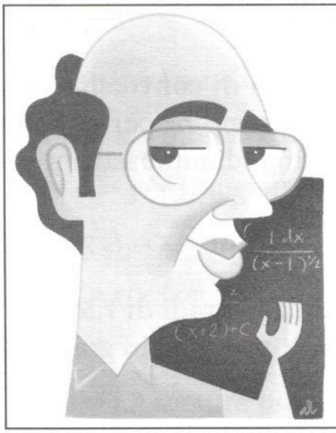


CAPITOLO 9

TRIGONOMETRIA

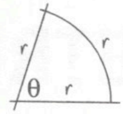
È un argomento che di solito incute timore, ma non è difficile; soprattutto, è molto importante per gli sviluppi futuri, quindi tanto vale cercare di capirlo bene.

LA MISURA DEGLI ANGOLI

Vi sono tre modi per misurare gli angoli; due, il grado e il radiante, li abbiamo già incontrati ma ora li definiamo meglio. Un grado è la misura dell'angolo che è 1/360–esimo dell'angolo giro; un radiante è la misura dell'angolo che si ottiene "ponendo il raggio sulla circonferenza", ossia dell'angolo cui corrisponde un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio. Che relazione c'è tra la misura in gradi e quella in radianti? In un angolo di 360° ci sono 2π radianti, ossia 1 radiante misura circa 57° (valore che si ottiene dividendo 360° per 2π). In analisi si preferisce la misura in radianti, perché si tratta di un numero puro (un rapporto tra lunghezze e non una misurazione, appunto, "in gradi").

360° = 2π radianti
360 gradi = 2π radianti
gradi = $\frac{2\pi}{360}$ radianti

Il terzo metodo consiste nel misurare il *numero di giri*, ossia il numero di volte in cui è percorsa una circonferenza completa; per esempio, si misura in "numero di giri al minuto" la velocità di un motore o quella di un vecchio disco di vinile (33 giri significa "33 giri al minuto").



	giri	gradi	rad
giri	1	360	2π
gradi	$1/360$	1	$\pi/180$
rad	$1/2\pi$	$180/\pi$	1

La seguente tabella dà alcuni esempi di conversione da un'unità di misura all'altra. Per esempio, per passare dalla misura in gradi alla misura in radianti basta moltiplicare per $\pi/180°$.

ESEMPIO 1

Cerco la misura in radianti e quella in gradi di 7,5 giri. La misura in radianti è $7{,}5\,(2\pi) = 15\pi$, quella in gradi $7{,}5\,(360°) = 2700°$.

ESEMPIO 2

Calcolo la misura in radianti dell'angolo di 30°.

$$\text{Vale } 30\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{6}$$

ESEMPIO 3

Calcolo la misura in gradi dell'angolo di $\pi/4$.

$$\text{Vale } \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 45°$$

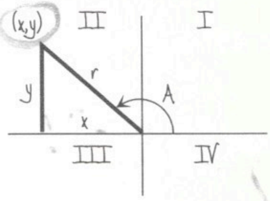
Cercate di impratichirvi nel passaggio da gradi a radianti e viceversa, e in particolare di ricordare più o meno a memoria le seguenti uguaglianze tra le due misure: $30° = \pi/6$; $45° = \pi/4$; $60° = \pi/3$; $90° = \pi/2$; $180° = \pi$; $270° = 3\pi/2$; $360° = 2\pi$ (notate che si tratta dei multipli successivi di 30°, 45° e 90°).

Consideriamo un sistema di assi ortogonali e un punto di coordinate (x, y) che si muova in senso antiorario, a distanza costante r dall'origine. Ricordando la formula della distanza tra due punti, vale $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Come si può vedere nella figura, ogni posizione del punto di coordinate (x, y) individua un angolo di misura (positiva) A (se la rotazione avvenisse in senso orario A sarebbe negativo).

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Definizione. In funzione della misura dell'angolo A definisco le seguenti quantità:

Iniziare prima definendo le funzioni trigonometriche a partire dal cerchio unitario - Successivamente fargli vedere che i rapporti non cambiano



sen A = y/r (*seno* di A)

cos A = x/r (*coseno* di A)

tang A = y/x (*tangente* di A)

cotang A = x/y (*cotangente* di A)

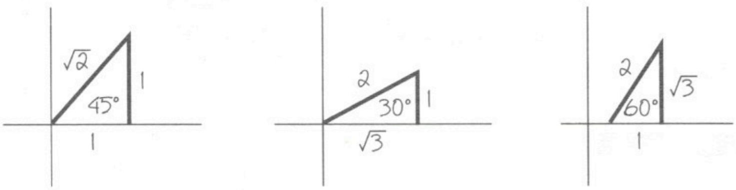
~~sec A = r/x (*secante* di A)~~

~~cosec A = r/y (*cosecante* di A)~~

Mentre r è sempre positivo per definizione, il segno di x e y varia secondo il quadrante in cui mi trovo. Per conseguenza varia il segno delle funzioni trigonometriche: nel I quadrante, essendo x e y positive, tutte le funzioni trigonometriche sono positive; nel II quadrante x diventa negativa, quindi seno e cosecante sono positive; nel III quadrante sia x sia y sono negative, quindi solo tangente e cotangente risultano positive; infine nel IV quadrante x torna positiva, quindi coseno e cosecante sono positive.

MULTIPLI DI 30°, 45° E 60°

Calcoliamo il valore assunto dalle funzioni trigonometriche quando l'angolo A misura 45°, 30° e 60°.



$$\text{sen } 45° = \frac{y}{r} = \frac{1}{2^{1/2}} \qquad \text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{3^{1/2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{x}{r} = \frac{1}{2^{1/2}} \qquad \cos 30° = \frac{3^{1/2}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tang } 45° = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{tang } 30° = \frac{1}{3^{1/2}} \qquad \text{tang } 60° = \frac{3^{1/2}}{1} = 3^{1/2}$$

$$\text{cotang } 45° = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{cotang } 30° = \frac{3^{1/2}}{1} = 3^{1/2} \qquad \text{cotang } 60° = \frac{1}{3^{1/2}}$$

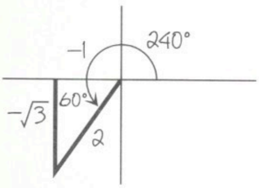
$$\sec 45° = \frac{r}{x} = \frac{2^{1/2}}{1} = 2^{1/2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{3^{1/2}} \qquad \sec 60° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{r}{y} = \frac{2^{1/2}}{1} = 2^{1/2} \qquad \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3^{1/2}}$$

a partire dai due cateti che devono essere uguali nel caso 45°, dall'ipotenusa che è doppia di un cateto (triangolo equilatero!!) negli altri

Piuttosto che imparare a memoria questi valori, esercitatevi a ricavarli geometricamente – basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo individuato! Osservate inoltre che i valori delle funzioni trigonometriche non dipendono dal valore di r, quindi posso scegliere quest'ultimo di volta in volta come più mi fa comodo. (Se serve, le frazioni con una radice al denominatore possono essere razionalizzate; per esempio, moltiplicando numeratore e denominatore di $1/2^{1/2}$ per la radice quadrata di 2 ottengo $2^{1/2}/2$.)

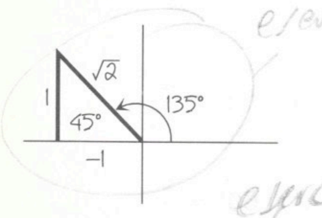
ESEMPIO 4



Calcolare coseno e seno dell'angolo $A = 240° = 4\pi/3$. Poiché $240° = 90° + 90° + 60°$, l'angolo si trova nel III quadrante e individua il triangolo della figura. Scelta per esempio l'ipotenusa di misura $r = 2$, i cateti misurano 1 e $\sqrt{3}$, da cui $x = -1$ e $y = -\sqrt{3}$ (devo cambiare segno sia all'ascissa sia all'ordinata), da cui $\cos 240° = x/r = -1/2$ e $\operatorname{sen} 240° = y/r = -\sqrt{3}/2$.

ESEMPIO 5

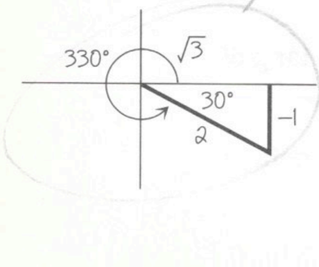
eserc



Calcolare seno e coseno dell'angolo $A = 135° = 3\pi/4$. Vale $135° = 90° + 45° = 180° - 45°$. Dunque abbiamo a che fare con il triangolo indicato in figura, di lati $(1, 1, \sqrt{2})$. Poiché $y = 1$, vale $\operatorname{sen} 135° = 1/\sqrt{2}$; da $x = -1$ ricavo $\cos 135° = -1/\sqrt{2}$.

eserc

ESEMPIO 6



Calcolare $\operatorname{tang} 330° = \operatorname{tang} 11\pi/6$. Vale $330° = 90° + 90° + 90° + 60° = 360° - 30°$; individuato così il triangolo in figura, vediamo che $x = 3^{1/2}$ e $y = 1$, da cui segue $\operatorname{tang} 330° = y/x = -1/3^{1/2}$.

Dagli esempi precedenti possiamo vedere che, dato l'angolo di misura θ, a esso sono collegati gli angoli $180° - \theta$ nel secondo quadrante, $180° + \theta$ nel terzo quadrante e $360° - \theta$ nel quarto quadrante. Il legame tra questi angoli è dovuto al fatto essi individuano triangoli uguali, cosicché se non fosse per il segno le funzioni trigonometriche assumerebbero lo stesso valore. Per esempio

$\cos 60° = 1/2$

$\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -1/2$

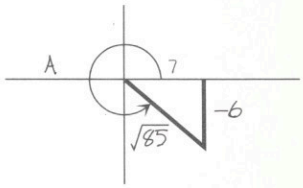
$\cos 240° = \cos (180° + 60°) = -1/2$

$\cos 300° = \cos (360° - 60°) = 1/2$

Non cercate di imparare a memoria nemmeno queste relazioni; è molto meglio se vi esercitate a ricavarle dalla posizione del triangolo.
I due esempi che seguono chiedono invece di ricavare le funzioni trigonometriche una dall'altra senza determinare la misura dell'angolo (sapendo solo in quale quadrante si trova).

ESEMPIO 7

Sapendo che cotang A = $-7/6$ e che A si trova nel IV quadrante, determinare quanto valgono in A le altre funzioni trigonometriche.

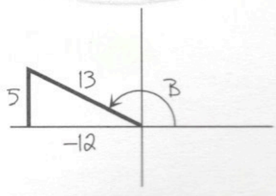


Nel quarto quadrante x è positiva e y negativa. Ricordando che cotang A = x/y, posso porre $x = 7$ e $y = -6$. Per conseguenza vale $r = [7^2 + (-6)^2]^{1/2} = 85^{1/2}$.
Ottengo sen A = $y/r = -6/85^{1/2}$, cos A = $x/r = 7/85^{1/2}$, tang A = $y/x = -6/7$, sec A = $r/x = 85^{1/2}/7$, cosec A = $r/y = 85^{1/2}/(-6)$.

ESEMPIO 8 ripeterne uno uguale a lezione come exe

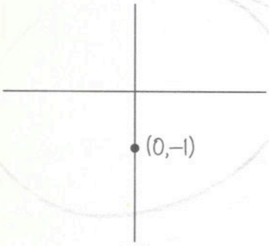
exe

Sapendo che sen B = $5/13$ e che B si trova nel II quadrante, calcolare cosec B e sec B.



Osservo che per definizione cosec B = $r/y = 1/(y/r)$ = 1/sen B, ossia la cosecante è il reciproco del seno: senza ulteriori conti posso concludere che cosec B = $13/5$!
Per calcolare la secante devo invece ricavare il valore di x. Posto $y = 5$ e $r = 13$, vale (per il teorema di Pitagora) x^2

$+ 5^2 = 13^2$, da cui $x = \pm 144^{1/2} = \pm 12$. Delle due soluzioni prendo solo $x = -12$, perché nel secondo quadrante x è negativo. Pertanto vale $\sec B = r/x = 13/(-12)$.
Se vi ricordate le terne pitagoriche, riconoscete qui la terna (5, 12, 13).



ESEMPIO 9

Calcolate tutte le funzioni trigonometriche dell'angolo di $270° = 3\pi/2$.
Per ogni angolo che sia multiplo di 90° il punto P si trova su uno degli assi; in questo caso ci troviamo sul semiasse y negativo. Posto $r = 1$, il punto P ha coordinate $(0, -1)$, ossia $x = 0$ e $y = -1$.

$$\sin 270° = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos 270° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 270° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{ (non è definita)} \qquad \cot 270° = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

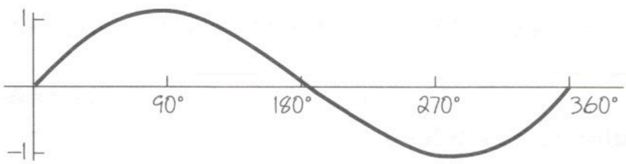
$$\sec \frac{3\pi}{2} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (non è definita)} \qquad \csc 270° = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

Osservate che per ogni angolo multiplo di 90° due funzioni trigonometriche si annullano, due non sono definite e le rimanenti due valgono o entrambe −1 o entrambe +1.

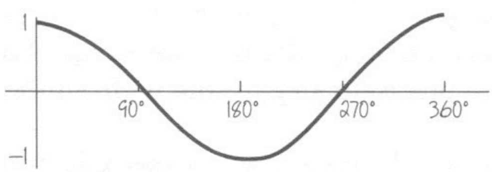
GRAFICI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Tracciamo ora i grafici delle funzioni seno, coseno e tangente (i grafici della secante e della cosecante si tracciano in modo analogo a quelli del seno e coseno, quello della cotangente in modo analogo a quello della tangente).
Purtroppo dobbiamo cambiare notazione. Fin qui abbiamo considerato una circonferenza con centro nell'origine e raggio r, e un angolo A che individua su di essa un punto di ascissa x e ordinata y. Abbiamo poi definito

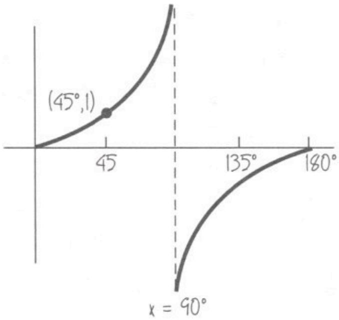
le funzioni trigonometriche mediante x e y (e ovviamente r). Ora invece vogliamo tracciare il grafico delle funzioni trigonometriche al variare dell'angolo A; dunque da questo momento l'ascissa x è l'angolo, l'ordinata y è il valore assunto in corrispondenza dalla funzione trigonometrica. Per esempio y = sen x è la funzione che all'angolo di misura x associa il corrispondente valore del seno.
Tutte le funzioni trigonometriche sono *periodiche*, ossia si ripetono immutate dopo un certo intervallo; in formula, vale $f(x + p) = f(x)$ per ogni x, e se p è il più piccolo valore positivo per cui ciò accade, p è il *periodo*. Il periodo delle funzioni seno, coseno, secante e cosecante è 360° ossia 2π; il periodo della tangente e della cotangente è 180° ossia π. Provo a tracciare per punti il grafico approssimato della funzione y = sen x nell'intervallo tra 0 e 360°; sostituendo a x i valori 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° , 360° e congiungendo i punti così ottenuti.



Questo non è tutto il grafico di sen x, ma solo il "pezzo" compreso tra 0° e 360°; sapendo che la funzione è periodica di periodo 360°, per ottenere il grafico completo dobbiamo immaginare di "ricopiare" questo pezzo tra 360° e 720°, tra –360° e 0°, e così via, infinite volte, su tutto l'asse x.
Procedendo nello stesso modo per y = cos x si ricava il grafico seguente.



Per il grafico di y = tang x sostituisco gli stessi valori di x ma solo fino a 180°, e congiungo i punti così ottenuti.



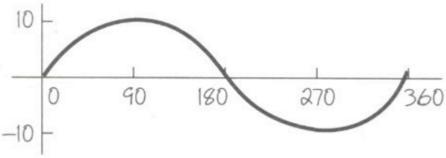
(Ho segnato in particolare l'ordinata di 45°, ossia tang 45° = 1.)
C'è un *asintoto* (una retta cui il grafico della funzione da un certo punto in poi si avvicina sempre più senza mai toccarla). (Una definizione rigorosa di asintoto potrà essere data solo nell'ambito dell'Analisi.)

Osservo anche che sull'asse x stiamo riportando la misura in gradi degli angoli, mentre in Analisi si preferisce la misura in radianti; adottiamo per il momento questo espediente poco ortodosso, finché non avremo preso familiarità con la trigonometria.

Conoscendo i grafici delle funzioni trigonometriche, possiamo ricavarne quelli di semplici trasformazioni di tali funzioni, considerando quattro elementi: l'oscillazione, il periodo, la traslazione orizzontale e quella verticale. L'*oscillazione* di una funzione è la differenza tra il più grande e il più piccolo valore raggiunti dalla funzione. Per esempio, le funzioni seno e coseno hanno oscillazione 2. Se una funzione è illimitata verso l'alto o verso il basso, ossia raggiunge valori sempre più grandi o sempre più piccoli senza "fermarsi", come accade per esempio alle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante, la sua oscillazione non è definita (anche questo concetto potrà essere precisato meglio solo nello studio dell'Analisi).
Le funzioni del tipo y = k sen x o y = k cos x hanno oscillazione pari al doppio del valore assoluto di k, come vediamo nei successivi esempi.

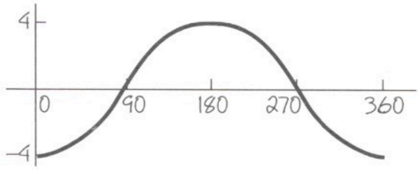
ESEMPIO 10

Tracciare il grafico di y = 10 sen x. Il grafico è simile a quello di sen x, tranne il fatto che il massimo è 10 e il minimo –10. FARLO



ESEMPIO 11

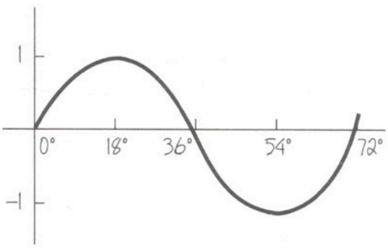
Tracciare il grafico di y = –4 cos x. Rispetto alla funzione cos x, l'oscillazione è 8 e il grafico è "capovolto". exe



Vediamo ora un altro tipo di trasformazione.

ESEMPIO 12

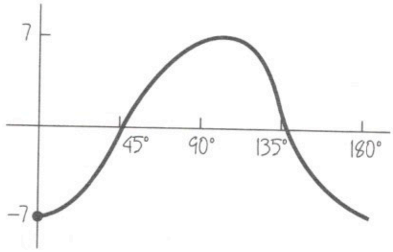
Tracciare il grafico di y = sen 5x. L'oscillazione è la stessa di sen x, ossia 2; il periodo è 360°/5 = 72°.
Considero per la funzione sen x i punti di ascissa 0°, 90°, 180°, 270° e 360° e li divido per 5; ottengo 0°, 18°, 36°, 54° e 72°. A questi punti assegno la stessa ordinata che sen x assegnava ai punti precedenti; ottengo così il grafico di sen 5x. FARLO



ESEMPIO 13

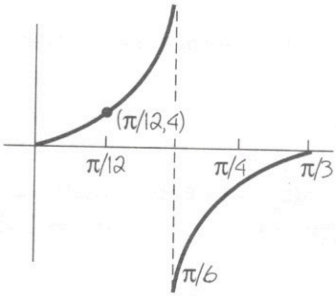
Traccio il grafico di y = –7 cos 2x. Rispetto a cos x, l'o- conv exe

scillazione è 14, il grafico è capovolto e il periodo è $360°/2 = 180°$.
Dividendo per 2 i valori delle ascisse 0°, 90°, 180°, 270° e 360°, ottengo rispettivamente 0°, 45°, 90°, 135° e 180°, cui associo le ordinate delle ascisse precedenti.



ESEMPIO 14

Tracciare il grafico di $y = 4$ tang $3x$. L'oscillazione è infinita, il periodo è $180°/3 = 60°$.
Divido per 3 i valori delle ascisse 0°, 45°, 90°, 135° e 180°, ottenendo 0°, 15°, 30°, 45° e 60°; l'asintoto, che prima era $x = 90°$, ora è $x = 30°$. Nel grafico mostriamo il punto $x = 15° = \pi/12$, cui corrisponde l'ordinata $y = 4$ tang $3x = 4$ tang $3(15°) = 4$ tang $45° = 4(1) = 4$.

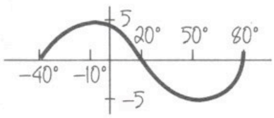


Osservo che mentre le funzioni $y =$ sen kx o $y = \cos kx$ hanno periodo $360°/|k|$, la funzione $y =$ tang kx ha periodo $180°/|k|$.

ESEMPIO 15

FARLO

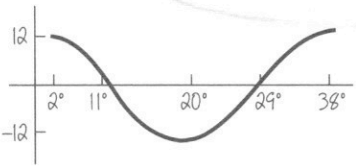
Tracciare il grafico della funzione $y = 5$ sen $(3x + 120°)$. Riscrivo la funzione data come $y = 5$ sen $3(x + 40°)$. L'oscillazione è 10, il periodo $360°/3 = 120°$. Divido per 3 le ascisse 0°, 90°, 180°, 270° e 360°, ottenendo 0°, 30°, 60°, 90° e 120°. Il termine 40° sommato all'argomento del seno provoca uno spostamento verso sinistra di 40°. Pertanto dobbiamo sottrarre 40° agli angoli precedenti: 0° – 40°, 30° – 40°, 60° – 40° e così via, ottenendo –40°, –10°, 20°, 50° e 80°. Per convincerci meglio, proviamo a sostituire un valore. Se per esempio x = –40°, vale y = 5 sen 3(–40° + 40°) = 5 sen 0° = 0°.



ESEMPIO 16

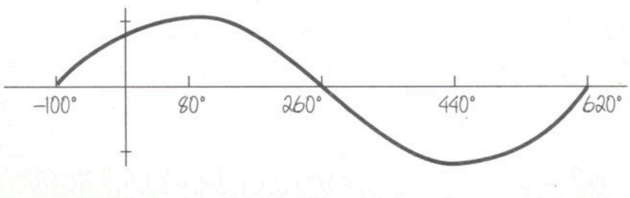
Tracciare il grafico di y = 12 cos (10x – 20°).
Raccogliendo "dentro il coseno", posso riscrivere la funzione data come y = 12 cos 10(x –2°). L'oscillazione è 24. Il periodo è 360°/10 = 36°; alle solite ascisse 0°, 90°, 180°, 270° e 360° corrispondono in questo caso le ascisse 0°, 9°, 18°, 27° e 36°. Infine, c'è una traslazione verso destra di 2°, quindi i punti precedenti diventano (sommando 2° a ciascuno): 2°, 11°, 20°, 29° e 38°.

exe



ESEMPIO 17

Tracciare il grafico di y = sen (1/2 x + 50°).
Posso riscrivere la funzione data come y = sen 1/2 (x + 100°). La sua oscillazione è 2, il periodo 360°/(1/2) = 720° ed è traslata verso sinistra di 100°. Gli angoli 0°, 90°, 180°, 270° e 360° diventano 0°, 180°, 360°, 540° e 720°. A questi ultimi valori devo sottrarre 100°: ottengo –100°, 80°, 260°, 440° e 620°.



ESEMPIO 18

$3y - 12 = 6 \text{ sen } (3x - 60°)$

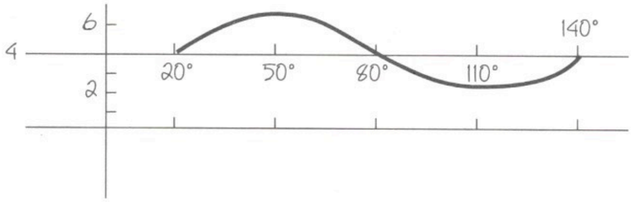
(questa equazione nelle due incognite x e y definisce implicitamente una funzione; risolvendo rispetto a y ricavo la forma esplicita della funzione)

$3y = 6 \text{ sen } 3(x - 20°) + 12$

(divido entrambi i membri per 3; attenzione a non toccare il 3 che sta "dentro" il seno!)

$y = 2 \text{ sen } 3(x - 20°) + 4$

Voglio ora tracciare il grafico di questa funzione. L'oscillazione è pari a 4, il periodo è 360°/3 = 120° e il grafico è traslato verso destra di 20°. Pertanto da 0°, 90°, 180°, 270° e 360° ottengo 0°, 30°, 60°, 90° e 120°, da cui a loro volta 20°, 50°, 80°, 110° e 140°. Infine, l'intero grafico è traslato verso l'alto di 4.



Naturalmente se avessi avuto –4 anziché +4, ossia la funzione fosse stata $y = 2 \text{ sen } 3(x - 20°) - 4$, la traslazione di 4 sarebbe avvenuta verso il basso.

La parte della trigonometria che segue, quella delle "formule", è importante, ma un po' difficile: richiede uno sforzo di comprensione e anche una certa pratica. Anzitutto definiamo cosa sia un'identità.

IDENTITÀ

Definizione. Si dice identità un'equazione che risulti verificata per ogni valore delle incognite per cui essa è definita.

ESEMPIO 19

L'equazione $2x + 3x = 5x$ è un'identità: due volte x più tre volte x fa sempre cinque volte x, qualsiasi sia x.

ESEMPIO 20

L'equazione $4/x + 5/x = 9/x$ non è definita per $x = 0$, mentre è verificata per ogni valore "lecito" (ossia non nullo) di x, pertanto è un'identità.

Le più importanti *identità trigonometriche* sono le seguenti:

1. $(\text{sen } x)(\text{cosec } x) = 1$
2. $(\cos x)(\sec x) = 1$
3. $(\text{tang } x)(\text{cotang } x) = 1$

L'identità 1 può essere scritta anche come $\text{sen } x = 1/\text{cosec } x$ oppure $\text{cosec } x = 1/\text{sen } x$; in altri termini, seno e cosecante di uno stesso angolo sono l'uno il reciproco dell'altro. Lo stesso vale per le identità 2 e 3: anche coseno e secante da un lato, e tangente e cotangente dall'altro, sono l'uno il reciproco dell'altro.

4. $\text{tang } x = \text{sen } x/\cos x$
5. $\text{cotang } x = \cos x/\text{sen } x$

L'identità 5 può essere ricavata dalla 4, servendoci della "scoperta" appena fatta, che la cotangente di un angolo è il reciproco della tangente dello stesso angolo.

6. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Dall'identità 6 si può ricavare $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ oppure $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$.

7. $1 + \text{tang}^2 x = \sec^2 x$ (oppure $\text{tang}^2 x = \sec^2 x - 1$)
8. $1 + \text{cotang}^2 x = \text{cosec}^2 x$ (oppure $\text{cotang}^2 x = \text{cosec}^2 x - 1$)

È molto importante capire e ricordare bene queste identità.

Vi potrà capitare di dover risolvere delle identità trigonometriche; i passi da fare per giungere alla conclusione non sono sempre così evidenti come quando si tratta di risolvere un'equazione – a volte, anche senza commettere errori, si può prendere una strada che non porta da nessuna parte. Ecco qui alcuni suggerimenti:

1. è sempre meglio partire dal lato "più complicato", tenendo conto del fatto che l'addizione di funzioni trigonometriche è più difficile della moltiplicazione, che gli angoli "multipli" sono più difficili di quelli "singoli" (per esempio sen 2x è "peggio" di tang x), e infine che in molti casi il secondo membro è quello più brutto...
2. fate le cose "ovvie", come sommare le frazioni, svolgere le parentesi, elevare al quadrato
3. "spezzate" le frazioni che hanno una somma al numeratore e un solo termine al denominatore, ricordando che vale l'uguaglianza

   $$(a + b + c)/d = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

4. se riconoscete una identità trigonometrica, usatela
5. se da una parte c'è una sola funzione trigonometrica, cercate di esprimere anche l'altro membro in termini di tale funzione
6. raccogliete in fattori
7. come "ultima spiaggia", provate a moltiplicare per una qualche funzione numeratori e denominatori, sperando di ottenere qualcosa di meglio...
8. infine, provate a trasformare tutte le funzioni trigonometriche in seni e coseni.

Quest'ultimo metodo funziona spesso, ma quasi altrettanto spesso rende il problema più complicato; perciò non vi consiglio di partire direttamente da questo, come fanno alcuni.
Non c'è altro da fare che esercitarsi, dunque cominciamo.

ESEMPIO 21

Verificare che vale l'identità

$$\frac{\text{tang x}}{1+\text{sec x}}-\frac{\text{tang x}}{1-\text{sec x}}=2\ \text{cosec x}$$

(considero il primo membro; sommo le frazioni)

$$\frac{(\text{tang x})(1-\text{sec x})-(\text{tang x})(1+\text{sec x})}{(1+\text{sec x})(1-\text{sec x})}=$$

(eseguo i prodotti al numeratore e al denominatore)

$$\frac{\text{tang x}-(\text{tang x})(\text{sec x})-\text{tang x}-(\text{tang x})(\text{sec x})}{1-\text{sec}^2\text{ x}}=$$

(sommo i termini simili al numeratore)

$$\frac{-2(\text{tang x})(\text{sec x})}{-\text{tang}^2\text{ x}}=$$

(divido numeratore e denominatore per -tang x, scrivo la funzione tangente in termini di seno e coseno, semplifico di nuovo)

$$\frac{2\ \text{sec x}}{\text{tang x}}=\frac{2/\text{cos x}}{\text{sen x}/\text{cos x}}=\frac{2}{\text{sen x}}=2\ \text{cosec x}$$

Quella che ho ottenuto è veramente un'identità, quindi l'esercizio è felicemente concluso!

ESEMPIO 22

Dimostrare

$$\frac{\text{cos x}+\text{sen x}-\text{sen}^3\text{ x}}{\text{sen x}}=\text{cotang x}+\text{cos}^2\text{ x}$$

(spezzo la frazione)

$$\frac{\text{cos x}}{\text{sen x}}+\frac{\text{sen x}}{\text{sen x}}-\frac{\text{sen}^3\text{ x}}{\text{sen x}}=$$

(uso le identità trigonometriche)

$$\text{cotang x}+1-\text{sen}^2\text{ x}=\text{cotang x}+\text{cos}^2\text{ x}$$

È un'identità.

ESEMPIO 23

Dimostrare

$$\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$$

(raccolgo in fattori al primo membro, il più complicato)

$$(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$$

Ricordando che vale $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, l'identità è già provata.

ESEMPIO 24

Dimostrare

$$\cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = \operatorname{sen}^4 x$$

(sostituisco cos 2x = 1 – sen 2x)

$$(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + 1 =$$

$$1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x - 2 + 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 = \operatorname{sen}^4 x$$

(ora basta sommare i termini simili!)

ESEMPIO 25

Dimostrare

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

(metodo "ultima spiaggia": al primo membro moltiplico numeratore e denominatore per 1 – cos x, e spero che funzioni)

$$\frac{(\operatorname{sen} x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} =$$

(non conviene eseguire il prodotto al numeratore del primo membro, dovendo dimostrare l'uguaglianza col secondo membro dove al numeratore c'è solo 1 – cos x)

$$\frac{(\operatorname{sen} x)(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Si risolvono come le equazioni algebriche, naturalmente le soluzioni non sono valori delle funzioni trigonometriche ma valori degli angoli (per esempio se ho risolto rispetto a sen x questa non è ancora la soluzione, devo ricavarne i valori di x).
Cerco di dare un esempio dei diversi tipi.

ESEMPIO 26

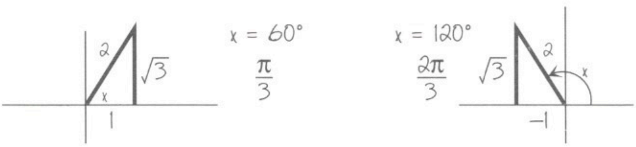
Risolvere

$2 \text{ sen } x - 3^{1/2} = 0$

(isolo sen x)

$$\text{sen } x = \frac{3^{1/2}}{2}$$

(il seno è positivo, quindi sono nel I o nel II quadrante; disegno i triangoli in corrispondenza dei quali il seno vale $3^{1/2}/2$)



Posso concludere che le soluzioni sono due, $x = \pi/3$ e $x = 2\pi/3$? No, le soluzioni sono infinite; ricordando infatti che la funzione seno è periodica di periodo 2π, essa assume il valore $3^{1/2}/2$ infinite volte, per $x = \pi/3$, $x = \pi/3 + 2\pi$, $x = (\pi/3 + 2\pi) + 2\pi$, e così via. Tutte queste soluzioni possono essere "riassunte" con la scrittura $x = \pi/3 + 2k\pi$, dove k assume i valori 0, 1, 2, 3, ... ma anche −1, −2, −3,...
Ragionando allo stesso modo per l'altra soluzione, ottengo $x = 2\pi/3 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,...$
Se però mi limitassi a considerare un solo periodo, ossia cercassi le soluzioni dell'equazione data, per esempio, tra 0 e 2π, allora sì le soluzioni sarebbero le due che avevo inizialmente supposto. Nel prossimo esempio faremo proprio così.

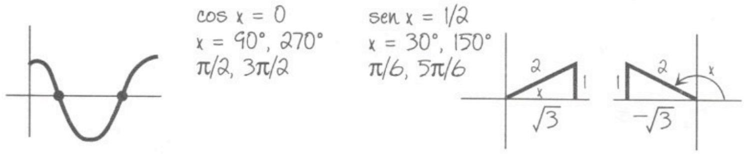
ESEMPIO 27

Risolvere nell'intervallo tra 0 e 2π l'equazione

$2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0$

(raccolgo il fattore comune)

$(\cos x)(2 \text{ sen } x - 1) = 0$



Nell'intervallo richiesto le soluzioni sono

$x = \pi/2$ $\quad x = 3\pi/2$ $\quad x = \pi/6$ $\quad x = 5\pi/6$

Osserviamo che quando il seno o il coseno valgono 1, –1 o 0 l'angolo è un multiplo di $\pi/2$ (90°). È facile ricavarlo dal grafico delle due funzioni, cercando i massimi, i minimi o le intersezioni con gli assi.

ESEMPIO 28

Risolvere l'equazione

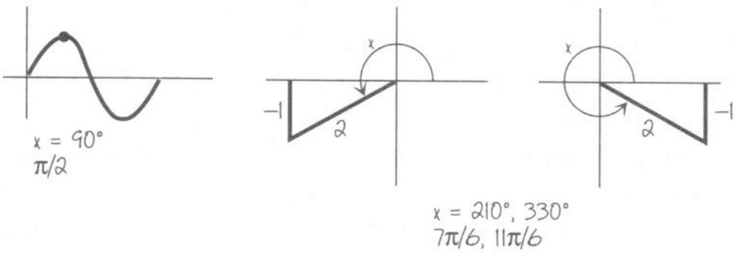
$2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$

(scompongo in fattori)

$(2 \text{ sen } x + 1)(\text{sen } x - 1) = 0$

(risolvo rispetto a sen x)

$\text{sen } x = -1/2 \qquad \text{sen } x = 1$



Le soluzioni sono

$x = \pi/2 + 2k\pi \qquad x = 7\pi/6 + 2k\pi \qquad x = 11\pi/6 + 2k\pi$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

ESEMPIO 29

$3 \text{ sen}^2 x - 5 \text{ sen } x + 2 = 0$

Exe

$(3 \text{ sen } x - 2)(\text{sen } x - 1) = 0$

$\text{sen } x = 1$ $\qquad$ $\text{sen } x = 2/3$ (positivo: I e II quadrante)

Come già visto, la soluzione di $\text{sen } x = 1$ è

$x = \pi/2 + 2k\pi$ $\qquad$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$

Per contro, gli angoli x il cui seno è 2/3 possono essere calcolati solo in modo approssimato. Indicato con α quello nel primo quadrante e con β quello nel secondo, le rimanenti soluzioni sono

$x = \alpha + 2k\pi$ $\qquad$ $x = \beta + 2k\pi$

(usando una calcolatrice, trovo che α è circa 42°, quindi β è circa 180° – 42° = 138°).

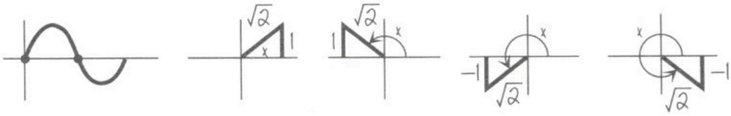
ESEMPIO 30

$2 \text{ sen}^3 x - \text{sen } x = 0$

exe

$\text{sen } x\,(2 \text{ sen}^2 x - 1) = 0$

$\text{sen } x = 0$ $\qquad$ $\text{sen}^2 x = 1/2$ ossia $\text{sen } x = \pm 1/2^{1/2}$



Quante soluzioni! Poiché il seno si annulla in $0, \pi, 2\pi, \ldots$ e in $-\pi, -2\pi, \ldots$ vale anzitutto

$x = k\pi$

e poi

$x = \pi/4 + 2k\pi$ $\qquad$ $x = 3\pi/4 + 2k\pi$

$x = 5\pi/4 + 2k\pi$ $\qquad$ $x = 7\pi/4 + 2k\pi$

(come al solito k è intero, ossia $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

ESEMPIO 31

$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

exe

(uso la formula quadratica)

$$\cos x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} = \frac{-1 \pm [1 - 4(1)(-1)]^{1/2}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm 5^{1/2}}{2} = \frac{-1 \pm 2{,}24}{2}$$

La radice quadrata di 5 è circa 2,24, quindi le due soluzioni sono circa –1,62 e 0,62. La prima però non va bene, poiché il coseno non vale mai meno di –1. L'altro valore del coseno è accettabile ed essendo positivo appartiene al primo o al quarto quadrante. Indicate con α e β le misure dei rispettivi angoli nel I e nel IV quadrante, le soluzioni sono

$x = \alpha + 2k\pi \qquad x = \beta + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$

Il valore approssimato di α è circa 52°, quello di β circa 360° – 52° = 308°.

ESEMPIO 32

Risolvere tra 0 e 2π l'equazione

$\text{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$

(ricorro alla sostituzione sen² x = 1 - cos² x)

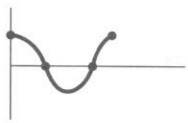
Farlo

$(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$

$-\cos^2 x + \cos x = 0$

$-\cos x (\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \qquad \cos x = 1$



$x = 0 \qquad x = \pi/2 \qquad x = 3\pi/2$

ESEMPIO 33

$\text{tang}^2 x + \sec x - 1 = 0$

(sostituisco tang² x = sec² x – 1)

$(\sec^2 x - 1) + \sec x - 1 = 0$

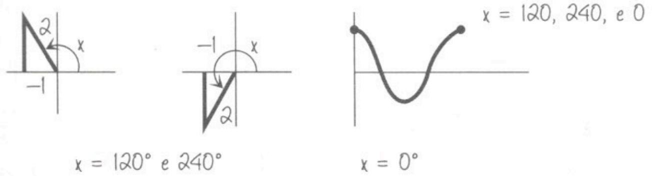
$\sec^2 x + \sec x - 2 = 0$

$(\sec x + 2)(\sec x - 1) = 0$

$\sec x = -2 \qquad \sec x = 1$

(trasformo nel coseno)

$\cos x = -1/2 \qquad \cos x = 1$



$x = 2\pi/3 + 2k\pi \qquad x = 4\pi/3 + 2k\pi \qquad x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$
(k intero)

ESEMPIO 34

$\text{sen } x + \text{cosec } x = 2$

$\text{sen } x + 1/\text{sen } x = 2$

$\text{sen}^2 x + 1 = 2 \text{ sen } x$

$\text{sen}^2 x - 2 \text{ sen } x + 1 = 0$

$(\text{sen}^2 x - 1)^2 = 0$

$\text{sen } x = 1$

$x = \pi/2 + 2k\pi$ (k intero)

Concludiamo con un esempio un po' più complicato.

ESEMPIO 35

Cerco tra 0 e 2π le soluzioni dell'equazione

$\text{sen } x - 3^{1/2} \cos x = 1$

(isolo la funzione trigonometrica più "brutta", quella il cui coefficiente è una radice quadrata)

$\text{sen } x - 1 = 3^{1/2} \cos x$

(elevo al quadrato e poi sviluppo)

$(\text{sen } x - 1)^2 = (3^{1/2} \cos x)^2$

$\text{sen}^2 x - 2 \text{ sen } x + 1 = 3 \cos^2 x$

(sostituisco $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$)

$\text{sen}^2 x - 2 \text{ sen } x + 1 = 3 (1 - \text{sen}^2 x)$

$4 \text{ sen}^2 x - 2 \text{ sen } x - 2 = 0$

$2 (2 \text{ sen } x + 1)(\text{sen } x - 1) = 0$

$\text{sen } x = 1 \qquad \text{sen } x = -1/2$

$x = \pi/2 \qquad x = 7\pi/6 \qquad x = 11\pi/6$

Avendo elevato al quadrato, possiamo aver introdotto soluzioni estranee all'equazione di partenza; dobbiamo verificarle sostituendole in tale equazione.

$x = \pi/2$: $\text{sen } \pi/2 - 3^{1/2} \cos \pi/2 = 1$
$1 - 0 = 1$ (verificata)

$x = 7\pi/6$: $\text{sen } 7\pi/6 - 3^{1/2} \cos 7\pi/6 = 1$
$-1/2 - 3^{1/2} (-3^{1/2}/2) = 1$ da cui $-1/2 + 3/2 = 1$ (verificata)

$x = 11\pi/6$: $\text{sen } 11\pi/6 - 3^{1/2} \cos 11\pi/6 = 1$
$-1/2 - 3^{1/2} (+3^{1/2}/2) = 1$ da cui $-1/2 - 3/2 = 1$ (non verificata: $-2 \neq 1$)

Pertanto le soluzioni (comprese tra 0 e 2π) sono

$x = \pi/2 \qquad x = 7\pi/6$

DOMINIO E CODOMINIO DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

	Dominio	Codominio
$y = \text{sen } x$	tutti i numeri reali	$-1 \leq y \leq +1$
$y = \cos x$	tutti i numeri reali	$-1 \leq y \leq +1$
$y = \text{tang } x$	tutti i reali tranne $\pi/2 + k\pi$	tutti i numeri reali
$y = \text{cotang } x$	tutti i reali tranne $k\pi$	tutti i numeri reali
$y = \sec x$	come tang x	tutti i reali tranne $-1 < y < 1$
$y = \text{cosec } x$	come cotang x	come sec x

Commentiamo un po' questa tabella. Le funzioni

tang $x = \text{sen } x / \cos x$ sec $x = 1/\cos x$

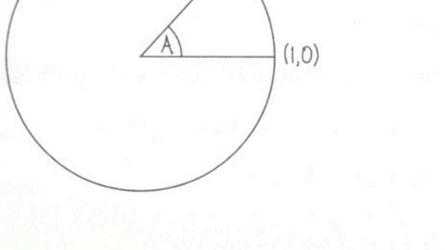
sono definite ovunque fuorché nei punti in cui si annulla il denominatore, ossia $x = \pi/2 + k\pi$ (k intero); allo stesso modo per le funzioni cotangente e cosecante si devono escludere i valori che annullano il seno, ossia si deve porre $x \neq k\pi$ (k intero).
Le funzioni secante e cosecante sono rispettivamente le reciproche di coseno e seno, e questo giustifica il fatto che il loro codominio sia dato da tutti i valori minori o uguali a -1, e maggiori o uguali a $+1$.

ANGOLI DOPPI O DIMEZZATI, SOMMA O DIFFERENZA DI DUE ANGOLI

Dovrei elencare ora una serie di formule trigonometriche, che vi sono forse già tristemente note. Potete prenderle come dogma, oppure porvi il problema se siano vere o no; penso che sia meglio se vedete la dimostrazione di almeno una di queste.
Vogliamo esprimere cos (A – B) tramite funzioni trigonometriche che contengano solo o l'angolo A o l'angolo B. Dobbiamo fare un nuovo cambio di notazione, tornando a quella iniziale: considero un cerchio con centro nell'origine e raggio unitario (la sua equazione è $x^2 + y^2 = 1$) e un angolo di misura A cui corrisponde sulla circonferenza il punto (x, y). Poiché r = 1, vale

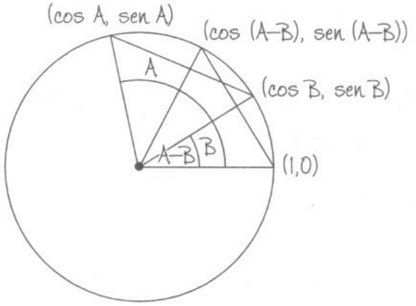
$\cos A = x/r = x$ sen $A = y/r = y$

come indicato nella seguente figura.



Dimostrargliela effettivamente

Nella figura successiva indichiamo gli angoli A, B e A – B, e poi tracciamo le corde che congiungono i punti (cos A, sen A), (cos B, sen B) e (cos (A – B), sen (A – B)). Ricordiamo dalla Geometria che ad angoli al centro uguali corrispondono corde uguali. Poniamo allora la condizione di uguaglianza tra la corda che congiunge (cos A, sen A) e (cos B, sen B), e quella che congiunge (cos (A – B), sen (A – B)) e (1, 0). Posto (cos A, sen A) = (x_1, y_1), (cos B, sen B) = (x_2, y_2), (cos (A – B), sen (A – B)) = (x_3, y_3) e (1, 0) = (x_4, y_4), abbiamo (distanza tra due punti)



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$$

$$[\cos (A - B) - 1]^2 + [\operatorname{sen} (A - B) - 0]^2$$
$$= (\cos A - \cos B)^2 + (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)^2$$

(ora basterà risolvere rispetto a cos (A – B) per ottenere la formula cercata)

$$\overbrace{\boxed{\operatorname{sen}^2 (A - B) + \cos^2 (A - B)}}^{1} - 2 \cos (A - B) + 1$$
$$= \overbrace{\boxed{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A}}^{1} + \overbrace{\boxed{\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B}}^{1}$$
$$- 2(\cos A)(\cos B) - 2(\operatorname{sen} A)(\operatorname{sen} B)$$

(applico tre volte la formula sen 2x + cos 2x = 1)

$$1 - 2 \cos (A - B) + 1$$
$$= 1 + 1 - 2(\cos A)(\cos B) - 2(\operatorname{sen} A) (\operatorname{sen} B)$$

(e ricordando che uno più uno fa due...)

$$2 - 2 \cos (A - B) = 2 - 2(\cos A)(\cos B) - 2(\operatorname{sen} A)(\operatorname{sen} B)$$

(sottraggo 2 a entrambi i membri e poi li divido per -2)

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Dimostrata questa, spero che prenderete per buone le rimanenti formule (del resto, le dimostrazioni potete trovarle in ogni libro di Trigonometria). Ho scelto questa per due motivi: per far vedere che nulla ha a che fare con la proprietà distributiva, e per convincervi che il calcolo di questo coseno richiede davvero, anche se sembra strano, di calcolare non solo dei coseni ma anche dei seni.
Siamo pronti per scrivere tutte le formule (compresa quella appena dimostrata).

$$\mathrm{sen}\,(A + B) = \mathrm{sen}\,A \cos B + \cos A\,\mathrm{sen}\,B$$

$$\mathrm{sen}\,(A - B) = \mathrm{sen}\,A \cos B - \cos A\,\mathrm{sen}\,B$$

$$\cos\,(A + B) = \cos A \cos B - \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$$

$$\cos\,(A - B) = \cos A \cos B + \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$$

$$\mathrm{tang}\,(A + B) = \frac{\mathrm{tang}\,A + \mathrm{tang}\,B}{1 - \mathrm{tang}\,A\,\mathrm{tang}\,B}$$

$$\mathrm{tang}\,(A + B) = \frac{\mathrm{tang}\,A - \mathrm{tang}\,B}{1 + \mathrm{tang}\,A\,\mathrm{tang}\,B}$$

$\mathrm{sen}(A/2) = \pm\,[(1 - \cos A)/2]^{1/2}$

oppure $\mathrm{sen}^2 A/2 = (1 - \cos A)/2$

$\cos(A/2) = \pm\,[(1 + \cos A)/2]^{1/2}$

oppure $\cos^2 A/2 = (1 + \cos A)/2$

$\mathrm{tang}(A/2) = \pm\,[(1 - \cos A)/(1 + \cos A)]^{1/2} = (1 - \cos A)/\mathrm{sen}\,A = \mathrm{sen}\,A/(1 + \cos A)$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \mathrm{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 A$$

$$\mathrm{sen}\,2A = 2\,\mathrm{sen}\,A \cos A$$

$$\mathrm{tang}\,2A = \frac{2\,\mathrm{tang}\,A}{1 - \mathrm{tang}^2 A}$$

Ed ecco un ulteriore (e ultimo) elenco di formule.

$\mathrm{sen}\,(\pi/2 - A) = \cos A$	$\cos\,(\pi/2 - A) = \mathrm{sen}\,A$	$\mathrm{sen}\,(\pi - A) = \mathrm{sen}\,A$
$\mathrm{sen}\,(-B) = -\,\mathrm{sen}\,B$	$\cos\,(-B) = \cos B$	$\mathrm{tang}\,(-B) = -\,\mathrm{tang}\,B$

2 sen A cos B = sen (A + B) + sen (A – B)

2 cos A sen B = sen (A + B) – sen (A – B)

2 cos A cos B = cos (A + B) + cos (A – B)

2 sen A sen B = – cos (A + B) + cos (A – B)

sen C + sen D = 2 sen 1/2(C + D) cos 1/2 (C – D)

sen C – sen D = 2 cos 1/2(C + D) sen 1/2 (C – D)

cos C + cos D = 2 cos 1/2(C + D) cos 1/2 (C – D)

cos C – cos D = – 2 sen 1/2(C + D) sen 1/2 (C – D)

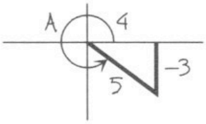
Vediamo finalmente alcuni esempi.

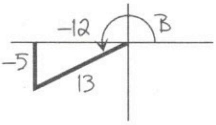
ESEMPIO 36

Dati cos A = 4/5 con A nel IV quadrante e sen B = –5/13 con B nel III, determinare sen 2B, cos 2A, tang (A – B), sen A/2 e cos A/2.

exe

Anzitutto disegno i triangoli coinvolti. Notate che sia (3, 4, 5) sia (5, 12, 13) sono terne pitagoriche.





Vediamo che sen A = –3/5, tang A = –3/4, cos B = –12/13 e tang B = 5/12. Non mi resta che sostituire i valori nella formula giusta.

$$\text{sen } 2B = 2 \text{ sen } B \cos B = 2\left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$\text{tang } (A - B) = \frac{\text{tang } A - \text{tang } B}{1 + \text{tang } A \text{ tang } B}$$

$$= \frac{\left(\frac{-3}{4}\right) - \left(\frac{5}{12}\right)}{1 + \left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)} = \frac{-56}{33}$$

Nelle formule di sen A/2 e cos A/2 compare il segno ±; dobbiamo stabilire se il segno è positivo o negativo. L'angolo A si trova nel IV quadrante, ossia $3\pi/2 < A < 2\pi$, da cui $3\pi/4 < A/2 < \pi$; quindi A/2 appartiene al II quadrante, in cui il seno è positivo e il coseno negativo. Pertanto

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{(1-\cos A)}{2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\left(1-\frac{4}{5}\right)}{2}\right]^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{10}\right)^{1/2} = \frac{10^{1/2}}{10}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = -\left[\frac{(1+\cos A)}{2}\right]^{1/2} = -\left[\frac{\left(1+\frac{4}{5}\right)}{2}\right]^{1/2}$$

$$= -\left(\frac{9}{10}\right)^{1/2} = \frac{-3(10)^{1/2}}{10}$$

ESEMPIO 37

Calcoliamo il seno dell'angolo di 75° in tre modi diversi.

1. $\operatorname{sen}(75°) = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30°$

$$+ \cos 45° \operatorname{sen} 30° = \left(\frac{2^{1/2}}{2}\right)\left(\frac{3^{1/2}}{2}\right) + \left(\frac{2^{1/2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(6^{1/2} + 2^{1/2})}{4}$$

2. $\operatorname{sen}(75°) = \operatorname{sen}(120° - 45°)$

$$= \operatorname{sen} 120° \cos 45° - \cos 120° \operatorname{sen} 45°$$

$$= \left(\frac{3^{1/2}}{2}\right)\left(\frac{2^{1/2}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2^{1/2}}{2}\right) = \frac{(6^{1/2} + 2^{1/2})}{4}$$

3. $\operatorname{sen}(75°) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(150°) = \left[\frac{(1-\cos 150°)}{2}\right]^{1/2}$

$$= \frac{\left[1 - \left(-\frac{3^{1/2}}{2}\right)\right]^{1/2}}{2^{1/2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{3^{1/2}}{2}\right)\right]^{1/2}}{2^{1/2}}$$

Dimostrare che quest'ultimo valore è uguale ai due precedenti non è banale (si deve far ricorso ai famigerati radicali doppi), ma vi assicuro che è così.

ESEMPIO 38

Calcolare sen A sapendo che tang 2A = −24/7 e che 2A appartiene al II quadrante. Anzitutto osserviamo che se 2A si trova nel secondo quadrante, A si trova nel primo.

Ricordando la formula $\text{tang } 2A = \frac{2 \text{ tang } A}{1 - \text{tang}^2 A}$ ottengo

$$\frac{2 \text{ tang } A}{1 - \text{tang}^2 A} = \frac{-24}{7}$$

$14 \text{ tang } A = -24(1 - \text{tang}^2 A)$

$24 \text{ tang}^2 A - 14 \text{ tang } A - 24 = 0$

$2(3 \text{ tang } A - 4)(4 \text{ tang } A + 3) = 0$

$\text{tang } A = -3/4 \qquad \text{tang } A = 4/3$

Il primo valore non mi interessa, perché cerco A nel primo quadrante (dove la tangente è positiva); dal secondo ricavo sen A = 4/5 (dunque si tratta di una terna pitagorica (3, 4, 5)).

ESEMPIO 39

Provare che vale la formula

$\text{sen } (\pi - A) = \text{sen } A$

La dimostrazione è banale:

$\text{sen } (\pi - A) = \text{sen } \pi \cos A - \cos \pi \text{ sen } A = (0)(\cos A) - (-1)(\text{sen } A) = \text{sen } A.$

ESEMPIO 40

Dimostriamo anche la formula

$\text{sen } (A + B) - \text{sen } (A - B) = 2 \cos A \text{ sen } B$

Vale infatti

$$\begin{aligned}\text{sen}\,(A + B) - \text{sen}\,(A - B) &= \text{sen}\,A \cos B + \cos A\,\text{sen}\,B\\ &\quad - (\text{sen}\,A)(\cos B) + (\cos A)(\text{sen}\,B)\\ &= 2 \cos A\,\text{sen}\,B\end{aligned}$$

ESEMPIO 41

Dimostriamo che vale

$$\text{sen}\,3A = 3\,\text{sen}\,A - 4\,\text{sen}^3 A$$

Questo è un po' più lungo.

$$\begin{aligned}\text{sen}\,3A &= \text{sen}\,(2A + A)\\ &= \text{sen}\,2A \cos A + \cos 2A\,\text{sen}\,A\\ &= 2\,\text{sen}\,A \cos A \cos A + \text{sen}\,A\,(1 - 2\,\text{sen}^2 A)\\ &= 2\,\text{sen}\,A\,(1 - \text{sen}^2 A) + \text{sen}\,A\,(1 - 2\,\text{sen}^2 A)\end{aligned}$$

(saltando qualche passaggio)

$$= 3\,\text{sen}\,A - 4\,\text{sen}^3 A$$

Nelle equazioni con angoli doppi o tripli, possono verificarsi due situazioni: l'angolo doppio o triplo se ne va, oppure bisogna tenerlo. Vediamo un esempio del primo tipo, e di seguito uno del secondo tipo.

ESEMPIO 42

Risolvo l'equazione

$$\cos 2x + \text{sen}\,x = 0$$

Posso sostituire cos 2x usando la formula in cui compare sen x.

$$1 - 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x = 0$$

$$- 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x + 1 = 0$$

$$-1(2\,\text{sen}\,x + 1)(\text{sen}\,x - 1) = 0$$

$$\text{sen}\,x = -1/2 \qquad \text{sen}\,x = 1$$

Le soluzioni le conosciamo già, ma non è male ripetere il ragionamento (se l'avete scordato, disegnate di nuovo i triangoli). Vale

$x = 7\pi/6 + 2k\pi$ $\qquad$ $x = 11\pi/6 + 2k\pi$ $\qquad$ $x = \pi/2 + 2k\pi$

(k intero)

ESEMPIO 43

Risolvo rispetto ad A compreso tra 0° e 360° l'equazione

$\text{sen } 3A = 1/2$

Se è A compreso tra 0° e 360°, allora 3A deve essere compreso tra 0° e 1080°. Posso dunque accettare solo i seguenti valori

$3A = 30°$ $\qquad$ $3A = 30° + 360° = 390°$ $\qquad$ $3A = 30° + 720° = 750°$

$3A = 150°$ $\qquad$ $3A = 150° + 360° = 510°$ $\qquad$ $3A = 150° + 720° = 870°$

da cui rispettivamente

$A = 10°$ $\qquad$ $A = 130°$ $\qquad$ $A = 250°$

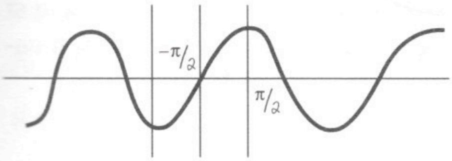
$A = 50°$ $\qquad$ $A = 170°$ $\qquad$ $A = 290°$

Diversamente dall'esempio precedente, qui abbiamo mantenuto l'angolo multiplo 3A, abbiamo risolto rispetto a esso e solo a questo punto rispetto ad A.

Inoltre dato il vincolo che A sia compreso tra 0° e 360°, non posso accettare come soluzione valori di 3A troppo grandi (e nemmeno negativi): per esempio, avendo trovato che 30° è una soluzione, posso solo sommarvi un angolo giro (ottenendo 390°) o due angoli giri (ottenendo 750°), mentre aggiungendone tre avrei 30° + 1080° che è già troppo.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Se vi siete dimenticati le funzioni inverse, prima di procedere tornate al Capitolo 8. Dovreste ricordare che l'inversa esiste quando dominio e codominio sono legati da una corrispondenza biunivoca (per esempio, quando una funzione tende a diventare sempre più grande o sempre più piccola). Per verificare l'invertibilità di una funzione, avevamo introdotto il criterio della retta orizzontale (ogni retta orizzontale deve intersecare il grafico al più in un punto). È evidente che la funzione seno non soddisfa questo criterio, dunque non è invertibile.



Per ottenere una funzione invertibile, devo restringere il suo dominio: la considererò solo per x compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

ARCOSENO

Definizione. Per $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ la funzione $y = \text{sen } x$ ammette inversa, che sarà indicata con arcsen x (si legge "arcoseno di x"), tale che $\text{arcsen } x = y$ se nella funzione di partenza $\text{sen } y = x$. Il suo dominio è $-1 \le x \le 1$ e il codominio $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

ESEMPIO 44

Calcolare arcsen 1/2.
Stiamo cercando l'angolo il cui seno è 1/2; naturalmente tale angolo è unico ed è compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (appartiene al I quadrante se positivo, al IV se negativo). Poiché $\text{sen } \pi/6 = 1/2$ e $\pi/6$ si trova nel I quadrante, la risposta è $\text{arcsen } 1/2 = \pi/6$.

ESEMPIO 45

Calcolare $\text{arcsen}\left(\dfrac{-1}{2^{1/2}}\right)$ exe

L'angolo cercato deve appartenere al IV quadrante, dunque è negativo, ossia è $-\pi/4$.
Scriviamo ora dominio e dominio delle principali funzioni trigonometriche inverse, arcoseno, arcocoseno e arcotangente.

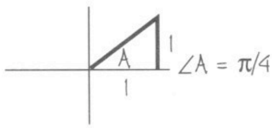
Funzione	Dominio	Codominio
y = arcsen x	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
y = arccos x	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
y = arctang x	ogni numero reale	$-\pi/2 < y < \pi/2$

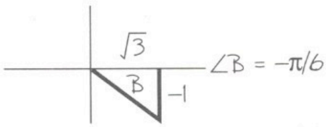
Notate che arcsen e arc~~cos~~ tang variano tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, ossia si trovano o nel I o nel III quadrante; per contro arccos varia tra 0 e π, ossia si trova o nel I o nel II quadrante.

ESEMPIO 46

Calcolare arctang^{-1} 1 e $\text{arctang}^{-1}(-1/3^{1/2})$.

exe



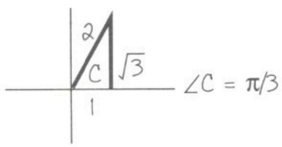


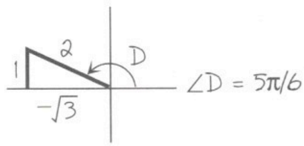
Le soluzioni sono rispettivamente $\pi/4$ e $-\pi/6$.

ESEMPIO 47

Calcolare $\arccos^{-1}(1/2)$ e $\arccos^{-1}(-3^{1/2}/2)$.

exe



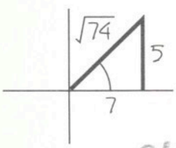


Le soluzioni sono rispettivamente $\pi/3$ e $5\pi/6$.

ESEMPIO 48

Calcolare ~~sec~~ sen (arctang 5/7).

Attenzione, è una funzione composta: stiamo cercando la secante dell'angolo la cui tangente è 5/7.



no

exe

Tracciamo nel I quadrante un triangolo la cui tangente vale 5/7; il raggio vale

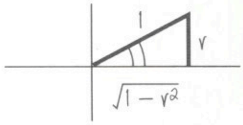
$r = (7^2 + 5^2)^{1/2} = 74^{1/2}$

e pertanto la secante sarà $r/x = 74^{1/2}/7$.

ESEMPIO 49

Calcoliamo cotang $(\text{arcsen}^{-1}\, v)$. Si tratta di trovare la cotangente dell'angolo il cui seno è v.

Traccio il triangolo.



Il seno è $y/r = v/1$. Poiché vale $y = v$ e, per il teorema di Pitagora, $x = (1 - v^2)^{1/2}$, la cotangente sarà $x/y = (1 - v^2)^{1/2}/v$.

ESEMPIO 50

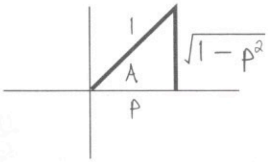
Calcolare sen $(\arccos^{-1} p + \mathrm{arcsen}^{-1} q)$. Pongo

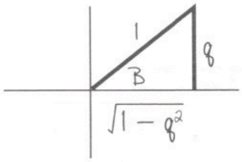
$A = \arccos^{-1} p \qquad B = \mathrm{arcsen}^{-1} q$

da cui

$\cos A = p \qquad \mathrm{sen}\, B = q$

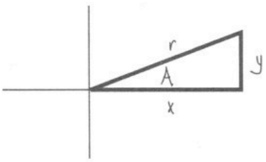
Disegno entrambi i triangoli.





Stiamo cercando $\mathrm{sen}\,(A + B) = \mathrm{sen}\, A \cos B + \cos A\, \mathrm{sen}\, B = (1 - p^2)^{1/2}(1 - q^2)^{1/2} + pq$.

Se l'angolo che stiamo considerando appartiene al I quadrante, x e y sono positive, pertanto coincidono con le misure dei lati del triangolo (vedi la figura).



Posso allora riscrivere le funzioni trigonometriche in funzione dei lati del triangolo rettangolo.

sen $A = y/r$ = cateto opposto ad A/ipotenusa

$\cos A = x/r$ = cateto adiacente ad A/ipotenusa

tang $A = y/x$ = cateto opposto ad A/cateto adiacente ad A

cotang $A = x/y$ = cateto adiacente ad A/cateto opposto ad A sec A = r/x = ipotenusa/cateto adiacente ad A

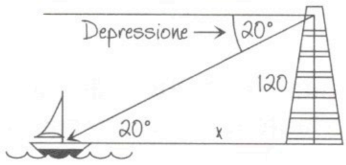
cosec A = r/y = ipotenusa/cateto opposto ad A

Vediamo due esempi di problemi di questo tipo più "geometrico". Prima però dobbiamo definire due modi in cui lo stesso angolo può comparire nei problemi fisici: come *angolo di elevazione*, dal basso in alto, o come *angolo di depressione*, dall'alto verso il basso (sono rispettivamente i due angoli della seguente figura).

ESEMPIO 51

exe

Un uomo guarda in giù dalla cima di un faro alto 120 piedi e vede una barca con un angolo di depressione di 20°. Quanto dista la barca dal faro?



Vale cotang 20° = x/120, da cui

x = 120 cotang 20°

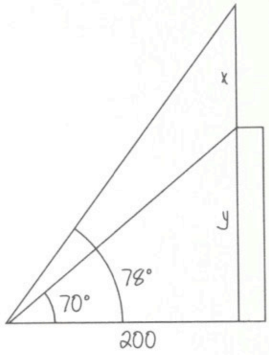
che vale circa 330.

ESEMPIO 52

exe

Pippo si trova a 200 metri da una casa su cui si trova un'antenna. L'angolo di elevazione della base dell'antenna è 70°, quello della cima dell'antenna è 78°. Quanto è alta l'antenna?

Le incognite sono due, l'altezza della casa e quella dell'antenna. Per semplificare i conti, cerco di mettere l'incognita che non ci interessa (l'altezza della casa) al numeratore; per questo scelgo la tangente.



$$\text{tang } 78° = \frac{(x + y)}{200} \qquad \text{da cui} \qquad x + y = 200 \text{ tang } 78°$$

$$\text{tang } 70° = \frac{y}{200} \qquad \text{da cui} \qquad y = 200 \text{ tang } 70°$$

La soluzione è

$x = 200$ (tang 78° – tang 70°)

ossia circa 394 metri (un'antenna molto alta!).

NO

TEOREMI SUI TRIANGOLI QUALSIASI

I seguenti teoremi riguardano triangoli qualunque (non necessariamente rettangoli).

TEOREMA DEI SENI

Definizione. Indicati con a, b, c i lati di un triangolo, con A, B, C i rispettivi angoli opposti, vale

a/sen A = b/sen B = c/sen C

Il teorema dei seni ci è utile quando conosciamo due angoli e un lato, oppure due lati e l'angolo opposto a uno di tali lati.
Nel primo caso, dai due angoli si ricava il terzo; poiché tutti gli angoli e un lato sono fissati, la soluzione è unica (è un unico triangolo).
Nel secondo caso, possono verificarsi tre situazioni: non esiste alcun triangolo che corrisponde ai requisiti, o ne esiste uno, o ne esistono due.
Vediamo tutti questi casi negli esempi successivi.

ESEMPIO 53

Dato un triangolo con A = 56°, B = 73° e a = 20, trovare C, b e c.
Conosco due angoli e un lato. Il terzo angolo lo ricavo immediatamente:

C = 180° – (56° + 73°) = 51°

Applicando $a/\text{sen } A = b/\text{sen } B$ ottengo

$20/\text{sen } 56° = b/\text{sen } 73°$

$b = 20 \text{ sen } 73°/\text{sen } 56°$

ossia b vale circa 263.

Allo stesso modo, applicando $a/\text{sen } A = c/\text{sen } C$ ho

$20/\text{sen } 56° = c/\text{sen } 51°$

$c = 20 \text{ sen } 51°/\text{sen } 56°$

ossia c vale circa 19.

ESEMPIO 54

Dato un triangolo con $a = 10$, $A = 30°$ e $b = 50$, trovare c, B e C.
Conosco due lati e un angolo. Applicando $a/\text{sen } A = b/\text{sen } B$ ottengo

$10/\text{sen } 30° = 50/\text{sen } B$

$\text{sen } B = 50 \text{ sen } 30°/10$

ma facendo i conti, risulta che sen B dovrebbe valere circa 2,5. Questo è impossibile, dunque i dati iniziali non rappresentano un triangolo.

ESEMPIO 55

Dato un triangolo con $A = 135°$, $a = 70$ e $b = 50$, trovare c, B e C.
Conosco due lati e un angolo. Applicando $a/\text{sen } A = b/\text{sen } B$ ottengo

$70/\text{sen } 135° = 50/\text{sen } B$

$\text{sen } B = 50 \text{ sen } 135°/70 = 1/2$

e pertanto

$B = 30°$ oppure $B = 180° - 30° = 150°$

Per $B = 30°$, vale $A + B = 165°$ (da cui $C = 15°$), mentre $A + B = 285°$: il secondo valore di B non è accettabile perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Riassumendo, so che A = 135°, B = 30°, C = 15°, a = 70 e b = 50.
Infine applicando a/sen A = c/sen C ottengo

70/sen 135° = c/sen 15°

c = 70 sen 15°/sen 135°

che vale circa 26.

ESEMPIO 56

Considero un triangolo di lati e, d, f con i rispettivi angoli opposti E, D, F, dove C = 30°, c = 5 e d = 7; trovare i rimanenti dati.
Applicando c/sen C = d/sen D ottengo

5/sen 30° = 7/sen D

sen D = 7 sen 30°/5

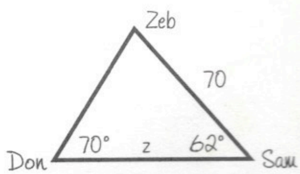
ossia circa 0,7. Pertanto

D = 45° oppure D = 180° – 45° = 135°

Per D = 45° vale C + D = 75° (da cui E = 105°); per D = 135° vale C + D = 165° (da cui E = 15°). Diversamente dall'esempio precedente, entrambi i valori di D sono accettabili: i dati iniziali sono compatibili con due diversi triangoli.
Per il primo, vale C = 30°, D = 45°, E = 105°, c = 5 e d = 7. Da e/sen 105° = 5/sen 30° ricavo che il lato e misura circa 9,7.
Per il secondo triangolo, vale C = 30°, D = 135°, E = 15°, c = 5 e d = 7. Da e/sen 15° = 5/sen 30° ricavo che il lato e misura circa 2,6.

ESEMPIO 57

L'angolo tra Zeb e Sam dal punto di vista di Don è 70°, quello tra Don e Zeb (dal punto di vista di Sam) è 62°, e Zeb e Sam distano fra loro 70 metri. Qual è la distanza fra Don e Sam?
L'angolo col vertice in Zeb è 48°. Da z/sen 48° = 70/sen 70° ricavo che z misura circa 55 metri.



IL TEOREMA DEL COSENO

Definizione. Con la stessa notazione del teorema precedente, vale

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Questo teorema è utile quando conosciamo i tre lati, oppure due lati e l'angolo compreso (in entrambi i casi, il triangolo assegnato da questi dati è unico).

ESEMPIO 58

Considero un triangolo con a = 3, b = 5 e c = 7. Applicando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ottengo

$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \cos C$

$15 = -30 \cos C$

$\cos C = -1/2$

$C = 120°$ (II quadrante)

Ora che ho quattro dati, posso applicare il teorema dei seni per ricavare gli altri due.

$3/\text{sen } A = 7/\text{sen } 120°$

$A = 22°$

Il terzo angolo si ricava immediatamente

$B = 180° - (22° + 120°) = 38°$

ESEMPIO 59

Considero un triangolo di lati x, y, z e rispettivi angoli opposti X, Y, Z, dove x = 10, y = 20, Z = 40°; trovo i rimanenti dati.
Applicando $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos Z$ ottengo

$z^2 = 10^2 + 20^2 - 2(10)(20) \cos 40°$

da cui ricavo z = 13, 9.
Ora applico il teorema dei seni

$13{,}9/\text{sen } 40° = 10/\text{sen } X$

$\text{sen } X = 10 (\text{sen } 40°)/13{,}9$

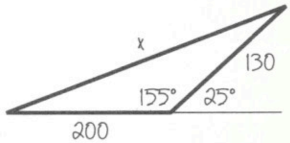
$X = \text{arcsen}^{-1} (10 \text{ sen } 40°/13{,}9) = 28°$

Infine vale

$Y = 180° - (28° + 40°) = 112°$

ESEMPIO 60

Un aereo vola verso est per 200 chilometri, poi gira di 25° verso nord e percorre 130 chilometri. Dopo ciò, a quanti chilometri si trova dal punto di partenza?



$x^2 = 200^2 + 130^2 - 2(200)(130) \cos 155°$

$x = 323$

Dunque l'aereo dista 323 chilometri dal punto di partenza.