entrambi uguali a $(x + a/2)$, ossia è pari a $(x + a/2)^2$. Per esempio, vogliamo trasformare $x^2 + 10x$ in un quadrato perfetto ossia, come si dice, completare il quadrato. La metà di 10 è 5, che elevato al quadrato dà 25; pertanto otteniamo $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$. Detto ciò, torniamo al nostro problema.

Per maggiore chiarezza, risolveremo fianco a fianco, su due colonne, l'equazione $3x^2 - 7x - 6 = 0$ e la generica equazione quadratica $ax^2 + bx + c$.

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \qquad\qquad ax^2 + bx + c = 0$$

*(divido per il coefficiente di $x^2$)*

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{7x}{3} - \frac{6}{3} = \frac{0}{3} \qquad\qquad \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

*(porto dall'altra parte il termine che non contiene x)*

$$x^2 - \frac{7x}{3} = 2 \qquad\qquad x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

*(completo il quadrato prendendo la metà del coefficiente di x, elevandolo al quadrato, e sommandolo a entrambi i membri)*

$$x^2 - \frac{7x}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right)^2 = \left(-\frac{7}{6}\right)^2 + 2 \qquad x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

*(scompongo in fattori il primo membro, sommo i due addendi del secondo)*

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36} + \frac{72}{36} = \frac{121}{36}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c(4a)}{a(4a)} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

*(estraggo la radice quadrata di entrambi i membri)*

$$x - \frac{7}{6} = \pm\frac{11}{6}$$

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*(isolo x e poi ricavo le due soluzioni, o radici)*

$$x = \frac{7}{6} \pm \frac{11}{6}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{7}{6} - \frac{11}{6} = -\frac{4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Il risultato che abbiamo appena dimostrato, la formula quadratica, stabilisce che data un'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con a non nullo, le sue radici sono

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dove a rappresenta il coefficiente di $x^2$, b quello di x e c è il termine in cui non compare l'incognita.
Vediamo subito alcuni esempi.

**ESEMPIO 6**

Risolvere $3x^2 - 7x - 6 = 0$ mediante la formula quadratica.
Vale $a = 3$, $b = -7$, $c = -6$ e pertanto

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{6}$$

Come avevamo già scoperto, $x = 3$ e $x = -2/3$.
Osservate che la formula, la cui dimostrazione è un po' macchinosa, è invece semplice da usare.
Inoltre notate che l'espressione data può essere scomposta in fattori, ossia $3x^2 - 7x - 6 = (3x + 2)(x - 3) = 0$. Anche in questo caso si giunge alle soluzioni $x = 3$ e $x = -2/3$. E allora perché complicarsi la vita con la formula quadratica, se potevamo già giungere così alla soluzione? Perché la formula può essere impiegata anche quando è impossibile scomporre in fattori l'espressione di secondo grado.

**ESEMPIO 7**

Sia data $2x^2 + 5x + 1 = 0$. Non è possibile scomporre in fattori l'espressione al primo membro. Poiché $a = 2$, $b = 5$ e $c = 1$, otteniamo

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

In questi casi, la formula quadratica è indispensabile.

**ESEMPIO 8**

$3x^2 + 5x + 7 = 0$. $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(7)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{2(3)} = \frac{-5 \pm i\sqrt{59}}{6}$$

Nell'ultimo passaggio è comparso il simbolo i; vale per definizione $\sqrt{-1} = i$ da cui

$$\sqrt{-59} = \sqrt{-1}\sqrt{59} = i\sqrt{59}$$

Dunque i è un nuovo "tipo" di numero, detto numero *im-*

*maginario* (nell'ambito dei numeri consueti, detti *reali*, la radice quadrata di $-1$ è un'espressione priva di significato).

Provate ora a indicare, in ciascuno dei seguenti casi, quanto valgono a, b e c (prima di passare al caso successivo, controllate il risultato, e state attenti soprattutto al quarto):

1. $3x^2 - x - 7 = 0$
2. $7x - x^2 = 0$
3. $a^2x^2 - bx + c = 0$
4. $-x^2 + b^2 + 7 = 0$
5. $3x^2 + bx + 7x - 5 = 0$

Soluzioni:

1. $a = 3$, $b = -1$, $c = -7$
2. $a = -1$, $b = 7$, $c = 0$
3. $a = a^2$, $b = -b$, $c = c$
4. $a = -1$, $b = 0$, $c = b^2 + 7$!!
5. $a = 3$, $b = (b + 7)$, $c = -5$