CAPITOLO 10

LOGARITMI

A calcolare i logaritmi ci pensano le calcolatrici; dunque non si tratta di fare conti complicati, ma di capire bene la definizione e le proprietà.

LOGARITMO

Definizione. Diciamo che y è il logaritmo in base b di x, e scriviamo

$y = \log_b x$

quando y è l'esponente che dobbiamo dare a b per ottenere x, ossia quando

$b^y = x$

(x è l'*argomento* del logaritmo, b, come già detto, è la sua *base*).

Dunque il logaritmo è l'esponente nell'espressione $b^y = x$; se i logaritmi sono esponenti, allora le proprietà dei logaritmi derivano da quelle delle potenze, come vedremo.

ESEMPIO 1

Dimostro che vale

$\log_5 25 = 2$

Infatti per definizione $\log_2 25 = 2$ significa $5^2 = 25$, che è vera.

ESEMPIO 2

Scriviamo $4^3 = 64$ mediante il logaritmo.
La base è 4, l'esponente 3 e il risultato 64, pertanto

$\log_4 64 = 3$

ESEMPIO 3

Calcolo

$\log_{16} 64$

Essendo questa l'incognita, pongo $\log_{16} 64 = x$. Per la definizione di logaritmo vale

$16^x = 64 \qquad (2^4)^x = 2^6 \qquad 2^{4x} = 2^6$

Poiché le basi sono uguali, devono esserlo anche gli esponenti, quindi $4x = 6$ da cui

$x = 3/2$

ESEMPIO 4

Risolviamo rispetto a x

$\log_9 x = -3/2$

Per definizione vale

$$x = 9^{-3/2} = \frac{1}{9^{3/2}} = 1/(9^{1/2})^3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

A LORO

ESEMPIO 5

Risolvo

$\log_x 32 = 5$

Da $x^5 = 32$ ricavo $x = 32^{1/5}$ ossia

$x = 2$

Ora che abbiamo familiarizzato un po' con la definizione di logaritmo, vediamo quali valori possono assumere la base b, l'argomento x e il logaritmo stesso y.

b2u

La base può essere negativa? No, perché per esempio $(-2)^{1/2}$ non è un numero reale (bensì immaginario). Può

essere nulla? No, perché 0^a o vale 0 o addirittura non è definito (rispettivamente per $a > 0$ e $a \leq 0$) e pertanto in generale non c'è modo di ottenere da una base nulla, elevandola a una qualsiasi potenza, il valore dell'argomento x. Infine la base non può nemmeno valere 1, perché $1^a = 1$ per qualsiasi a. In conclusione, la base è un numero positivo e diverso da 1.
Di solito si sceglie per base o il numero 10 o il numero e (un numero decimale illimitato che incontrerete nel corso di Analisi e che vale circa 2,7). Per brevità, se la base è il numero 10 si scrive log anziché $\log_{10}$, se la base è il numero e si scrive ln anziché $\log_e$ (e invece di dire "logaritmo in base e" si può dire "*logaritmo naturale*").
Data una base b positiva e diversa da 1, al variare di x il logaritmo $y = \log_b x$ rappresenta una funzione. Pertanto, cercare quali valori possono assumere l'argomento x e il logaritmo y è la stesso che cercare quali sono il dominio e il codominio della funzione.
Ricordo che il logaritmo è un esponente, quindi può assumere qualsiasi valore reale (positivo, negativo o nullo); questo è il codominio.
Poiché la base è positiva, indipendentemente dal valore dell'esponente l'argomento (ossia il risultato dell'elevazione a potenza) sarà sempre positivo. Pertanto il dominio è rappresentato dai soli valori positivi di x.
Passiamo ora alle proprietà dei logaritmi.

Proprietà 1. Vale
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

ESEMPIO 6

$\log 6 = \log (2)(3) = \log 2 + \log 3$

Proprietà 2. Vale
$\log_b (m/n) = \log_b m - \log_b n$

ESEMPIO 7

$\log (4/3) = \log 4 - \log 3$

Proprietà 3. Vale
$\log_b x^p = p \log_b x$

ESEMPIO 8

$\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2$

Le prime tre proprietà sono quelle che incontrerete più spesso in seguito. Perciò è importante che capiate bene i due seguenti esempi.

ESEMPIO 9

Riscriviamo in modo da sbarazzarci degli esponenti l'espresssione

$$\ln\left(\frac{a^4\sqrt{b}}{c^6d^7}\right).$$

Il logaritmo dei fattori al numeratore "diventa" una somma di logaritmi, quello dei fattori al denominatore "diventa" una differenza di logaritmi e infine gli esponenti vanno "davanti" al logaritmo come coefficienti moltiplicativi. Ottengo

$4 \ln a + ½ \ln b - 6 \ln c - 7 \ln d$

ESEMPIO 10

Riscriviamo come unico logaritmo

$5 \log h - 7 \log c - 8 \log p - 4 \log j + (3/4) \log k + \log v.$

(è l'inverso del caso precedente).
L'argomento di ogni logaritmo preceduto dal segno più va al numeratore, quello di ogni logaritmo preceduto dal segno meno va al denominatore, i coefficienti vanno dentro il logaritmo come esponenti. Ottengo

$$\log\left(\frac{h^5k^{3/4}v}{c^7p^8j^4}\right)$$

Proprietà 4. Vale

$\log_b b = 1$

poiché $b^1 = b$ (per esempio, $\log_7 7 = \log 10 = \ln e = 1$).

Proprietà 5. Vale

$\log_b 1 = 0$

poiché $b^0 = 1$ (per esempio, $\log_9 1 = \log 1 = \ln 1 = 0$).

Proprietà 6. Per $m < n$ vale

$\ln m < \ln n$

(per esempio, $\ln 2 < \ln 3$ poiché $2 < 3$).

Proprietà 7. Se

$\log_b x = \log_b y$

allora $x = y$.

La Proprietà 7 dice che la funzione logaritmo è iniettiva, la Proprietà 6 dice che essa è crescente quando la base è il numero e (in effetti, questo accade per ogni base $b > 1$).

ESEMPIO 11

Risolviamo rispetto a x

NO

$\log_5 (x^{1/2}) = \log_5 (2x - 3)$

Per la Proprietà 7 vale

$x^{1/2} = 2x - 3$

(elevo al quadrato, ricordando che dovrò poi procedere alla verifica, ossia alla sostituzione delle soluzioni ottenute nell'equazione iniziale)

$(x^{1/2})^2 = (2x - 3)^2 \qquad x = 4x^2 - 12x + 9$

$4x^2 - 13x + 9 = 0$

$(4x - 9)(x - 1) = 0$

$x = 9/4 \qquad x = 1$

Procedo alla verifica della soluzione $x = 9/4$.

$\log_5 (9/4)^{1/2} \stackrel{?}{=} \log_5 [2(9/4) - 3]$

$\log_5 (3/2) = \log_5 (3/2)$

È accettabile.
Passo all'altra soluzione, $x = 1$.

$\log_5 (1)^{1/2} \stackrel{?}{=} \log_5 [2(1) - 3]$

$\log_5 1 \neq \log_5 (-1)$

Pertanto ho una sola soluzione, $x = 9/4$.

Proprietà 8. Vale

$b^{\log_b x} = x$

(per esempio, $e^{\ln x} = x$).

Per la Proprietà 8, potete interpretare $b^{\log_b x}$ come nient'altro che un modo bizzarro per scrivere x (purché naturalmente x sia positivo).

Proprietà 9. Vale

$\log_b b^x = x$

(per esempio $\ln e^x = x$).

Proprietà 10. Vale

$$\log_d c = \frac{\log_b c}{\log_b d}$$

(per esempio $\log_5 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5}$).

ESEMPIO 12

$(4) \cdot 3^{x+2} = 28$

(divido entrambi i membri per 4)

$3^{x+2} = 7$

(prendo il logaritmo di entrambi i membri, in modo da "trasformare" la potenza in coefficiente moltiplicativo usando la Proprietà 3)

$(x + 2) \log 3 = \log 7$

(a questo punto ho una semplicissima equazione di primo grado nell'incognita x, poiché log 3 e log 2 sono dei numeri!)

$x \log 3 + 2 \log 3 = \log 7$

$$x = \frac{\log 7 - 2 \log 3}{\log 3}$$

(con la calcolatrice trovo che x vale circa –0,23).

ESEMPIO 13

Risolviamo

$5^{3x-6} = 7^{8x+9}$

(prendo il logaritmo di entrambi i membri)

$(3x - 6) \log 5 = (8x + 9) \log 7$

$3x \log 5 - 6 \log 5 = 8x \log 7 + 9 \log 7$

$3x \log 5 - 8x \log 7 = 6 \log 5 + 9 \log 7$

$x(3 \log 5 - 8 \log 7) = 6 \log 5 + 9 \log 7$

$$x = \frac{6 \log 5 + 9 \log 7}{3 \log 5 - 8 \log 7}$$

ESEMPIO 14

Risolviamo

$\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$

(applico la Proprietà 1)

$\log m + \log n = \log mn$

(ora uso la definizione di logaritmo)

$\log_2 x(x - 2) = 3 \qquad 2^3 = x(x - 2) \qquad x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

La soluzione $x = -2$ non è accettabile, l'argomento di un logaritmo non può essere negativo o nullo.

Per contro $x = 4$ è soluzione dell'equazione iniziale, poiché se eseguo la verifica ottengo

$\log_2 4 + \log_2 (4 - 2) = \log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$

ESEMPIO 15

Risolviamo

$\log(x - 3) - \log 4 = 2$

(applico la Proprietà 2)

$\log(x - 3)/4 = 2$

(ora uso la definizione di logaritmo; ricordo che la scrittura "log" sottintende la base 10)

$(x - 3)/4 = 10^2$

$x - 3 = 400$

$x = 403$

ESEMPIO 16

Vi potrebbero capitare dei problemi in cui è coinvolto l'interesse composto, come nella formula

$A = P(1 + r/n)^{nt}$

dove A è il montante, P il capitale, r il tasso di interesse annuo, n il numero di capitalizzazioni annue e t il numero di anni. Supponiamo di investire 1000 euro all'interesse del 20%. Se il numero di capitalizzazioni in un anno è 4, quando il montante raggiungerà 4000 euro?
Vale A = 4000, P = 1000, r = 0,20 e n = 4, mentre t è l'incognita. Applicando la precedente formula ottengo

$4000 = 1000(1 + 0{,}20/4)^{4t}$

da cui dividendo entrambi i membri per 1000 e poi prendendone i logaritmi

$4 = (1{,}05)^{4t}$

$\log 4 = 4t \log 1{,}05$

$t = (\log 4)/(4 \log 1{,}05)$

ossia t è circa 7,1.
Dunque in soli 7,1 anni quadruplica il capitale iniziale – basta trovare un investimento che dia l'interesse del 20%...

ESEMPIO 17

Se la vita media di una sostanza radioattiva è di 8 giorni e se inizialmente ne abbiamo 10 chilogrammi (attiva), dopo quanto tempo ne resteranno attivi solo 3 chili?
La formula del decadimento radioattivo è data da

$A = A_0\ (1/2)^{t/8}$

dove A = quantità attuale, A_0 = quantità iniziale, t = tempo.
Controllo se i dati sono coerenti con la formula; sostituendo $t = 8$ ottengo $A = 10(1/2)^{8/8} = 10(1/2) = 5$, che è appunto metà della quantità iniziale.
Ora posso rispondere alla domanda. Vale

$3 = 10(1/2)^{t/8}$

$0{,}3 = (1/2)^{t/8}$

$\log 0{,}3 = \log\ (1/2)^{t/8}$

$t = 8 \log 0{,}3/\log 0{,}5$

ossia t è circa 13,9 giorni.