

Analisi Matematica I

Insiemi di numeri

Naturali, interi, razionali

I primi numerici che si incontrano sono gli interi positivi, detti anche *numeri naturali*: $1, 2, 3, \dots$. L'insieme dei numeri naturali si indica con il simbolo $\mathbb{N}$. Sono i numeri che servono a contare e che hanno fatto la prima comparsa nelle società umane svariate migliaia di anni fa. Per fare misure di quantità fisiche come lunghezze, aree, tempi, temperature, ecc., è tuttavia necessario poter disporre di sottoparti dell'unità e considerare quindi numeri frazionari m/n dove $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$. E' poi conveniente anche introdurre i numeri con il segno per poter trattare grandezze negative come possono essere la temperatura, la velocità e molte altre grandezze fisiche. Si ottengono così i

seguenti insiemi numerici:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{numeri interi relativi,}$$

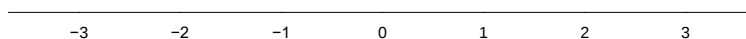
$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\} \quad \text{numeri razionali.}$$

Si hanno le evidenti inclusioni $N \subseteq Z \subseteq Q$. Talvolta è anche utile considerare gli insiemi

$$Z^+ = \{m \in Z \mid m \geq 0\} \quad \text{numeri interi non negativi,}$$

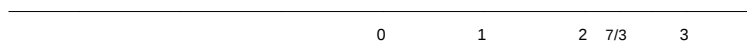
$$Q^+ = \{q \in Q \mid q \geq 0\} \quad \text{numeri razionali non negativi.}$$

I numeri fin qui introdotti sono suscettibili di una semplice interpretazione geometrica. Su di una retta r , fissiamo un punto che indicheremo con 0 ed un altro punto, a destra di 0, denominato 1. Usando come unità di lunghezza quella del segmento da 0 a 1 ed i due versi possibili (a destra e a sinistra di 0), si possono così facilmente rappresentare, sulla retta r , i numeri interi relativi come mostrato nella seguente figura.

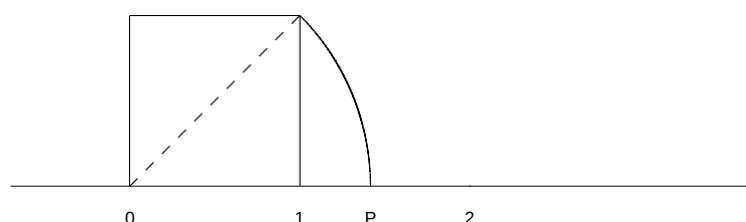


Dato invece un razionale m/n , esso può sempre venire espresso, tramite una semplice divisione, come $m/n = q + m'/n$ dove $q \in Z$ e $0 \leq m' < n$. Il modo di rappresentare m/n sulla retta r diviene ora operativamente chiaro: scegliamo il segmento da q a $q+1$, dividiamolo in n parti uguali e consideriamo il punto ottenuto partendo da q , spostandosi di m' segmentini di lunghezza $1/n$ nella direzione di $q+1$. Otterremo ovviamente in questo modo un numero compreso tra q e $q+1$. Ad esempio $7/3 = 2 + 1/3$ è rappresentato nella figura sotto:

Ogni numero razionale è così univocamente rappresentato da un punto sulla retta.



Costruiamo ora sul segmento da 0 a 1 un quadrato; poi, con un compasso, facciamo centro in 0, apriamo con raggio determinato dal vertice del quadrato opposto a 0 e tracciamo un arco di circonferenza fino ad incontrare la retta r in un certo punto P . Che numero rappresenta P ?



Considerato che il numero associato ad un punto della retta può essere pensato come la lunghezza, con eventuale segno, del segmento dal punto all'origine 0, risulta chiaro che P deve rappresentare il numero $\sqrt{2}$. Ma chi è $\sqrt{2}$? Può essere rappresentato come frazione?

Proposizione 1.1 $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che lo sia, cioè che esistano naturali m, n con $n \neq 0$ tali che $\sqrt{2} = m/n$. Ovviamente si può ipotizzare che m e n siano primi tra loro. Elevando al quadrato si ottiene $2 = m^2/n^2$ o anche

$$2n^2 = m^2. \quad (1.1)$$

Questo significa che m^2 deve essere divisibile per 2, cioè deve essere un numero pari; questo implica (pensate perchè) che m è un numero pari. Quindi si può scrivere $m = 2q$ per qualche naturale q . Sostituendo in (1.1) si ottiene così

$$2n^2 = 4q^2 \Rightarrow n^2 = 2q^2. \quad (1.2)$$

Quest'ultima formula implica però che n^2 , e di conseguenza n , è un numero pari. Quindi sia m che n sono numeri pari e questo è assurdo per l'ipotesi fatta che fossero primi tra loro. Ne consegue che $\sqrt{2}$ non può essere razionale. ■

I numeri reali

Fissiamo prima alcune notazioni. Sulla retta r vi è un ordinamento naturale: se a e b sono due punti di r , scriveremo che $a < b$ se a sta a sinistra di b e, $a > b$ se $a < b$ o se $a = b$. Dati a e b di r con $a < b$, indicheremo con $[a, b]$ il segmento dei punti tra a e b estremi inclusi, mentre con il simbolo $]a, b[$ indicheremo lo stesso segmento senza estremi. Il segmento con uno soltanto dei due estremi verrà indicato, rispettivamente, con $[a, b[$ se contiene a , con $]a, b]$ se contiene b . I sottoinsiemi della retta del tipo $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ verranno anche detti *intervalli*.

Consideriamo ora un punto $x > 0$ di r . Chiaramente ci sarà un intero $k_0 \geq 0$ tale che

$$k_0 \leq x < k_0 + 1.$$

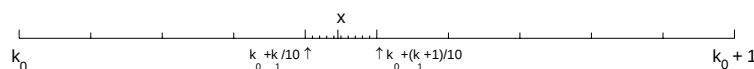
Dividiamo ora l'intervallo $[k_0, k_0 + 1[$ in dieci parti eguali

$$k_0, k_0 + \frac{1}{10}, k_0 + \frac{2}{10}, k_0 + \frac{3}{10}, \dots, k_0 + \frac{9}{10}, k_0 + 1.$$

x dovrà stare in uno di questi. Supponiamo che

$$k_0 + \frac{k_1}{10} \leq x < k_0 + \frac{k_1 + 1}{10}$$

per un qualche $k_1 = 0, \dots, 9$.



Andiamo avanti cos'è dividendo a sua volta l'intervallo $[k_0 + \frac{k_1}{10}, k_0 + \frac{k_1+1}{10}]$ in dieci parti (che misurano quindi un centesimo di quello iniziale $[k_0, k_0 + 1]$) individuando quello in cui sta x :

$$k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} \leq x < k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2+1}{100}$$

per un qualche $k_2 = 0, \dots, 9$. Continuando cos'è si determina una sequenza infinita di numeri naturali $k_0, k_1, k_2, \dots$ con k_0 qualunque e tutti gli altri compresi tra 0 e 9 che risultano collegati al punto x nel modo seguente

$$k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \dots + \frac{k_n}{10^n} \leq x < k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \dots + \frac{k_n+1}{10^n}.$$

Introduciamo la notazione compatta

$$x_n = k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \dots + \frac{k_n}{10^n} = \sum_{i=0}^n \frac{k_i}{10^i}.$$

Allora la disuguaglianza precedente può essere riscritta come

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Si noti che x_n e $x_n + 1/10^n$ sono entrambi numeri razionali che distano tra di loro $1/10^n$. Poichè x sta in mezzo, vuol dire che entrambi hanno distanza da x non superiore ad $1/10^n$: più precisamente x_n *approssima per difetto* x a meno di $1/10^n$ mentre $x_n + 1/10^n$ *approssima per eccesso* sempre a meno di $1/10^n$. All'aumentare di n essi 'si avvicinano' quanto vogliamo al vero punto x . Tale punto x non coincide, in generale, con nessuno dei punti x_n (a meno che la sequenza dei k_n sia fatta da un certo punto in poi da tutti zeri); diremo invece che x è rappresentato dalla sequenza infinita, detta *allineamento decimale*,

$$k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$$

Diremo anche che quella sopra è la *rappresentazione decimale* di x . Nel caso invece in cui $x < 0$, si considera il suo simmetrico $-x$ rispetto al punto 0. $-x$

ha una rappresentazione decimale $k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$. La rappresentazione decimale di x è allora convenzionalmente indicata come $-k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$. Si noti che valgono le seguenti disuguaglianze

$$-k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \dots + \frac{k_n + 1}{10^n} \leq x < -k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \dots + \frac{k_n}{10^n}.$$

Useremo, analogamente a prima, la notazione

$$x_n = - \sum_{i=0}^n \frac{k_i}{10^i}.$$

Per indicare la ripetizione infinita di una cifra o di un gruppo di cifre in una rappresentazione decimale useremo una barretta sopra: Ad esempio $0, \overline{8} = 0, 88888\dots$, $0, \overline{123} = 0, 1232323\dots$. Nel caso in cui a ripetersi sia la cifra 0, essa verrà in generale omessa; scriveremo, ad esempio, $0, \overline{23170} = 0, 2\overline{317}$: questi ultimi verranno detti *allineamenti decimali finiti*.

Ad ogni punto della retta abbiamo così univocamente associato un allineamento decimale. Resta ora da vedere se questo ragionamento si può invertire, cioè se ad ogni allineamento decimale $\pm k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$ corrisponda un punto determinato della retta: questo è in un certo senso il punto più delicato di tutta la storia. Per simmetria basta farlo per gli allineamenti decimali positivi. Se un tale x esiste, deve stare in tutti gli intervalli

$$[k_0, k_0 + 1], \quad k_0 + \frac{k_1}{10}, k_0 + \frac{k_1 + 1}{10}, \quad k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100}, k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2 + 1}{100}, \dots$$

Poichè questi intervalli sono l'uno incapsulato nell'altro e la loro larghezza diventa piccola quanto vogliamo sembra piuttosto evidente che esista un punto della retta, ed uno soltanto, che sta in tutti essi. Questa evidenza non è dimostrabile, ma va ipotizzata come proprietà di continuità della retta a cui facevamo cenno prima. Quindi supponiamo che esista un punto x della retta r che sta esattamente in tutti gli intervallini sopra. L'unica cosa che resta da verificare è se effettivamente la rappresentazione decimale di x , come definita sopra, sia proprio data da $k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$. Per come si è introdotta la rappresentazione decimale, è chiaro che questo risulta vero se accade che x sta dentro tutti gli intervallini semiaperti

$$[k_0, k_0 + 1[, \quad k_0 + \frac{k_1}{10}, k_0 + \frac{k_1 + 1}{10}, \quad k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100}, k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2 + 1}{100}, \dots$$

Sfortunatamente questo potrebbe non essere vero come mostriamo ora con un semplice esempio.

Esempio 1 Consideriamo l'allineamento decimale $0, \overline{9}$. Il punto x ad esso associato deve stare in tutti gli intervalli

$$[0, 1], \quad \frac{9}{10}, 1, \quad \frac{9}{10} + \frac{9}{100}, 1, \dots$$

ed è chiaro che l'unico punto con queste proprietà è 1. Tuttavia, la rappresentazione decimale di 1, come definita inizialmente, non è data da 0,9, ma da $0,9\overline{9}$ $1 = 1,0$.

L'esempio sopra mostra come ci siano 'più' allineamenti decimali che punti della retta. $1 = 1,0\overline{0}$ e $0,9\overline{9}$ rappresentano lo stesso punto della retta, 1 appunto. Questa ambiguità capita solo e soltanto per gli allineamenti decimali che terminano con un numero infinito di 0 o di 9. Non è difficile rendersi conto che i due allineamenti decimali

$$k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \overline{9} \quad k_0, k_1 k_2 k_3 \dots (k_n + 1)$$

rappresentano sempre lo stesso punto della retta. E si può dimostrare che questi sono gli unici casi in cui si possono avere delle ambiguità. Se ci restringiamo agli allineamenti decimali che non terminano con una coda infinita di 9, allora vi è una perfetta corrispondenza biunivoca tra punti della retta e allineamenti decimali. Questo sottoinsieme di allineamenti decimali sarà detto *l'insieme dei numeri reali* e sarà indicato con il simbolo $\mathbb{R}$. Terremo sempre presente la corrispondenza con i punti della retta e parleremo infatti spesso di *retta reale*. Con $\mathbb{R}^+$ indicheremo invece la semiretta destra dei numeri reali non negativi.

Proprietà algebriche e di ordinamento

Ci aspettiamo di poter definire la somma ed il prodotto di numeri reali in modo che valgano le usuali proprietà algebriche come per i numeri razionali. Consideriamo gli approssimanti finiti $x_n = k_0, k_1 k_2 \dots k_n$ e

$y_n = h_0, h_1 h_2 \dots h_n$. Essi sono per costruzione degli allineamenti decimali finiti e possiamo quindi sommarli e considerare $x_n + y_n$. Possiamo pensare questi come gli approssimanti decimali di $x + y$?. Si noti che se $x = 0,1\overline{1}$ e $y = 0,8\overline{8}$, allora

$$x_n = 0, \underbrace{1 \dots 1}_n \quad y_n = 0, \underbrace{8 \dots 8}_n \quad x_n + y_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$$

—

D'altra parte non è difficile intuire che $x + y = 0,9\overline{9} = 1$. Quindi l'approssimante decimale di ordine n di $x + y$ non è dato da $x_n + y_n$, ma dal numero 1 stesso. Si noti tuttavia che, man mano che n cresce, $x_n + y_n$, pur non

essendo l'approssimante decimale per difetto $(x + y)_n$ di $x + y$, 'si avvicina' al numero $x + y$. Questo concetto di convergenza permette di definire rigorosamente il concetto di somma e anche quello di prodotto di due qualunque numeri reali.

Le operazioni di somma e prodotto per i numeri reali soddisfano alle stesse regole che per i razionali e che qui sotto brevemente richiamiamo. Nel seguito x, y , e z sono tre qualunque numeri reali.

(P1)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	associatività +
(P2)	$x + y = y + x$	commutatività +
(P3)	$x + 0 = 0 + x = x$	elemento neutro +
(P4)	$\forall x, \exists! -x : x + (-x) = 0$	elemento opposto
(P5)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	associatività ·
(P6)	$x \cdot y = y \cdot x$	commutatività ·
(P7)	$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$	elemento neutro ·
(P8)	$\forall x \neq 0, \exists! x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1$	elemento reciproco
(P9)	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	distributività

Un qualunque insieme dotato di due operazioni + e · soddisfacenti tutte le proprietà precedenti viene detto *campo*. Parleremo così del *campo dei numeri reali*.

Il segno di moltiplicazione · verrà spesso omissivo, qualora questo non crei ambiguità. Inoltre, se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, il simbolo x^n indicherà, come al solito, il prodotto di n fattori uguali a x . Se $x \neq 0$, si pone inoltre per convenzione $x^0 = 1$.

Le nove proprietà sopra esposte, ne implicano in realtà molte altre che, come queste, vi sarà già capitato di vedere e di usare più o meno consciamente. Ne riportiamo un paio abbastanza importanti.

(Q1) $x \cdot y = 0$ se e solo se uno dei due fattori x o y è 0

12

(Q2) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(xy)$