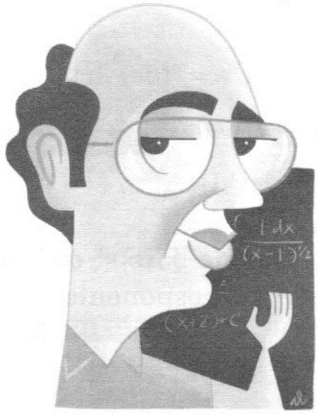

CAPITOLO 5

POTENZE NEGATIVE E FRAZIONARIE

Quello delle potenze è uno degli argomenti più semplici, ma al tempo stesso difficili da tenere a mente. Ricordo che una potenza è un'espressione del tipo a^b; il numero a (che supporremo, salvo diversa indicazione, positivo) si dice base, il numero b (un reale qualsiasi) si dice esponente.

POTENZA NEGATIVA

Definizione. Vale

$a^{-n} = 1/a^n$

per esempio, $b^{-3} = 1/b^3$ e $1/m^{-4} = m^4$
(l'esponente negativo trasforma un numero nel suo reciproco, non in un numero negativo!).

ESEMPI 1 E 2

$5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$ $\qquad$ $(-4)^{-3} = 1/(-4)^3 = 1/-64 = -1/64$

POTENZA FRAZIONARIA

Definizione. Dato un numero positivo a, la scrittura $a^{p/r}$ indica l'elevamento alla potenza p–esima e l'estrazione della radice r–esima.

ESEMPIO 3

$27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

ESEMPIO 4

$16^{-(3/2)} = 1/16^{3/2} = 1/(\sqrt{16})^3 = 1/4^3 = 1/64$

Regola 1. $a^m a^n = a^{m+n}$

(moltiplicando due potenze con uguale base si ottiene una potenza con la stessa base e con esponente dato dalla somma degli esponenti).

ESEMPIO 5

$(5a^{2/3})(4a^{3/2}) = 20a^{2/3+3/2} = 20a^{13/6}$

Ricorda che la base rimane immutata, i coefficienti della base sono moltiplicati e gli esponenti sono sommati.

Regola 2. $(a^m)^n = a^{mn}$

(nella potenza di una potenza, gli esponenti risultano moltiplicati).

ESEMPIO 6

$(4a^{5/7})^{3/2} = 4^{3/2}a^{15/14} = 8a^{15/14}$

Non dimenticare di elevare a potenza anche il coefficiente numerico!

Regola 3. $a^m/a^n = a^{m-n}$ oppure $a^m/a^n = 1/a^{n-m}$

(se le basi sono uguali, dividerle significa sottrarre gli esponenti, lasciando la base inalterata).

ESEMPIO 7

$$\frac{a^6b^{-3}c^{-7}}{a^{-9}b^4c^{-5}} = \frac{a^6a^9c^5}{b^3b^4c^7} = \frac{a^{15}}{b^7c^2}$$

Dunque in un'espressione contente solo moltiplicazioni e divisioni di potenze, gli esponenti negativi al numeratore divengono positivi se portati al denominatore, e viceversa, quelli negativi al denominatore divengono positivi al numeratore.

Regola 4. $(ab)^n = a^n b^n$

ESEMPIO 8

$(a^4b^{-3})^{-2} = a^{-8}b^6 = b^6/a^8$

insieme e

Regola 5. $(a/b)^n = a^n / b^n$

ESEMPIO 9

$(3a^4/b^{-5})^{-3} = 3^{-3}a^{-12}/b^{15} = 1/27a^{12}b^{15}$

ESEMPIO 10

$$(a^4b^{-9}/b^{-5}a^{-3})^{-2} = \left(\frac{a^4b^5a^3}{b^9}\right)^{-2} = \left(\frac{a^7}{b^4}\right)^{-2}$$

a loro

$$= \left(\frac{b^4}{a^7}\right)^2 = \frac{b^8}{a^{14}}$$

ESEMPIO 11

$$\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$$

NO

(qui il problema è reso più complicato dalla sottrazione; uso anzitutto la definizione di potenza negativa)

$$\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{a^2}\dfrac{a^2b^2}{1} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{a^2b^2}{1}}{\dfrac{1}{a}\dfrac{a^2b^2}{1} - \dfrac{1}{b}\dfrac{a^2b^2}{1}}$$

(scelgo il minimo comune denominatore delle frazioni che stanno al numeratore, a^2b^2, che va bene anche per le frazioni che stanno sotto; moltiplico sopra e sotto per tale valore)

$$= \frac{b^2 - a^2}{ab^2 - ba^a}$$

(eseguo i prodotti)

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{ab(b-a)} = \frac{b+a}{ab}$$

(scompongo in fattori e semplifico)

A questo punto ti propongo due brevi esercizi, per verificare se hai capito le proprietà delle potenze, in particolare la differenza tra la somma e il prodotto di potenze.

ESERCIZIO 1

1. $(4a^3)(3a^4)$
2. $4a^3 + 3a^4$
3. $(4a^3)(4a^3)$
4. $4a^3 + 4a^3$
5. $(4a^3)^3$

ESERCIZIO 2

1. $4^7 4^{11}$
2. $b^{2x+3} b^{4x+7}$
3. $(a^{4x+3})(a^{7x})/a^c$
4. $2^n + 2^n$
5. $3^n + 3^n$
6. $3^n + 3^n + 3^n$

Soluzioni dell'Esercizio 1.

1. *È un prodotto di potenze: gli esponenti si sommano, mentre i coefficienti si moltiplicano. Il risultato è* $12a^7$.
2. *È un'addizione di potenze; potrei eseguirla solo se i termini fossero simili, ossia con lo stesso esponente, ma questi non lo sono. Devo lasciare l'espressione così com'è.*

3. *Il prodotto è $16a^6$.*
4. *È un'addizione di termini simili; sommando i coefficienti – lasciate in pace gli esponenti! – si ottiene $8a^3$.*
5. *Per la Proprietà 2, vale $64a^9$.*

Soluzioni dell'Esercizio 2.

1. *È una moltiplicazione: gli esponenti si sommano mentre la base resta invariata; si ottiene 4^{18}.*
2. *Ragionando come nel caso precedente, si ottiene b^{6x+10}.*
3. *Sempre come nel primo caso, ma in più ricordando che nella divisione gli esponenti si sottraggono, ricavo $a^{11x+3-c}$.*
4. *Un'addizione molto difficile... Si devono sommare i coefficienti, lasciando invariate le basi – qui entrambi i coefficienti valgono 1! – e così facendo si ottiene il prodotto di due potenze con la stessa base: $2^n + 2^n = (1)2^n + (1)2^n = 2(2^n) = 2^1 2^n = 2^{n+1}$.*
5. *Si ha $3^n + 3^n = (1)3^n + (1)3^n = 2(3^n)$, ma non si può procedere oltre, come avevamo fatto nel caso precedente, perché ora c'è il prodotto di potenze con base diversa!*
6. *Vale $3^n + 3^n + 3^n = 3(3^n) = 3^1 3^n = 3^{n+1}$, perché è la stessa situazione del numero 4.*