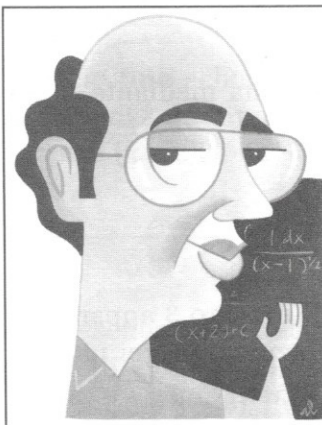




## CAPITOLO 3

# DISEQUAZIONI LINEARI E QUADRATICHE

## DISEQUAZIONI LINEARI

Una disuguaglianza lineare si risolve nello stesso modo di un'uguaglianza lineare, salvo il fatto che moltiplicando o dividendo entrambi i membri per un numero negativo, il verso deve essere invertito (il maggiore diventa minore, e viceversa). Per esempio da  $8 < 12$  si ricava  $8/2 < 12/2$  ossia  $4 < 6$ , mentre vale  $8/-2 > 12/-2$  poiché  $-4 > -6$ .

### ESEMPIO 1

$$4(3x - 5) - 2(4x - 6) \leq 6x - 14$$

(eseguo i prodotti)

$$12x - 20 - 8x + 12 \leq 6x - 14$$

(sommo i termini simili, ossia dello stesso grado)

$$4x - 8 \leq 6x - 14$$

(sommo  $-6x$  a entrambi i membri)

$$-2x - 8 \leq -14$$

(sommo  $+8$  a entrambi i membri)

$$-2x \leq -6$$

(divido entrambi i lati per  $-2$ , e per conseguenza cambia il verso)

$$x \geq +3$$

La soluzione può essere rappresentata mediante il seguente schema.



Il cerchietto “pieno” indica che il numero 3 appartiene alla soluzione (se 3 non fosse soluzione, userei un cerchietto “vuoto” internamente).

### ESEMPIO 2

$$-3 < 2x - 7 \leq 16$$

(trattandosi di una doppia disuguaglianza, cerco di isolare la  $x$  che si trova “in mezzo” sommando 7 a ogni membro)

$$4 < 2x \leq 23$$

(divido per 2)

$$2 < x \leq \frac{23}{2}$$



## DISEQUAZIONI QUADRATICHE

Le incontreremo moltissime volte, quindi cerchiamo di imparare il modo più veloce di risolverle.

### ESEMPIO 3

$$x^2 - 7x > 8$$

(porto tutti i termini da una parte, mantenendo positivo il coefficiente della  $x$ )

$$x^2 - 7x - 8 > 0$$

(scompongo in fattori)

$$(x - 8)(x + 1) > 0$$

Traccio uno schema con un cerchietto vuoto in corrispondenza dei numeri 8 e  $-1$ , i quali risolvono l'uguaglianza  $(x - 8)(x + 1) = 0$  ma non la disuguaglianza data.



Nello schema ora tracciato vi sono tre intervalli distinti (rispettivamente individuati dalle condizioni  $x < -1$ ,  $-1 < x < 8$  e  $x > 8$ ). Preso un valore in ciascuno di questi intervalli, stabilisco quale sia il segno assunto in corrispondenza dall'espressione assegnata (non il valore numerico, solo il segno!):

1. scelgo un numero maggiore di 8, per esempio 10, e lo sostituisco in  $(x - 8)(x + 1)$ ;  $10 - 8$  è positivo,  $10 + 1$  negativo, pertanto il prodotto è positivo, ossia soddisfa la disuguaglianza data
2. scelgo un numero compreso tra  $-1$  e 8, per esempio 3; essendo  $3 - 8$  negativo e  $3 + 1$  positivo, il loro prodotto è negativo, e la disuguaglianza data non è soddisfatta, cosicché l'intervallo  $-1 < x < 8$  non è soluzione
3. infine, scelgo per esempio  $-100$ , numero minore di  $-1$ ; sia  $-100 - 8$ , sia  $-100 + 1$  sono negativi, dunque il loro prodotto è positivo, e la disuguaglianza è soddisfatta.

La soluzione può essere rappresentata dal seguente schema.



o mediante le disequazioni

$$x < -1 \quad x > 8$$

#### ESEMPIO 4

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) \leq 0$$

Questa è in effetti una disequazione di grado maggiore del secondo, la cui soluzione richiederebbe lunghi calcoli, ma vi mostrerò subito un metodo più rapido.

Inizio a tracciare lo schema ponendo un cerchietto pieno sui numeri 2, 4, 6 e 8, poiché il prodotto può essere nullo. Ponendo  $x = 9$  ottengo  $(9 - 2)(9 - 4)(9 - 6)(9 - 8)$ , prodotto di termini tutti positivi, che non può risultare né negativo né nullo; pertanto l'intervallo dato da  $x > 8$  non è soluzione.

Pongo  $x = 7$ ; tutti i fattori risultano positivi tranne  $7 - 8$ , il loro prodotto è negativo, e l'intervallo  $6 \leq x \leq 8$  appartiene alla soluzione.

Per  $x = 5$ , i fattori negativi sono due,  $5 - 8$  e  $7 - 8$ ; risultando positivo il prodotto,  $4 < x < 6$  non appartiene alla soluzione.

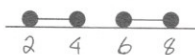
Per  $x = 3$ , tre fattori risultano negativi, quindi l'intervallo dato da  $2 \leq x \leq 4$  appartiene alla soluzione.

Per  $x = 1$ , ho quattro fattori negativi, dunque  $x < 2$  non appartiene alla soluzione.

In conclusione, la soluzione è data da

$$2 \leq x \leq 4 \quad 6 \leq x \leq 8$$

cui corrisponde lo schema



Il risultato può essere raggiunto in modo ancora più semplice. Se tutti i fattori hanno esponente unitario (o più in generale dispari), allora negli intervalli consecutivi il prodotto dato è alternativamente positivo e negativo. Pertanto, individuati i valori in corrispondenza dei quali il prodotto si annulla (2, 4, 6 e 8), e stabilito che  $x > 8$  non è parte della soluzione, allora  $6 \leq x \leq 8$  è parte della soluzione,  $4 < x < 6$  no,  $2 \leq x \leq 4$  sì,  $x < 2$  no. Facile, vero?

#### ESEMPIO 5

$$\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-7)(x-9)} \geq 0$$

Metto un cerchietto pieno su 1, 3 e 5 perché la frazione, ossia il suo numeratore, si può annullare, e un cerchietto vuoto su 7 e 9 perché il denominatore di una frazione non deve mai annullarsi.

Ora basta sostituire un valore, per esempio  $x = 10$ . Poiché tutti i fattori risultano in corrispondenza positivi, la frazione è positiva, e l'intervallo dato da  $x > 9$  è parte della soluzione. Essendo gli esponenti tutti dispari (in particolare, unitari), da questo risultato posso ricavare, senza ulteriori conti, la situazione in tutti gli altri intervalli:  $7 \leq x \leq 9$  non è soluzione,  $5 \leq x < 7$  lo è,  $3 < x < 5$  no,  $1 \leq x \leq 3$  sì e infine  $x < 1$  no.

La soluzione è data dall'unione di intervalli

$$1 \leq x \leq 3 \quad 5 \leq x < 7 \quad x > 9$$

e può essere rappresentata dal seguente schema



In generale, si tratta di individuare i punti in cui i fattori dell'espressione data si annullano (in questo caso 1, 3, 5, 7 e 9) e di rappresentarli mediante cerchietti pieni o vuoti secondo i casi, individuando così gli intervalli dei quali si determina poi algebricamente se appartengono o meno alla soluzione.

#### ESEMPIO 6

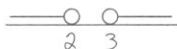
$$\frac{2x - 5}{x - 3} > 1$$

$$\frac{2x - 5}{x - 3} - 1 > 0 \quad \frac{2x - 5}{x - 3} - \frac{x - 3}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 3} > 0$$

Ponendo  $x = 5$  e osservando che questo valore soddisfa la disequazione data, essendo gli esponenti tutti unitari, possiamo concludere subito che la soluzione è

$$x < 2 \quad x > 3$$

o con il consueto schema.



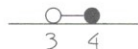
### ESEMPIO 7

$$\frac{2x-6}{x-3} \leq \frac{x-2}{x-3}$$

(essendo i denominatori uguali fra loro, porto tutto da una parte in modo tale che il coefficiente della  $x$  al numeratore risulti positivo, ed eseguo la sottrazione tra le due frazioni)

$$\frac{2x-6}{x-3} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-3} \leq 0$$

Ora poniamo sulla consueta retta un cerchietto pieno in corrispondenza del numero 4, uno vuoto in corrispondenza del numero 3. Sostituiamo alla  $x$  un numero maggiore del valore più a destra, ossia un numero maggiore di 4, per esempio 6. Si ottiene  $(6-4)/(6-3)$ , un numero che non è certo minore o uguale a zero. Pertanto l'intervallo "a destra" di 4 non appartiene alla soluzione. Poiché tutti gli esponenti sono dispari, sarà allora soluzione l'intervallo  $3 < x \leq 4$ , mentre non sarà tale l'intervallo  $x < 3$ . Lo schema della soluzione è il seguente.



### ESEMPIO 8

$$\frac{x-3}{x-1} > \frac{x-5}{x-2}$$

(porto tutto da una parte e ricordo che  $a/b - c/d = (ad - bc)/bd$ )

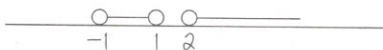
$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-5}{x-2} = \frac{(x-3)(x-2) - (x-5)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+1)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Come in precedenza pongo un cerchietto vuoto su  $-1$ ,  $1$  e  $2$ . Sostituisco alla  $x$  un numero maggiore di  $2$ , per esempio  $5$ . In corrispondenza tutti i fattori sono positivi, pertanto  $x > 2$  è una soluzione. Poiché anche in questo caso gli esponenti sono tutti dispari (essendo unitari), alternativamente un intervallo sì e uno no apparterranno alla soluzione, che sarà

$$-1 < x < 1 \quad x > 2$$

ossia



### ESEMPIO 9

$$\frac{(x^2 + 15)(x - 2)^3(x - 4)^4(x - 6)^5}{(x - 8)^6} \geq 0$$

Ora non fatevi prendere dal panico: è molto più semplice di quello che sembra, anche se si deve procedere con maggiore cautela non essendo tutti gli esponenti dispari. Anzitutto osservo che  $x^2 + 15$  è sempre positivo, indipendentemente da  $x$ , pertanto possiamo sbarazzarcene. In termini più rigorosi, la disequazione data è equivalente a (ossia ha le stesse soluzioni di)

$$\frac{(x - 2)^3(x - 4)^4(x - 6)^5}{(x - 8)^6} \geq 0$$

che pur non sembrando molto meglio della precedente, è facile. Mettiamo sulla solita retta un cerchietto pieno su  $2$ ,  $4$  e  $6$ , uno vuoto su  $8$ .

Posto  $x = 9$ , ottengo fattori tutti positivi; dunque l'intervallo  $x > 8$  appartiene alla soluzione.

Per  $x = 7$  i fattori sono ancora tutti positivi, e anche  $6 \leq x < 8$  appartiene alla soluzione.

Per  $x = 5$  un termine è negativo,  $(x - 6)^5 = (5 - 6)^5$ , quindi l'espressione data è negativa; l'intervallo  $4 < x < 6$  non fa parte della soluzione.

Per  $x = 3$  lo stesso fattore del caso precedente resta ne-

gativo, quindi  $2 < x < 4$  non appartiene alla soluzione. Infine, posto  $x = 1$ , ottengo due fattori negativi; il prodotto è positivo e  $x \leq 2$  appartiene alla soluzione, che sarà

$$x \leq 2 \quad x = 4 \quad 6 \leq x < 8 \quad x > 8$$

ossia



In questo esempio, sono accaduti parecchi fatti bizzarri. Sia l'intervallo  $6 \leq x < 8$  sia l'intervallo  $x > 8$  appartengono alla soluzione, mentre  $x = 8$  non è soluzione; viceversa, mentre  $x = 4$  è soluzione, i valori immediatamente alla sua sinistra e alla sua destra non lo sono: è un valore "isolato" della soluzione. Situazioni di questo tipo accadono quando in un'espressione compaiono esponenti sia pari sia dispari.