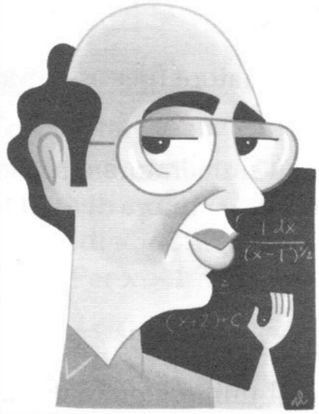


CAPITOLO 14

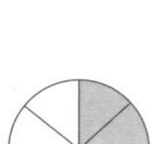
QUIZ

Se dovete affrontare una prova sui rudimenti della Matematica o sulle materie di un precorso, questo capitolo è dedicato proprio a voi, con alcuni suggerimenti ed esempi.
Anzitutto vorrei ricordare alcune cose così banali, che nessuno ve le dice mai – e magari sono proprio queste a mettervi in difficoltà.

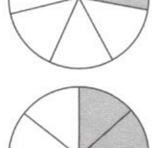
FRAZIONI

Ricordiamo alcune regole, probabilmente ovvie.

2/7



3/7



3/8

1. Date due frazioni positive con lo stesso numeratore, più grande è il numeratore, più grande è la frazione (per esempio 3/7 > 2/7).
2. Date due frazioni positive con lo stesso denominatore, più grande è il denominatore, più piccola è la frazione (per esempio 3/7 < 3/8).
3. La somma o differenza di due frazioni è data dalla regola

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

4. Per raddoppiare una frazione, o si raddoppia il nu-

meratore o si dimezza il denominatore (per esempio $2(5/7) = 10/7$, $2(3/4) = 3/2$).

5. Sommando lo stesso numero al numeratore e al denominatore di un frazione positiva e minore di 1 si ottiene un numero più grande

$$\frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

6. Sommando lo stesso numero al numeratore e al denominatore di un frazione maggiore di 1 si ottiene un numero più piccolo

$$\frac{3+7}{2+7} = \frac{10}{9} < \frac{3}{2}$$

7. Se $a < b$ (a positivo), allora $1/a > 1/b$ (per esempio vale $2 < 3$ ma $1/2 > 1/3$).

DISEQUAZIONI

Vediamo due esempi.

ESEMPIO 1

Confrontare x e x^2.

In altri termini, dobbiamo stabilire se è più grande x^2, oppure se è più grande x, oppure se "a volte" (al variare di x) è maggiore una, a volte è maggiore l'altra.

Poiché vale $5^2 > 5$, potrei credere che valga $x^2 > x$ (anche se per $x = 1$ vale $1^2 = 1$, quindi è perlomeno $x^2 \geq x$). Ma avrei torto, perché per $0 < x < 1$ la situazione si "capovolge", e risulta $x > x^2$. Infatti, per esempio $(1/2)^2 = 1/4 < 1/2$: talvolta l'elevazione al quadrato rende i numeri più piccoli!

Cosa accade per $x = 0$? Come per $x = 1$, vale $x^2 = x$. E per $x < 0$? Qui il confronto diventa "impari", tra x, che è negativo e x^2, che è in ogni caso positivo, cosicché indubbiamente $x^2 > x$.

ESEMPIO 2

Confrontare x e $\sqrt{x}$.
Anche in questo caso si tratta di stabilire se è più grande x, oppure se è più grande $\sqrt{x}$, oppure se ciò dipende dal valore di x; e anche in questo caso la risposta giusta è la terza. Per $x > 1$ risulta $x > \sqrt{x}$ (per esempio $9 > 9^{1/2}$).

Per $x = 1$ si ottiene $1 = 1$, quindi $x = \sqrt{x}$.

Per $0 < x < 1$ risulta $\sqrt{x} > x$ (attenzione!).

Per $x = 0$ vale $0 = 0$, quindi $x = \sqrt{x}$.

E per $x < 0$? In questo caso il confronto non è nemmeno possibile, per la semplice ragione che $\sqrt{x}$ non è definita (non esiste la radice di indice pari di un numero negativo).

UN TEST DI PROVA

Provate a rispondere al seguente test (non usate la calcolatrice, altrimenti non vi serve a nulla). I primi 11 sono confronti; per ogni riga, in corrispondenza dei valori indicati a sinistra, dovete confrontare i valori assunti dall'espressione della colonna A e da quella della colonna B e dare una delle seguenti quattro risposte: rispondete (A) se secondo voi A > B, (B) se B > A, (C) se A = B e infine (D) se non si verifica nessuno dei tre casi.

	A	B
1.	a^3	a^2
2. $x > 2000$	$\sqrt{x} + \sqrt{2}$	$\sqrt{x + 2}$
3. $73 < x < 77$	$2/\sqrt{x}$	$2/x$
4. $x^2 = 4, \quad y^2 = 9$	x	y
5. $a < b < d$	ab	bc
6. Soluzioni di $x^2 - 6x - 27 = 0$	Soluzioni	10
7. $x^2 + 6x + 8 = 0$	$x^2 + 6x$	8

	A	B
8. $-6 < a < -3$	$1/a^8$	$1/a^9$
9. t_1: auto 1 a 50 km/h t_2: auto 2 a 60 km/h t = tempo	t_1	t_2
10.	$\dfrac{c+d}{d}$	$\dfrac{c}{d}+1$
11. $0 < c < a < b$	$\dfrac{a-c}{b-c}$	$\dfrac{a}{b}$

12. Se $3x + 7 = 83.27$, $3x + 5 =$ ______

13. $5x + 9y = 79$

    $x + 5y = 31$ $\qquad$ $x + y =$ ______

14. $\dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{c} =$ ______

15. $997^2 + 2(997)(1003) + 1003^2 =$ ______

16. Se $x^2 - y^2 = 17$, $3(x - y)(x + y) =$ ______

17. $5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x =$ ______

18. Se $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 50$, $\qquad$ $x^2 + \dfrac{1}{x^2} =$ ______

Soluzioni del test.

1. *(D). È la stessa situazione dell'Esempio 1! Al variare di a (cui non è posta alcuna restrizione: non c'è scritto nulla all'inizio della riga), A è a volte maggiore di B, a volte minore, a volte uguale.*

2. *(A). La restrizione $x > 2000$ non è particolarmente significativa: il risultato non dipende dal fatto che x sia "grande", basta che sia positivo.*

3. *(A). Anche in questo caso come nel precedente la restrizione $73 < x < 77$ è eccessiva, basta che valga $x > 1$ (ricordate l'Esempio 2).*

4. *(D). Dalle restrizioni ricavo che x vale −2 o +2, y vale −3 o +3, quindi il risultato del confronto dipende da quali soluzioni confronto.*
5. *(D) Per esempio da $a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$ segue $ab < bc$, da $a = -2 \quad b = 0 \quad c = 5$, $ab = bc$ e infine da $a = -5 \quad b = -2 \quad c = 10$, $ab > bc$.*
6. *(B). Le soluzioni sono $x = -3$ e $x = 9$, entrambe minori di 10.*
7. *(B). C'è un trucco che permette di vedere subito la risposta: deve essere $x^2 + 6x = -8$, che è certamente minore di 8.*
8. *(A). Il risultato dipende dal fatto che i valori di a siano negativi: la restrizione $-6 < a < -3$ è ridondante, nel consueto intento di tendervi dei tranelli... Se un numero è negativo, le sue potenze pari sono positive e quelle dispari negative; pertanto A è positivo e B negativo.*
9. *(A). Poiché t = distanza/velocità, vale $t_1 = 1/50$ e $t_2 = 1/60$. L'auto 2 è più veloce, ma proprio per questo impiega meno tempo – mentre sto cercando il tempo maggiore.*
10. *(C). Le due espressioni sono equivalenti.*
11. *(B). Nelle condizioni poste $(0 < c < a < b)$ la frazione a/b è minore di 1; se sottraggo al numeratore e al denominatore di una frazione minore di 1 la stessa quantità, la frazione diventa "più piccola". E comunque posso sempre fare i conti: da $(a - c)/(b - c) < a/b$ ricavo $b(a - c) < a(b - c)$, da cui $ab - bc < ab - ac$, ossia $- b < - a$, o $b > a$, vera per ipotesi.*
12. *(81,27). La risposta è immediata.*
13. *(12). Sottraggo membro a membro.*
14. *((bc − ab)/ac). Ricordate il paragrafo sulle frazioni di poco fa.*
15. *(4.000.000). Infatti il trinomio dato non è altro che $(997 + 1003)^2 = (2000)^2$.*

16. (51). *Infatti vale* $3(x+y)(x-y) = 3\,(x^2 - y^2) = 3(17)$.

17. (5^{x+1}). *Vale* $5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x = 5^1(5^x)$.

18. (48). *È un trucco: non risolvete rispetto a x. Vale*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}$$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 50$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 50 - 2 = 48$$