

GIACOMO POGGI

**ESPERIMENTI  
DI  
ELETTRICITÀ E MAGNETISMO**



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Copyright © 1988  
Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Fisica

---

Edizione elettronica:  
Copyright © 2012  
Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia

## INTRODUZIONE

Un po' meno di venti anni fa, quando iniziai a frequentare le lezioni del corso di Esperimentazioni di Fisica II, anche allora meglio noto col più cordiale nome di Fisichetta 2, e venni a conoscenza della mancanza di un libro di testo, fui colto da un certo senso di smarrimento: non riuscivo infatti ad immaginare come fosse possibile preparare un esame senza un così fondamentale supporto. Il timore di questo "salto nel buio" andò poi via via dissolvendosi, man mano che il corso procedeva: le lezioni del Prof. Maurenzig erano serrate, ma chiarissime e gli appunti presi, e poi diligentemente trascritti in bella copia, divenivano di giorno in giorno sempre di più quel testo di cui tanto sentivo la mancanza. Per l'esame bastarono quegli appunti, la consultazione di qualche pagina del *Terman* e tornare una o due mattine in laboratorio (di più allora non era concesso) per rivedere qualche strumento e rifare qualche misura. Ovviamente, come me facevano molti altri e quasi tutti uscivamo da quella esperienza (o almeno quelli che superavano l'esame non indegnamente) con il convincimento che un libro di testo non era davvero necessario e che -quasi quasi- era proprio meglio che non ci fosse, perché in questo modo per superare l'esame bastava seguire attentamente le lezioni, prendere appunti e pensare un po' con la propria testa. Unico rimpianto, successivo rispetto alla data dell'esame, il non aver approfondito alcuni argomenti e l'essermi limitato a studiare lo stretto necessario, ovvero gli argomenti trattati a lezione e niente più. Due o tre anni dopo vennero le Dispense redatte dal titolare; non coprivano tutto il programma del corso, ma sono state di sicuro apprezzate dagli studenti per la loro precisione e chiarezza.

Quando è toccato a me svolgere il corso di Fisichetta 2, il mio primo impegno è stato quello di aggiornare alcuni degli argomenti, poiché ero e sono ancora convinto che un corso di laboratorio per il secondo anno di Fisica deve non solo avvicinare gli studenti ai principi generali delle misure, ma anche insegnar loro ad utilizzare alcuni strumenti normalmente impiegati nelle moderne misure di fisica e farne comprendere, possibilmente a fondo, il funzionamento. Assolvere a questo impegno ha purtroppo significato espandere il programma e pertanto mi sono convinto che predisporre un testo da affiancare al corso sarebbe stato, quanto meno, opportuno. In questa decisione ho pesato, in vario modo, il ricordo delle mie esperienze passate: da una parte, il disagio che avevo provato da studente per la mancanza del libro di testo mi ha spinto ad affrontare l'impresa, da un'altra, il ricordo di come avevo preparato il mio esame di Fisichetta 2 mi ha convinto che non dovevo redigere delle dispense che ricalcassero pedestremente il corso, perché a questo scopo si prestano forse meglio dei buoni appunti personalmente presi da ogni studente: è nato così il progetto di redigere un testo che servisse sì da riferimento, ma ancor più da guida e stimolo per approfondire quegli argomenti che molto difficilmente si possono trattare in dettaglio durante le normali ore di lezione e, meno che mai, durante le affollate sedute in laboratorio. L'impresa ha richiesto uno sforzo e un tempo considerevole. Del tempo impiegato sanno anche gli studenti, che forse si aspettavano il libro già un anno o due or sono; spero che nessuno di loro abbia rimandato l'esame nell'attesa del testo, perché potrebbe ora rimanere assai deluso nell'apprendere che esso non è un ausilio per abbreviare i tempi della preparazione, casomai uno stimolo per approfondirla. Ora, ad opera terminata, non so proprio se sono riuscito nello scopo che mi ero prefisso e purtroppo per la risposta occorrerà aspettare qualche anno di utilizzo del testo da parte degli studenti, sempre che esso non abbia una vita ancor più effimera. Comunque, la mia parte è oramai fatta e non mi resta che augurare buon lavoro agli studenti. Ad essi raccomando di dare anche un'occhiata alla bibliografia in fondo ad ogni capitolo e li invito a consultare i testi suggeriti e a leggerne altri ancora; li invito con ancora maggior calore a cercare di trarre dal testo stimoli per porsi problemi e progettare misure, diverse da quelle standard; approfittino per questo dei periodi nei quali il laboratorio è a loro disposizione prima delle sessioni di esame.

Se in questo testo c'è qualcosa di buono o almeno non troppe imprecisioni (delle quali, ovviamente, sono l'unico responsabile), questo è anche merito di chi ha avuto la pazienza di discutere con me sugli argomenti del testo ed addirittura di rileggerne criticamente vaste parti e suggerire miglioramenti: fra questi devo ringraziare in particolare T. Fazzini, A. Stefanini e N. Taccetti. Un

ringraziamento va anche ai colleghi che, impegnati con me nella ricerca, hanno tollerato alcune mie temporanee latitanze, motivate dal desiderio di porre fine all'opera intrapresa; fra questi desidero menzionare M. Bini e P. Sona.

La stesura di questo testo ha richiesto anche l'impegno di altre persone che hanno battuto il non sempre leggibilissimo manoscritto (M. Bruschi e M. Nuti), fatto i disegni a china (G. Cappelli) e i disegni con l'ausilio del calcolatore (G. Giarrizzo). A quest'ultimo va in particolare il mio ringraziamento, sia per la qualità del lavoro svolto che per la estrema gentilezza dimostrata nel fare reiterate modifiche su disegni ogni volta da me gabellati (in buona fede, s'intende) come definitivi.

Concludo con una riflessione alla quale spesso invito gli studenti: una misura di fisica che non sia una semplice ripetizione "preconfezionata" di un esperimento già fatto da altri comincia ad essere istruttiva ed anche divertente (a mio parere almeno) quando non torna; intendo dire quando essa fa vedere che il modello che abbiamo adottato per descrivere il fenomeno fisico in studio mostra i suoi limiti. Certamente non è sempre per questo nobile motivo che in laboratorio una esperienza non torna; più spesso la causa di una apparente discrepanza fra esperimento e teoria è riconducibile ad un circuito montato male o ad uno strumento disfunzionante. Le esercitazioni in laboratorio dovrebbero, fra l'altro, insegnare a evitare questi errori e a diagnosticare certi difetti, in altre parole a far acquisire una discreta padronanza di alcune tecniche di misura; la funzione di un laboratorio di fisica però non si esaurisce qui, anzi questa è soltanto una fase propedeutica di un programma assai più ambizioso che comincia a realizzarsi proprio quando lo studente, divenuto familiare con il metodo di misura e la strumentazione, è finalmente in grado, sfruttando la precisione e la sensibilità degli apparati sperimentali, di accorgersi dei limiti delle schematizzazioni introdotte nel modello che tenta di descrivere i fatti sperimentali. Tanto per citare un esempio, la dipendenza dalla frequenza e le non linearità dei resistori, dei condensatori e delle induttanze e l'influenza sull'equilibrio dei ponti in alternata dell'assetto geometrico del circuito sono fenomeni che con un accorto utilizzo della strumentazione disponibile in laboratorio possono essere messi chiaramente in evidenza e confermano che non appena il metodo di misura è sufficientemente preciso e sensibile, l'accordo fra esperimento e teoria tende a divenire sempre meno soddisfacente e che occorre, come minimo, introdurre modifiche al modello adottato. Questo è il vero momento educativo di un corso di laboratorio, ovvero il contatto con il Metodo Sperimentale, che è un continuo e stringente confronto fra i risultati delle misure e i modelli che cercano, con alterno successo, di interpretarli.

Firenze, aprile 1988

G.P.

#### **NOTA ALL'EDIZIONE ELETTRONICA (2012)**

Questa edizione in forma di documento PDF è, a meno di qualche minima differenza di natura tipografica, una copia conforme di quella cartacea del 1988. Anche le figure sono quelle dell'originale, riprodotte digitalmente.

## BIBLIOGRAFIA

Riportiamo l'elenco dei libri che sono stati più ampiamente consultati per la stesura di questo testo.

- |              |                              |  |
|--------------|------------------------------|--|
| <b>AL 60</b> | Alberigi Quaranta, Rispoli   | <i>Elettronica</i><br>Zanichelli (1960)  |
| <b>BE 82</b> | Benetazzo                    | <i>Misure elettroniche (Strumentazione analogica)</i><br>CLEUP (Padova) (1982)                         |
| <b>BE 84</b> | Benetazzo                    | <i>Misure elettroniche (Strumentazione numerica)</i><br>CLEUP (1984)                                   |
| <b>CO 83</b> | Costanzini, Guernelli        | <i>Strumentazione e misure elettroniche</i><br>Zanichelli (1983)                                       |
| <b>CO 85</b> | Cooper, Helfrick             | <i>Electronic instrumentation<br/>and measurement techniques</i><br>Prentice Hall Int. (1985)          |
| <b>DA 75</b> | Dall'Aquila, Gallesi, Savino | <i>Guida al laboratorio di misure elettriche</i><br>Tamburini (1975)                                   |
| <b>DE 69</b> | Desoer, Kuth                 | <i>Basic circuit theory</i><br>International Student Ed. (1969)  |
| <b>FA 60</b> | Fano, Chu, Adler             | <i>Electromagnetic fields, energy and forces</i><br>Wiley (1960)                                       |
| <b>FE 63</b> | Feynman, Leighton, Sands     | <i>The Feynman lectures on physics</i><br>Addison Wesley (1963)  |
| <b>FL 63</b> | Fleury, Mathieu              | <i>Fisica generale e sperimentale</i><br>Zanichelli (1963)   |
| <b>FR 59</b> | Franck                       | <i>Electrical Measurements</i><br>Mc Graw-Hill (1959)  |
| <b>FR 71</b> | Franchetti                   | <i>Lezioni di elettricità e magnetismo<br/>con elementi di relatività ristretta</i><br>Dispense (1971) |
| <b>JA 75</b> | Jackson                      | <i>Classical Electrodynamics</i><br>Wiley (1975)   |
| <b>KI 76</b> | Kittel                       | <i>Introduction to solid state physics</i><br>Wiley (1976)   |

<b>KR 84</b>	Krans	<i>Electromagnetics</i> International Student Ed. (1984)
<b>LA 38</b>	Laws	<i>Electrical Measurements</i> Mc Graw-Hill (1938)
<b>LA 57</b>	Landee, Davis, Albrecht	<i>Electronic Designers Handbook</i> Mc Graw-Hill (1957)
<b>MA 72</b>	Maurenzig	<i>Appunti alle lezioni di sperimentazione fisica II</i> Dispense (1972)
<b>MA 78</b>	Mangiavacchi, Zanini	<i>Misure elettroniche</i> CEDAM (1978)
<b>MI 72</b>	Millman, Halkias	<i>Integrated electronics</i> International Student Ed. (1972)
<b>MI 79</b>	Millman	<i>Microelectronics</i> International Student Ed. (1979)
<b>PA 62</b>	Panofsky,Phillips	<i>Classical electricity and magnetism</i> Addison Wesley (1982)
<b>TA 86</b>	Taylor	<i>Introduzione all'analisi degli errori</i> Zanichelli (1986)
<b>TE 50</b>	Terman	<i>Radio engineering's handbook</i> Mc Graw-Hill (1950)
<b>TE 57</b>	Terman	<i>Electronic and radio engineering</i> International Student Ed. (1957)
<b>ZI 86</b>	Zingales	<i>Metodi e strumenti per le misure elettriche</i> UTET (1986)

Allo scopo di stimolare lo studente ad approfondire gli argomenti esposti nel testo, alla fine di ogni capitolo è aggiunta una nota bibliografica che da una parte rimanda ai testi qui sopra elencati, da un'altra consiglia altri titoli, non di rado articoli originali. Quando il rinvio ad un testo particolare è molto specifico e non facilmente ritrovabile sulla base degli indici del testo medesimo, è data anche un'indicazione del capitolo e del paragrafo.

La scelta degli argomenti di cui è suggerito l'approfondimento deriva quasi esclusivamente dai miei gusti e dalle mie esperienze; in parte anche dalla reperibilità del materiale. In ogni caso tali suggerimenti non vogliono minimamente essere esclusivi e oltretutto costituiscono solo l'avvio ad un'eventuale e più approfondita ricerca che lo studente è invitato a svolgere per proprio conto.

## INDICE

<b>Introduzione</b> .....	i
---------------------------	---

<b>Bibliografia</b> .....	iii
---------------------------	-----

### Capitolo I: LE RETI LINEARI

I.1	La legge di Ohm .....	1
I.2	Il generatore di forza elettromotrice .....	9
I.3	Collegamento dei resistori; circuiti equivalenti .....	13
I.4	Le leggi di Kirchhoff .....	18
I.5	Il Principio di Sovrapposizione .....	24
I.6	Altri teoremi delle reti lineari .....	27
I.7	Generatori di tensione e generatori di corrente. Teorema di Norton .....	33
I.8	Il teorema di Miller .....	36
I.9	Potenza nei circuiti elettrici .....	37
I.10	Un esempio di massimizzazione di trasferimento di potenza .....	40

### Capitolo II: IL GALVANOMETRO DI DEPREZ - D'ARSONVAL

II.1	Interazione fra corrente elettrica e campo di induzione magnetica .....	44
II.2	Principio di funzionamento del galvanometro: Statica .....	45
II.3	Principio di funzionamento del galvanometro: Dinamica .....	49
II.4	Resistenza interna e costante reometrica Sensibilità amperometrica e voltmetrica.	53

### Capitolo III: GLI STRUMENTI A BOBINA MOBILE

III.1	Strumenti ad ago .....	60
III.2	Classe di uno strumento ad ago .....	60
III.3	Amperometri. Shunt .....	62
III.4	Campo di correnti misurabili. Errori di misura .....	66
III.5	Voltmetri. Ohm per Volt .....	69
III.6	Campi di tensioni misurabili. Errori di misura .....	71
III.7	Ohmetri realizzati con strumenti a bobina mobile .....	71
III.8	Rivelatori di zero a bobina mobile .....	74
III.9	Strumenti universali a bobina mobile .....	76

### Capitolo IV: I PONTI PER LA MISURA DI RESISTENZE

IV.1	Resistori e campioni di resistenza .....	79
IV.2	Principio di misura di resistenza col Ponte di Wheatstone .....	83
IV.3	Procedure di azzeramento del Ponte ed errori di misura dovuti alla precisione dei campioni .....	84

IV.4	Sensibilità del Ponte di Wheatstone: misura sperimentale.....	85
IV.5	Sensibilità del Ponte con un galvanometro come rivelatore di zero.Valutazione teorica.....	87
IV.6	Sensibilità del Ponte con un microvoltmetro come rivelatore di zero.....	91
IV.7	Misure della resistenza interna di un galvanometro .....	93
IV.8	Fem parassite e azzeramento del rivelatore di zero .....	95
IV.9	Misure di piccole resistenze. Doppio ponte di Thomson.....	96
IV.10	Misura di resistenze di isolamento.....	99

## Capitolo V: IL METODO POTENZIOMETRICO

V.1	Principio di misura .....	101
V.2	Campioni di forza elettromotrice e taratura di un potenziometro.....	103
V.3	Linearità di un potenziometro.....	105
V.4	Un esempio di potenziometro .....	108
V.5	Il divisore di tensione di Kelvin-Varley .....	110
V.6	L'errore di sensibilità e il rivelatore di zero .....	114
V.7	Misure di fem e resistenze equivalenti di Thévenin fra due terminali.....	117
V.8	Taratura di voltmetri e amperometri .....	119
V.9	Misura di resistenze.....	120

## Capitolo VI: MISURE COL GALVANOMETRO BALISTICO

VI.1	Concetto di capacità, condensatori.....	124
VI.2	Circuiti R-C serie .....	126
VI.3	Il galvanometro in regime balistico; il caso di smorzamento nullo.....	129
VI.4	Il galvanometro balistico nel caso di smorzamento finito.....	132
VI.5	Il decremento logaritmico .....	134
VI.6	Resistenza interna del generatore e risposta del galvanometro balistico .....	136
VI.7	L'approssimazione balistica e gli accorgimenti per rispettarla .....	140
VI.8	Taratura di un galvanometro balistico Misura di capacità .....	141
VI.9	Misura di resistenze di valore elevato Resistenza di fuga .....	145
VI.10	Misure di forza elettromotrice con grosse resistenze in serie .....	149
VI.11	Misura assoluta del campo di induzione magnetica.....	150
VI.12	Determinazione dei parametri di un galvanometro .....	151

## Capitolo VII: I COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

VII.1	Definizioni.....	155
VII.2	Le induttanze e le induttanze mutue .....	156
VII.3	Il regime transitorio delle correnti e delle tensioni in presenza di coefficienti di auto e mutua induzione.....	160
VII.4	Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un galvanometro balistico .....	165
VII.5	Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un integratore di Miller...	167
VII.6	Altri metodi per la misura di coefficienti di mutua induzione.....	169

## Capitolo VIII: L'OSCILLOGRAFO

VIII.1	Introduzione.....	170
VIII.2	Il tubo a raggi catodici.....	171
VIII.3	Gli stadi di ingresso e gli amplificatori delle placchette deflettrici.....	187
VIII.4	La base dei tempi e il circuito di trigger.....	189
VIII.5	I comandi dell'oscillografo.....	191
VIII.6	L'oscillografo digitalizzatore.....	192

## Capitolo IX: LE CORRENTI ALTERNATE

IX.1	Definizioni.....	194
IX.2	Le leggi di Kirchhoff e le correnti alternate.....	195
IX.3	Rappresentazione delle grandezze alternate tramite vettori rotanti e numeri complessi.....	197
IX.4	Le impedenze complesse.....	200
IX.5	I componenti fisici reali: resistori, induttori, condensatori.....	207
IX.6	Il trasformatore.....	211

## Capitolo X: I PONTI IN ALTERNATA

X.1	Campioni di impedenza.....	216
X.2	Campioni di resistenze.....	218
X.3	Campioni di capacità.....	219
X.4	Campioni di induttanza.....	221
X.5	Ponti in alternata.....	222
X.6	Sensibilità nei ponti in alternata.....	230
X.7	Il rivelatore di zero.....	233
X.8	Accorgimenti per migliorare la qualità delle misure.....	235

## Capitolo XI: MISURE DI POTENZA IN ALTERNATA E MISURA DI VALORI EFFICACI

XI.1	Definizioni.....	241
XI.2	Misure di potenza in alternata con strumenti elettrodinamici.....	245
XI.3	Strumenti di misura in alternata.....	252

## Capitolo XII: MISURE DI BANDA PASSANTE

XII.1	Il decibel.....	256
XII.2	Filtri passa alto, passa basso, passa banda.....	257
XII.3	Misure del diagramma di ampiezza e fase.....	264
XII.4	Accorgimenti nell'utilizzo dell'oscillografo. Sonde e partitori compensati.....	267

## Capitolo XIII: I CIRCUITI RISONANTI

XIII.1	Il circuito risonante serie.....	271
--------	----------------------------------	-----

XIII.2	Il circuito risonante parallelo.....	276
XIII.3	Rivelazione della frequenza di risonanza mediante un oscillografo.....	280
XIII.4	Misure con un circuito risonante serie.....	282
XIII.5	Misure con un circuito risonante parallelo.....	283
XIII.6	Errori nella misura di L e C con un circuito risonante.....	284
XIII.7	Un circuito oscillante eccitato con un gradino di tensione.....	287
XIII.8	Misuratore vettoriale di impedenza.....	289
XIII.9	Misure di coefficienti di mutua induzione in alternata.....	291

#### Capitolo XIV: I MULTIMETRI ELETTRONICI

XIV.1	Strumenti elettronici e presentazione digitale.....	294
XIV.2	Schema a blocchi di un multimetro digitale.....	295
XIV.3	Il condizionatore di segnale.....	296
XIV.4	Precisione delle misure.....	300
XIV.5	Misure con multimetri digitali.....	303

#### Capitolo XV: L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

XV.1	Amplificatore ideale e amplificatore reale di tensione.....	307
XV.2	Circuiti amplificatori integrati.....	311
XV.3	Un esempio di reazione negativa: l'amplificatore operazionale.....	312
XV.4	Alcune configurazioni dell'amplificatore operazionale.....	318
XV.5	Le applicazioni nel campo della strumentazione.....	322
XV.6	Tensione di offset e corrente di bias.....	326
XV.7	Il ripetitore di tensione come un potenziometro ad azzeramento automatico.....	340

#### Capitolo XVI: IL CONVERTITORE ANALOGICO-DIGITALE

XVI.1	Introduzione.....	342
XVI.2	Il Convertitore analogico-digitale basato sulla conversione tensione-frequenza.....	346
XVI.3	Il Convertitore a pendenza duale o a doppia rampa.....	347
XVI.4	Il Convertitore ad approssimazioni successive.....	350

#### Capitolo XVII: IL DIODO A GIUNZIONE P-N

XVII.1	Semiconduttori.....	353
XVII.2	Giunzione p-n non polarizzata.....	359
XVII.3	Il Diodo a giunzione.....	362
XVII.4	Larghezza della zona di svuotamento e capacità di transizione.....	365
XVII.5	Il Diodo Zener.....	369
XVII.6	Il diodo come elemento circuitale La retta di carico.....	370
XVII.7	Il "piecewise model" Un esempio di applicazione.....	373
XVII.8	Il diodo come raddrizzatore Un esempio di generatore elettronico di fem continua.....	376
XVII.9	Un regolatore di tensione a diodo Zener.....	382
XVII.10	Cenni al transistor bipolare.....	386
XVII.11	Determinazione della caratteristica statica di un diodo a semiconduttore.....	388

XVII.12	Un diodo di precisione .....	389
---------	------------------------------	-----

### Capitolo XVIII: IL TRANSISTORE A EFFETTO DI CAMPO

XVIII.1	Introduzione.....	393
XVIII.2	Comportamento di un Fet per piccoli valori della tensione Source-Drain.....	394
XVIII.3	La caratteristica statica di un Fet .....	397
XVIII.4	Il Fet come interruttore.....	404
XVIII.5	Il Fet come amplificatore Metodo di risoluzione.....	407
XVIII.6	Il Fet come amplificatore: dipendenza dei parametri dal punto di lavoro e dalla temperatura .....	414
XVIII.7	Un altro esempio di applicazione del Fet: il "Source follower" .....	416
XVIII.8	Il Fet in alta frequenza: un esame più accurato dell'amplificatore .....	418
XVIII.9	Un'altra applicazione del Fet: un generatore di corrente .....	423
XVIII.10	Altri tipi di transistori a effetto di campo .....	425
XVIII.11	Misura delle caratteristiche a Source comune .....	426

### Capitolo XIX: MISURA DI CAMPI MAGNETICI TRAMITE UNA SONDA A EFFETTO HALL

XIX.1	La sonda ad effetto Hall.....	428
XIX.2	Taratura di una sonda di Hall La tensione di offset .....	433
XIX.3	Circuito per l'utilizzo della sonda di Hall nella misura di campi di induzione magnetica.....	437
XIX.4	Misura della curva di magnetizzazione di un elettromagnete.....	438
XIX.5	Schermo magnetico .....	445
XIX.6	Un'altra applicazione della sonda di Hall: un wattmetro a stato solido .....	447

### Capitolo XX: LA CONVERSIONE DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA E MECCANICA

XX.1	Introduzione.....	450
XX.2	Energia accumulata in un condensatore .....	450
XX.3	Energia di un sistema di correnti .....	457
XX.4	Un esempio di conversione di energia elettromagnetica - meccanica.....	467
XX.5	Un generatore di tensione alternata .....	471
XX.6	Galvanometro e bilancio energetico.....	474
XX.7	Un motore in continua .....	478
XX.8	Un esempio di motore a induzione .....	485

### APPENDICE A

L'approssimazione balistica .....	499
-----------------------------------	-----

### APPENDICE B

Il regime transitorio in due circuiti accoppiati induttivamente .....	507
---	-----

## APPENDICE C

L'equazione di moto di uno strumento elettrodinamico, nel caso di eccitazione periodica. ....	516
--	-----

## APPENDICE D

Calcolo dell'efficacia di uno schermo magnetico .....	519
---	-----

<b>Indice analitico</b> .....	<b>527</b>
-------------------------------	------------

## LE RETI LINEARI

### 1. – La legge di Ohm

Ammettiamo che siano noti allo studente i concetti e le definizioni di carica elettrica, campo e potenziale elettrico, vettore densità di corrente e intensità di corrente, nonché le relative unità di misura, e richiamiamo brevemente alcuni fatti fondamentali dell'elettrostatica necessari per raccordarsi con l'argomento specifico di questo paragrafo, ovvero la legge di Ohm.

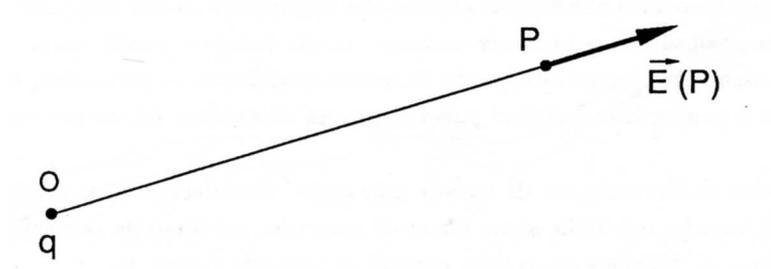


Fig.I.1

Una carica puntiforme  $q$  posta (Fig.1) in un punto O produce nel generico punto P un *campo elettrico*:

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{vers } \vec{r}}{r^2} \quad (\text{I.1})$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore diretto dalla carica  $q$  sorgente del campo (punto O) al punto P ; la costante che compare a denominatore:  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Joule} \times \text{metro}}$  è detta *permettività del vuoto*. Supponiamo ora che la carica unitaria che esplora il campo si sposti dal punto P al punto P' infinitesimamente vicino (Fig.2);

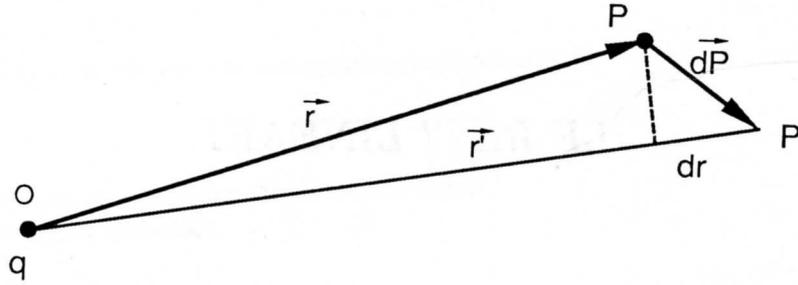


Fig.I.2

il lavoro fatto su questa carica unitaria vale:

$$d\mathcal{L} = \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{vers } \vec{r} \cdot d\vec{P}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (\text{I.2})$$

dove  $dr$  rappresenta la variazione del modulo di  $r$ :  $dr = r' - r$ . La (2) ci dice che il lavoro è un differenziale esatto e quindi il campo è conservativo. Dato quindi un generico spostamento finito fra un punto A e un punto B si ha

$$\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{I.3})$$

con

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{I.4})$$

detto *potenziale* e tale che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\text{grad } \varphi$ . L'unità di misura del potenziale è il *Volt* (simbolo  $V$ ).

Generalmente, nella realtà, si ha a che fare con distribuzioni di carica e in questo caso, essendo la (1) e la (3) lineari nelle cariche, i campi elettrici e i potenziali saranno dati dalla somma dei vari contributi, ognuno associato alle singole cariche che appartengono alla distribuzione in oggetto. Non è quindi in genere semplice l'espressione matematica che descrive questi campi e potenziali, ma continuano a valere alcune proprietà intrinseche di queste grandezze; in particolare resta vero che il campo elettrostatico è conservativo, cioè si può far sempre discendere da un potenziale  $\varphi$  tale che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ .

Entrando nel vivo dell'argomento di questo paragrafo, consideriamo un conduttore, cioè un corpo esteso in cui le cariche elettriche siano libere di muoversi, percorso da corrente; in ogni punto P di questo conduttore, si definisce un *vettore densità di corrente*  $\vec{j}$  dato da:

$$\vec{j} = \rho_p \vec{v} \quad (\text{I.5})$$

dove  $\rho_p$  rappresenta la densità numerica dei portatori di carica moltiplicata per la carica (col suo segno) del portatore singolo e  $\vec{v}$  è il vettore velocità dei portatori, supposta la stessa per tutti; in genere  $\vec{j}$  è un vettore funzione del punto (oltre che del tempo), così come possono esserlo separatamente sia  $\rho_p$  che  $\vec{v}$ . Se è presente più di un tipo di portatori, il vettore densità di corrente è dato dalla somma di tanti termini come la (5), quanti sono i tipi di portatori presenti.

L'*intensità di corrente*  $i$  attraverso una certa superficie S del conduttore è data dal flusso attraverso questa superficie del vettore  $\vec{j}$ :

$$i = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \left( \frac{dq}{dt} \right)_S \quad (\text{I.6})$$

e rappresenta appunto la carica che nell'unità di tempo attraversa la superficie  $S$ . L'unità di misura è l'*Ampère* (simbolo  $A$ ).

Il principio di conservazione della carica elettrica impone che una carica non si possa né creare né distruggere e ciò comporta che, scelto un volume  $dV$ , fisso nello spazio, la carica che ne esce durante un tempo  $dt$  deve uguagliare la diminuzione di carica contenuta in questo volume. In formule:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (\text{I.7})$$

dove  $\rho_e$  è la densità di carica elettrica di volume che, in generale, non coincide con  $\rho_p$ , la densità dei portatori di carica.

Nel seguito noi studieremo sempre i casi detti *stazionari* (o comunque *quasi-stazionari*) in cui la densità di volume di carica non varia in funzione del tempo cioè  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$  e pertanto

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (\text{I.8})$$

Se vale la (8) il vettore  $\vec{j}$  è detto essere *solenoidale*. In questi casi è sempre possibile individuare dei tubi di flusso in cui tutte le linee di  $\vec{j}$  si chiudono su se stesse, ovvero tali che in essi il flusso di  $\vec{j}$  —cioè  $i$ — è costante.

Nella pratica, avendo a che fare quasi sempre con conduttori filiformi, (non necessariamente a sezione costante), ciò significa che potremo identificare questi tubi di flusso proprio con i nostri conduttori e pertanto potremo parlare per ognuno di essi di una unica intensità di corrente  $i$  (o sinteticamente "*corrente*").

Usando un paragone, per la verità un po' banale, potremmo dire che il regime stazionario delle correnti corrisponde al defluire dell'acqua in un corso fluviale in cui gli eventuali bacini sono tutti a regime: in qualunque sezione del corso, supposto senza affluenti, la portata d'acqua è allora sempre la stessa.

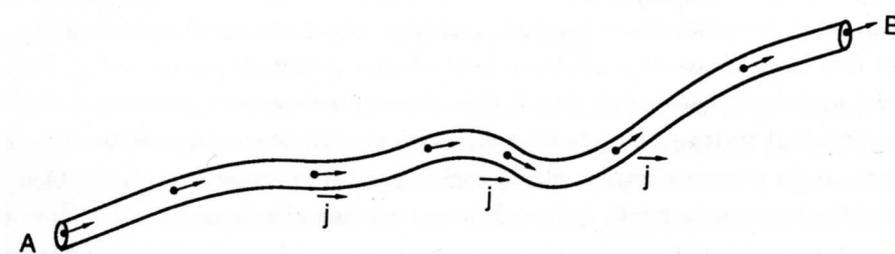


Fig.I.3

Sia quello in Fig.3 un conduttore filiforme esteso e supponiamo che la differenza del potenziale fra le sezioni A e B sia costante in funzione del tempo cioè  $\varphi_A - \varphi_B = V_{AB} = \text{cost.}$  Trattandosi di un conduttore, ovvero di un corpo nel quale le cariche sono libere di muoversi, questa condizione non si può mantenere con la sola presenza di campi elettrostatici: infatti se supponiamo che in un certo istante  $t$  la distribuzione delle cariche sul conduttore sia tale da dar luogo alla differenza di potenziale ( $ddp$ )  $V_{AB}$ , negli istanti successivi la  $ddp$  tende a decrescere, fino ad annullarsi, poiché le cariche migrano entro il conduttore medesimo, sotto l'azione del campo elettrico, per riportare il sistema nella condizione in cui il potenziale in ogni punto è il medesimo. E' evidente allora la

necessità di un agente esterno che mantenga la ddp costante, fra l'altro rifornendo carica a una delle due superfici (A) e rimuovendola dall'altra (B). Vedremo fra poco che una macchina del genere esiste ed è detta “*generatore di forza elettromotrice*” o semplicemente “*forza elettromotrice*” (abbreviato *f.e.m.* o *fem*). Supponiamo quindi di poter soddisfare la condizione sopra detta: avremo quindi un moto stazionario di cariche fra le due superfici equipotenziali A e B. Al moto di queste cariche è associata quindi una corrente  $i$  che potremo valutare in una sezione qualsiasi del conduttore in quanto, ricordiamolo ancora,  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ , ovvero non c'è accumulo di carica nel volume del conduttore e  $\vec{j}$  è solenoidale.

Poiché in un conduttore una carica è libera di muoversi al suo interno, ma non di abbandonarlo allontanandosi dalla superficie, stazionariamente il campo elettrico del nostro conduttore filiforme è diretto sempre lungo il filo e non può possedere una componente diretta verso la superficie esterna; che questa sia la condizione stazionaria lo si capisce supponendo che per un istante, in una certa regione del conduttore, essa non si verifichi, che cioè esista una componente del campo che muova le cariche verso la superficie esterna; se così fosse il processo si esaurirebbe non appena che le cariche migrate verso la superficie avessero creato il campo elettrico necessario ad opporsi ad una ulteriore migrazione. Si può vedere (vedi bibliografia del capitolo) che l'entità di questa densità superficiale di carica è estremamente piccola, tanto che in quasi ogni applicazione può essere trascurata; ciò tuttavia non toglie importanza al fatto fisicamente rilevante, ovvero che la distribuzione superficiale di carica del conduttore, stabilitasi all'atto dell'istaurarsi della ddp  $\varphi_A - \varphi_B$  ad opera di un generatore di fem, garantisce il campo elettrico caratteristico della situazione di regime.

L'intensità di questo campo “tangente” al conduttore e il legame fra la differenza di potenziale, la geometria del conduttore e la corrente che vi scorre, dipenderanno dalle proprietà elettrodinamiche dei portatori di carica sottoposti all'azione del campo elettrico: a questo proposito si trova che una carica in un conduttore (gli elettroni nei metalli per esempio, trascurando il fatto per altro fondamentale dell'agitazione casuale che essi possiedono a causa della temperatura finita) è sì libera di muoversi, cioè acquista una componente di velocità sotto l'azione di un campo elettrico comunque piccolo, però se il campo cessa essa perde tale componente in tempi brevissimi (ordine di grandezza  $10^{-18}s$ ). Ciò significa che esiste anche una forza resistente che si oppone al moto medesimo; tale forza resistente, per una larga classe di conduttori detti *ohmici* (i metalli per esempio), è proporzionale alla velocità dei portatori medesimi, è cioè di tipo viscoso; inoltre, per questo tipo di conduttori, la densità dei portatori di carica  $\rho_p$  è costante e dipende solo dal mezzo interessato alla conduzione.

In presenza di un campo elettrico  $\vec{E}_e$ , la carica possiede pertanto una velocità di regime  $\vec{v}_d$ , in genere variabile da punto a punto del conduttore, ma tale che ovunque  $\vec{E}_e + \vec{E}_d = 0$ , dove con  $\vec{E}_d$  si indica il campo resistente, certamente non conservativo. L'annullarsi della forza totale agente sui portatori dipende dal fatto che, essendo la situazione stazionaria, le cariche di fatto non hanno accelerazione sensibilmente diversa da zero in nessun punto del conduttore (preciseremo meglio questa affermazione nel seguito). Nei conduttori ohmici, essendo  $\vec{E}_d = -\frac{\vec{v}_d}{\mu}$  con  $\mu$  costante (a temperatura costante), abbiamo:

$$\vec{v}_d = \mu \vec{E}_e \quad (\text{I.9})$$

La costante  $\mu$  è detta mobilità dei portatori ed è una caratteristica del materiale conduttore; essendo  $\vec{j} = \rho_p \vec{v}_d$ , avremo

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_e \quad (\text{I.10})$$

con  $\sigma = \mu \rho_p$  detta *conducibilità*, caratteristica di quel certo conduttore (a quella certa temperatura). La relazione (10) è detta Legge di Ohm.

In questa forma la legge di Ohm è poco utile per le applicazioni circuitali; vediamo allora qual è la sua formulazione equivalente nel caso di un conduttore –magari filiforme– esteso.

Consideriamo il conduttore della Fig.3 assimilandolo a un tubo di flusso di  $\vec{j}$ : in ogni punto di esso vale la (10) e pertanto moltiplicando entrambi i membri della (10) scalarmente per il vettore infinitesimo  $d\vec{P}$  diretto come la tangente nel punto al conduttore, avremo:

$$\frac{\vec{j} \cdot d\vec{P}}{\sigma} = \vec{E}_e \cdot d\vec{P} \quad (\text{I.11})$$

Integrando fra le due superfici equipotenziali A e B e ammettendo che  $\vec{j}$  sia costante su ogni sezione normale al conduttore, avremo:

$$\int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{P}}{\sigma} = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{I.12})$$

Lungo il tubo di flusso  $\vec{j}$  e  $d\vec{P}$  sono paralleli e il flusso di  $\vec{j}$  attraverso qualunque sezione S resta costante e uguale alla intensità di corrente  $i$ ; pertanto la relazione (12) può scriversi ( $dl$  è la lunghezza infinitesima lungo il filo):

$$i \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{I.13})$$

L'integrale a primo membro dipende solo dalla geometria e dal tipo di conduttore; ad una certa temperatura, se il campione è omogeneo (per esempio è composto da un solo metallo), allora  $\sigma$  è costante e si può estrarre anche il fattore  $\frac{1}{\sigma}$  dall'integrale. In generale, ponendo

$$R = \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} \quad (\text{I.14})$$

possiamo esprimere la legge di Ohm nella forma cosiddetta *integrale* :

$$iR = \varphi_A - \varphi_B = V_{AB} \quad (\text{I.15})$$

cioè la corrente nel nostro conduttore è proporzionale alla differenza di potenziale applicata ai suoi estremi; quanto al segno, la corrente positiva attraversa il conduttore partendo dall'estremo a potenziale maggiore. La costante  $R$  è detta resistenza del conduttore (fra le due sezioni A e B). La sua unità di misura è l'*Ohm* (simbolo  $\Omega$ ) pari ovviamente a  $\frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}}$ . Se il filo è a sezione costante  $S$ , dalla (13) si ha  $R = \frac{l}{\sigma S}$  con  $l$  lunghezza totale fra A e B. Spesso invece della conducibilità  $\sigma$  si usa il suo inverso  $\rho$ , detto *resistività*, generalmente misurata nella unità mista  $\Omega \cdot \text{cm}$ .

Riportiamo qui sotto una tabella con i valori della resistività e del suo coefficiente di temperatura  $\alpha$ , per alcuni metalli puri e leghe.

	$\rho$ [ $\Omega \cdot \text{cm}$ ]	$\alpha$ [ $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ]
<b>Argento</b>	$1.60 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
<b>Rame</b>	$1.70 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
<b>Alluminio</b>	$2.82 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
<b>Ferro</b>	$9.60 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$
<b>Manganina (Cu 85%, Mn 11%, Ni 4%)</b>	$45.0 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-4}$
<b>Costantina (Cu 60%, Ni 40%)</b>	$50.0 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-3}$

Il coefficiente di temperatura determina il valore della resistività alla temperatura  $T$ , una volta che sia nota la resistività a una certa temperatura  $T_0$ :  $\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$ . Il coefficiente  $\alpha$  per gli elementi puri è pressoché indipendente da  $T$  e la resistenza cresce linearmente con la temperatura. In altri casi - come per molte leghe -  $\alpha$  dipende dalla temperatura e la relazione lineare vale solo in un determinato intorno di  $T_0$  dove  $\alpha$  si può trattare come costante. E' questo il caso della Manganina e della Costantana; il valore di  $\alpha$  riportato in tabella è quello intorno a  $20^\circ C$ ; la piccolezza di questo valore è associata al fatto che  $\alpha$  cambia di segno proprio nell'intorno di questa temperatura e ciò consente di adoperare tali leghe come campioni di resistenza (vedi Cap.IV,§1).

Quanto agli aspetti microscopici della conduzione nei conduttori di tipo ohmico (quali i metalli) possiamo, molto sommariamente, così descriverli: in un campione macroscopico di un metallo gli atomi sono aggregati in una struttura formante un reticolo cristallino; ogni singolo atomo è circondato da un numero di elettroni fissi pari a quello che compete ad esso per essere neutro, meno 1 o 2 unità a seconda dell'elemento (1 nel caso del Rame); questi elettroni non sono legati a un singolo atomo, ma appartengono al cristallo nel suo insieme e possono muoversi liberamente all'interno di esso (*elettroni di conduzione*). Il metallo pertanto può essere visto come un aggregato ordinato di cariche fisse positive circondato da un gas di elettroni (qui come nel seguito, a meno che non sia esplicitamente detto il contrario, quando si parla di elettroni si intendono quelli liberi, di conduzione, in compartecipazione con tutti gli atomi); la neutralità del complesso è assicurata dal fatto che la carica degli elettroni di conduzione uguaglia quella degli ioni fissi. Pertanto in un conduttore ohmico la densità di carica di volume  $\rho_e$  è nulla e tale si mantiene in ogni punto anche durante il passaggio di corrente, almeno nel regime stazionario che prescrive  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ .

A temperatura diversa dallo zero assoluto gli atomi oscillano (con ampiezza crescente con la temperatura) attorno alla loro posizione di equilibrio e gli elettroni si muovono a caso nel cristallo urtando contro gli atomi del reticolo. La distribuzione della velocità termica degli elettroni, per una temperatura  $T$ , si estende indefinitamente; tuttavia il valor quadratico medio è finito e il suo ordine di grandezza si può stimare, secondo la teoria classica dell'elettrone, in base alla relazione:

$$\frac{1}{2}m_e\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \quad (\text{I.16})$$

con  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$  costante di Boltzman,  $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} Kg$  massa dell'elettrone e  $T$  temperatura assoluta. A temperatura ambiente si trova  $(\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}(300 K) \simeq 1.2 \times 10^5 m/s$ . In realtà questo valore è di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quello che si ottiene con una teoria corretta degli elettroni nei metalli.

Tutto questo in assenza di campo elettrico; quando si applica un campo elettrico, gli elettroni di conduzione cominciano a muoversi e in tempi brevissimi si stabilisce, in ogni punto del conduttore, una velocità media di deriva data dalla legge di Ohm:  $\vec{v}_d = \mu \vec{E}_e$ . Questa velocità non può essere pensata come quella di un singolo elettrone, ma va vista piuttosto come una piccola (vedremo tra poco quanto piccola) componente che si sovrappone alla velocità termica del gas degli elettroni (che è un vettore a media nulla). Gli elettroni cioè continuano nel loro moto stocastico urtando contro gli atomi del reticolo e anzi sono proprio questi urti che - in media - danno una resistenza di tipo viscoso. In base a questo meccanismo è facile comprendere il motivo per cui la resistività nei metalli cresce con la temperatura: infatti la probabilità degli urti con gli atomi del reticolo aumenta all'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni degli atomi intorno alla loro posizione di equilibrio.

Verifichiamo ora che la velocità di deriva responsabile della corrente è - almeno a temperatura ambiente - molto piccola rispetto alla velocità media dovuta all'agitazione termica. Consideriamo quindi un filo di Rame percorso da una corrente di  $0.1 A$  (per esempio un filo lungo  $1m$  e di

diametro di  $10^{-2}$  cm ai capi del quale si applica la differenza di potenziale di 0.216 V); per calcolare  $v_d$  sfruttiamo le relazioni (5) e (6):

$$v_d = \frac{i}{\rho_p S} \quad (1.17)$$

$i$  ed  $S$  sono note e resta da calcolare  $\rho_p$  la densità dei portatori di carica per unità di volume. Per far questo basta sapere il numero  $N$  di atomi per unità di volume e poi moltiplicarlo per il numero di elettroni di conduzione messi a disposizione del reticolo dal singolo atomo (1 nel caso del Rame). Per il Rame  $N$  si ricava, in base alla sua densità  $\delta \simeq 8.9 \text{ g/cm}^3$ , al peso atomico  $A$  (63.6) e al numero di Avogadro  $N_A$ :

$$N = N_A \frac{\delta}{A} = 6.02 \cdot 10^{23} \frac{8.9}{63.6} = 8.42 \cdot 10^{22} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3}$$

Conseguentemente otteniamo per  $v_d$ :

$$v_d = \frac{0.1}{eN \cdot 10^{-4}} = 7.4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

vale a dire circa 8 ordini di grandezza più piccola della velocità media termica calcolata precedentemente. Questo risultato giustifica *a posteriori* l'ipotesi di accelerazione –di regime– nulla dei portatori: infatti, data la piccolezza delle velocità di regime, anche le corrispondenti accelerazioni saranno estremamente piccole; non si dimentichi che stiamo parlando delle grandezze *medie a regime* e non del moto caotico dei portatori, per cui le accelerazioni sono esclusivamente quelle dovute alla dipendenza macroscopica delle velocità dalla posizione. Un esempio può servire a chiarire, anche quantitativamente, questo punto: supponiamo che il filo dell'esempio precedente sia avvolto in forma di elica con raggio di curvatura  $R = 1 \text{ cm}$ . La velocità di deriva lungo il filo è quella calcolata precedentemente; dovendo le cariche muoversi lungo la spirale, esse possederanno una accelerazione diversa da zero e pari all'accelerazione centripeta  $v_d^2/R = 5.48 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ . Pertanto la somma del campo elettrico applicato  $\vec{E}_e$  e del campo resistente  $\vec{E}_d$  non è esattamente zero, ma dà luogo a un campo residuo  $\vec{E}_r$  in grado di imprimere alle cariche l'accelerazione ora calcolata; si trova allora  $E_r = m_e \cdot v_d^2 / (e \cdot R) = 7.8 \cdot 10^{-17} \text{ V/m}$  ( $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , carica dell'elettrone), da confrontarsi con il valore di  $E_e = 2.16 \cdot 10^{-1} \text{ V/m}$  che si ottiene dividendo la differenza di potenziale agli estremi del filo per la sua lunghezza; il divario fra i moduli di questi campi è tale da giustificare ampiamente l'assunzione fatta di *esatto* bilancio fra campo elettrico applicato e campo resistente.

Tornando ora ai conduttori estesi e considerando due superfici equipotenziali A e B, si può far vedere che sussiste ancora la relazione (15) anche se in genere il calcolo della resistenza tra due superfici equipotenziali qualunque non è banale, principalmente a causa del fatto che per calcolarla occorre determinare preventivamente i tubi di flusso del vettore  $\vec{j}$  (talvolta aiutano per questo considerazioni di simmetria). Tuttavia nel caso di conduttori filiformi, variamente interconnessi, vedremo che esistono regole semplici che permettono di introdurre una resistenza complessiva fra due superfici equipotenziali qualunque appartenenti a questi conduttori.

La legge di Ohm nella sua formulazione integrale stabilisce una relazione univoca fra la corrente che attraversa un conduttore e la differenza di potenziale fra due superfici equipotenziali del conduttore attraverso le quali si considera il flusso di corrente; si dice spesso che attraverso il conduttore si ha una “caduta di potenziale” o “caduta ohmica”  $\Delta V = iR$  dovuta alla corrente  $i$  che attraversa il conduttore di resistenza  $R$ . Sulla correttezza della espressione “caduta di potenziale dovuta alla corrente” si potrebbe anche obiettare, nel senso che si potrebbe altrettanto ragionevolmente sostenere che è la presenza della ddp  $\Delta V$  a provocare la corrente e non il contrario.

Un conduttore che presenti fra due suoi estremi (ai quali sia possibile applicare una certa differenza di potenziale) una data resistenza  $R$ , si rappresenta graficamente come in Fig.4:



Fig.I.4

dove il tratto a zig-zag rappresenta la porzione del conduttore avente resistenza finita mentre i tratti rettilinei indicano conduttori di resistenza zero. Come esempio pratico si pensi di avere un filo calibro di Manganina lungo  $1\text{ m}$  e avente sezione di  $10^{-4}\text{ cm}^2$ : in base alla tabella precedente la sua resistenza vale  $45\ \Omega$  e per collegarlo comodamente ad altri conduttori –quali ad esempio i morsetti di un generatore di forza elettromotrice – esso porterà saldati ai suoi estremi due *reofori* (portatori di corrente) di rame assai più corti di  $1\text{ m}$  e aventi sezione molto maggiore di  $10^{-4}\text{ cm}^2$ ; la loro resistenza sarà di molti ordini di grandezza inferiore rispetto a quella del filo di Manganina e potranno in molte situazioni (non necessariamente in tutte) essere considerati di resistenza zero e quindi disegnati come tratti rettilinei.

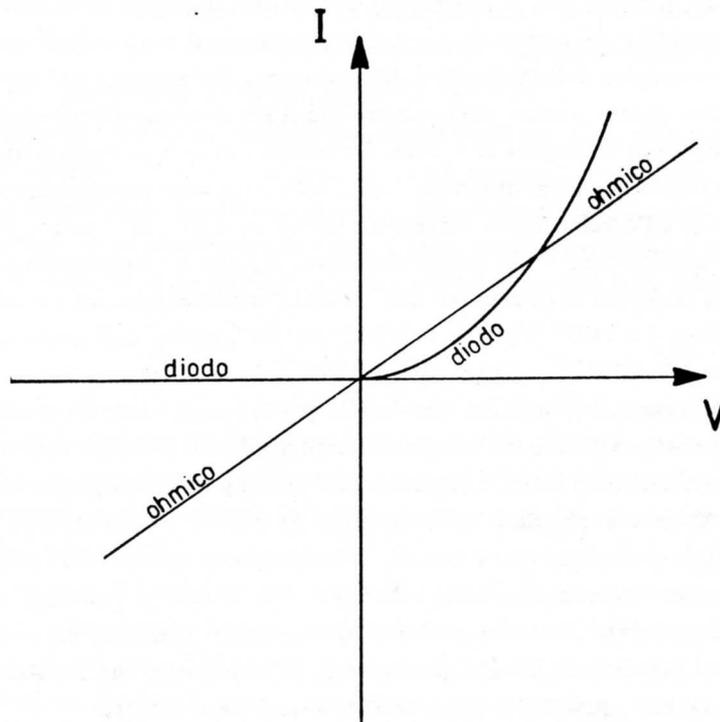


Fig.I.5

Abbiamo visto che i reofori servono per collegare un conduttore ad un altro, dove “collegare” significa stabilire una continuità elettrica a resistenza trascurabile; il collegamento si può ottenere in vari modi e fra questi i più diffusi sono la pressione di due superfici l’una contro l’altra e la saldatura.

Se riportiamo in grafico la corrente che attraversa un conduttore ohmico in funzione della diffe-

renza di potenziale ai suoi estremi (cioè fra le due superfici equipotenziali fra le quali è presente la resistenza  $R$ ), otteniamo una retta che attraversa l'origine (curva "ohmico" della Fig.5); la pendenza della retta rappresenta l'inverso della resistenza  $R$  - detta "conduttanza" - del conduttore. Un conduttore del genere si dice essere *lineare* ( $I \propto V$ ) e *bilaterale* nel senso che il suo comportamento non dipende dal verso della corrente. La curva  $I = f(V)$  è detta "curva caratteristica" del conduttore; a titolo di esempio e per sgombrare subito il possibile equivoco che tutti i conduttori siano ohmici, nella Fig.5 è riportata anche la curva caratteristica di un diodo che, palesemente, è lungi da essere sia lineare che bilaterale (cosa sia un diodo lo vedremo più avanti, per ora ci basti sapere che è un particolare tipo di conduttore).

## 2.- Il generatore di forza elettromotrice

Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente il generatore di forza elettromotrice è un dispositivo che ha la caratteristica di mantenere una differenza di potenziale costante fra due conduttori ad esso appartenenti detti *terminali* (o *poli*). Uno di questi è detto polo positivo, l'altro negativo, con riferimento al segno della differenza di potenziale. Il simbolo che generalmente si adotta è quello di Fig.6:

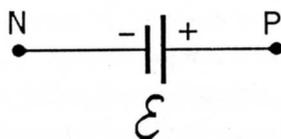


Fig.I.6

$\mathcal{E}$  rappresenta la ddp presente fra i due terminali ( $\mathcal{E} = \varphi_P - \varphi_N$ ) e nel caso che stiamo considerando di generatore ideale, essa è costante, indipendente dalla presenza o meno di un collegamento esterno fra i due poli tramite un ulteriore, generico conduttore. Nel caso che un conduttore ohmico sia applicato fra i due poli avremo la configurazione di Fig.7 (si tratta del più semplice fra i circuiti elettrici e il primo che incontriamo).

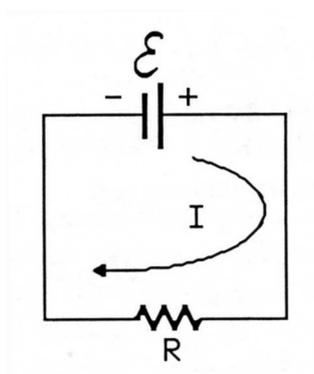


Fig.I.7

La corrente che circola nella resistenza  $R$  sarà data da  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$  e si noti che tale corrente attraversa anche il generatore di fem  $\mathcal{E}$  il quale, nonostante l'apparente interruzione del circuito suggerita dal simbolo grafico, è pur sempre un conduttore; inoltre se siamo in condizioni stazionarie, non ci deve essere accumulo di cariche in nessuna regione del circuito. Si noti che la corrente positiva attraversa il generatore dal polo negativo al polo positivo, cioè le cariche all'interno del generatore compiono un cammino non "naturale", il che ovviamente significa che su di esse agisce un'altra forza oltre al campo elettrico; è proprio quest'altra forza – rappresentabile mediante un campo  $\vec{E}_g$  – che, compiendo lavoro sulle cariche, rende possibile il mantenimento della ddp  $\mathcal{E}$  fra i morsetti del generatore. Infatti, consideriamo il generatore in condizioni statiche, cioè con i terminali aperti (Fig.8): all'esterno di esso avremo solo il campo elettrico

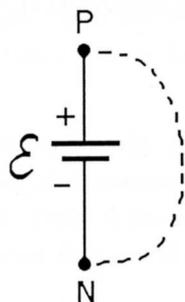


Fig.I.8

conservativo dovuto alla distribuzione di carica interna e superficiale dei vari conduttori e del generatore, mentre all'interno avremo sia il campo elettrico  $\vec{E}_e$  che il campo proprio del generatore  $\vec{E}_g$ ; quest'ultimo impedisce alle cariche accumulate sui poli di fluire da un polo all'altro per neutralizzarsi, sotto l'azione del campo  $\vec{E}_e$ . Se consideriamo il cammino tratteggiato nella figura, avremo per il lavoro fatto sulla carica unitaria ( $\vec{E}$  indica il campo totale agente sulla carica):

all'esterno

$$\int_{P_{esterno}}^N \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_{P_{esterno}}^N \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = \varphi_P - \varphi_N = \mathcal{E} \quad (\text{I.18})$$

e all'interno

$$\begin{aligned} \int_{N_{interno}}^P \vec{E} \cdot d\vec{P} &= \int_{N_{interno}}^P (\vec{E}_e + \vec{E}_g) \cdot d\vec{P} = \int_{N_{interno}}^P \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{N_{interno}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = \\ &= \varphi_N - \varphi_P + \int_{N_{interno}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Abbiamo uguagliato a zero il lavoro fatto dai campi all'interno del generatore, perché in un conduttore in condizioni statiche  $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_g = 0$ .

Riprendendo l'ultima relazione scritta abbiamo così:

$$\int_{N_{interno}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = \mathcal{E} \quad (\text{I.20})$$

che può anche porsi nella forma:

$$\oint \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = \mathcal{E} \quad (\text{I.21})$$

poiché  $\vec{E}_g$  all'esterno del generatore è nullo; inoltre, essendo il campo elettrico conservativo, la relazione precedente può anche scriversi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{P} = \mathcal{E} \quad (I.22)$$

Pertanto troviamo che la fem  $\mathcal{E}$  corrisponde al lavoro che il generatore compie per portare la carica positiva unitaria dal polo negativo al polo positivo e che tale lavoro coincide anche con la circolazione del campo del generatore su una linea chiusa che lo attraversi.

Si noti comunque che in condizioni statiche ( $I = 0$ ) il generatore di fatto non compie lavoro poiché le cariche sono ferme.

Quando il generatore è chiuso su un conduttore esterno collegato fra i due poli, allora la corrente circola e non è più vero che all'esterno del generatore esiste solo un campo elettrico; questo è vero solo all'esterno del conduttore,

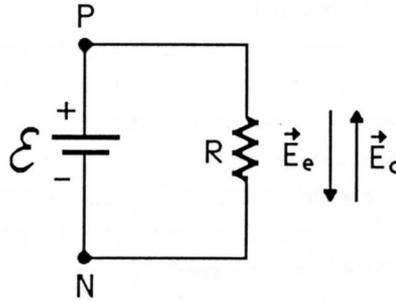


Fig.I.9

ma al suo interno sappiamo che esiste una forza resistente assimilabile ad un campo dissipativo  $\vec{E}_d$  (vedi Fig.9); resta comunque vero che all'interno di tutti questi conduttori, anche in presenza di corrente, purché in condizione di regime, la somma di tutti i campi localmente presenti deve essere nulla; vale a dire entro il conduttore collegato ai capi di  $\mathcal{E}$  deve essere:

$$\vec{E}_e + \vec{E}_d = 0 \quad (I.23)$$

e pertanto

$$\int_{P_{est}}^N \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} = 0 \quad (I.24)$$

cioè

$$\varphi_P - \varphi_N = \mathcal{E} = - \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} \quad (I.25)$$

$\varphi_P - \varphi_N$  è stato posto uguale a  $\mathcal{E}$  poiché stiamo considerando il caso di un generatore di forza elettromotrice ideale, che cioè mantiene la sua ddp  $\mathcal{E}$  costante, indipendentemente dalla entità della corrente che lo attraversa.

La (25) dice che la ddp ( $\varphi_P - \varphi_N$ ) uguaglia il lavoro resistente (positivo poiché  $\vec{E}_d$  è antiparallelo a  $d\vec{P}$ ) che le forze di attrito, nel conduttore esterno, compiono sulla carica unitaria che lo attraversa; questo lavoro si ritroverà sotto forma di calore sviluppato nella resistenza  $R$  (in base alla legge di Ohm - vedi (15) - sappiamo già che il termine  $-\int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P}$  uguaglia  $IR$ ).

Consideriamo ora l'interno del generatore ideale: qui niente è variato, rispetto alle condizioni statiche, per quanto riguarda il valore dei campi  $\vec{E}_e$  e  $\vec{E}_g$ , poiché dovrà sempre essere  $\vec{E}_e + \vec{E}_g = 0$

in ogni punto; la differenza sostanziale rispetto a prima è che ora le cariche si spostano e pertanto il campo  $\vec{E}_g$ , ovvero il generatore, compie effettivamente il lavoro  $\mathcal{E}$  sulla carica unitaria portandola dal polo negativo al polo positivo.

Il meccanismo del trasporto di carica nel circuito è pertanto il seguente: le cariche dal polo positivo fluiscono, sotto l'azione del campo elettrico, verso il polo negativo attraversando la resistenza  $R$  e la loro energia potenziale elettrostatica va perduta per vincere la forza di "attrito" all'interno della resistenza; giunte al polo negativo le cariche sono "trasportate" dal generatore verso il polo positivo e viene così rifornita ad esse l'energia potenziale perduta nel tratto esterno.

Quale sia l'effettivo agente che, all'interno del generatore, trasporta le cariche positive dal polo negativo al polo positivo contro le forze elettrostatiche, questo dipende dai generatori impiegati. In molti casi (pile, accumulatori) l'azione è dovuta a effetti elettrochimici, in altri ad effetti elettromeccanici (dinamo); fra quelli che si basano su effetti elettromeccanici è particolarmente istruttivo il generatore di Van de Graaff in cui le cariche vengono effettivamente *trasportate* su una cinghia isolante, mossa da un motore, dal polo negativo al polo positivo (tale generatore è impiegato per creare grosse ddp, fino a qualche decina di MV).

Da quanto detto finora non è per nulla evidente in che cosa differiscano dal punto di vista elettrico questi vari generatori, supposti avere tutti la stessa fem  $\mathcal{E}$ ; e di fatto se tutti fossero ideali, cioè presentassero la stessa  $\mathcal{E}$  indipendentemente dalla corrente erogata, sarebbero *identici* dal punto di vista elettrico; in pratica in un generatore reale la condizione sopradetta non si verifica, e viceversa "sotto carico", vale a dire quando esso eroga una certa corrente  $I \neq 0$ , la ddp ai terminali assume un valore  $\mathcal{E}' < \mathcal{E}$ . Possiamo allora scrivere:  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \Delta\varphi(I)$  con  $\Delta\varphi(0) = 0$ , intendendo che la differenza rispetto al caso limite di circuito aperto ( $I \rightarrow 0$ ), dipende dalla corrente.

Non in tutti, ma in *molti* casi (per esempio nelle pile elettrochimiche) si trova che questa diminuzione può essere abbastanza correttamente descritta in base a un effetto di tipo ohmico presente all'interno del generatore; all'interno di esso cioè si avrà, in condizioni stazionarie (non statiche) un campo complessivo:

$$\vec{E}_e + \vec{E}_g + \vec{E}_d = 0 \quad (I.26)$$

dove  $\vec{E}_e$  sarà diverso dal valore in assenza di carico, mentre  $\vec{E}_g$  mantiene lo stesso valore, indipendentemente dal carico. Pertanto, facendo la circolazione lungo il circuito completo si trova:

$$\int_{N_{int}}^P \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{N_{int}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} + \int_{N_{int}}^P \vec{E}_d \cdot d\vec{P} + \int_{P_{est}}^N \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} = 0 \quad (I.27)$$

Il primo e il quarto termine danno  $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = 0$  mentre il secondo è pari a  $\mathcal{E}$ . Abbiamo così:

$$\mathcal{E} = - \int_{N_{int}}^P \vec{E}_d \cdot d\vec{P} - \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} \quad (I.28)$$

Il secondo membro, ammettendo che anche all'interno del generatore  $\vec{E}_d$  risulti di tipo viscoso, ovvero proporzionale a  $\vec{j}$ , può essere scritto come una caduta ohmica. Avremo pertanto:

$$\mathcal{E} = I(\rho + R) \quad (I.29)$$

dove  $\rho$  rappresenta la cosiddetta "resistenza interna del generatore".

La ddp esistente ai capi del generatore sotto carico può allora scriversi

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - I\rho \quad (I.30)$$

come si può immediatamente verificare calcolando  $\int_{N_{int}}^P \vec{E} \cdot d\vec{P}$  all'interno del generatore, tenendo presente che tale integrale vale 0, essendo nullo l'integrando. Pertanto in molti casi (nel seguito anzi supporremo *in tutti i casi* a meno che non sia esplicitamente detto il contrario) un generatore reale di fem  $\mathcal{E}$  si può rappresentare (Fig.10) come un generatore ideale della stessa fem  $\mathcal{E}$  con in serie una resistenza finita  $\rho$ :

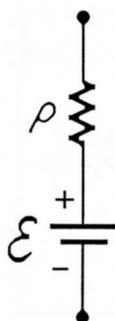


Fig.I.10

ovviamente la resistenza interna  $\rho$  non è in alcun modo separabile dal generatore per cui la fem sotto carico risentirà comunque della “caduta ohmica” della corrente su  $\rho$  e sarà quindi inferiore rispetto ad  $\mathcal{E}$ . Nella pratica generatori di fem di qualche *Volt* facilmente possono essere realizzati con resistenze interne assai piccole (decisamente inferiori ad  $1 \Omega$ ). Resistenze più grandi si potranno incontrare in generatori di fem elevate oppure in presenza di piccole pile. Ma su questi punti torneremo nel seguito.

### 3.— *Collegamento dei resistori; circuiti equivalenti*

Un conduttore che presenti fra due estremi una certa resistenza  $R$ , fornito –in genere– di due reofori di resistenza trascurabile rispetto a  $R$ , è propriamente detto *Resistore*, anche se nell’uso comune lo si denota con il nome di *Resistenza*. Esso è il primo elemento circuitale passivo, lineare e bilaterale che incontriamo. Della bilateralità è già stato detto; quanto alla linearità (proporzionalità tra corrente e ddp applicata agli estremi della resistenza, cioè l’indipendenza di  $R$  da  $I$ ) essa è vera in certe ipotesi una delle quali è che la temperatura della resistenza venga mantenuta costante (il che non è sempre facile); quanto al fatto che sia passivo, ciò significa che esso presenta una ddp ai suoi capi solo se una corrente lo attraversa; questo in contrasto con i generatori di fem che sono detti attivi in quanto capaci di presentare una ddp ai loro estremi anche in assenza di corrente e di fornire energia.

In base alle osservazioni fatte nel §1, sappiamo che collegando i reofori di vari resistori fra di loro, è possibile ottenere un conduttore composito che, fra due terminali in esso individuati, presenta una resistenza  $R_T$  la quale, indipendentemente dal fatto che sia o no esprimibile facilmente in funzione delle altre resistenze, è definibile operativamente in base alla (15):

$$R_T = \frac{\mathcal{E}}{I} \tag{I.31}$$

dove  $\mathcal{E}$  è la ddp fra le due superfici equipotenziali della nostra combinazione di resistori e  $I$  la corrente erogata dal generatore (Fig.11).

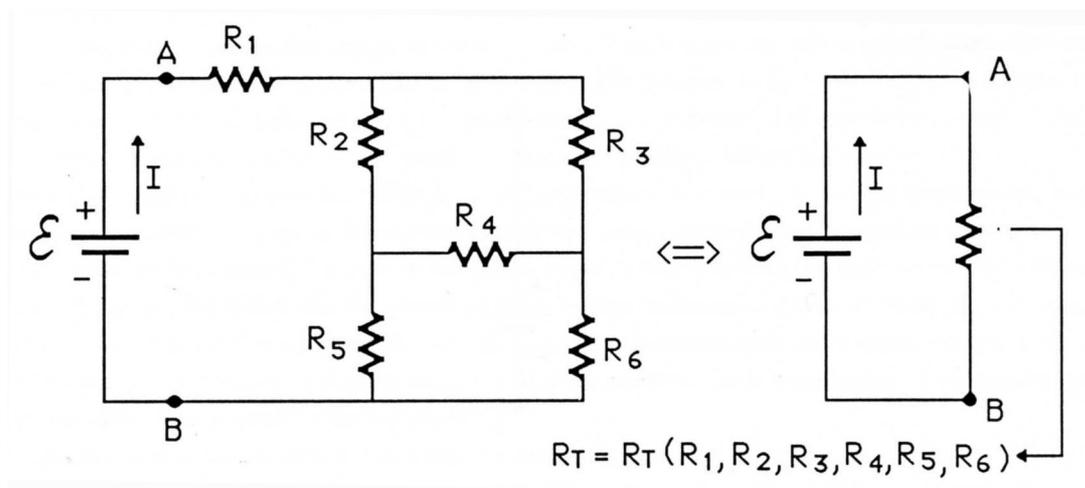


Fig.I.11

Quanto appena affermato è di importanza notevole nella trattazione dei circuiti elettrici poiché stabilisce l'equivalenza di due sistemi di conduttori. Vale a dire, con riferimento alla figura precedente, il complesso di resistori a sinistra (fra i due terminali A e B) è equivalente al resistore di destra (fra i medesimi terminali) poiché per quanto riguarda i terminali della rete si ha lo stesso regime di tensione ( $\mathcal{E}$ ) e corrente ( $I$ ). Più avanti estenderemo il concetto di equivalenza a sistemi più complicati di conduttori e generatori.

Consideriamo alcuni collegamenti estremamente semplici che sono alla base di strutture assai più complicate:

Resistori in serie: in questo caso (Fig.12) i resistori sono attraversati dalla stessa corrente.

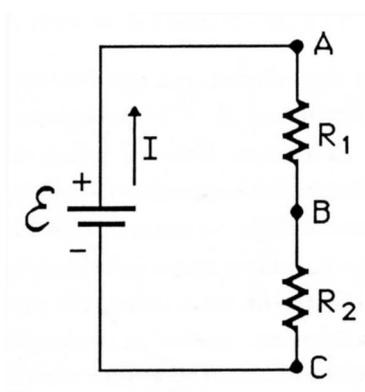


Fig.I.12

Per la legge di Ohm avremo:

$$\begin{cases} V_A - V_B = IR_1 \\ V_B - V_C = IR_2 \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

e conseguentemente

$$\mathcal{E} = V_A - V_C = I(R_1 + R_2) \quad (\text{I.33})$$

Pertanto il sistema è equivalente ad un unico resistore con

$$R_T = R_1 + R_2 \quad (\text{I.34})$$

vale a dire: *le resistenze dei resistori collegati in serie si sommano.*

Resistenze in parallelo: in questo caso è presente la stessa differenza di potenziale ai capi delle due resistenze (Fig.13); la legge di Ohm ci dice:

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}}{R_1} = I_1 \\ \frac{\mathcal{E}}{R_2} = I_2 \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$\mathcal{E} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = I_1 + I_2 \quad (\text{I.36})$$

che può scriversi

$$\mathcal{E} = (I_1 + I_2) \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = (I_1 + I_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{I.37})$$

Ora, anticipando un risultato –per altro intuitivo– che discuteremo un po' più ampiamente nel seguito,  $I$  (corrente erogata dal generatore) è uguale alla somma  $I_1 + I_2$  (vedi Fig.13)

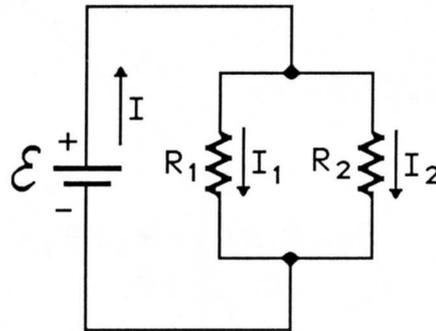


Fig.I.13

e pertanto possiamo dire che la *conduttanza di due resistori in parallelo si ottiene sommando le conduttanze*. Simbolicamente il valore di due resistenze in parallelo  $R_1$  e  $R_2$  si indica con  $R_1 \parallel R_2$ .

Si noti che date due resistenze  $R_1$  e  $R_2$  con  $R_1 \gg R_2$ , la serie è praticamente uguale a  $R_1$ , mentre il loro parallelo è praticamente uguale a  $R_2$ .

Le conclusioni a cui siamo giunti valgono indipendentemente dal numero di resistori che compongono la serie o il parallelo, vale a dire  $n$  resistori in serie sono equivalenti ad un unico resistore pari alla somma delle  $n$  resistenze, e  $n$  resistori in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore avente conduttanza pari alla somma delle  $n$  conduttanze. Se fra due terminali abbiamo un aggregato di serie e paralleli di resistenze, sarà possibile via via sostituire

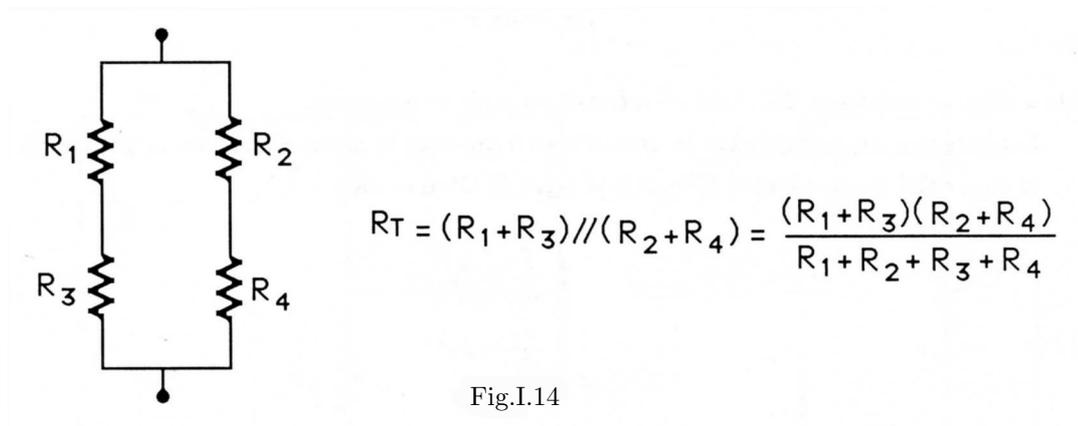


Fig.I.14

a tali combinazioni il resistore equivalente fino a ricondursi ad un unico resistore. Nelle Figg.14 e 15 sono riportati due esempi di questa procedura.

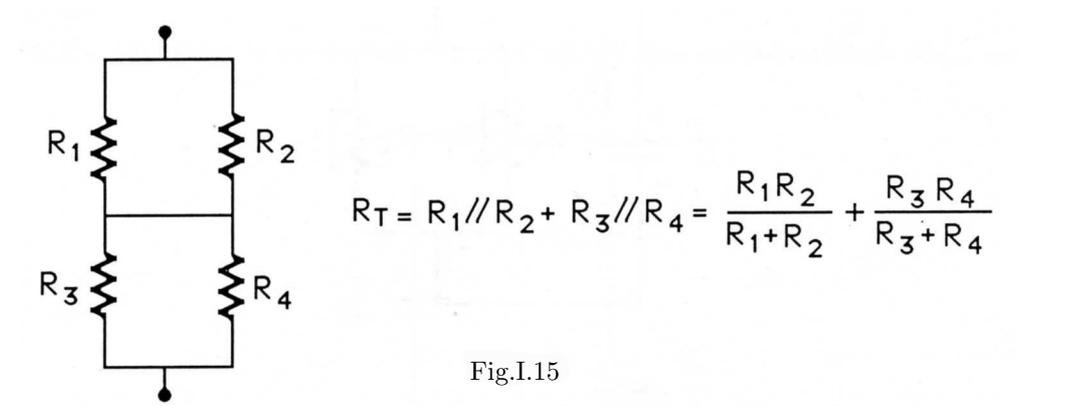


Fig.I.15

Le connessioni serie e parallelo non esauriscono tutte le topologie possibili di resistori interconnessi: si pensi ad esempio alla configurazione della Fig.16, nella quale le tre resistenze poste a triangolo  $R_{ab}, R_{bc}, R_{ac}$

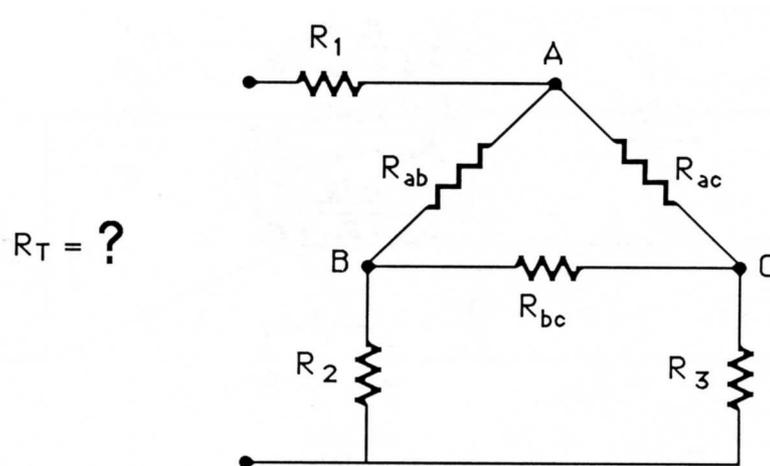


Fig.I.16

impediscono di considerare la configurazione come combinazione di serie e paralleli. Per risolvere questo problema (identico a quello di Fig.11) si procede così: si sostituisce al triangolo di resistenze una stella di resistenze che dà luogo a una configurazione risolubile come serie e paralleli (Fig.17)

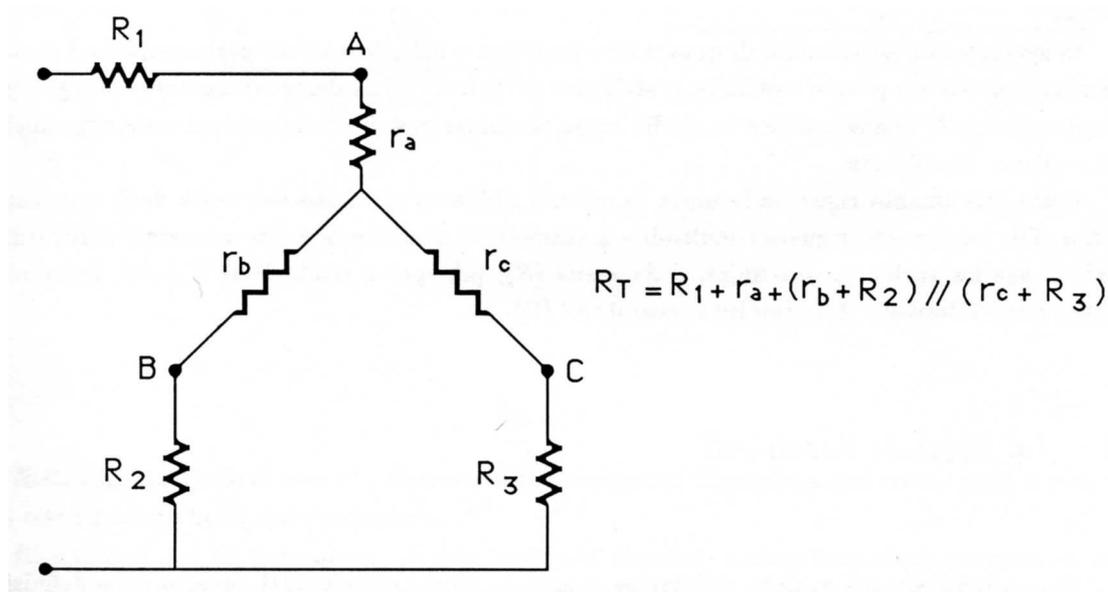


Fig.I.17

$r_a, r_b, r_c$  saranno calcolati in funzione di  $R_{ab}, R_{bc}, R_{ac}$ , imponendo che le resistenze fra i nodi A-B, B-C, A-C siano le stesse nella configurazione a triangolo e in quella a stella. Dovrà così essere:  
Resistenza fra A e C:

$$R_{ac} \parallel (R_{ab} + R_{bc}) = r_a + r_c \tag{I.38}$$

Resistenza fra B e C:

$$R_{bc} \parallel (R_{ab} + R_{ac}) = r_b + r_c \tag{I.39}$$

Resistenza fra A e B:

$$R_{ab} \parallel (R_{ac} + R_{bc}) = r_a + r_b \tag{I.40}$$

Sviluppando i calcoli si trova:

$$r_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad (\text{I.41})$$

$$r_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad (\text{I.42})$$

$$r_c = \frac{R_{bc}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad (\text{I.43})$$

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{\frac{1}{r_a r_b}}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \quad (\text{I.44})$$

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{\frac{1}{r_a r_c}}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \quad (\text{I.45})$$

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{\frac{1}{r_b r_c}}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \quad (\text{I.46})$$

Le relazioni da (41) a (46) costituiscono le cosiddette “*Trasformazioni Stella - Triangolo*” e “*Triangolo - Stella*”.

In generale con sostituzioni di questo tipo (nell'uno o nell'altro verso: per esempio nel circuito precedente avremmo potuto sostituire la stella fra ACD con l'equivalente triangolo) si può giungere a rappresentare la configurazione in studio come combinazione di configurazioni serie e parallelo e così risolvere il problema.

Infine, per quanto riguarda le unità di misura, abbiamo già detto dell'unità della resistenza, l'*Ohm* ( $\Omega$ ); per quanto riguarda multipli e sottomultipli si usano le solite notazioni standard; la conduttanza ha anch'essa una unità, il *Siemens* ( $S$ ); più spesso si usa la  $\Omega^{-1}$  detta anche *mho*, oppure l'unità derivata  $A/V$  (molto spesso il  $mA/V$ ).

#### 4.— *Le leggi di Kirchhoff*

Diamo innanzitutto qualche definizione (anche se alcuni dei concetti oggetto delle definizioni sono già stati più o meno tacitamente introdotti):

**Circuito**: un insieme di conduttori che si chiude su se stesso, comprendente uno o più generatori di fem.

**Rete**: un insieme di circuiti collegati fra loro, in modo che sia possibile, partendo da un punto, ritornarvi in più di un modo (il confine fra rete e circuito è però tenue). Nell'ipotesi che la fem applicata sia costante e che ogni conduttore appartenente alla rete sia ohmico, la rete è detta lineare (vedremo poi che si può avere una rete lineare anche in altre condizioni).

**Nodo**: punto della rete in cui si incontrano tre o più conduttori.

**Ramo**: conduttore fra due nodi.

**Maglia**: successione chiusa di rami (ognuno percorso una sola volta).

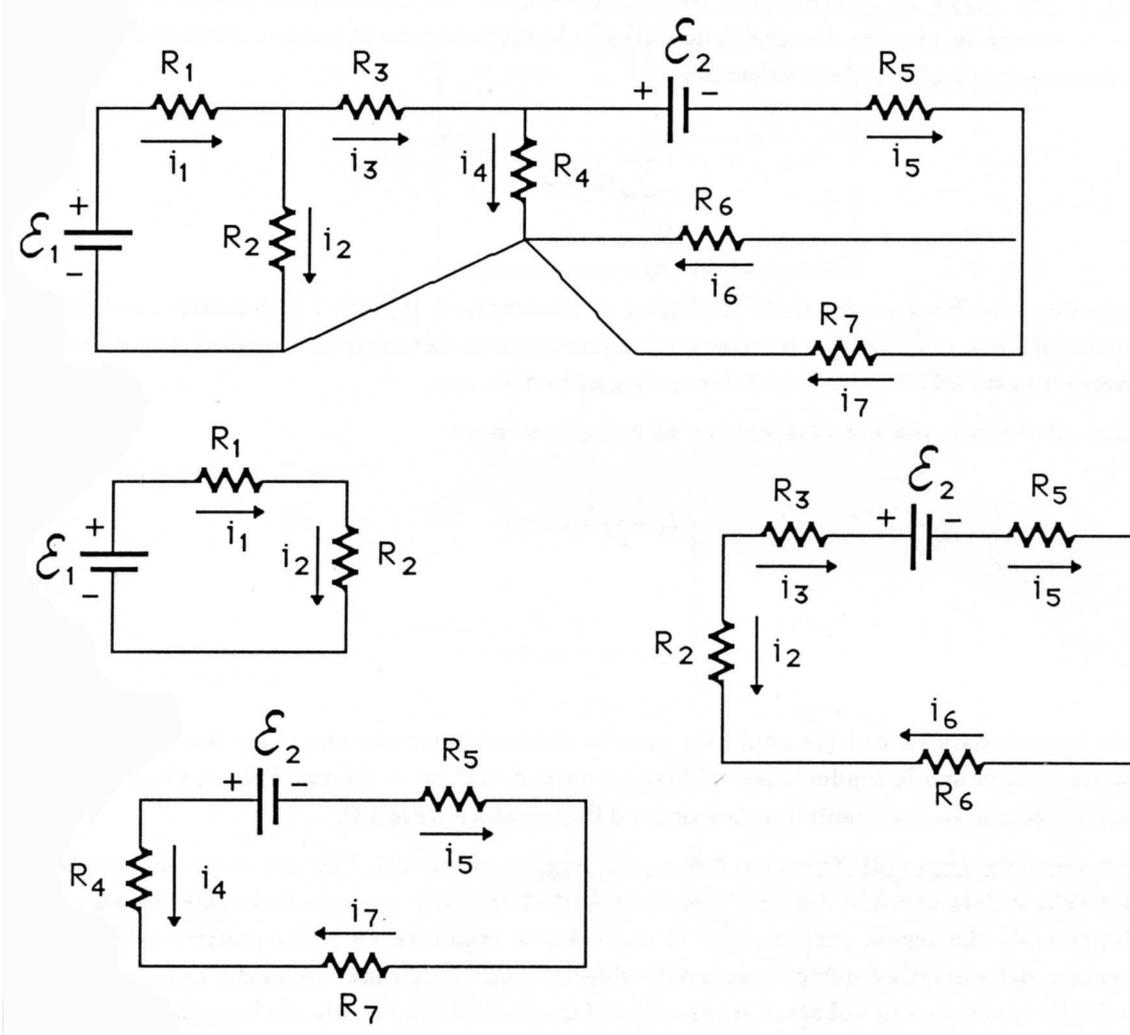


Fig.I.18

Nella Fig.18 a titolo di esempio si sono disegnate separate alcune (ma non certo tutte) le maglie della rete riportata nella parte superiore.

Ricordiamo che un generatore di fem invia nel circuito esterno una corrente positiva nel verso che va dal polo positivo a quello negativo; tuttavia, quando si avrà a che fare con una rete, disegneremo le correnti nei vari rami (una per ramo e non di più) con un verso qualunque (vedi figura). La “risoluzione” del circuito consisterà nel trovare il valore della corrente nei vari rami, col suo segno. Se una corrente, nella soluzione finale, risulta negativa significa che il segno inizialmente attribuito è opposto a quello vero.

Il regime stazionario delle correnti nei vari rami si può determinare in base ai principi dell'elettrostatica, alla condizione di stazionarietà e alla legge di Ohm. Di fatto, però, la risoluzione del circuito si basa su due leggi dette di *Kirchhoff* che discendono direttamente dai principi sopra esposti. Esse non aggiungono cioè nessuna nuova informazione e nient'altro sono che una formulazione alternativa alle leggi e ai principi di cui sopra, ma hanno il vantaggio di fornire una strada diretta e semplice per la determinazione delle correnti nella rete.

La prima legge di Kirchhoff o dei nodi stabilisce che: “*La somma algebrica delle correnti che si incontrano in un nodo è nulla*” (alle correnti che si avvicinano al nodo si attribuisce un segno e il segno opposto a quelle che si allontanano)

$$\sum_k i_k = 0 \quad (\text{I.47})$$

La legge discende direttamente dalla condizione di stazionarietà (8):  $\text{div } \vec{j} = 0$ ; infatti quest'ultima implica che il flusso di  $\vec{j}$  (cioè  $i$ ) attraverso qualunque superficie chiusa sia zero e quindi, in particolare, attraverso una superficie chiusa che contenga un nodo della rete.

Con riferimento alla Fig.18, possiamo ad esempio scrivere:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0 \\ i_5 - i_6 - i_7 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Questa legge è stata da noi già applicata quando abbiamo mostrato che, date due resistenze in parallelo, si sommano le conduttanze: abbiamo infatti detto che la somma delle due correnti nelle resistenze eguagliava la corrente totale erogata dal generatore (Fig.13).

La seconda legge di Kirchhoff o delle maglie recita così: “*In una maglia la somma algebrica delle cadute ohmiche è uguale alla somma algebrica delle fem eventualmente presenti nella maglia stessa*”. La regola per i segni è la seguente: si stabilisce un senso positivo arbitrario di percorrenza della maglia e quindi vengono considerate positive le cadute ohmiche associate ad una corrente di ramo concorde col senso prefissato; le fem positive sono quelle che vengono attraversate dal polo negativo a quello positivo percorrendo la maglia nel senso positivo prefissato.

Applichiamo la legge alle tre maglie disegnate in Fig.18 e poi vedremo qual è la giustificazione della validità di questa legge.

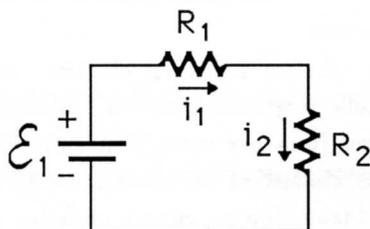


Fig.I.19

Scegliamo come positivo il senso di percorrenza orario delle maglie. Per la maglia in Fig.19 otteniamo

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E}_1 \quad (\text{I.49})$$

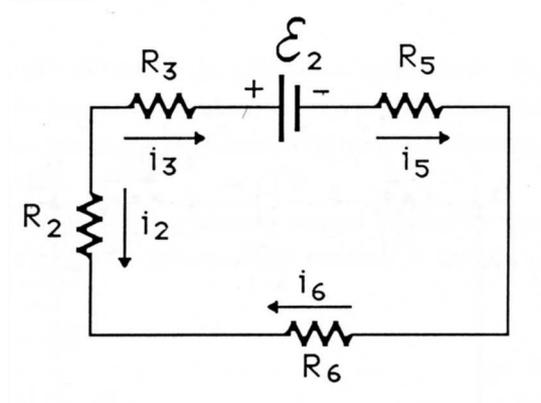


Fig.I.20

Per la maglia in Fig.20:

$$-i_2 R_2 + i_3 R_3 + i_5 R_5 + i_6 R_6 = -\mathcal{E}_2 \quad (\text{I.50})$$

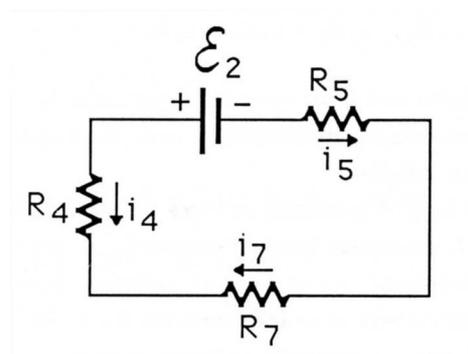


Fig.I.21

Per la maglia di Fig.21:

$$-i_4 R_4 + i_5 R_5 + i_7 R_7 = -\mathcal{E}_2 \quad (\text{I.51})$$

Si osservi che  $\mathcal{E}_{1,2}$  rappresentano i valori assoluti della fem.

La giustificazione della legge va ricercata nel fatto che, per una maglia qualunque, all'esterno dei conduttori che appartengono ad essa, abbiamo solo il campo elettrostatico  $\vec{E}_e$ ; pertanto  $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = 0$  e se scegliamo il cammino chiuso  $\Gamma$  in modo che non passi mai all'interno dei nostri conduttori, ma si appoggi semplicemente ai capi di ogni componente (resistenze o generatori), troviamo (Fig.22):

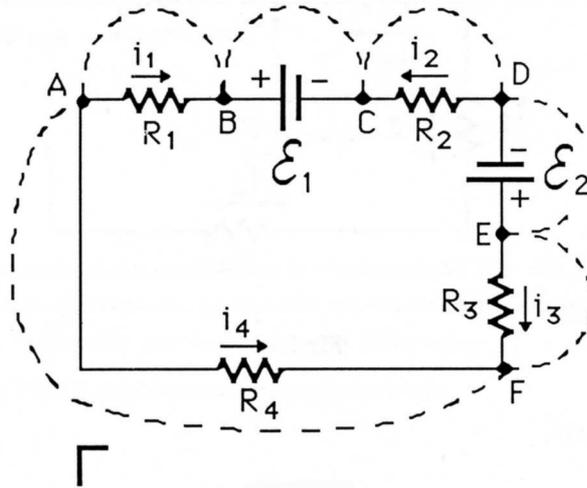


Fig.I.22

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = (V_A - V_B) + \mathcal{E}_1 + (V_C - V_D) - \mathcal{E}_2 + (V_E - V_F) + (V_F - V_A) = 0 \quad (\text{I.52})$$

che sfruttando la legge di Ohm dà appunto

$$i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_3 R_3 - i_4 R_4 = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (\text{I.53})$$

Si faccia attenzione che la maglia non è un circuito e pertanto le correnti nei vari conduttori della maglia assumono in genere valore e segno differente, cosa che sarebbe assurda se si trattasse di un circuito composto da un'unica maglia.

Basandosi su queste due leggi è possibile scrivere un sistema di equazioni lineari con almeno tante equazioni quanto sono le incognite (cioè le correnti); in genere se scegliessimo tutti i nodi e tutte le maglie della rete, scriveremmo un numero di equazioni superiore a quello delle incognite (il che vuol dire che alcune equazioni non sono indipendenti fra di loro).

Per quello detto fino ad ora, le correnti nei vari rami si possono davvero tracciare a caso, così come a caso si possono individuare le maglie della rete e scegliere i sensi positivi di percorrenza delle maglie; ciò porta ad un sistema cui sono associate matrici senza alcun particolare grado di simmetria. Questo non è di per sé un male, salvo che sarebbe preferibile trovare un metodo che permettesse di individuare un sottoinsieme di equazioni indipendenti e magari anche di scrivere direttamente le matrici per la soluzione col Metodo di Cramer. Il sistema esiste ed è detto "Metodo delle correnti di maglia". Esso consiste nella seguente procedura: intanto, per tutte le maglie che saranno individuate nel circuito, il senso positivo di percorrenza sarà sempre lo stesso (diciamo orario); quindi, partendo da una maglia "*reale*" nel circuito, sceglieremo la maglia successiva fra quelle reali adiacenti ad essa, cioè quelle che includono un ramo della precedente, e così via fino a che tutti i rami siano stati considerati. Per maglia "*reale*" si intende un insieme chiuso di rami individuabili all'interno della rete senza la soppressione di alcun ramo. Quanto alle correnti non si considerano quelle di ramo, ma si definiscono le *correnti di maglia*, una per ognuna delle maglie scelte. La corrente che effettivamente circola in un ramo sarà data ovviamente dalla somma algebrica delle correnti di maglia (la differenza in pratica, data la procedura) delle due maglie che hanno in compartecipazione il ramo in oggetto. Se si tratta di un ramo esterno, la corrente del ramo

coincide con quella della maglia (l'unica) cui tale ramo appartiene. Seguendo questa procedura, applicando soltanto la seconda legge di Kirchhoff, si scrivono tante equazioni quante sono le maglie e questo, data la relazione che intercorre fra correnti di maglia e correnti di ramo, significa di fatto trovare le correnti di tutti i rami.

Vediamo su un esempio la procedura, usando ancora il circuito precedentemente esaminato, ridisegnato per comodità in Fig.23. Da notare che le correnti di maglia sono scritte con un simbolo

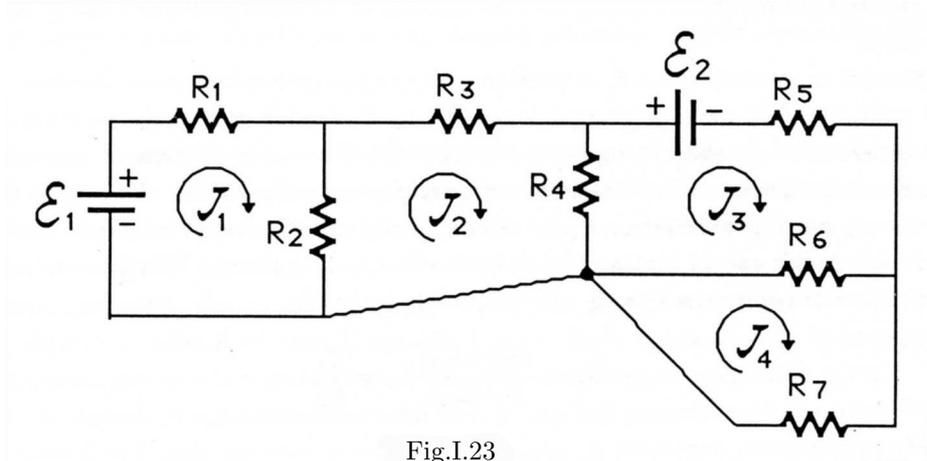


Fig.I.23

grafico diverso dalle correnti di ramo. L'applicazione del metodo delle correnti di maglia porta alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} R_1 \mathcal{J}_1 + R_2 (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) = \mathcal{E}_1 \\ R_3 \mathcal{J}_2 + R_2 (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1) + R_4 (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3) = 0 \\ R_5 \mathcal{J}_3 + R_4 (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2) + R_6 (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_4) = -\mathcal{E}_2 \\ R_6 (\mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_3) + R_7 \mathcal{J}_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

che possono essere così riorganizzate:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \mathcal{J}_1 - R_2 \mathcal{J}_2 = \mathcal{E}_1 \\ -R_2 \mathcal{J}_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \mathcal{J}_2 - R_4 \mathcal{J}_3 = 0 \\ -R_4 \mathcal{J}_2 + (R_4 + R_5 + R_6) \mathcal{J}_3 - R_6 \mathcal{J}_4 = -\mathcal{E}_2 \\ -R_6 \mathcal{J}_3 + (R_6 + R_7) \mathcal{J}_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

A tale sistema è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6 + R_7 \end{pmatrix} \quad (\text{I.56})$$

Generalizzando al caso di una rete qualunque è facile rendersi conto che tale matrice è sempre simmetrica e i suoi elementi sono valutabili immediatamente dalla semplice ispezione della rete: gli elementi diagonali  $a_{kk}$  sono ognuno la resistenza totale della maglia  $k$ -esima, gli elementi  $a_{kl} = a_{lk}$  con  $k \neq l$  sono la resistenza comune alle due maglie  $k$  ed  $l$  cambiata di segno.

Seguendo questa procedura è facile quindi scrivere direttamente la matrice che consente la risoluzione del problema. La corrente di maglia  $\mathcal{J}_k$  sarà così data da:

$$\mathcal{J}_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & \mathcal{E}_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & \mathcal{E}_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\text{Det}(a_{kl})} = \frac{\mathcal{E}_1 \text{Det}M_{1k}}{\text{Det}(a_{kl})} \cdot (-1)^{1+k} + \dots + \frac{\mathcal{E}_n \text{Det}M_{nk}}{\text{Det}(a_{kl})} \cdot (-1)^{n+k} \quad (\text{I.57})$$

dove  $M_{lk}$  rappresenta il minore rispetto all'elemento  $a_{lk}$  ed  $\mathcal{E}_j$  rappresenta la somma delle fem nella maglia  $j$ -esima.

I coefficienti che moltiplicano  $\mathcal{E}_j$  si prestano ad una interpretazione notevolmente interessante, anche dal punto di vista pratico. Supponiamo che  $\mathcal{E}_k$  sia l'unico generatore presente nella nostra rete: se vi fossero altri generatori, supponiamo di sostituirli con dei collegamenti a resistenza nulla. E' sempre possibile fare in modo, disegnando opportunamente il circuito, che il ramo dove si trova il generatore  $\mathcal{E}_k$  sia un ramo esterno (cioè non in compartecipazione); in questo caso la corrente della maglia  $k$  coincide con la corrente del ramo e quindi con quella che effettivamente attraversa il generatore. Si vede subito che in base alla (57) e alla (31) si ha:

$$\mathcal{J}_k = \frac{\text{Det}(M_{kk})}{\text{Det}(a_{kl})} \mathcal{E}_k = \frac{\mathcal{E}_k}{R_T} \quad (\text{I.58})$$

Cioè  $\frac{\text{Det}(M_{kk})}{\text{Det}(a_{kl})}$  rappresenta l'inverso della resistenza equivalente a tutto il circuito, vista da  $\mathcal{E}_k$  fra i suoi terminali, quando i generatori siano tutti, meno  $\mathcal{E}_k$ , cortocircuitati.

Ci potremmo chiedere come mai sia possibile, sfruttando apparentemente solo la seconda legge di Kirchhoff nella sua formulazione equivalente del Metodo delle correnti di maglia, risolvere il nostro circuito. Il motivo è che in realtà il metodo ora mostrato sfrutta implicitamente anche la legge dei nodi, precisamente quando afferma che in un ramo in compartecipazione la corrente vera è data dalla somma algebrica delle due correnti di maglia cui tale ramo appartiene.

## 5.— Il Principio di Sovrapposizione

Con riferimento all'esempio precedente, consideriamo un ramo della maglia  $k$ -esima. La corrente  $i_r$  che circola in tale ramo sarà così data o dalla corrente  $\mathcal{J}_k$  medesima, qualora si tratti di un ramo esterno, oppure dalla differenza  $\mathcal{J}_k - \mathcal{J}_l$  (o  $\mathcal{J}_l - \mathcal{J}_k$  a secondo del senso scelto per la corrente  $i_r$ ) se il ramo è in compartecipazione fra la maglia  $k$ -esima e la  $l$ -esima. In entrambi i casi tale corrente sarà esprimibile come

$$i_r = C_{1r}\mathcal{E}_1 + \dots + C_{nr}\mathcal{E}_n \quad (\text{I.59})$$

cioè come combinazione lineare delle forze elettromotrici  $\mathcal{E}_k$  (ognuna essendo la somma algebrica delle fem nella maglia  $k$ -esima). Il secondo membro può quindi anche scriversi

$$i_r = \sum_{s=1}^N C_{sr}e_s \quad (\text{I.60})$$

dove questa volta la sommatoria è estesa a tutti gli  $N$  generatori  $e_s$  di fem appartenenti alla rete. Le costanti  $C_s$  sono le stesse per tutti i generatori posti in serie nello stesso ramo. Quest'ultima relazione

si presta ad una interpretazione estremamente utile dal punto di vista pratico: la corrente in un ramo qualunque può sempre ottenersi come la somma di  $N$  correnti ognuna ottenuta sostituendo con un conduttore a resistenza nulla (*cortocircuitando*) tutti i generatori presenti meno uno e ripetendo per tutti i generatori la stessa procedura. E' questa una formulazione del

Principio di Sovrapposizione che può essere anche enunciato dicendo che “*La corrente totale attraverso ogni elemento di un rete lineare avente generatori indipendenti, è uguale alla somma algebrica delle correnti prodotte nell'elemento da ciascun generatore agente separatamente*”.

Tale Principio discende direttamente dal fatto che il campo elettrico è lineare nelle cariche e che vale cioè il Principio dell'indipendenza delle azioni simultanee. Le conseguenze sono notevoli perché il Principio di Sovrapposizione consente di risolvere una rete complicata quanto si vuole andando a risolvere  $N$  reti, ognuna con uno solo degli  $N$  generatori; nel fare ciò si sfrutta il fatto, per il momento non ovvio, che quando si considera un solo generatore per volta non è necessario ricorrere alla stesura di tutto il sistema di equazioni, ma si riesce a determinare la corrente dei vari rami usando metodi più rapidi e semplificati (come per le resistenze equivalenti del §3). Prima di vedere ciò su un esempio, è opportuno osservare che i generatori vengono cortocircuitati idealmente (cioè viene messo  $\mathcal{E} = 0$ ) solo nel caso in cui essi siano privi di resistenza interna, cioè siano ideali; locuzione più esatta sarebbe dire: “*il generatore viene sostituito dalla sua resistenza interna*”. Negli esempi fatti precedentemente la resistenza interna del generatore o era nulla o era stata inglobata nella resistenza in serie esplicitamente considerata.

Guardiamo ora un esempio di applicazione del Principio di Sovrapposizione e contemporaneamente impariamo a valutare la corrente in un ramo in un modo che non farà più ricorso all'algebra delle matrici, bensì alla sostituzione di gruppi di resistori con un unico resistore equivalente. Questa è fra l'altro la procedura che il più delle volte si adopera perché, nel caso di reti relativamente semplici, è molto più diretta. Il circuito è quello in Fig.24:

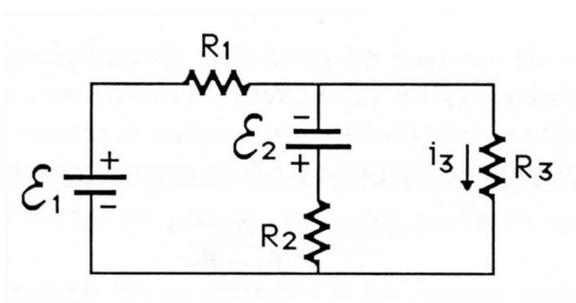


Fig.I.24

Supponiamo di voler determinare la corrente  $i_3$  che circola nella resistenza  $R_3$ . Secondo il Principio di Sovrapposizione dobbiamo calcolare i due contributi provenienti alla corrente in  $R_3$  nei due circuiti di Fig.25.

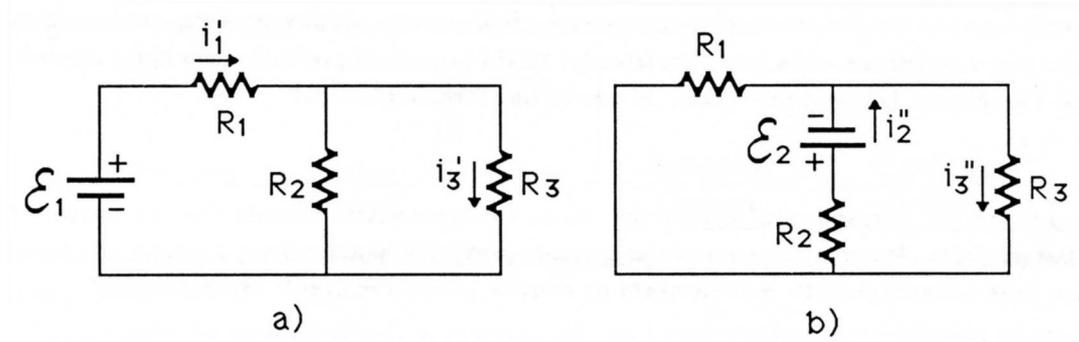


Fig.I.25

Per “risolvere” questi due circuiti mostriamo prima un risultato del tutto generale su come si divide la corrente in un parallelo di due resistenze. Si abbia cioè la configurazione di Fig.26

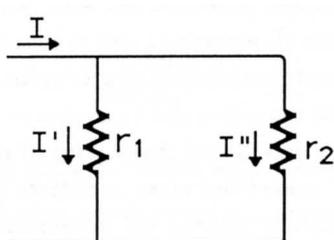


Fig.I.26

Per la legge dei nodi abbiamo  $I = I' + I''$  e per la seconda legge di Kirchhoff (con le correnti di ramo, quelle vere cioè)  $I'r_1 - I''r_2 = 0$ . Otteniamo così

$$I' = I \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad I'' = I \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad (\text{I.61})$$

ovvero

$$\frac{I'}{I''} = \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{I.62})$$

la corrente cioè si divide nei due rami del parallelo in maniera inversamente proporzionale alla resistenza dei rami. Chiameremo questa regola “Regola di ripartizione o di divisione della corrente”.

Tornando ora al circuito a) della Fig.25, se conoscessimo la corrente  $i_1'$  potremmo direttamente determinare  $i_3'$ ; infatti dalla Regola di ripartizione della corrente abbiamo:

$$i_3' = i_1' \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad (\text{I.63})$$

D'altronde, ricorrendo alle resistenze equivalenti, possiamo esprimere  $i_1'$  come:

$$i_1' = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (\text{I.64})$$

Per il circuito b), quando  $\mathcal{E}_1$  sia cortocircuitato, abbiamo:

$$i_3'' = i_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3} \quad (\text{I.65})$$

$$i_2'' = -\frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R_1 \parallel R_3} = -\frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_2R_1 + R_2R_3 + R_1R_3} \quad (\text{I.66})$$

La corrente totale  $i_3$  che circola nella resistenza  $R_3$  sarà data da (la convenzione del segno per  $i_3$  è concorde con quella di  $i_3'$  e di  $i_3''$ )

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (\text{I.67})$$

Al risultato finale siamo arrivati assai rapidamente, fra l'altro senza sviluppare conti particolarmente complicati. Per confronto calcoliamo la stessa corrente  $i_3$  con la procedura delle correnti di maglia (Fig.27).

La matrice del circuito è:

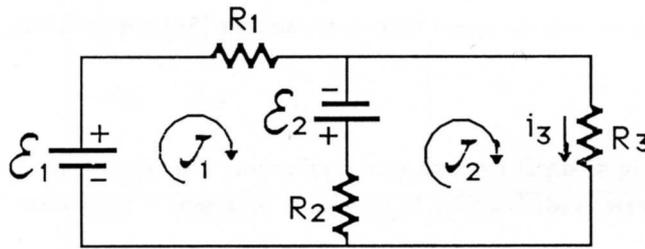


Fig.I.27

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.68})$$

e pertanto

$$\mathcal{J}_2 = i_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R_2 - \mathcal{E}_2(R_1 + R_2)}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (\text{I.69})$$

Si noti che in questo caso anche la procedura delle correnti di maglia è estremamente spedita soprattutto perché, trattandosi di due maglie soltanto, il calcolo del determinante è banale.

## 6.— Altri teoremi delle reti lineari

Sfruttando le leggi di Kirchhoff e facendo ricorso ai metodi risolutivi dell'algebra delle matrici si possono dimostrare alcuni teoremi che possono aiutare non poco nella risoluzione delle reti lineari. Citiamo fra questi:

il **Teorema di Reciprocità**: “Se un generatore di fem costante posto nel ramo  $r$ -esimo di una rete passiva, lineare, bilaterale produce una certa corrente  $i_r$  nel ramo  $k$ -esimo della rete medesima, allora questo generatore, inserito nel ramo  $k$ -esimo produrrà la medesima corrente  $i_r = i_k$  nel ramo  $r$ -esimo”.

il **Teorema di Compensazione**: “In una rete passiva, lineare e bilaterale contenente generatori di fem costante, se una resistenza  $R$  attraverso cui passa una corrente  $i$  è aumentata di una certa quantità  $\Delta R$ , il cambiamento delle correnti nella rete è uguale a quello prodotto da un generatore pari a  $i\Delta R$  posto in opposizione a  $i$  nel ramo che contiene  $R$ ”.

Il Teorema di Thévenin di fondamentale importanza per le semplificazioni -anche concettuali- che permette di introdurre, risolve il seguente problema: supponiamo di avere una rete lineare e di individuare in essa due “terminali”, in sostanza due punti della rete, non necessariamente due nodi: rispetto all’applicazione di una resistenza o di un generatore (o di un’altra rete tramite due altri terminali in essa individuati) come si comportano dal punto di vista circuitale questi due terminali? Il teorema di Thévenin fornisce la risposta stabilendo che: “Ogni rete passiva, lineare e bilaterale contenente generatori di fem costanti e avente due terminali si comporta rispetto a questi due terminali come un unico generatore reale avente resistenza interna  $R_{Th}$  e fem  $\mathcal{E}_{Th}$ , dove  $\mathcal{E}_{Th}$  è la tensione che appare fra questi terminali quando non si colleghi nessun ulteriore conduttore fra essi e  $R_{Th}$  è la resistenza che si misura fra i terminali quando tutti i generatori ideali di fem posti nella rete siano sostituiti da cortocircuiti”.  $\mathcal{E}_{Th}$  è detta fem equivalente di Thévenin o fem a circuito aperto e  $R_{Th}$  è detta resistenza equivalente di Thévenin oppure resistenza d’ingresso dei due terminali. Alla fine del §4 abbiamo già incontrato quest’ultima grandezza (58) e quindi sappiamo anche calcolarla.

Il teorema consente di sostituire una rete qualunque, con riferimento a due suoi terminali, con un unico generatore reale (vedi Fig.28). In pratica il problema è ricondotto

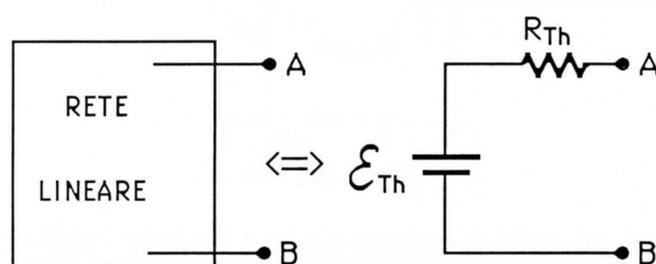


Fig.I.28

a determinare  $\mathcal{E}_{Th}$  e  $R_{Th}$ ; per la prima ( $\mathcal{E}_{Th}$ ) in genere non c’è altro da fare che risolvere la rete e, una volta note le correnti, determinare la ddp fra i due terminali. Quanto a  $R_{Th}$  si può calcolare procedendo col solito sistema di calcolo della resistenza di una rete di resistori, oppure come visto alla fine del §4. Alternativamente potremo inserire fra i terminali A e B un cortocircuito e, risolvendo la nuova rete così ottenuta, valutare la corrente  $I_{cc}$  che lo attraversa; dal valore di quest’ultima, notando che  $I_{cc} = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{R_{Th}}$  si può risalire a  $R_{Th}$  (questa procedura stabilisce anche un sistema di *misurare*  $R_{Th}$  come vedremo in seguito).

Diamo ora una dimostrazione del teorema di Thévenin: intanto, scelti due terminali A e B della rete esprimiamo la differenza di potenziale  $\mathcal{E}_{Th} = V_A - V_B$  fra questi due terminali, quando da essi non sia derivata corrente: una maniera operativa per determinare questa ddp è porre fra i due terminali una resistenza  $R$  con in serie un generatore  $E_0$  di valore uguale a  $\mathcal{E}_{Th}$  e messo ad esso in opposizione (Fig.29).

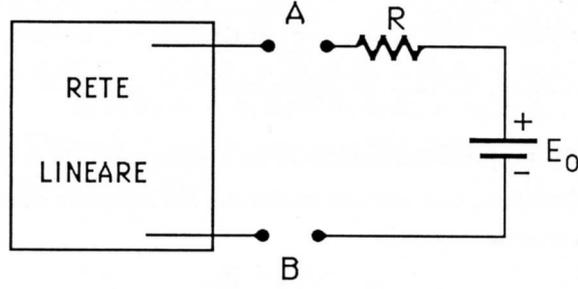


Fig.I.29

Si viene così a costruire una maglia (diciamo la  $n$ -esima) nella quale, se  $E_0 = V_A - V_B$ , per la seconda legge di Kirchhoff sarà  $\mathcal{J}_n = 0$ . D'altronde, volendo esprimere  $\mathcal{J}_n$  in funzione dei parametri della rete avremo

$$\mathcal{J}_n = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & \mathcal{E}_1 \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & \mathcal{E}_n - E_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1n} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & R_{nn} + R \end{vmatrix}} = \frac{D' - E_0 \cdot D_n}{D} \quad (I.70)$$

dove

$$D' = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & \mathcal{E}_1 \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & \mathcal{E}_n \end{vmatrix} \quad (I.71)$$

e

$$D_n = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1,n-1} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n-1,1} & \dots & \dots & R_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \quad (I.72)$$

Si vede che per  $\mathcal{J}_n = 0$  deve essere ( $\mathcal{E}_{Th} = E_0$ ):

$$D' - \mathcal{E}_{Th} \cdot D_n = 0 \quad (I.73)$$

e pertanto

$$\mathcal{E}_{Th} = \frac{D'}{D_n} \quad (I.74)$$

Per  $E_0$  qualsiasi, in base alla (74) e (70) possiamo scrivere:

$$\mathcal{J}_n = \frac{\mathcal{E}_{Th} - E_0}{\frac{D}{D_n}} \quad (I.75)$$

$D$  può porsi nella forma:

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & R_{1,n} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & R_{n,n} \end{vmatrix} + R \cdot D_n = D^* + R \cdot D_n \quad (I.76)$$

e pertanto

$$\mathcal{J}_n = \frac{\mathcal{E}_{Th} - E_0}{\frac{D^*}{D_n} + R} \quad (I.77)$$

D'altronde  $\frac{D^*}{D_n}$  -vedi la (58)- rappresenta proprio la resistenza vista fra A e B quando tutti i generatori della rete siano cortocircuitati, cioè proprio quella che noi abbiamo chiamato  $R_{Th}$ . L'espressione della corrente nella nostra maglia è quindi:

$$\mathcal{J}_n = \frac{\mathcal{E}_{Th} - E_0}{R_{Th} + R} \quad (I.78)$$

che corrisponde proprio ad avere il circuito di Fig.30:

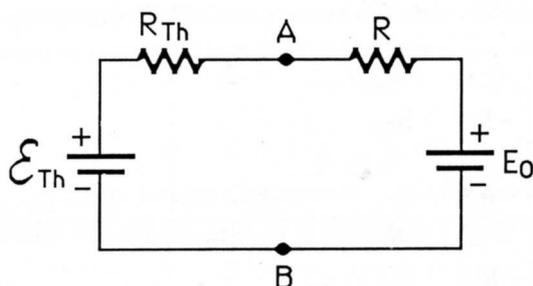


Fig.I.30

Il teorema è così dimostrato nel caso più generale possibile poiché, valendo esso quando fra A e B si pone un generatore  $E_0$  con in serie una resistenza  $R$ , proprio per il teorema di Thévenin, questa configurazione può rappresentare i terminali di una qualunque rete lineare. Guardiamo ora alcune applicazioni del teorema di Thévenin. Riprendiamo il circuito di Fig.27 e supponiamo di voler aggiungere in parallelo a  $R_3$  la resistenza  $R_4$  con in serie il generatore  $\mathcal{E}_4$  e di voler determinare  $i_4$  (Fig.31). Se ignorassimo il teorema di Thévenin, non ci resterebbe che applicare la procedura standard e scrivere

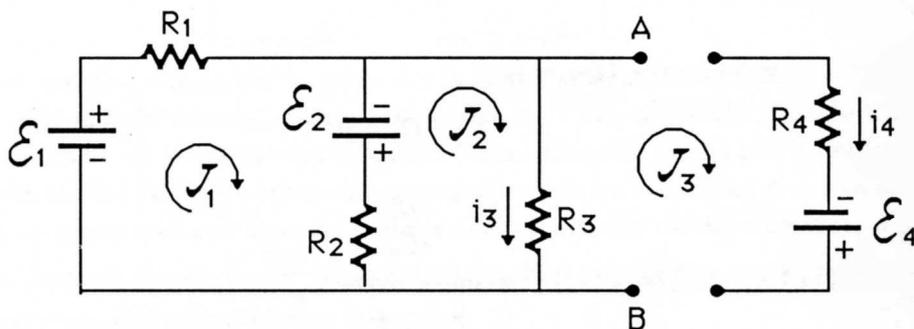


Fig.I.31

$$i_4 = \mathcal{J}_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \begin{vmatrix} -R_2 & R_2 + R_3 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \mathcal{E}_2 \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \mathcal{E}_4 \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R_2R_3 - \mathcal{E}_2R_3(R_1 + R_2) + \mathcal{E}_4(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_4R_2^2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)(R_3 + R_4) - R_3^2(R_1 + R_2) - R_2^2(R_3 + R_4)} = \\
 &= \frac{\mathcal{E}_1R_2R_3 - \mathcal{E}_2R_1R_3 + \mathcal{E}_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4} \quad (I.79)
 \end{aligned}$$

Usando il teorema di Thévenin possiamo invece prima determinare  $R_{Th}$  e  $\mathcal{E}_{Th}$  e quindi determinare la corrente  $i_4$  del circuito di Fig.32:

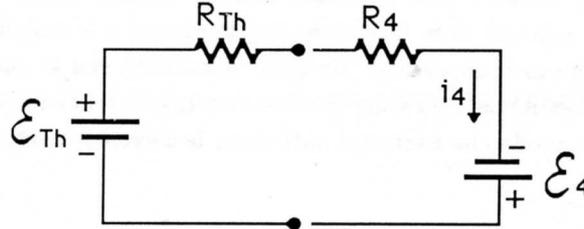


Fig.I.32

$$i_4 = \frac{\mathcal{E}_{Th} + \mathcal{E}_4}{R_{Th} + R_4} \quad (I.80)$$

Per determinare  $\mathcal{E}_{Th}$  basta ricordare il risultato (67) e calcolare

$$\mathcal{E}_{Th} = i_3R_3 = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}R_3 \quad (I.81)$$

Quanto a  $R_{Th}$  si trova che essa vale:

$$R_{Th} = R_3 \parallel R_2 \parallel R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (I.82)$$

E pertanto applicando la (80) troviamo il risultato precedentemente visto:

$$i_4 = \frac{\mathcal{E}_1R_2R_3 - \mathcal{E}_2R_1R_3 + \mathcal{E}_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4} \quad (I.83)$$

Mostriamo nel seguito numerosi esempi in cui il teorema di Thévenin permette di introdurre notevoli semplificazioni, sia concettuali che di calcolo.

A titolo di ulteriore applicazione (assai semplice per la verità) della legge di Ohm vediamo quella che nel seguito sarà richiamata come regola del “*Partitore di tensione*”;

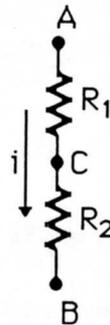


Fig.I.33

consideriamo due resistenze in serie (Fig.33) ai capi delle quali sia presente una differenza di potenziale  $V_A - V_B$ . Se vogliamo conoscere la ddp  $V_C - V_B$  otteniamo, in base alla legge di Ohm:

$$V_C - V_B = iR_2 = (V_A - V_B) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{I.84})$$

Nello studio delle reti lineari e delle applicazioni della legge di Kirchhoff abbiamo sempre fatto l'implicita ipotesi che le quantità note fossero le fem applicate e le resistenze. Si trattava cioè di ottenere le correnti che erano le incognite. Un'altra possibilità che si può presentare, è quella di conoscere le correnti e le resistenze e di voler determinare le differenze di potenziale. In questo caso scriveremo le equazioni in modo che i termini noti siano le correnti: pertanto è opportuno porre la legge di Ohm nella forma

$$V \frac{1}{R} = I \quad (\text{I.85})$$

facendo intervenire la conduttanza  $\frac{1}{R}$  invece della resistenza. Le equazioni restano ovviamente lineari, ma il ricorso alla procedura prima seguita delle correnti di maglia non è più opportuna. Senza entrare nei dettagli ci limiteremo a dire che in questi casi conviene introdurre le differenze di potenziale dei vari nodi rispetto ad un certo nodo di riferimento (*Tensione dei nodi*) e quindi esprimere la corrente in un ramo come la differenza fra le tensioni dei due nodi, alle estremità del ramo in oggetto, moltiplicata per la conduttanza del ramo; una volta espresse in questa maniera le correnti dei vari rami confluenti nel nodo, si tratta di applicare la prima legge di Kirchhoff, imponendo che la loro somma sia nulla, oppure uguagli una eventuale corrente confluyente in quel ramo, inviata da un dispositivo opportuno (*Generatore di corrente*). Esiste un evidente parallelismo fra la procedura ora detta (*Metodo delle Tensioni dei nodi*) e quella delle correnti di maglia; le procedure addirittura coincidono formalmente, purché alle tensioni si sostituiscano le correnti, alle resistenze le conduttanze e alle fem impresse dai generatori di fem le correnti inviate dai generatori di corrente. Si dice che i due procedimenti sono “*duali*”.

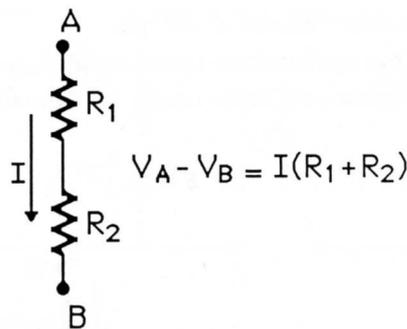


Fig.I.34

Un altro esempio di situazione duale è quello delle resistenze in serie e in parallelo: infatti la relazione che lega la ddp, la corrente e le resistenze nella prima configurazione è esattamente quella fra corrente, ddp e conduttanza nella seconda; il caso è riportato nelle Figg.34 e 35.

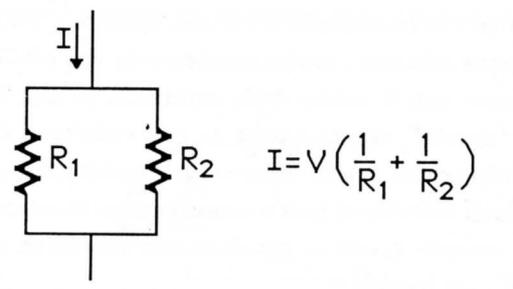


Fig.I.35

Molto spesso riconoscere il duale di un circuito noto, consente di risolvere il problema per pura analogia e quindi assai rapidamente.

## 7.- Generatori di tensione e generatori di corrente. Teorema di Norton

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che i generatori reali di fem  $\mathcal{E}$  si possono rappresentare (Fig.36) in maniera sufficientemente accurata come generatori ideali di fem con in serie una resistenza (resistenza interna del generatore).

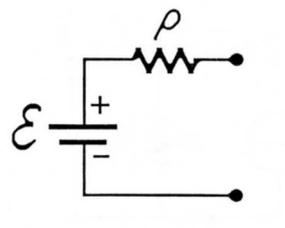


Fig.I.36

Pertanto, rispetto ad un generatore ideale, si ha un limite alla corrente massima erogabile ( $i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$ ). Ovviamente l'influsso della resistenza interna (potremmo dire della non idealità del generatore) si fa sentire tanto di più quanto più grossa è la corrente che il generatore eroga durante l'utilizzo.

Oltre ai generatori ideali di tensione possono definirsi dei generatori ideali di corrente (i loro duali, cioè): la caratteristica di un generatore ideale di corrente è quella di inviare una corrente costante, indipendentemente dal valore della tensione ai suoi terminali. Il simbolo per un generatore ideale di corrente è quello di Fig.37.

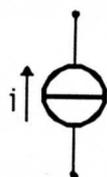


Fig.I.37

La freccia indica il senso in cui la corrente è inviata, mentre  $i$  indica il valore assoluto della corrente. Se la corrente  $i$  rimane costante, indipendentemente dal carico, la tensione ai terminali del generatore cresce linearmente con il valore della resistenza su cui il generatore è chiuso. Un generatore ideale di corrente “aperto”, ovvero chiuso su una resistenza infinita manifesterà ai suoi terminali una ddp infinita. Nella realtà questa differenza di potenziale sarà elevata e non infinita; si trova che un generatore reale di corrente si può schematizzare abbastanza accuratamente (Fig.38) come un generatore ideale di corrente  $i$ , con in parallelo una resistenza  $\rho$  (tanto più grossa quanto più il generatore si avvicina al caso ideale).

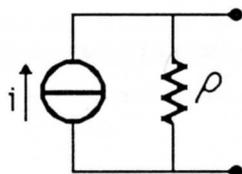


Fig.I.38

Pertanto, quando il generatore reale è chiuso su un carico e ai suoi terminali presenta una differenza di potenziale  $V$  (Fig.39), la corrente effettivamente inviata sul carico è

$$i' = i - i'' = i - \frac{V}{\rho} \quad (\text{I.86})$$

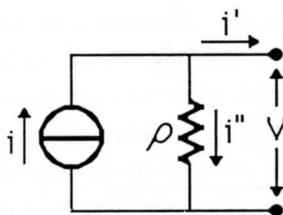


Fig.I.39

Si noti che si è parlato di una certa ddp ai morsetti e non del valore della resistenza su cui il generatore è chiuso, perché quest'ultimo caso sarebbe stato assai particolare, rispetto al caso generale in cui il generatore fa parte di una rete attiva, nella quale cioè agiranno altri generatori e non saranno presenti solo resistenze .

Non è difficile rendersi conto della perfetta dualità del comportamento dei generatori di tensione e di corrente rispetto alle loro resistenze in serie e in parallelo rispettivamente. In particolare si noti che la corrente erogata da un generatore reale di corrente coincide con quella del corrispondente elemento ideale quando il carico è tale che la ddp ai suoi terminali è nulla; “dualmente” un generatore di fem reale presenta la fem del generatore ideale associato quando la corrente che lo attraversa è nulla.

Esiste inoltre una equivalenza fra generatori reali di corrente e generatori reali di tensione; ovvero, dato un certo generatore reale di tensione  $(\mathcal{E}, \rho)$  (Fig.40) si può far vedere che esso è equivalente a un generatore reale di corrente  $i = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$  con in parallelo una resistenza  $\rho$ . Precisiamo innanzitutto la formulazione di equivalenza di due reti: *due reti sono equivalenti con riferimento ad un numero qualunque di terminali se un insieme di tensioni applicate a questi terminali (o un insieme di cor-*

renti inviate in questi terminali) produce in entrambe le reti il medesimo insieme di correnti (o il medesimo insieme di tensioni).

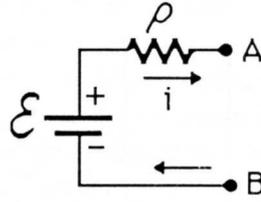


Fig.I.40

Supponiamo quindi che il generatore di tensione eroghi una corrente  $i$ ; fra i suoi morsetti avremo allora:

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - i\rho \quad (\text{I.87})$$

Se abbiamo un generatore di corrente (Fig.41) per avere la stessa corrente in uscita  $i$  con la stessa ddp  $V_A - V_B$ , deve valere

$$i'' = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{\mathcal{E} - i\rho}{R} \quad (\text{I.88})$$

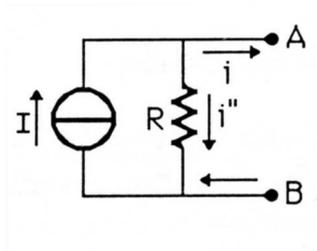


Fig.I.41

D'altronde è

$$I = i + i'' = i + \frac{V_A - V_B}{R} = i + \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{i\rho}{R} \quad (\text{I.89})$$

e affinché questa valga per ogni  $i$  deve essere:

$$R = \rho \quad I = \frac{\mathcal{E}}{\rho} \quad (\text{I.90})$$

Quest'ultimo risultato, che stabilisce in maniera quantitativa l'equivalenza fra generatori reali di fem e corrente, va sotto il nome di **Teorema di Norton**.

E' opportuno notare che un generatore quasi-ideale di corrente  $I$  si può abbastanza bene approssimare con un generatore di fem  $\mathcal{E}$  elevata con in serie una resistenza  $R$  anch'essa elevata, in modo che  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ ; ovviamente tale generatore funziona tanto meglio, cioè è tanto più vicino ad essere ideale, quanto più piccola, rispetto a  $\mathcal{E}$ , è la caduta di tensione  $V_A - V_B$  ai suoi terminali.

### 8.— Il teorema di Miller

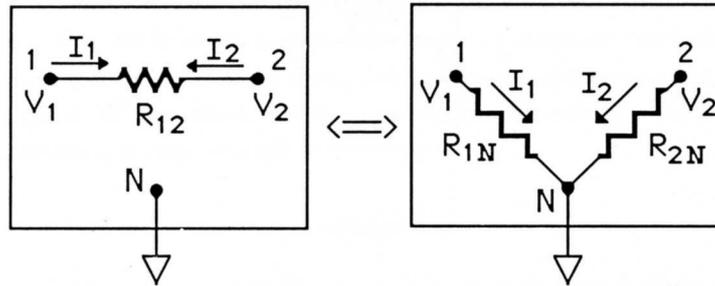


Fig.I.42

Consideriamo una rete lineare, passiva e bilaterale e definiamo le tensioni dei vari nodi (rappresentati in Fig.42) rispetto a un nodo di riferimento  $N^*$ . Siano  $V_1$  e  $V_2$  le tensioni di due nodi della rete e sia  $R_{12}$  la resistenza fra di essi. Il teorema di Miller stabilisce quali devono essere le resistenze  $R_{1N}$  e  $R_{2N}$  che, collegate fra i nodi 1 e N e 2 e N (e tolta la resistenza  $R_{12}$ ), rendono la rete equivalente a quella con  $R_{12}$ .

Detto  $k = \frac{V_2}{V_1}$  il rapporto fra le due ddp, abbiamo

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_{12}} = \frac{V_1(1 - k)}{R_{12}} = \frac{V_1}{\frac{R_{12}}{1 - k}} \quad (\text{I.91})$$

ed inoltre

$$I_2 = -I_1 = \frac{-V_2(\frac{1}{k} - 1)}{R_{12}} = \frac{V_2}{R_{12} \cdot \frac{k}{k - 1}} \quad (\text{I.92})$$

Si vede così che la presenza di due resistenze

$$R_{1N} = \frac{R_{12}}{1 - k} \quad (\text{I.93})$$

e

$$R_{2N} = \frac{R_{12}k}{k - 1} \quad (\text{I.94})$$

fra i nodi 1 e 2 e quello di riferimento N, equivale alla presenza del collegamento diretto 1-2. Come caso particolare, ma come vedremo molto più avanti assai importante dal punto di vista pratico, supponiamo che  $|k| \gg 1$  con  $k < 0$ . Abbiamo così  $R_{1N} \ll R_{12}$  e  $R_{2N} \simeq R_{12}$ .

Dal teorema di Miller, limitandoci al caso di una rete costituita di sole resistenze e generatori di fem o corrente costanti, si vede che per  $k > 0$ , non è possibile trovare una rete equivalente fatta come detto sopra: infatti essa comporterebbe (vedi (93) e (94)) l'esistenza di una resistenza negativa.

\* Il simbolo  $\nabla$  è quello che generalmente si usa per il nodo di riferimento per la misura delle tensioni ("comune"); spesso, ma non sempre, tale nodo è collegato alla terra e in questo caso si parla di nodo o terminale di "terra" o di "massa"; il simbolo che adotteremo per il terminale di terra è il seguente:  $\nabla$ .

Fisicamente questa impossibilità nello stabilire l'equivalenza deriva dal fatto che se  $k > 0$ , le tensioni  $V_1$  e  $V_2$  hanno sempre lo stesso segno e pertanto nel circuito equivalente secondo Miller non si riesce -a meno di non introdurre appunto resistenze negative- a riprodurre, come si deve, una corrente entrante in un nodo e uscente dall'altro.

Tornando al caso in cui è possibile stabilire l'equivalenza ( $k < 0$ ), si noti che le due reti sono del tutto equivalenti in quanto le tensioni dei terminali sono le stesse in entrambi i casi e così le correnti entranti (o uscenti) da tutti i nodi; infatti  $I_1 = -I_2$ , per cui anche nel nodo N la corrente complessiva resta inalterata.

## 9.— Potenza nei circuiti elettrici

Abbiamo già visto che il campo elettrostatico nello spostare una carica  $q$  da un punto A a un punto B compie un lavoro indipendente dal cammino e pari a  $q(V_A - V_B)$ . Pertanto se consideriamo un conduttore qualsiasi (non necessariamente ohmico) ai capi del quale sia presente una ddp  $V$  e nel quale scorra una corrente costante  $i$ , il lavoro infinitesimo  $d\mathcal{L}$  fatto sulla carica  $dq$  che attraversa il conduttore in un tempuscolo  $dt$  vale

$$d\mathcal{L} = dqV \quad (I.95)$$

e pertanto

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = iV \quad (I.96)$$

cioè la potenza istantanea associata al campo elettrico è misurata dal prodotto  $iV$ .

Quando la corrente è stazionaria e non si ottiene lavoro meccanico dal sistema, né si hanno alterazioni permanenti nel circuito e nell'ambiente, tale lavoro si deve poter ritrovare tutto sotto forma di energia termica. Tale fenomeno va sotto il nome di *effetto Joule*.

Nel caso che il conduttore sia ohmico e che esista un termostato al quale il conduttore cede la quantità di calore, cosicché  $R$  resti costante, allora vale  $I = \frac{V}{R}$  e la potenza istantanea associata al campo elettrico potrà esprimersi anche come

$$W = iV = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (I.97)$$

e la quantità di calore, espressa in Joule, prodotta per unità di tempo, sarà anch'essa data da  $W = i^2 R = \frac{V^2}{R}$ .

Noi abbiamo ipotizzato che tale quantità di calore venga ceduta a un termostato verso il quale  $R$  presenti una piccola resistenza termica; di fatto tale resistenza termica sarà piccola ma non zero per cui il resistore vedrà aumentare la propria temperatura e parte dell'energia fornita dal generatore andrà ad aumentare l'energia interna del resistore; il conseguente aumento di temperatura modificherà - almeno in linea di principio - il valore  $R$  della resistenza.

La trasformazione da energia potenziale delle cariche a loro energia cinetica e poi a energia interna, avviene nel metallo tramite il seguente meccanismo: gli elettroni fra un urto e l'altro acquistano una energia cinetica pari alla differenza di potenziale attraversata e durante l'urto la cedono agli ioni del reticolo; questi ultimi aumentano di conseguenza l'ampiezza delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio e macroscopicamente ciò corrisponde all'aumento della temperatura.

Poiché in genere i resistori vengono utilizzati in aria, la temperatura del resistore aumenterà durante il passaggio della corrente ed esiste quindi un limite alla corrente massima che può circolare

in esso; per l' utilizzo in aria di un dato resistore è in genere indicato il cosiddetto “wattaggio” cioè la potenza massima che si può dissipare sul resistore, prima che intervengano alterazioni permanenti nel valore della resistenza. Se poi si tratta di una resistenza campione o comunque ad alta stabilità (in funzione della temperatura) la definizione del wattaggio riguarda anche il fatto che le caratteristiche di precisione restano valide entro un certo ambito di temperatura; equivalentemente, invece del wattaggio, si può indicare la tensione massima ai capi del resistore o la corrente massima attraverso di esso e talvolta questi sono i parametri effettivamente forniti. In base a quanto detto sopra, il wattaggio si riferisce all' utilizzo del resistore in aria, a temperatura ambiente; se il resistore è accoppiato termicamente con un sistema che migliori la rimozione del calore in esso prodotto, il resistore potrà essere utilizzato anche oltre i limiti del wattaggio previsto in aria.

Nel caso di un circuito composto da un generatore chiuso su una resistenza, la potenza totale dissipata sotto forma di calore è data da  $i^2 R$  dove  $R$  è la somma della resistenza interna del generatore più la resistenza del circuito esterno  $R = \rho + R_{ext}$  (Fig.43). Tale potenza coincide

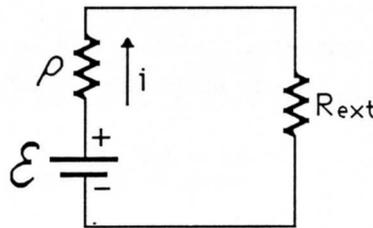


Fig.I.43

con il lavoro per unità di tempo fatto dal generatore: infatti per la seconda legge di Kirchhoff

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\rho + R_{ext}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

e pertanto

$$i^2 \cdot R = \mathcal{E} \cdot i \quad (\text{I.98})$$

La potenza  $\mathcal{E} \cdot i$  rappresenta proprio il lavoro per unità di tempo fatto dal generatore: infatti (vedi (21)), abbiamo già mostrato che la fem  $\mathcal{E}$  coincide col lavoro complessivo fatto dal generatore sulla carica unitaria, ovvero che il campo elettrico conservativo necessariamente compie un lavoro complessivamente nullo (positivo all'esterno del generatore, negativo al suo interno) e che l'unica forza che fa lavoro è quella del campo del generatore. La (98) ci suggerisce che la massima potenza che un generatore può erogare è data da  $\mathcal{E} \cdot i_{max}$  dove  $i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$  ( $R_{ext} = 0$ ). Così avremo:

$$W_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{\rho} \quad (\text{I.99})$$

In queste condizioni tutta la potenza finisce in calore dissipato all'interno del generatore medesimo. Quasi sempre ha interesse, viceversa, poter disporre di potenza sul carico. Detta  $W_{ext} = i^2 \cdot R_{ext}$  tale potenza, guardiamo quando questa è massima (in funzione di  $R_{ext}$ ):

$$W_{ext} = i^2 \cdot R_{ext} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_{ext} + \rho)^2} \cdot R_{ext} \quad (\text{I.100})$$

Imponendo che  $\frac{\partial W_{ext}}{\partial R_{ext}} = 0$  si trova

$$R_{ext} = \rho \quad (\text{I.101})$$

cioè il massimo trasferimento di potenza dal generatore al carico si ha quando la resistenza del carico è uguale alla resistenza interna del generatore. In questo caso la potenza erogata dal generatore vale (vedi (98) e (101))

$$\mathcal{E} \cdot \frac{\mathcal{E}}{2\rho} = \frac{W_{max}}{2} \quad (\text{I.102})$$

cioè metà di quella massima possibile.

La conclusione alla quale si è giunti è generale e non dipende dal fatto che il carico sia una resistenza, o un altro tipo di conduttore non ohmico. Infatti, detta  $V$  la caduta di tensione sul collegamento esterno (Fig.44) abbiamo, per la seconda legge di Kirchhoff, applicata senza esplicitare la ddp  $V$  sotto forma di caduta:

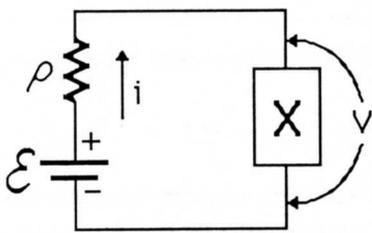


Fig.I.44

$$i = \frac{\mathcal{E} - V}{\rho} \quad (\text{I.103})$$

e pertanto il lavoro fatto per unità di tempo dal generatore sul carico è dato da

$$W_{ext} = Vi = \frac{V\mathcal{E} - V^2}{\rho} \quad (\text{I.104})$$

Se si vuole massimizzare  $W_{ext}$  rispetto a  $V$  si trova

$$V = \frac{\mathcal{E}}{2} \quad (\text{I.105})$$

cui corrisponde la corrente  $i = \frac{\mathcal{E}}{2\rho}$  come precedentemente trovato.

Affinché questa ultima osservazione non sembri una pura speculazione e per mostrare come non sempre il lavoro fatto da un generatore finisce nel solo effetto Joule, consideriamo il caso in cui il generatore di fem  $\mathcal{E}$  (con resistenza interna  $\rho$ ) sia collegato ad un motore elettrico in corrente continua. Anticipando un risultato che sarà dimostrato e ampiamente discusso nel Cap.XX,§7, si trova che, con buona approssimazione, durante il suo movimento, il motore presenta fra i due morsetti A e B una ddp  $V_M$  (Fig.45)

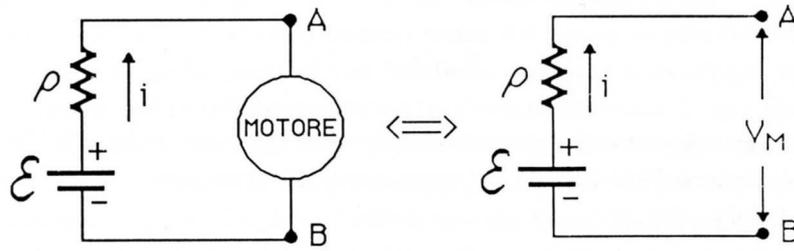


Fig.I.45

proporzionale alla velocità angolare del suo albero  $\omega$  e che la coppia meccanica  $\tau$ , che il motore è in grado di sviluppare, è proporzionale alla corrente che passa nel suo avvolgimento, ovvero  $i$ . Più precisamente, trascurando la resistenza ohmica dell'avvolgimento del motore rispetto a  $\rho$ , si trova:

$$\begin{cases} V_M = \omega \cdot G \\ \tau = i \cdot G \end{cases} \quad (\text{I.106})$$

con  $G$  costante. Dalle (106) si ricava per la potenza meccanica

$$W_{Mec} = \tau \cdot \omega = V_M \cdot i \quad (\text{I.107})$$

ovvero in questo caso la potenza elettrica erogata dal generatore sul carico esterno (il motore) va tutta in potenza meccanica. La (105) ci assicura anche che tale trasferimento sarà massimo quando  $V_M = \frac{\mathcal{E}}{2}$ .

Tornando al caso generale di un carico qualsivoglia, è opportuno notare che quanto più è piccola la resistenza interna del generatore, tanto più grande sarà la potenza massima trasferibile, poiché, a parità di tensione sul carico ( $\frac{\mathcal{E}}{2}$ ), tanto maggiore sarà la corrente ( $\frac{\mathcal{E}}{2\rho}$ ).

Procedendo in maniera analoga o sfruttando l'equivalenza fra generatori di fem e di corrente, nel caso di un generatore di corrente  $i$  si trova che il massimo trasferimento di potenza verso il carico si ha quando la ddp  $V$  sul carico è pari a  $\frac{i\rho}{2}$ , cioè anche in questo caso quando la potenza si equipartisce fra generatore e carico.

## 10.— Un esempio di massimizzazione di trasferimento di potenza

Supponiamo di disporre di  $n$  generatori di fem tutti uguali fra loro, caratterizzati ognuno da una certa fem  $\epsilon$  e resistenza interna  $\rho$  e sia dato un certo carico  $R$  al quale vogliamo trasferire la massima potenza possibile da parte dei generatori. Quale è la configurazione in cui disporre i generatori allo scopo di massimizzare la potenza trasferita al circuito esterno, ovvero -essendo fissata  $R$ - allo scopo di rendere massima la corrente  $I$  che circolerà in  $R$ ? Riprendendo un risultato trovato nel paragrafo precedente, osserviamo che se un generatore ( $\epsilon, \rho$ ) eroga una corrente pari a  $\frac{\epsilon}{2\rho}$ , ciò significa che il generatore sta trasferendo al circuito esterno la massima potenza possibile. Nel nostro caso di  $n$  generatori, se riusciamo a montare i generatori in modo che ognuno eroghi la corrente  $\frac{\epsilon}{2\rho}$ , siamo quindi nelle condizioni in cui il massimo trasferimento di potenza su  $R$  ( $W_M = \frac{\epsilon^2}{4\rho} \cdot n$ ) può

avvenire. Supponiamo allora che ogni generatore eroghi questa corrente; allora le configurazioni per cui ciò può avvenire, sono esclusivamente serie di generatori in parallelo fra di loro con i generatori concordi; altri tipi di configurazione darebbero infatti luogo a dissimetrie fra i vari generatori, mentre la condizione di massimo trasferimento richiede che ogni generatore eroghi la stessa corrente  $\left(\frac{\epsilon}{2\rho}\right)$ , cioè ogni generatore deve essere esattamente nella stessa condizione di qualunque altro. Pertanto i gruppi di generatori in parallelo devono essere tutti costituiti dallo stesso numero  $n_p$  di generatori. Sia  $n_s$  il numero di questi gruppi posti in serie, ognuno di  $n_p$  generatori in parallelo (Fig.46).

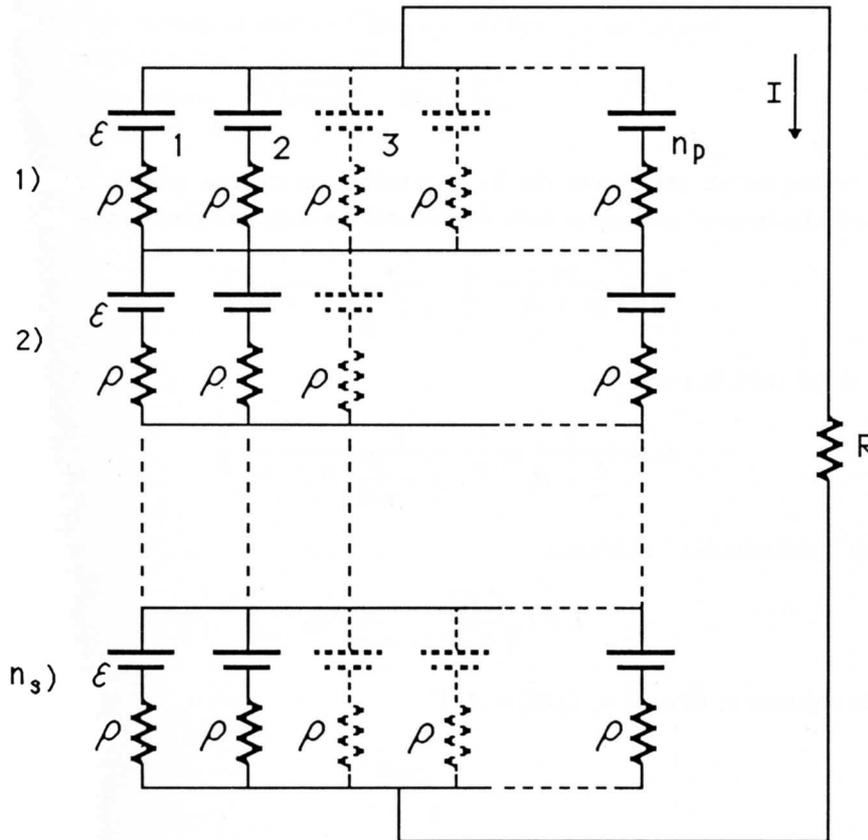


Fig.I.46

Dovrà quindi essere

$$n = n_s \cdot n_p \tag{I.108}$$

Il problema è trovare  $n_s$  (o  $n_p$ ). Nell'ipotesi che la corrente su  $R$  sia la massima possibile sappiamo già che essa varrà:

$$I = \sqrt{\frac{W_M}{R}} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 n}{4\rho R}} = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{n}{\rho R}} \tag{I.109}$$

In ogni generatore circolerà quindi una corrente data da  $\frac{I}{n_p}$  che a sua volta deve essere uguale a  $\frac{\epsilon}{2\rho}$ ; abbiamo così

$$\frac{\epsilon}{2\rho} = \frac{\epsilon}{2n_p} \sqrt{\frac{n}{\rho R}} \tag{I.110}$$

cioè

$$n_p = \sqrt{\frac{n\rho}{R}} \quad (\text{I.111})$$

e pertanto

$$n_s = \frac{n}{n_p} = \sqrt{\frac{nR}{\rho}} \quad (\text{I.112})$$

A questo punto possiamo calcolarci sia la fem complessiva  $\mathcal{E}$  di questo insieme di generatori che la resistenza  $\rho_T$  complessiva:

$$\mathcal{E} = n_s \epsilon = \sqrt{\frac{nR}{\rho}} \cdot \epsilon \quad (\text{I.113})$$

$$\rho_T = n_s \cdot \frac{\rho}{n_p} = \sqrt{\frac{nR}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\frac{n\rho}{R}}} = R \quad (\text{I.114})$$

Abbiamo cioè realizzato un generatore che ha una resistenza interna proprio uguale a quella del carico. Si osservi che se avessimo messo tutti i generatori in serie avremmo ottenuto

$$I_S = \frac{n\epsilon}{n\rho + R} = \frac{\epsilon}{R} \cdot \frac{n}{1 + \frac{n\rho}{R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{\rho} \quad (\text{I.115})$$

Se li avessimo messi tutti in parallelo

$$I_P = \frac{\epsilon}{\frac{\rho}{n} + R} = \frac{\epsilon}{R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho}{nR}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{R} \quad (\text{I.116})$$

Nel nostro caso “ottimizzato” abbiamo:

$$I = \epsilon \sqrt{\frac{n}{4\rho R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{I.117})$$

Riprendendo le espressioni di  $n_s$  e  $n_p$  (112) e (111)

$$n_s = \sqrt{\frac{nR}{\rho}}$$

$$n_p = \sqrt{\frac{n\rho}{R}}$$

si vede che se  $\rho \ll R$  conviene fare una serie di molti gruppi ognuno costituiti di pochi generatori in parallelo e viceversa se  $R \gg \rho$ . Quando  $R = \rho$  allora il numero di generatori che compongono ogni singolo parallelo deve essere uguale al numero dei gruppi che compongono la serie.

Il caso ora considerato non è puramente speculativo: in una centrale elettrica con  $n$  celle fotovoltaiche ( $n$  davvero assai grande) si presenta un problema analogo a quello sopra esposto, essendo  $R$  il carico costituito dalle utenze della centrale.

## NOTA BIBLIOGRAFICA

Per i concetti fondamentali dell'elettrostatica si possono consultare **FR 71**, **FE 63**, **PA 62**, **JA 75**. Una trattazione dettagliata (spesso un po' formale) delle reti lineari si può trovare su **FR 59** e

**AL 60**, **DE 69** e **SC 87** sono fra i testi più completi ed esaurienti sull'argomento delle reti lineari. Il Cap.3 di **FR 71** è una ottima introduzione allo studio del moto delle cariche elettriche. Per le proprietà dei conduttori si veda il Cap.4 di **FR 71** e il Cap.1 di **MI 72**; in entrambi i casi si tratta di esposizioni di fenomenologia che non entrano in eccessivi dettagli di struttura della materia, ma consentono di cogliere i fatti fisici fondamentali.

Se si vuole approfondire il problema del campo elettrico nei conduttori percorsi da corrente e della carica elettrica superficiale responsabile del campo medesimo, si veda ad esempio:

- a) Seely: "Introduction to Electromagnetic Fields"  
International Student Ed. (1958)  
Sect. 5.5.
- b) Rosser: "Magnitude of surface Charge Distributions associated  
with Electron Current Flow"  
Am. Journ. of Phys. **38** (1970), **265**  
e articoli qui citati.

## II

# IL GALVANOMETRO DI DEPREZ - D'ARSONVAL

### 1.— *Interazione fra corrente elettrica e campo di induzione magnetica*

In questo capitolo studieremo il principio di funzionamento e le caratteristiche costruttive del *Galvanometro di Deprez- d'Arsonval*; troveremo che quando fra i due terminali, di cui lo strumento è dotato, passa una corrente  $i$ , è osservabile lo spostamento di un indice, proporzionale alla corrente  $i$  medesima. Il galvanometro di Deprez-d'Arsonval (nel seguito semplicemente: *galvanometro*) è pertanto un misuratore di corrente; esso è stato, a partire dal secolo scorso fino a qualche decennio fa, *lo strumento base* di quasi tutte le misure elettriche.

Per studiare il funzionamento del galvanometro bisogna innanzitutto ricordare la 2<sup>a</sup> legge di Laplace: essa stabilisce che fra la corrente e il campo di induzione magnetica esiste una interazione, secondo la quale l'elemento  $d\vec{l}$  del conduttore filiforme percorso da una corrente  $i$  è sottoposto ad una forza pari a

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.1})$$

dove  $\vec{B}$  è il campo di induzione magnetica nel punto ove si considera il  $d\vec{l}$ ;  $d\vec{l}$  ha direzione e verso uguale a quello dei portatori di carica positivi che danno luogo alla corrente  $i$  (o *darebbero* se i portatori sono negativi). Da richiamare è anche la legge di Faraday sull'induzione: se il flusso del vettore induzione magnetica  $\Phi_S(\vec{B}) = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$  attraverso una qualunque superficie  $S$  che si appoggi ad una maglia di un circuito varia nel tempo, allora nella maglia del circuito si genera una fem

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Si noti che questa fem, in genere, dipende dal tempo; ammettiamo che, nonostante ciò, si possano ancora applicare le leggi di Kirchhoff. Più avanti vedremo che questo è legittimo qualora le variazioni di  $\mathcal{E}$  si svolgano con tempi caratteristici molto maggiori del rapporto fra le dimensioni del circuito e la velocità della luce; in tutti i casi che affronteremo in questo corso, tale condizione sarà sempre ampiamente verificata.

## 2.- Principio di funzionamento del galvanometro: Statica

Il principio di funzionamento del galvanometro è illustrato con riferimento alla Fig.1: una bobina B di sottile filo di rame smaltato è

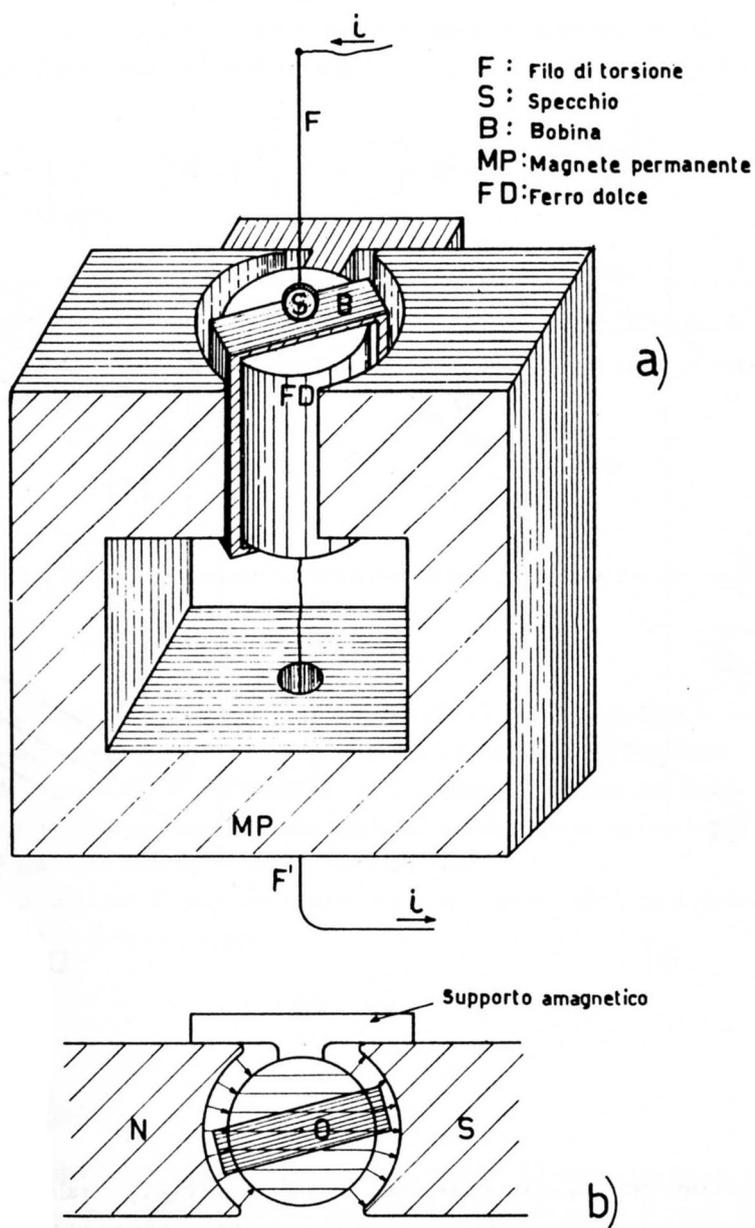


Fig.II.1

avvolta su un rocchetto sospeso ad un filo F che presenta elasticità di torsione. Il filo di torsione e un ulteriore filo F', che non presenta viceversa alcuna particolare elasticità, portano corrente alla bobina. La bobina, sospesa in modo che l'asse di rotazione sia un asse principale di inerzia baricentrico, si muove nel breve spazio fra le espansioni polari di un magnete permanente MP e un

nucleo centrale di ferro dolce FD, mantenuto in una posizione fissa rispetto al magnete tramite un supporto amagnetico. Questa struttura fa sì che il campo nel sottile traferro sia elevato (ordine di grandezza  $10^{-1}T$ ) e diretto radialmente (verso il centro O, vedi Fig.1b); inoltre, data la simmetria, il campo è costante in modulo nel traferro, su una circonferenza di centro O. S è uno specchietto solidale con la bobina, la cui funzione sarà spiegata più avanti.

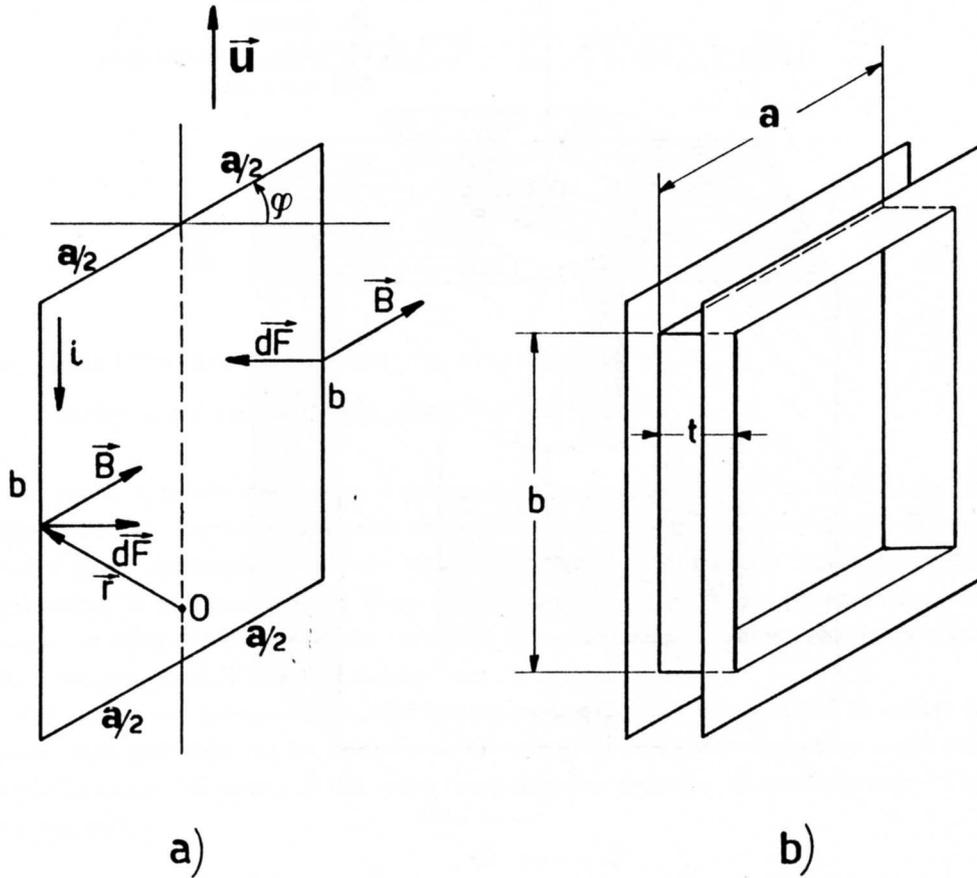


Fig.II.2

Consideriamo ora una spira qualunque della bobina (Fig.2) e tralasciamo di disegnare la struttura del circuito magnetico; sulla spira, punto per punto, agisce una forza che se secondo la (1) vale:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

essendo  $i$  la corrente che circola nella spira. Da quanto detto sopra, il campo  $\vec{B}$  nei tratti lunghi  $b$  è diretto ortogonalmente a  $i$  e giace sul piano della spira (stiamo trascurando cioè lo spessore  $t$  della bobina (vedi Fig.2b) ove è disegnato il rocchetto); pertanto le forze sono dirette ortogonalmente al piano della bobina e da parti opposte nei due tratti, come in figura. Quanto ai tratti lunghi  $a$ , il

campo  $\vec{B}$  giace ancora sul piano della spira, pur con una componente non nulla diretta lungo il filo (che però non dà contributo alla forza); la simmetria della struttura continua ad assicurare l'assenza di componenti di  $\vec{B}$  ortogonali al piano della spira. Pertanto anche i lati lunghi  $a$  contribuiscono con forze perpendicolari al piano della spira. A causa della struttura del circuito magnetico, nei tratti lunghi  $a$  il campo di induzione è certamente molto più debole che non nei tratti lunghi  $b$ ; pertanto in prima approssimazione trascuriamo queste forze, salvo poi tornare sull'argomento dopo aver trovato una soluzione approssimata per il momento assiale che agisce sulla bobina. Le forze che agiscono sui tratti lunghi  $b$  danno chiaramente risultante nulla, ma momento risultante diverso da zero. Calcoliamoci quindi il momento assiale di queste forze, essendo l'asse quello di sospensione:

$$\tau_u^{(a)} = \left[ \oint_{\text{spira}} \vec{r} \wedge (i\vec{dl} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{u} = - \oint_{\text{spira}} (\vec{r} \wedge \vec{u}) \cdot (i\vec{dl} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.3})$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore che unisce un punto O qualunque dell'asse con il  $\vec{dl}$  considerato e  $\vec{u}$  è il versore dell'asse. Si noti che per i tratti  $b$ ,  $\vec{r} \wedge \vec{u}$  rappresenta un vettore di modulo pari ad  $\frac{a}{2}$  e diretto antiparallelamente a  $d\vec{F} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$ . Inoltre in questi tratti della spira  $d\vec{F} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$  è un vettore di modulo  $iBdl$ . Dalla (3) si ha allora

$$\tau_u^{(a)} = \frac{iaB}{2} \int_{\text{tratti } b} dl = iabB \quad (\text{II.4})$$

Ponendo  $a \cdot b = S$ , superficie della spira, possiamo scrivere questo momento assiale come

$$\tau_u^{(a)} = iSB \quad (\text{II.5})$$

indipendente dall'angolo  $\varphi$  di rotazione della bobina attorno al suo asse di sospensione (vedi Fig.2a), purché  $\varphi$  sia tale che la bobina resti sempre confinata nella zona del traferro. Il momento che agisce su una singola spira è quindi proporzionale alla corrente che la percorre. Se avessimo considerato anche le forze sui lati corti, avremmo trovato un contributo aggiuntivo al momento, anch'esso proporzionale ad  $i$  e positivo, ancorché assai più piccolo di quello ora calcolato.

Le spire in realtà sono assai più di una, diciamo  $n$ , e per ognuna di esse vale il risultato (5); sul complesso nella bobina agirà quindi una coppia:

$$\tau_i = inSB = iG \quad (\text{II.6})$$

con:

$$G = nSB \quad (\text{II.7})$$

Nel dedurre la (6) è stata introdotta una approssimazione, poiché abbiamo supposto che tutte le spire avessero esattamente la stessa geometria; tuttavia, anche tenendo conto di ciò e dell'altra approssimazione già discussa, possiamo dire che la proporzionalità fra momento e corrente è comunque preservata e tutt'al più la costante  $G$  ha un valore leggermente diverso da quello dell'espressione (6).

Se supponiamo ora che il nostro sistema sia all'equilibrio, cioè che una corrente  $i$  circoli nel galvanometro da un tempo indefinitamente lungo e che la coppia antagonista  $-E\varphi$  prodotta dal filo si opponga esattamente a  $iG$ , avremo  $\left( \sum_k \tau_{u_k}^{(a)} = 0 \right)$

$$E\varphi = inSB \quad (\text{II.8})$$

per cui:

$$i = \frac{E}{nSB} \varphi = \frac{E}{G} \varphi = K_r \varphi \quad (\text{II.9})$$

cioè la deflessione rispetto alla posizione di riposo  $\varphi = 0$  (ad esempio coincidente con la direzione Nord-Sud del campo di induzione nel nucleo di ferro dolce (vedi Fig.1b) è proporzionale alla corrente.  $K_r$  è detta *Costante reometrica* ed è tanto più piccola quanto più sensibile è il galvanometro. I valori della costante  $K_r$  variano, a seconda dei galvanometri, entro vasti limiti; come ordine di grandezza diciamo che essi possono arrivare –al minimo– fino a qualche  $10^{-6} \frac{A}{rad}$ .

Lo strumento ora descritto è caratterizzato da una meccanica di precisione, quindi è assai delicato e deve essere montato in bolla, su un piano orizzontale privo di vibrazioni, in modo che la bobina sia effettivamente libera di muoversi nel sottile traferro. Il problema di effettuare la lettura dello spostamento angolare senza disturbare l'equipaggio mobile è risolto, negli strumenti più sensibili, col sistema della leva ottica (*metodo di Pogendorf*): un proiettore P (Fig.3)

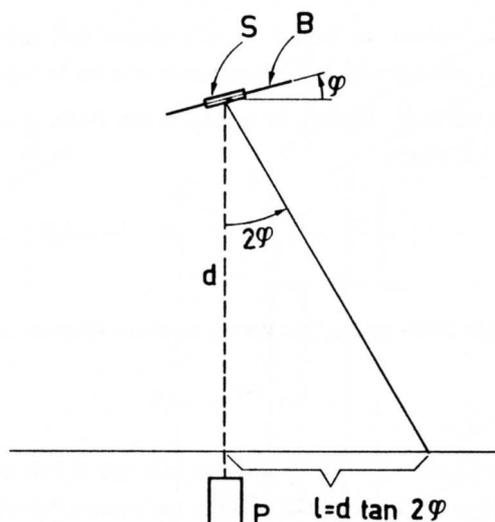


Fig.II.3

invia l'immagine di un crocifilo sullo specchio S solidale con la bobina B del galvanometro; la direzione del fascetto riflesso forma pertanto con la direzione di incidenza un angolo  $2\varphi$ , se  $\varphi$  è l'angolo di cui la bobina è ruotata rispetto alla posizione di riposo. La quantità che si misura è lo spostamento dell'immagine del crocifilo, riflessa sullo specchio, che si forma su una scala graduata posta a una distanza  $d$  dall'asse del galvanometro (generalmente la stessa del proiettore). Meglio di una scala lineare funzionerebbe una scala circolare con centro sull'asse della bobina, cosicché la relazione di proporzionalità fra corrente e spostamento risulterebbe valida su tutto il campo angolare. Nel caso di una scala lineare avremo invece:

$$l = d \tan 2\varphi \quad (\text{II.10})$$

e pertanto

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{l}{d} \quad (\text{II.11})$$

Per angoli piccoli la (10) può essere approssimata come

$$l = d \cdot 2\varphi \quad (\text{II.12})$$

e in questo caso è più comodo definire una costante reometrica  $k_r$ , nelle unità  $\frac{A}{[l]}$  anzichè  $\frac{A}{rad}$  in quanto la lunghezza è la quantità direttamente misurabile:

$$i = K_r \varphi = K_r \cdot \frac{l}{2d} = k_r l \quad (\text{II.13})$$

Qualora le elongazioni siano tali che non è più legittimo confondere l'angolo con la tangente, porremo

$$i = \frac{K_r}{2} \operatorname{atan} \frac{l}{d} = k_r d \operatorname{atan} \frac{l}{d} \quad (\text{II.14})$$

Tipici valori per  $d$  ed  $l$  possono essere  $d \simeq 1 \text{ m}$ ,  $l \simeq 0 \div 20 \text{ cm}$ , con  $k_r$  dell'ordine di  $10^{-9} \div 10^{-7} \frac{A}{mm}$ . Esistono anche versioni molto compatte di galvanometri da banco che in uno stesso contenitore hanno sia l'equipaggio mobile che il sistema di lettura a leva ottica con la scala già tarata in corrente: in laboratorio esistono strumenti di questo tipo ed hanno una sensibilità massima di  $100 \text{ nA/divisione}$ .

### 3.— Principio di funzionamento del galvanometro: Dinamica

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se in un galvanometro circola una corrente  $i$  e se il sistema è a regime, lo spostamento angolare dell'equipaggio è proporzionale alla corrente  $i$ . In questo paragrafo studiamo il problema di come il galvanometro raggiunge tale situazione di regime una volta che, partendo da condizioni di riposo, lo si inserisca nel circuito di misura. Tale problema ha interesse almeno da due punti di vista: *primo*, che se si vogliono ridurre i tempi di misura della corrente, occorre conoscere la dipendenza del moto del galvanometro dai parametri del circuito di misura in cui lo strumento è inserito; *secondo*, che la conoscenza della dinamica del galvanometro è fondamentale per applicazioni dove lo strumento è adoperato nella misura di carica (Cap.VI).

Da un punto di vista elettrico il galvanometro, almeno finché è a riposo, è assimilabile ad una resistenza, quella della bobina; pertanto, una volta che il galvanometro sia fermo, il circuito dove esso è inserito potrà *sempre* mettersi nella forma della Fig.4 dove  $i$  è la corrente che circola nel galvanometro (simbolo  $\odot$ ).

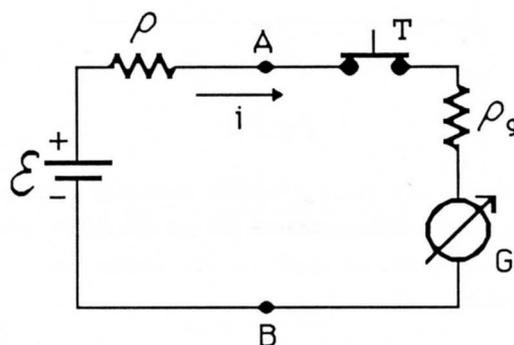


Fig.II.4

Il teorema di Thévenin ci assicura infatti che i due terminali A e B fra cui lo strumento viene inserito, potranno sempre schematizzarsi tramite il loro circuito equivalente. La resistenza  $\rho_g$  tiene

conto della resistenza dell'avvolgimento, mentre T rappresenta un tasto in grado di interrompere la corrente nel circuito. Nella Fig.4 T è rappresentato chiuso, cioè è equivalente a un corto circuito (resistenza 0) e nel circuito circola quindi una corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\rho + \rho_g} \quad (\text{II.15})$$

cui lo strumento risponde con una elongazione statica  $\varphi_s = \frac{i}{K_r}$  (vedi(9)). Supponiamo ora invece che il tasto T sia aperto da un tempo indefinitamente lungo: il galvanometro è allora a riposo nella posizione di equilibrio in quanto  $i = 0$ . Al tempo  $t = 0$  chiudiamo quindi il tasto T e studiamo il moto del sistema con le condizioni iniziali  $\varphi(0) = 0$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Per risolvere il problema in esame, ovvero del moto del galvanometro determinato da  $\varphi(t)$ , occorre individuare tutti i momenti assiali  $\tau_k$  agenti sulla bobina e porre:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} = \sum_k \tau_k \quad (\text{II.16})$$

dove  $\mathcal{J}$  è il momento di inerzia della bobina rispetto all'asse (che ricordiamo essere un asse principale di inerzia baricentrico).

Fra le coppie applicate sicuramente vi è la coppia di richiamo  $-E\varphi$ . Inoltre durante il moto agirà una coppia resistente dovuta allo smorzamento dell'aria; supponiamo che essa sia di tipo viscoso:  $-C\dot{\varphi}$ . Il generatore invia una corrente  $i = \frac{\mathcal{E}}{\rho + \rho_g}$  che, secondo la (6), dà luogo ad un momento assiale pari a  $Gi = nSBi$ . Esiste infine un altro termine che tiene conto del fatto accennato nel §1: poiché il flusso  $\Phi(\vec{B})$  tagliato dal circuito varia, sorge una forza elettromotrice  $\mathcal{E}_\phi = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ , in serie col generatore  $\mathcal{E}$  medesimo. Concludendo possiamo dire che il circuito in studio è quello di Fig.5.

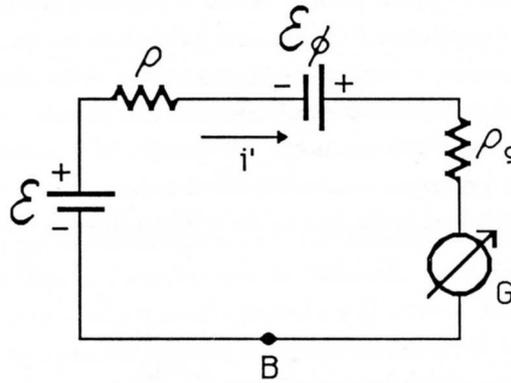


Fig.II.5

Poiché il tempo caratteristico con cui  $\mathcal{E}_\phi$  varia è dato dal periodo del galvanometro, cioè è dell'ordine di qualche secondo, ovvero estremamente più grande del rapporto fra le dimensioni tipiche del circuito e la velocità della luce, possiamo applicare alla nostra maglia la prima legge di Kirchhoff. La corrente istantanea nel circuito è allora data da

$$i' = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_\phi}{\rho + \rho_g} = i + i_\phi \quad (\text{II.17})$$

che dà pertanto luogo ad una coppia sulla bobina del galvanometro pari a (vedi (6)):

$$\tau_i = Gi + Gi_\phi \quad (\text{II.18})$$

La (17) è un'approssimazione –peraltro molto buona– di una espressione un po' più complicata che tiene in conto anche il cosiddetto *coefficiente di autoinduzione* della bobina (ma questo lo impareremo molto più avanti, nel Cap. XX, §6).

Se supponiamo ora che non esistano altre coppie applicate alla bobina, possiamo finalmente scrivere:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} = -E\varphi - C\dot{\varphi} + Gi + Gi_{\varphi} \quad (\text{II.19})$$

Per definire completamente il problema occorre ancora determinare  $\mathcal{E}_{\varphi}$  e poi, tramite la (17)  $i_{\varphi}$ . Consideriamo allora la bobina nel traferro, con riferimento ad una singola spira (Fig.6).

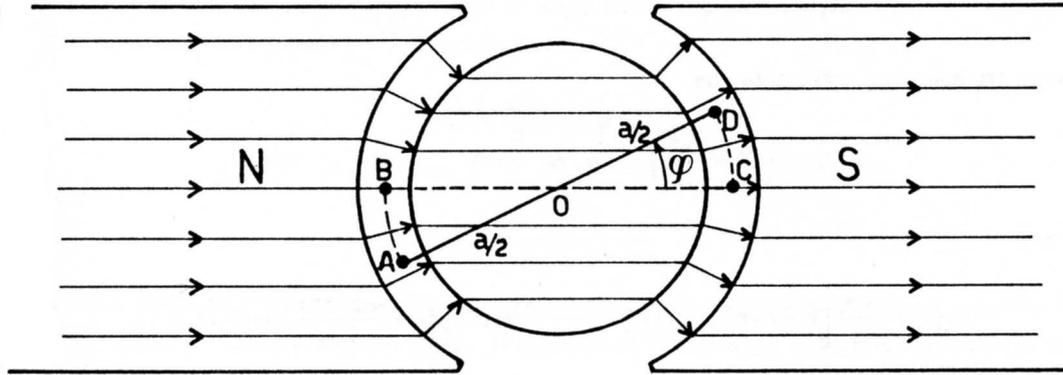


Fig.II.6

E' evidente dal disegno che il flusso di  $\vec{B}$  concatenato con la spira dipende da  $\varphi$ : per  $\varphi = 0$  esso è nullo e cresce all'aumentare di  $\varphi$ . Per calcolarlo in una generica posizione  $\varphi$ , possiamo ricorrere alla proprietà che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , ovvero che il vettore  $\vec{B}$  è solenoidale e pertanto il flusso attraverso un qualunque contorno non dipende dalla forma della superficie che si appoggia su di esso e che viene scelta per effettuare il calcolo. Come superficie che si appoggia alla spira scegliamo quindi quella tratteggiata in Fig.6 (in realtà nella figura se ne vede solo una sezione; la dimensione ortogonale al piano della figura è  $b$ ). Il flusso in ognuno dei tratti AB e CD, tenendo conto della dimensione normale al foglio, vale  $\frac{a}{2} \cdot b \cdot \varphi \cdot B$  (si ricordi che  $B = \text{cost}$  su circonferenze centrate in O e che la normale positiva ha la stessa orientazione rispetto a  $\vec{B}$  nei due tratti considerati), mentre il contributo nel tratto BC è nullo. Il segno positivo del flusso deriva dalla convenzione scelta per il verso della corrente (vedi Fig.2a) e per  $\varphi$ . Essendo  $n$  le spire:

$$\Phi(\vec{B}) = nSB\varphi = G\varphi \quad (\text{II.20})$$

e conseguentemente

$$\mathcal{E}_{\varphi} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -G\dot{\varphi} \quad (\text{II.21})$$

e per la (15) e la (17):

$$i_{\varphi} = -\frac{G\dot{\varphi}}{\rho + \rho_g} \quad (\text{II.22})$$

L'equazione che regola il moto può così mettersi nella forma definitiva ( $R = \rho + \rho_g$ ):

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(C + \frac{G^2}{R}\right)\dot{\varphi} + E\varphi = Gi \quad (\text{II.23})$$

Il termine dato dalla (22) dà, come lo smorzamento dell'aria, un contributo di tipo viscoso; esso è detto *smorzamento elettrodinamico* ed è tanto più efficace quanto più piccola è la resistenza totale  $R$  su cui è chiuso il galvanometro.

Per risolvere l'equazione differenziale (23), si trova prima la soluzione dell'equazione omogenea associata; la si somma poi a un integrale particolare, cioè la soluzione statica (8)  $\varphi_s = \frac{G}{E}i$  e infine, tramite le condizioni iniziali ( $\varphi(0) = 0$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ), si fissano le costanti arbitrarie introdotte nella soluzione omogenea. Senza entrare nei dettagli, posto:

$$\sigma_1 = \frac{\left(C + \frac{G^2}{R}\right)}{2\mathcal{J}} \quad e \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{\left|4E\mathcal{J} - \left(C + \frac{G^2}{R}\right)^2\right|}}{2\mathcal{J}} \quad (\text{II.24})$$

si trovano tre soluzioni a seconda che

$$\Delta = \left(C + \frac{G^2}{R}\right)^2 - 4\mathcal{J}E \quad > 0 \quad , \quad = 0 \quad , \quad < 0$$

I:  $\Delta > 0$

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E} \left[ 1 - \exp(-\sigma_1 t) \cdot \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_2} \exp(\sigma_2 t) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_2} \exp(-\sigma_2 t) \right) \right] \quad (\text{II.25})$$

II:  $\Delta = 0$

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E} [1 - \exp(-\sigma_1 t) \cdot (1 + \sigma_1 t)] \quad (\text{II.26})$$

III:  $\Delta < 0$

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E} \left[ 1 - \exp(-\sigma_1 t) \cdot \left( \cos \sigma_2 t + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t \right) \right] \quad (\text{II.27})$$

I tre tipi di moto sono detti *sottocritico*, *critico*, *sovra-critico* e corrispondono agli andamenti di Fig.7.

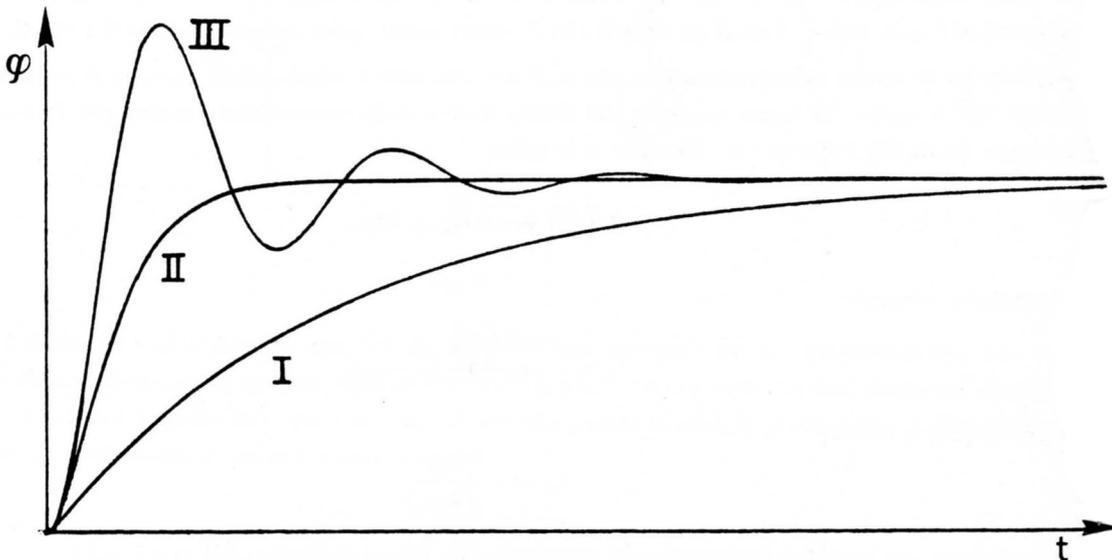


Fig.II.7

Nel primo tipo di moto (I) lo smorzamento elettrodinamico è così forte che non si osserva alcun carattere oscillatorio del moto; tale carattere è viceversa evidente nel moto sovracritico (III). Il moto critico (II) è anch'esso non oscillatorio ma  $\varphi(t)$  si "avvicina" all'asintoto in un tempo inferiore rispetto agli altri due casi. La resistenza  $R = R_c$  per cui si ha il moto critico è detta *Resistenza critica* ( $R_c - \rho_g$  è detta *Resistenza critica esterna*).

In genere si cerca di lavorare con galvanometri che siano chiusi su una resistenza totale pari a quella critica in modo da avere tempi di risposta i più brevi possibile. In realtà, tenendo conto del fatto che la lettura può farsi anche quando la bobina oscilla intorno al valore asintotico, purchè con una ampiezza sufficientemente piccola, conviene lavorare in condizioni leggermente sovracritiche. Quanto all'espressione della resistenza critica  $R_c$  in funzione dei parametri del galvanometro, essa si può ottenere in base alla relazione che la definisce:

$$C + \frac{G^2}{R_c} = 2\sqrt{E\mathcal{J}} \quad (\text{II.28})$$

ottenendo:

$$R_c = \frac{G^2}{2\sqrt{E\mathcal{J}} - C} \quad (\text{II.29})$$

I valori della resistenza critica possono variare grandemente (da pochi  $\Omega$  fino a qualche  $k\Omega$ ), a seconda di come è realizzato lo strumento. Il periodo di oscillazione del galvanometro (in assenza di smorzamento) vale  $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{E}}$  e valori abbastanza tipici sono di qualche secondo. In presenza di smorzamento  $\omega = \sigma_2 = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{(C + \frac{G^2}{R})^2}{4\mathcal{J}^2}}$  e quindi è leggermente più piccola di  $\omega_o$ ; corrispondentemente il periodo cresce, seppur moderatamente. Nelle Figg.8 e 9 è riportato in grafico  $\varphi = \varphi(t)$  in funzione del tempo e in funzione del parametro  $\log \frac{R}{R_c}$ . Si è ammesso che sia presente uno smorzamento dell'aria realistico. Le due figure differiscono solo per la scala dei tempi e il campo di variazioni di  $R$ . Il periodo è stato assunto essere  $T = 6.3$  s.

#### 4.— *Resistenza interna e costante reometrica* *Sensibilità amperometrica e voltmetrica*

Supponiamo di progettare un galvanometro e di volere massimizzare la sensibilità, vale a dire la deflessione angolare  $\varphi$  dell'equipaggio mobile, a parità di *eccitazione*; la dipendenza di  $K_r = E/nSB$  dai vari parametri ci dice che conviene fare  $B$  il più grande possibile ed  $E$  la più piccola, compatibilmente con la massa dell'equipaggio, che deve essere comunque sorretto dal filo. La superficie  $S$  della bobina risulta determinata dalle dimensioni del circuito magnetico;  $S$  e la dimensione del traferro determinano in maniera pressoché rigida le dimensioni del rocchetto e quindi la quantità totale di rame dell'avvolgimento.

## GALVANOMETRO

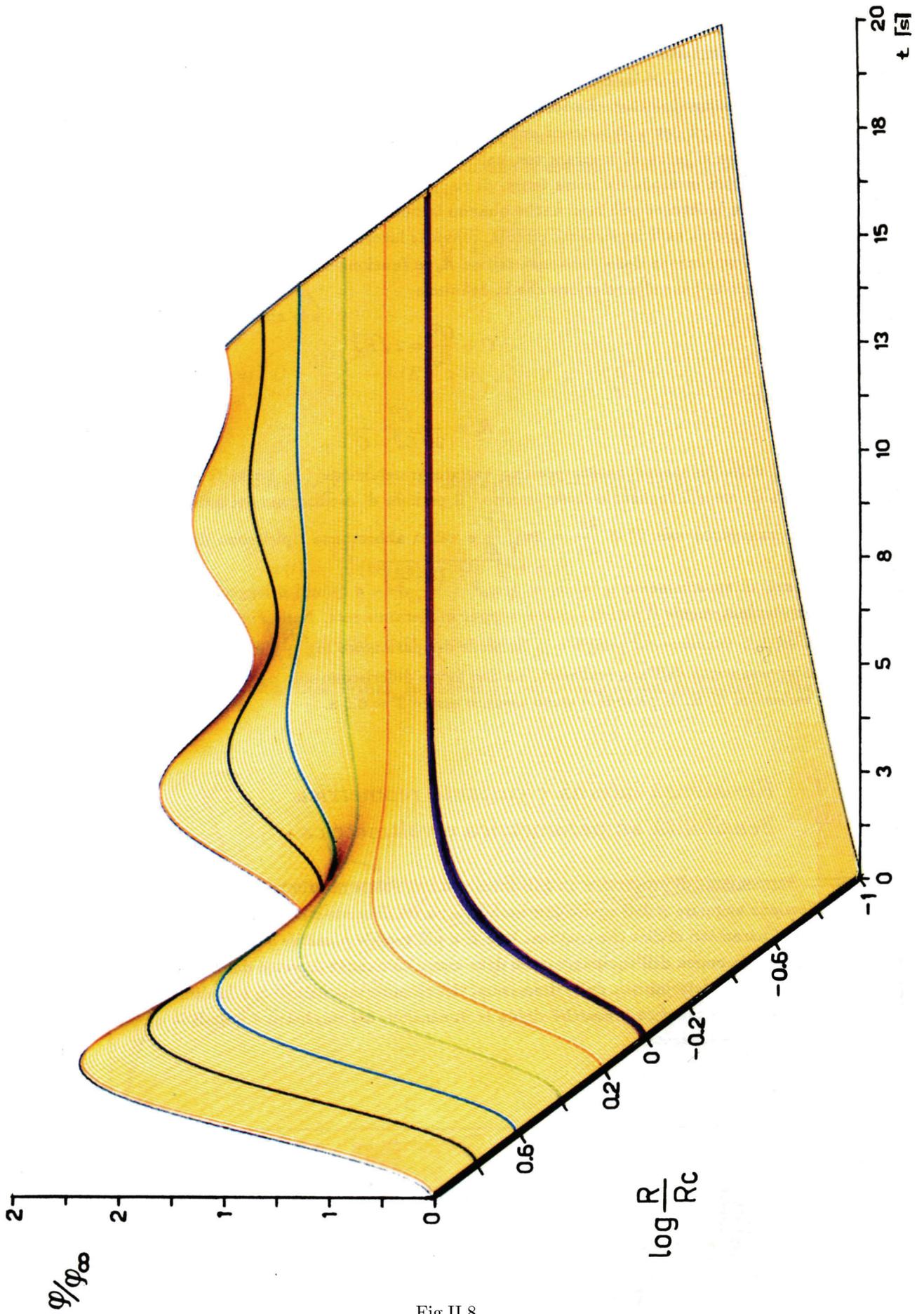


Fig.II.8

GALVANOMETRO

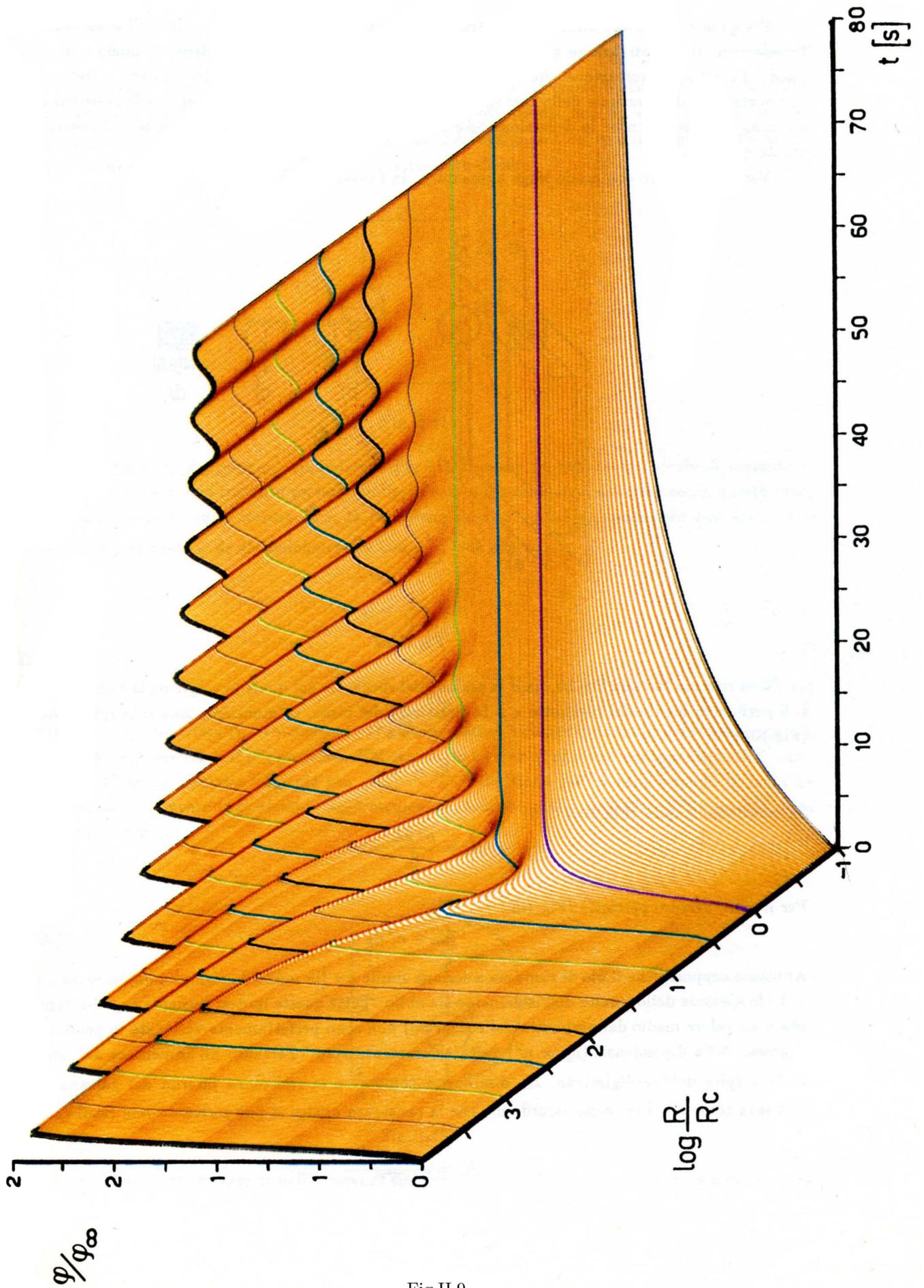


Fig.II.9

Per quanto riguarda l'ultimo parametro da fissare, ovvero il numero delle spire dell'avvolgimento, l'operazione di ottimizzazione non è univoca, ovvero dipende dall'utilizzo dello strumento, precisamente dal tipo di *eccitazione* che stiamo considerando; infatti l'aumento del numero  $n$  delle spire comporta sì la diminuzione della costante reometrica  $K_r$ , ma anche l'aumento della resistenza interna  $\rho_g$  dello strumento: la deflessione angolare, in linea di principio, può dipendere da entrambe queste quantità.

Vediamo intanto con quale legge aumenta  $\rho_g$  in funzione di  $n$ .

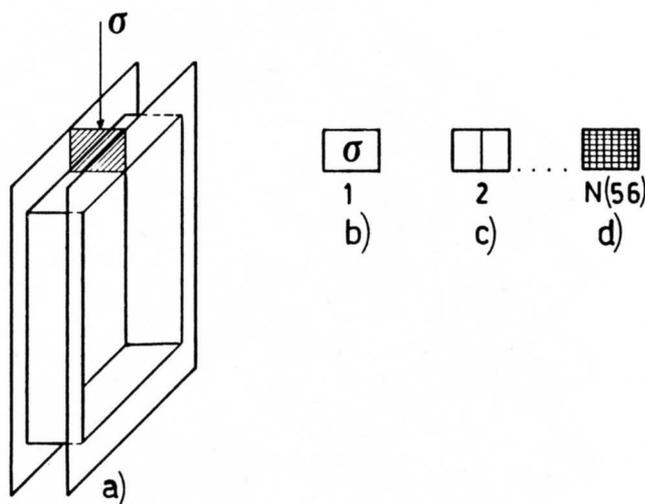


Fig.II.10

Con riferimento alla Fig.10, sia  $\sigma$  la sezione del rocchetto sul quale avvolgiamo la bobina. Detto  $L$  il perimetro medio del rocchetto e  $\rho$  la resistività del rame, se montiamo una sola spira avremo (Fig.10b)

$$R_1 = \frac{\rho \cdot L}{\sigma} \quad (\text{II.30})$$

Se montiamo 2 spire (Fig.10c)

$$R_2 = \frac{\rho \cdot 2L}{\frac{\sigma}{2}} = 4R_1 \quad (\text{II.31})$$

Per  $n$  spire avremo pertanto (Fig.10d)

$$R_n = n^2 R_1 \quad (\text{II.32})$$

Abbiamo supposto che il filo di rame sia a sezione simile a  $\sigma$  (in modo da riempire uniformemente  $\sigma$ ) e che lo spessore dello smalto dell'isolamento sia nullo. Tutte queste ipotesi (insieme a quella di poter usare un valore medio del perimetro del rocchetto) non sono perfettamente verificate in pratica, ma il grosso della dipendenza ( $\rho_g \propto n^2$ ) resta sicuramente vero. Pertanto all'aumentare del numero  $n$  delle spire dell'avvolgimento,  $K_r$  diminuisce come  $\frac{1}{n}$  e la resistenza interna del galvanometro aumenta come  $n^2$ . Per inciso ricordiamo che la resistenza critica si può scrivere come (vedi (29)):

$$R_c = \frac{G^2}{2\sqrt{E\mathcal{J}} - C}$$

e pertanto

$$R_c = kn^2 \propto \rho_g \quad (\text{II.33})$$

cioè la resistenza critica aumenta come la resistenza interna, al crescere del numero delle spire. Guardiamo ora quali sono le conseguenze degli andamenti trovati per  $K_r$  e per  $\rho_g$  nei riguardi della massimizzazione della sensibilità, considerando il galvanometro nei suoi impieghi caratteristici: misuratore di corrente, misuratore di tensione, rivelatore di zero.

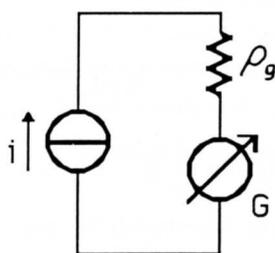


Fig.II.11

Misuratore di corrente: supponiamo (Fig.11) di avere un generatore ideale di corrente  $i$ , ovvero di disporre di una corrente costante indipendente dalla resistenza del circuito; in questo caso, se vogliamo ottimizzare la misura di  $i$ , la resistenza interna  $\rho_g$  del galvanometro non ha alcuna importanza e l'angolo  $\varphi$  di deflessione cresce con  $\frac{1}{K_r}$ , cioè con  $n$ :

$$\varphi = \frac{1}{K_r} i \propto n \quad (\text{II.34})$$

Detta

$$S_A = \frac{\partial \varphi}{\partial i_g} \quad (\text{II.35})$$

*Sensibilità amperometrica* ( $i_g = i$  corrente nel galvanometro), si trova quindi che essa cresce con  $n$  e conviene quindi crescere  $n$  il più possibile. Nel caso attuale, cioè di uno strumento a risposta lineare, la sensibilità amperometrica coincide con  $(K_r)^{-1}$ . La definizione (35) è utile quando la scala ha una risposta non lineare (per esempio negli strumenti elettrodinamici, vedi Cap.XI), funzione della corrente medesima.

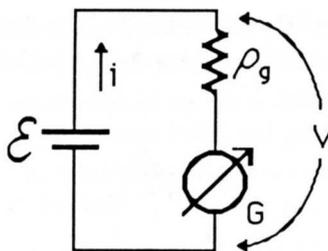


Fig.II.12

**Misuratore di tensione:** nell'ipotesi di disporre (Fig.12) di un generatore ideale di tensione  $\mathcal{E}$ , se vogliamo ottimizzare la misura di  $\mathcal{E} = i \cdot \rho_g = V_g$  ( $V_g$  ddp ai capi del galvanometro) è chiaro che entrano in gioco sia la costante reometrica che la resistenza interna dello strumento:

$$\varphi = \frac{1}{K_r} i = \frac{1}{K_r \rho_g} \cdot V_g \propto \frac{1}{n} V_g \quad (\text{II.36})$$

Definita

$$S_V = \frac{\partial \varphi}{\partial V_g} \quad (\text{II.37})$$

*Sensibilità voltmetrica*, abbiamo che essa vale:

$$S_V = \frac{1}{K_r \rho_g} \quad (\text{II.38})$$

e diminuisce come  $\frac{1}{n}$ , cioè conviene avere poche spire.

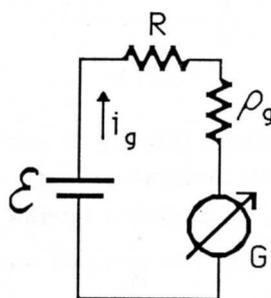


Fig.II.13

Questi risultati vanno visti come casi limite del caso generale (Fig.13) in cui il galvanometro è posto in serie a un generatore reale di tensione, cioè fra due terminali di una generica rete lineare di cui il generatore in questione rappresenta l'equivalente secondo Thévenin; alternativamente potremmo considerare l'equivalente di Norton dei due terminali, nel caso che preferissimo studiare il circuito mediante generatori di corrente anziché di fem. Anche in questo caso vogliamo massimizzare, rispetto al parametro  $n$ , la deflessione angolare, fissati i valori della fem e della resistenza di Thévenin, cioè il circuito esterno; in pratica questo caso corrisponde all'utilizzo del galvanometro quale

**Rivelatore di zero**, cioè per mettere in evidenza la più piccola possibile fem di Thévenin (ovvero la più piccola possibile corrente secondo Norton). Vedremo più avanti numerosi utilizzi del galvanometro quale Rivelatore di zero. Questa volta, data la resistenza finita del circuito esterno, la deflessione del galvanometro dipende sia da  $K_r$  che da  $\rho_g$ ; con riferimento alla Fig.13, abbiamo per  $i_g$ , corrente che circola nel galvanometro, e per  $\varphi$ , la deflessione osservata:

$$i_g = \frac{\mathcal{E}}{R + \rho_g} \quad (\text{II.39})$$

$$\varphi = \frac{1}{K_r} \cdot \frac{\mathcal{E}}{(R + \rho_g)} \quad (\text{II.40})$$

Esplicitando le dipendenze di  $K_r$  e  $\rho_g$  da  $n$ , abbiamo:

$$\varphi = \frac{nSB}{E} \cdot \frac{\mathcal{E}}{R + kn^2} \quad (\text{II.41})$$

e se vogliamo massimizzare  $\varphi$  rispetto a  $n$  troviamo:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \propto R + kn^2 - 2kn^2 \quad (\text{II.42})$$

Pertanto:

$$kn^2 = R \quad (\text{II.43})$$

cioè il massimo di deflessione (e quindi di sensibilità) si ha quando il numero delle spire  $n$  è tale da conferire al galvanometro una resistenza interna pari alla resistenza in serie al generatore. Questo è quanto dire che la massima deflessione possibile del galvanometro, si ha per il massimo trasferimento di potenza, vedi (I.101). Alla stessa conclusione si poteva anche giungere ragionando, meno formalmente, così: per avere la massima elongazione occorre avere il massimo momento  $G \cdot i$  dovuto alla corrente; tenendo conto che  $G \propto n$  e  $\rho_g \propto n^2$  abbiamo  $G \propto \sqrt{\rho_g}$  e pertanto dobbiamo massimizzare:

$$G \cdot i \propto \sqrt{\rho_g} \cdot \frac{\mathcal{E}}{R + \rho_g} = \sqrt{W_g} \quad (\text{II.44})$$

dove  $W_g$  rappresenta la potenza trasferita dal generatore al galvanometro

$$W_g = i_g^2 \cdot \rho_g = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + \rho_g)^2} \cdot \rho_g \quad (\text{II.45})$$

Il caso ora descritto, di avere cioè la possibilità di fare diversi tipi di avvolgimento su uno stesso “kit” di galvanometro, non è un caso così peregrino come potrebbe sembrare; di fatto nei laboratori particolarmente attrezzati di qualche decennio fa, le misure che contemplavano l’uso del galvanometro come rivelatore di zero (*Ponti di Wheatstone* o *Potenzimetri* ad esempio) venivano ottimizzate montando nel circuito quello della serie di galvanometri a disposizione (tutti uguali salvo il rocchetto) che aveva una resistenza interna di valore il più prossimo possibile a quello della resistenza equivalente di Thévenin presente fra i due terminali ove lo strumento andava inserito; ritorneremo sull’argomento quando tratteremo i sistemi di misura che contemplano azzeramenti di corrente.

Ora, passiamo invece ad esaminare gli strumenti (*amperometri*, *voltmetri*, *ohmetri*) e i sistemi di misura basati sui galvanometri; nel seguito col termine *galvanometro* indicheremo soltanto quegli strumenti, particolarmente sensibili, che siano effettivamente costruiti come detto sopra, cioè con l’equipaggio sospeso ad un filo di torsione e la lettura con leva ottica.

## NOTA BIBLIOGRAFICA

Sul principio di funzionamento e le caratteristiche del Galvanometro di Deprez-d’Arsonval, si consiglia **LA 38. CO 85** è uno dei pochi testi moderni che tratta degli accorgimenti tecnici che i costruttori adottano (o forse meglio *adottavano*) per ottenere le caratteristiche volute di stabilità e precisione del galvanometro. I trattati di Fisica Generale della prima metà del novecento generalmente descrivono con dovizia di particolari tali strumenti (si veda ad esempio: OLLIVIER “Physique générale” (HERMANN) (1927).

Approfondimenti sul limite teorico della sensibilità del galvanometro si possono basare su:

- a) Ising: “A natural limit for the sensibility of galvanometers”  
Phil. Mag. Vol 1 (1926)**827**  
(lavoro teorico)
- b) Ornstein et al.: “The Brownian movement of a galvanometer coil and the influence of the temperature of the outer circuit”  
Proc. Phys. Soc. Vol 115 (1927)**391**  
(lavoro sperimentale).

### III

## GLI STRUMENTI A BOBINA MOBILE

### 1.— *Strumenti ad ago*

Il principio del Galvanometro di Deprez-d'Arsonval trova applicazione in quasi tutti gli strumenti ad ago per misure in corrente continua. Tuttavia negli strumenti ad ago ci sono alcune sostanziali differenze rispetto ai galvanometri descritti nel capitolo precedente, che rendono tali strumenti più semplici da adoperare e più robusti da maneggiare, il tutto a spese di una ridotta sensibilità. Innanzitutto l'equipaggio non è sospeso ad un filo, bensì è montato su un alberino che ruota su due supporti fissi, spesso costituiti da rubini (come il bilanciere di un orologio). Ciò consente di montare, solidalmente con l'equipaggio, un ago contrappesato che permette la lettura, su una scala fissa con lo strumento, della grandezza in *Ampère* o *Volt* o *Ohm* (a seconda del circuito, come vedremo). La coppia di richiamo è prodotta da una molla a spirale. Lo strumento in questo modo diventa facilmente trasportabile anche se le misure, a motivo dei contrappesi sull'ago, vanno effettuate in una precisa posizione dello strumento rispetto alla verticale. La sensibilità è ridotta rispetto ai galvanometri prima descritti principalmente perché la costante di richiamo è assai più grande, per rendere piccolo l'effetto degli attriti dovuti ai supporti. Inoltre per rendere gli strumenti effettivamente trasportabili, i campi magnetici sono prodotti da *piccoli* magneti permanenti e conseguentemente la sezione S della bobina è relativamente contenuta.

### 2.— *Classe di uno strumento ad ago*

Supponiamo che il nostro strumento abbia una scala tarata in *Ampère* o in sottomultipli: in tal caso si parla propriamente di *Amperometro* (vedi Fig.1 dove è schematicamente rappresentato un *milliamperometro*).

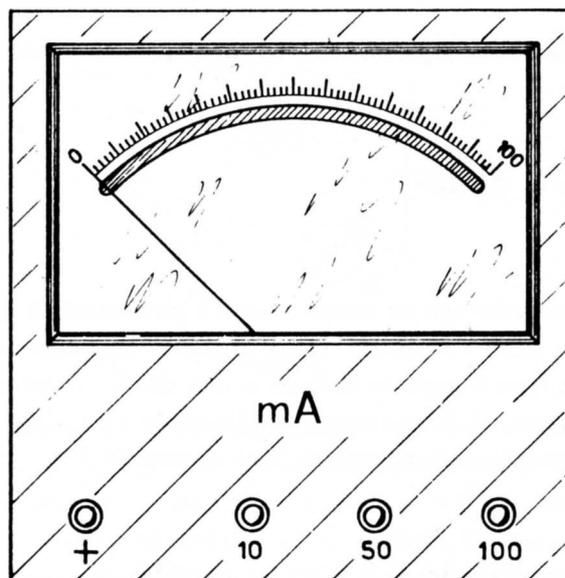


Fig.III.1

Per ridurre l'errore di lettura l'ago sarà sottile, così come le tacche della scala. Inoltre per eliminare l'errore di parallasse dovuto al fatto che scala e ago non sono sullo stesso piano, lo strumento disporrà di una scala a specchio. Con questi accorgimenti si può pensare che la lettura possa farsi a meno di  $\sim 1/4$  della divisione più piccola. Tale indeterminazione si ripercuote direttamente sulla precisione della misura e dà un contributo costante su tutta la scala, indipendente cioè dal valore della corrente che misuriamo. Questa non è certamente l'unica delle indeterminazioni connesse con la misura. Infatti lo strumento medesimo contribuisce con un certo errore di *taratura*. Oltre all'errore di taratura vero e proprio, cioè la non perfetta adeguatezza della scala alla risposta dello strumento, ivi compresa l'eventuale non perfetta costanza di  $K_r$  in funzione di  $i$ , tale errore in genere ingloba altri contributi. Fra questi, la variazione della risposta dello strumento in funzione della temperatura e l'influenza un po' erratica degli attriti dei supporti possono avere una notevole importanza nello stabilire un limite alla precisione. Il costruttore in fase di progetto ed esecuzione dello strumento determina la precisione che lo strumento può garantire e fornisce al cliente l'informazione a riguardo, garantendo su tutta la scala una indeterminazione massima di valore costante. Convenzionalmente questa indeterminazione è data tramite la cosiddetta *Classe* dello strumento: con uno strumento di classe X, una misura fatta con una deflessione corrispondente al fondo scala ha un errore, dovuto alle imperfezioni di costruzione di cui si è detto, inferiore o uguale allo X% della lettura; tale errore resta costante in valore assoluto su tutta la scala. Con uno strumento di classe 1, misure fatte a fondo scala avranno un errore (di taratura) dell'1%, a metà scala del 2%, a un terzo della scala del 3% e così via. Pertanto, dato uno strumento di una determinata classe, le misure *a priori* più accurate sono quelle che danno deflessioni prossime al fondo scala: per esse infatti è minimo il contributo relativo dell'errore di taratura e di lettura.

Valori tipici della classe di strumenti da laboratorio sono  $0.5 \div 1$ ; le scale su cui si effettua la lettura saranno di finezza adeguata, cioè tali da non compromettere la classe dello strumento; vale a dire il costruttore fornisce strumenti di classe piccola, cioè precisi, con scale più finemente divise (e quindi più ampie) di quelle di strumenti di classe più alta, ovvero meno precisi.

La classe dello strumento si legge sul quadrante nella forma di un piccolo numero, insieme ad altri simboli che forniscono informazioni sulle caratteristiche dello strumento; per i simboli e il loro

significato si rimanda alla tabella riportata nell'ultima pagina di questo volume.

### 3.— Amperometri. Shunt

Realizzare un *Amperometro* con un galvanometro è immediato, in quanto il galvanometro è di per sé uno strumento che misura corrente. Tuttavia questo amperometro, a causa della resistenza interna del galvanometro, non è perfetto o, come si dice *ideale*: se inseriamo lo strumento fra due terminali di una rete, resi accessibili interrompendo il ramo dove circolava una corrente  $I^*$ , la corrente  $I$  misurata, indipendentemente dalla precisione, sarà diversa da  $I^*$ .

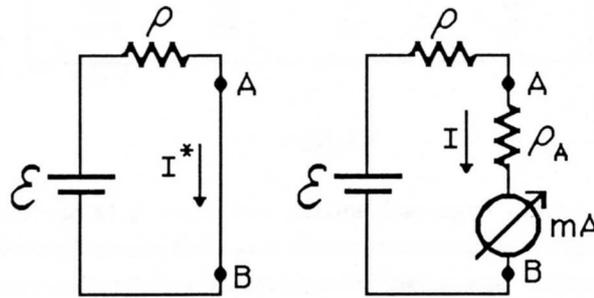


Fig.III.2

Infatti, con riferimento alla Fig.2, avremo

$$I^* = \frac{\mathcal{E}}{\rho} \quad (\text{III.1})$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\rho + \rho_A} = I^* \left( \frac{1}{1 + \frac{\rho_A}{\rho}} \right) \quad (\text{III.2})$$

$\mathcal{E}$  e  $\rho$  sono la fem e la resistenza equivalente del generatore di Thévenin fra i due terminali. La (2) ci dice che  $I$  è tanto più simile a  $I^*$  quanto più  $\rho_A < \rho$ . Il caso limite di  $\rho_A = 0$  rappresenta l'amperometro ideale.

Il fatto che  $I \neq I^*$  talvolta non costituisce neppure un problema, quando per esempio teniamo lo strumento fisso sul circuito e vogliamo conoscere proprio  $I$ . In ogni caso si tratta di un problema facilmente sormontabile: infatti, misurata  $I$  tramite la (2) possiamo risalire a  $I^*$  se sono note  $\rho_A$  e  $\rho$ .

Facciamo ora vedere che un amperometro *quasi-ideale* si realizza tanto più facilmente, a parità di sensibilità amperometrica, quanto più piccola è la resistenza interna del galvanometro utilizzato oppure, a parità di resistenza interna, quanto più sensibile è il galvanometro. La prima parte dell'affermazione è ovvia. Quanto alla seconda, supponiamo di avere due galvanometri A e B con la stessa resistenza interna ma con A 10 volte più sensibile di B. Usando A potremo avere la stessa deflessione che con B, ponendo in parallelo allo strumento (e quindi a  $\rho_A = \rho_B$ ) una resistenza pari a  $\frac{\rho_A}{9}$ .

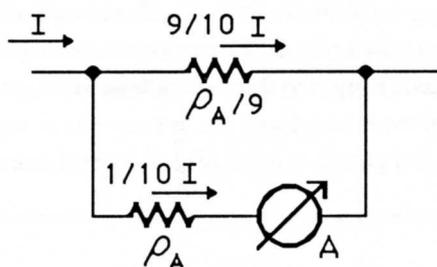


Fig.III.3

In questo modo (vedi Fig.3) la corrente entrante nei terminali dell'amperometro che utilizza A si divide nei due rami del parallelo e solo  $1/10$  di essa passa effettivamente nel galvanometro. La resistenza totale dell'amperometro vista dal circuito è  $\rho_A' = \frac{\rho_A}{10}$ . Pertanto i due amperometri che utilizzano A e B danno, se attraversati dalla stessa corrente, la stessa indicazione, ma il primo inserisce fra i terminali di misura una resistenza 10 volte più piccola del secondo. Questo ora descritto è il più semplice dei cosiddetti "Shunt" (*derivazioni*) \*.

I galvanometri hanno una sensibilità esorbitante rispetto alle intensità di corrente che di norma ha interesse misurare; pertanto lo shunt diventa spesso, nella realizzazione degli amperometri, una necessità. Non solo: lo shunt consente anche di lavorare con lo strumento chiuso su una resistenza prossima a quella critica  $R_C$ , con conseguente riduzione dei tempi di risposta dello strumento. Guardiamo come ciò si realizza: intanto va premesso che in una condizione realistica di misura di una corrente, si cerca di fare in modo che la resistenza complessiva dello strumento, cioè il parallelo dello shunt con la resistenza interna  $\rho_A$  vera e propria, sia molto minore della resistenza  $\rho$  del generatore equivalente di Thévenin; se questo non si verifica il regime di corrente è infatti fortemente influenzato dalla misura medesima e si rendono necessarie le correzioni (2).

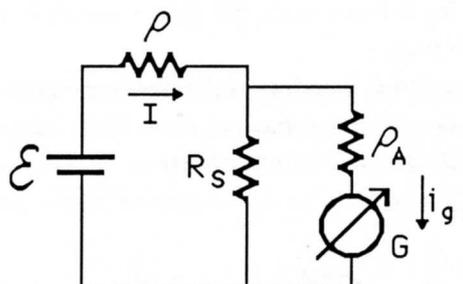


Fig.III.4

Ammettiamo di soddisfare allora questa condizione; pertanto in Fig.4 la resistenza vista dal galvanometro è:

$$\rho_A + R_S \parallel \rho \simeq \rho_A + R_S \quad (\text{III.3})$$

\* Col termine *shunt* si indica propriamente la resistenza che si pone in parallelo ad uno strumento per ridurne la sensibilità. Se il galvanometro A sopra descritto ha una corrente di fondo scala  $I_{fs} = 10mA$ , lo shunt descritto è detto "shunt da 100 mA". Si dice anche che lo shunt è caratterizzato da un rapporto 10.

Allora sarà possibile, scegliendo  $\rho_A + R_S = R_C$  avere il galvanometro chiuso sempre su una resistenza assai vicina a quella critica, purché in tutte le misure in cui lo strumento è utilizzato,  $\rho \gg R_S$ . La richiesta  $R_C = \rho_A + R_S$ , definisce il rapporto di shunt e fissa il fondo scala dell'amperometro ad un valore che può non essere particolarmente adatto alle misure che si vogliono compiere. L'aggiunta di una ulteriore resistenza nel ramo del galvanometro (Fig.5), ci restituisce il grado di libertà mancante, a spese della sensibilità.

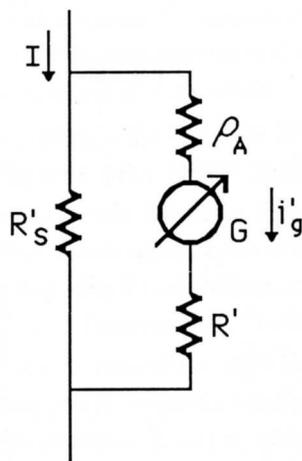


Fig.III.5

Le nuove condizioni saranno:

$$R_C = \rho_A + R' + R'_S \quad (\text{III.4})$$

$$i'_g = I \cdot \frac{R'_S}{R_C} \quad (\text{III.5})$$

La (5) determina il rapporto fra il fondo scala del galvanometro e il fondo scala dell'amperometro che lo utilizza come strumento base.

Con il sistema sopra descritto è possibile realizzare quello che si chiama *Shunt Universale* o *Shunt di Ayrton* (Fig.6) che ora descriveremo nel caso di un amperometro con quattro portate, scalate ognuna di un fattore 10 rispetto alla precedente.

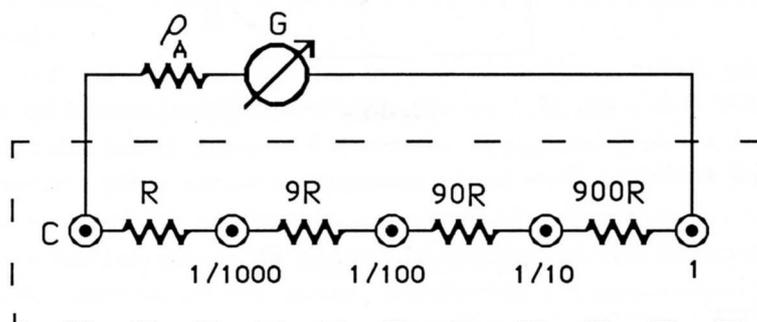


Fig.III.6

Collegiamo i morsetti C e 1 dello strumento al nostro circuito, che per semplicità supponiamo

sia costituito da un generatore di corrente  $I$  (vale a dire supponiamo che la resistenza di Thévenin del generatore di tensione associato sia molto maggiore della resistenza complessiva del nostro strumento:  $1000R \parallel \rho_A$ ). In questa configurazione la corrente nel galvanometro è data da

$$i_{g1} = I \cdot \frac{1000R}{1000R + \rho_A} \quad (\text{III.6})$$

Mantenendo sempre la stessa corrente  $I$ , ma collegando lo strumento fra C e 1/10 avremo

$$i_{g10} = I \cdot \frac{100R}{1000R + \rho_A} = \frac{i_{g1}}{10} \quad (\text{III.7})$$

e analogamente per i collegamenti C-1/100 e C-1/1000. I rapporti fra le correnti nelle quattro configurazioni, a parità di  $I$ , non dipendono né da  $\rho_A$ , né dal valore di  $R$ . In questo senso lo shunt è detto *universale*, in quanto l'insieme di resistenze contenute nella linea tratteggiata di Fig.6 (spesso montate in un unico contenitore), costituisce un accessorio che può essere adoperato in connessione con qualunque galvanometro in quanto i suoi rapporti di shunt sono sempre gli stessi. Si noti che questa volta per "rapporto di shunt" si intende qualcosa di diverso rispetto a prima: ora esso è il rapporto fra le correnti nel galvanometro nelle varie posizioni dello shunt e non il rapporto fra le correnti nel galvanometro senza e con lo shunt.

La "universalità" dello shunt non va intesa in senso troppo generale: se ad esempio vogliamo che il galvanometro sia chiuso su una resistenza pari a quella critica, occorrerà montare un particolare shunt universale, precisamente quello con  $R$  tale che  $1000R + \rho_A = R_C$ .

Nelle varie portate la resistenza interna dello strumento cambia; in qualche tipo di applicazione la si vuole mantenere costante e per far ciò basta aggiungere in serie ai terminali 1/1000, 1/100, 1/10 una resistenza di opportuno valore.

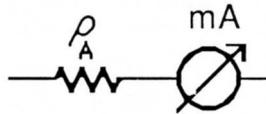


Fig.III.7

La configurazione che utilizza lo shunt di Ayrton è fra le più diffuse negli amperometri a varie portate ed è comunque una regola praticamente generale che gli strumenti ad ago siano chiusi sulla resistenza critica; pertanto, quando in un circuito schematizzeremo lo strumento misuratore di corrente come in Fig.7, in genere esso corrisponderà ad un'altra configurazione (equivalente) del tipo in Fig.8 tale che

$$R_P + \rho_A' = R_C \quad (\text{III.8})$$

con

$$\rho_A = R_P \parallel \rho_A' \quad (\text{III.9})$$

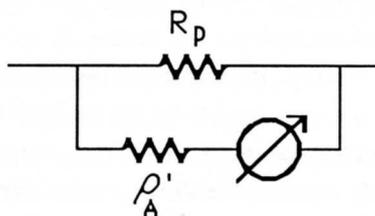


Fig.III.8

Per fare un esempio pratico riportiamo nella Fig.9 uno schema realistico per lo strumento di Fig.1, dotato di tre fondo scala: 10, 50, 100 mA.

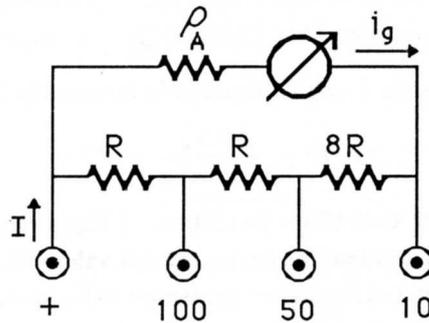


Fig.III.9

Se lo strumento base ha un fondo scala  $i_{gfs} = 2mA$  e  $\rho_A = 100 \Omega$ , imponendo che lo strumento vada a fondo scala quando fra i terminali + e 10 passa una corrente  $I = 10 mA$ , abbiamo:

$$i_{gfs} = \frac{10R}{10R + \rho_A} \cdot 10mA$$

che è soddisfatta per  $R = 2.5 \Omega$ .

Quanto a  $\rho_A$ , essa rappresenta la resistenza equivalente di uno schema del tipo mostrato in Fig.8 e assicura allo strumento di essere chiuso su una resistenza molto prossima a quella critica. Ciò significa che il galvanometro base vero e proprio avrà una corrente di fondo scala inferiore a  $2 mA$  e pari a  $2 mA \cdot \frac{R_P}{R_P + \rho_A'}$ .

#### 4.- Campo di correnti misurabili.

##### *Errori di misura*

Il limite inferiore delle correnti misurabili con strumenti a bobina mobile tipo Galvanometro di Deprez-d'Arsonval, è teoricamente dato dalla corrente che provoca una deflessione decisamente superiore alla ampiezza delle oscillazioni stocastiche dell'equipaggio; quest'ultimo è infatti un sistema meccanico ad un grado di libertà che, a temperatura  $T$ , possiede un'energia media  $\frac{1}{2} \mathcal{I} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$  con  $k$  costante di Boltzmann. Si trova che questo limite (per galvanometri con periodo proprio dell'ordine di alcuni secondi e resistenza interna dell'ordine di  $100 \Omega$ ) è attorno alle decine di  $\mu A$ . In pratica (stiamo parlando di galvanometri in postazione estremamente stabile e con lettura a leva ottica) correnti poco al di sotto del  $nA$  sono un limite più realistico.

Per la misura di correnti elevate i limiti di precisione vengono piuttosto dalla difficoltà di realizzare shunt con resistenze piccole e sufficientemente precise. Uno shunt per grosse correnti (fino a centinaia di Ampère) deve essere realizzato in modo che le cadute di tensione che inevitabilmente si verificano sui contatti, non influenzino il rapporto di partizione.

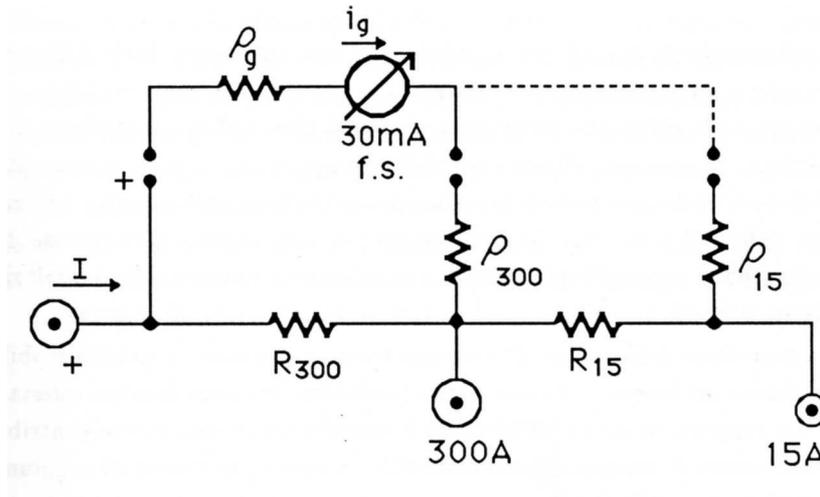


Fig.III.10

Questo si realizza col sistema riportato in Fig.10, dove lo shunt è un oggetto fisicamente distinto dall'amperometro ed è provvisto di tre morsetti per la corrente da misurare, di cui uno comune (+), e altri tre da collegare allo strumento; questa seconda terna di morsetti è interessata dalle correnti di moderata intensità che circolano nel galvanometro (30 mA f.s.). Si notino i seguenti accorgimenti: i morsetti dove può passare la corrente fino a 300 A sono di dimensioni notevolmente superiori a quello da 15 A; quest'ultimo a sua volta è notevolmente più robusto di quelli (tutti uguali) che vanno allo strumento. La dimensione del morsetto dipende dal fatto che la pressione da esercitare fra i due conduttori messi in contatto deve essere tanto più elevata quanto più elevata è la corrente che essi trasportano; infatti con una adeguata pressione si riduce la resistenza del collegamento. Il corretto dimensionamento dei morsetti riduce la possibilità di cadute di tensione elevate che porterebbero al surriscaldamento e progressivo deterioramento dei contatti medesimi. Inoltre – e questo è l'accorgimento fondamentale – la ripartizione fra le resistenze dello shunt e  $\rho_g$  è fatta mediante dei fili saldati direttamente ai capi delle resistenze  $R_{300}$  e  $R_{15}$  in modo che i rapporti di shunt

$$S_{300} = \left( \frac{i_g}{I} \right)_{300} = \frac{R_{300}}{\rho_g + R_{300} + \rho_{300}} \simeq \frac{R_{300}}{\rho_g + \rho_{300}} \quad (\text{III.10})$$

$$S_{15} = \left( \frac{i_g}{I} \right)_{15} = \frac{R_{15} + R_{300}}{\rho_g + R_{15} + R_{300} + \rho_{15}} \simeq \frac{R_{15} + R_{300}}{\rho_g + \rho_{15}} \quad (\text{III.11})$$

non dipendano in alcun modo dalla eventuale resistenza residua sui morsetti della corrente.

La presenza delle resistenze  $\rho_{300}$  e  $\rho_{15}$  non sarebbe strettamente necessaria a stabilire i due rapporti di cui alle (10) e (11). Il motivo della loro presenza è puramente di ordine pratico, in quanto in fase di costruzione dello shunt, anziché costruire due resistenze  $R_{300}^*$  e  $R_{15}^*$  di valore molto piccolo e molto accurate, che definiscano i rapporti voluti  $S_{300}$  e  $S_{15}$  senza l'intervento di  $\rho_{300}$  e  $\rho_{15}$  rispettivamente, si preferisce costruire  $R_{300} > R_{300}^*$  e  $R_{15} > R_{15}^*$  senza particolare cura per la

tolleranza e poi tramite  $\rho_{300}$  e  $\rho_{15}$  si procede a stabilire i rapporti di shunt voluti. La semplificazione di quest'ultima procedura consiste nel fatto che mentre  $R_{300}$  e  $R_{15}$  sono resistenze al massimo dell'ordine dei  $m\Omega$  e quindi molto difficili da costruire con piccola tolleranza (anche al percento),  $\rho_{300}$  e  $\rho_{15}$  sono dell'ordine degli  $\Omega$  e quindi molto più facilmente controllabili con buona precisione.

Tornando all'esempio di Fig.10 che si riferisce a uno strumento reale (*Weston*), si noti che la corrente di fondo scala dello strumento è  $30mA$  e pertanto il rapporto  $S_{300}$  vale  $10^{-4}$  e  $S_{15}$   $2 \cdot 10^{-3}$ ; nell'accoppiare lo shunt allo strumento occorrerà che i collegamenti verso lo strumento non introducano resistenze in grado di alterare sensibilmente  $\rho_g + \rho_{300}$  o  $\rho_g + \rho_{15}$ ; questo, per la verità non è troppo difficile a realizzare poiché le resistenze di collegamento tramite i morsetti si possono fare senza troppa difficoltà  $\leq 10^{-2}\Omega$ . Quando parleremo della misura di resistenze di piccolo valore ritroveremo questo tipo di accorgimento, cioè la distinzione fra i morsetti fra i quali si invia la grossa intensità di corrente e quelli ai capi dei quali si collega lo strumento di misura.

Quanto alla precisione delle misure di corrente tramite strumenti a bobina mobile, essa è determinata dalla precisione intrinseca dello strumento (se è data, la classe fornisce questa informazione), dalla precisione dei rapporti di shunt (se lo shunt è esterno, altrimenti questo contributo è inglobato nella Classe) e dall'errore di lettura. Come ordine di grandezza le precisioni raggiungibili non sono mai migliori di qualche per mille.

Se lo scopo della nostra misura è conoscere non tanto la corrente  $I$  che circola attraverso lo strumento, quanto quella  $I^*$  che circola nel ramo quando lo strumento non è inserito allora, (vedi Fig.2a e b), occorre conoscere sia  $\rho_A$  che la resistenza  $\rho$  del generatore equivalente di Thévenin. Dalla relazione (2) abbiamo

$$I^* = I \left( 1 + \frac{\rho_A}{\rho} \right) \quad (\text{III.12})$$

e pertanto la precisione con cui si determina  $I^*$  dipende oltreché dalla precisione su  $I$ , anche da quella su  $\rho_A$  e  $\rho$ :

$$\frac{\Delta I^*}{I^*} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\rho_A}{\rho + \rho_A} \left( \frac{\Delta \rho_A}{\rho_A} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \quad (\text{III.13})$$

La (13) ci conferma che se  $\rho_A \ll \rho$  (come in genere si cerca di fare) il contributo all'errore derivante dall'indeterminazione sulla conoscenza delle resistenze è relativamente poco importante (si tratta infatti di una indeterminazione su una già piccola correzione).

Un effetto che può limitare la precisione delle misure di deboli correnti, soprattutto quando la resistenza interna dello strumento è piccola, è la presenza di gradienti di temperatura lungo il circuito, principalmente alla giunzione fra conduttori diversi; si creano infatti così delle fem termoelettriche (ordine di grandezza  $< 10^{-4}V$  per sbalzi di qualche grado) che possono dar luogo a contributi di corrente importanti, se le resistenze in gioco sono piccole; l'effetto è tuttavia eliminabile attendendo che il circuito, dopo le inevitabili manipolazioni durante il montaggio, raggiunga l'equilibrio termico e verificando che a circuito chiuso, senza generatori direttamente applicati, lo strumento segnali, entro l'errore di lettura, corrente nulla. Problemi simili a quelli ora detti possono provenire anche dalla presenza di contatti fra superfici non sufficientemente pulite; differenze di potenziale di origine elettrochimica possono in questo caso insorgere e inviare correnti non controllabili nel circuito.

Più avanti (Cap.XV,§5), vedremo che con l'ausilio di tecniche elettroniche è possibile realizzare misuratori di corrente che spingono, soprattutto verso i valori piccoli, il campo di correnti misurabili (fino a  $10^{-15}A$ ); è inoltre possibile costruire *mAmperometri* sostanzialmente ideali, caratterizzati cioè una resistenza interna praticamente nulla.

## 5.— Voltmetri. Ohm per Volt

La scala di un amperometro può essere facilmente convertita in una scala di un voltmetro; infatti, detta  $\rho_V$  la resistenza in serie allo strumento, la ddp fra i morsetti di ingresso, quando attraverso essi circola una corrente  $i$ , sarà data da  $V = i \cdot \rho_V$ . Di fatto i voltmetri ad ago mobile sono realizzati proprio in questo modo; in genere  $\rho_V$  è il contributo di due parti: una,  $\rho_g$ , la resistenza interna dello strumento vero e proprio (comprendente eventualmente lo shunt che permette allo strumento di lavorare su una resistenza prossima a quella critica) e un'altra resistenza aggiuntiva, scelta del valore opportuno per realizzare il fondo scala voluto.

Supponiamo di disporre di un voltmetro siffatto e di voler misurare la ddp presente fra due terminali di una rete; siano  $\mathcal{E}^*$  e  $\rho$  la fem e la resistenza di Thévenin fra questi due terminali (Fig.11).

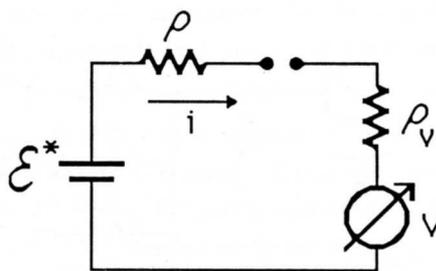


Fig.III.11

Un voltmetro ideale dovrebbe indicare (a parte gli errori di taratura e lettura) il valore  $\mathcal{E}^*$ ; la lettura sarà invece  $V < \mathcal{E}^*$  :

$$V = i \cdot \rho_V = \frac{\mathcal{E}^*}{\rho + \rho_V} \cdot \rho_V = \mathcal{E}^* \left( \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\rho_V}} \right) \quad (\text{III.14})$$

La correzione  $1 + \frac{\rho}{\rho_V}$  da apportare a  $V$  per ottenere  $\mathcal{E}^*$  è tanto più vicina a 1 (cioè il voltmetro si avvicina ad essere ideale) quanto più  $\rho_V > \rho$ .

Si può vedere che -come nel caso degli amperometri- la qualità dello strumento (intesa come minimizzazione della differenza fra  $V$  e  $\mathcal{E}^*$ ) è tanto migliore quanto più sensibile è lo strumento base utilizzato. Infatti, supponiamo di disporre di due *microamperometri* ( $\mu\text{Amperometri}$ ), uno da  $10 \mu\text{A}$  f.s. e l'altro da  $100 \mu\text{A}$  f.s., entrambi con resistenza interna  $\ll 100 \text{ k}\Omega$ ; col primo strumento possiamo realizzare un voltmetro con fondo scala  $1 \text{ V}$  e avente una  $\rho_V$  di  $100 \text{ k}\Omega$ ; col secondo, il voltmetro avrà una  $\rho_V$  di  $10 \text{ k}\Omega$ .

Il simbolo adottato generalmente per rappresentare un voltmetro reale è quello di Fig.11; un voltmetro ideale si rappresenta nello stesso modo ed è caratterizzato dall'avere  $\rho_V$  infinita.



Fig.III.12

Un'altra possibile scelta potrebbe essere (e in molti testi è così) quella di rappresentare col simbolo di Fig.12 un voltmetro ideale, cioè uno strumento con resistenza infinita e porre poi, per lo strumento reale,  $\rho_V$  in parallelo. Si noti che con lo stesso simbolo, nei due casi si indicano due cose diverse. Nel testo verrà adottato il simbolo di Fig.11 che, almeno nel caso di strumenti a bobina mobile, è più aderente alla realtà in quanto lo strumento vero e proprio è un misuratore di corrente caratterizzato da una resistenza relativamente piccola.

Con un  $\mu$ Amperometro che vada a fondo scala con una corrente  $i_{fs}$ , è semplice costruire un voltmetro con varie portate (per esempio da 0.1V a 100V e con un fattore 10 fra portata e portata).

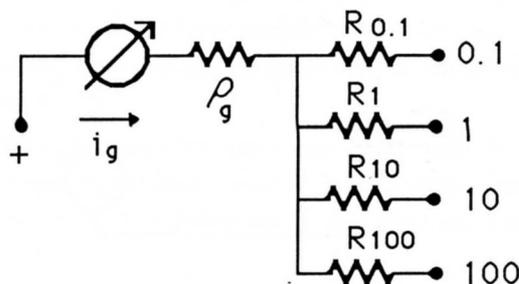


Fig.III.13

Basterà infatti (vedi Fig.13) aggiustare i valori delle resistenze  $R_{0.1}, R_1, R_{10}, R_{100}$  in modo tale che lo strumento vada a fondo scala (ovvero  $i_g = i_{fs}$ ) quando fra il morsetto + (comune a tutte le posizioni) e i morsetti 0.1, 1, 10 e 100 sia presente rispettivamente la differenza di potenziale di 0.1V, 1V, 10V e 100V. In ogni portata la resistenza  $\rho_V$  dello strumento è data da

$$\rho_V = \frac{V_{fs}}{i_{fs}} \quad (\text{III.15})$$

ed essendo  $i_{fs}$  costante,  $\rho_V$  cresce come  $V_{fs}$ .

In genere il costruttore non fornisce la resistenza  $\rho_V$  di ogni portata, ma si limita a dare il valore della resistenza che lo strumento presenta quando è nella portata di 1V fondo scala, corrispondente numericamente all'inverso di  $i_{fs}$ . Per conoscere la  $\rho_V$  nelle altre portate basta moltiplicare questo numero per la ddp di fondo scala della portata in esame. Questa costante costituisce i cosiddetti *Ohm per Volt* dello strumento ( $\Omega/V$ ). Se ad esempio il voltmetro è da 10000  $\Omega/V$ , la corrente che manda a fondo scala lo strumento è  $10^{-4} \frac{V}{\Omega} = 10^{-1} \text{ mA}$  e lo strumento nella portata di 1V fondo scala ha una resistenza  $\rho_V = 10^4 \Omega$ , mentre ad esempio nella portata 10V e 0.1V ha rispettivamente  $10^5 \Omega$  e  $10^3 \Omega$ .

## 6.— *Campi di tensioni misurabili.*

### *Errori di misura*

Il limite inferiore alle ddp misurabili ha la stessa origine del limite inferiore per la misura di correnti con un galvanometro, cioè la temperatura finita del sistema; tenendo conto dei valori tipici della resistenza interna, difficilmente si possono misurare differenze di potenziale inferiori a qualche centinaio di  $nV$ . In questi casi, oltretutto, occorrerà grande cautela nell'eliminare le fem elettrochimiche o termoelettriche che possono vanificare l'accuratezza (addirittura impedire la fattibilità) delle misure, già per valori della ddp di qualche ordine di grandezza più grandi.

I limiti alla precisione di misura di grosse differenze di potenziale sono dati dalla difficoltà di realizzare resistenze da porre in serie allo strumento che siano di valore elevato, note con precisione e soprattutto esenti da perdite incontrollate ( tanto più facilmente presenti quanto più alta è la tensione).

In ogni caso poi la precisione delle misure di tensione è limitata dalla classe (ovvero dalla qualità) dello strumento impiegato per misurare la corrente. Come nel caso delle misure di corrente, qualora si voglia conoscere la tensione  $\mathcal{E}^*$  e non  $V$  (quella misurata, vedi esempio all'inizio del paragrafo precedente) occorrerà correggere  $V$ , moltiplicandolo per  $1 + \frac{\rho}{\rho_V}$ . Se  $\rho$  e  $\rho_V$  sono confrontabili può risultare non trascurabile, per l'errore su  $\mathcal{E}^* = V \left( 1 + \frac{\rho}{\rho_V} \right)$ , anche l'errore su  $\rho_V$ .

Più avanti mostreremo metodi di misura di differenze di potenziale (*Misure potenziometriche*) che, basandosi su galvanometri impiegati come rivelatori di zero, hanno il pregio – almeno nominalmente – di non derivare corrente dai due terminali ove è presente la ddp da misurare; con questi metodi di misura si determina quindi direttamente la fem di Thévenin e si ottengono per di più precisioni elevate. Inoltre, ricorrendo a metodi elettronici, si possono compiere misure di differenza di potenziale che sono di fatto molto vicine ad essere ideali (Cap.XV,§5).

## 7.— *Ohmetri realizzati con strumenti a bobina mobile*

Per *Ohmetro* si intende uno strumento (o un insieme di strumenti) capace di misurare resistenze. Supponiamo di disporre di un voltmetro ideale ( $\rho_V \rightarrow \infty$ ) e di un amperometro ideale ( $\rho_A \rightarrow 0$ ). Se vogliamo conoscere il valore di una resistenza  $R$  incognita potremo montare uno dei due circuiti in Fig.14.

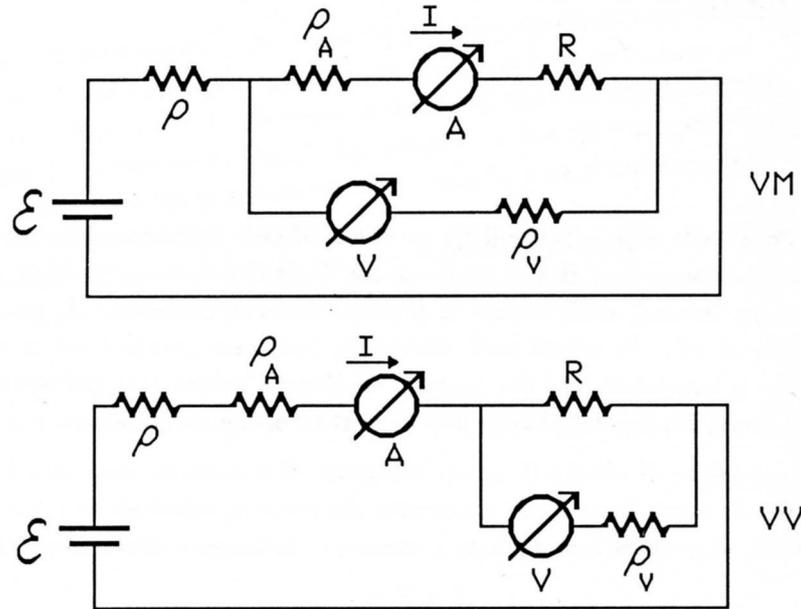


Fig.III.14

In entrambi i casi, se gli strumenti fossero ideali,  $R$  sarebbe data da

$$R = \frac{V}{I} \quad (\text{III.16})$$

dove  $V$  è la lettura sul voltmetro e  $I$  è la lettura sull'amperometro.

In pratica i nostri strumenti non sono ideali e pertanto dovremo tenere conto che: nel caso VM (*Voltmetro a Monte*) la differenza di potenziale  $V$  contiene anche la caduta sull'amperometro, mentre nel caso VV (*Voltmetro a Valle*) la corrente nell'amperometro è la somma della corrente che passa nella resistenza  $R$  più quella che passa nel voltmetro. Pertanto i rapporti  $\frac{V}{I}$ , in entrambi i casi sono prossimi a  $R$  ma non coincidono con essa. Infatti:

Voltmetro a monte

$$\frac{V}{I} = \frac{I(R + \rho_A)}{I} = R \left( 1 + \frac{\rho_A}{R} \right) \quad (\text{III.17})$$

Voltmetro a valle

$$\frac{V}{I} = \frac{I(R \parallel \rho_V)}{I} = R \left( \frac{1}{1 + \frac{R}{\rho_V}} \right) \quad (\text{III.18})$$

Allo scopo di determinare  $R$ , entrambi i metodi sono utilizzabili, purché siano note con sufficiente precisione  $\rho_A$  e  $\rho_V$ . I limiti di applicabilità di questi sistemi si ottengono considerando le due misure di corrente e tensione ad essi associate. Vale a dire, per resistenze  $R$  basse il metodo che conviene adottare è quello del Voltmetro a Valle purché si disponga di un voltmetro sufficientemente sensibile (a meno di non inviare in  $R$  correnti molto elevate). Per resistenze elevate conviene viceversa il metodo del Voltmetro a Monte, ma il limite può venire dalla sensibilità dell'amperometro. In generale non esiste una ricetta definitiva su quale dei due metodi conviene scegliere; caso per caso una valutazione complessiva, che tenga conto di tutti i parametri in gioco (classe degli strumenti ed errori di lettura inclusi) deve essere effettuata e sulla base di questa sarà possibile decidere quale dei due metodi dà l'errore (a priori) più piccolo.

Anche con un solo strumento ad ago è possibile costruire un Ohmetro. Un esempio tipico è mostrato in Fig.15.

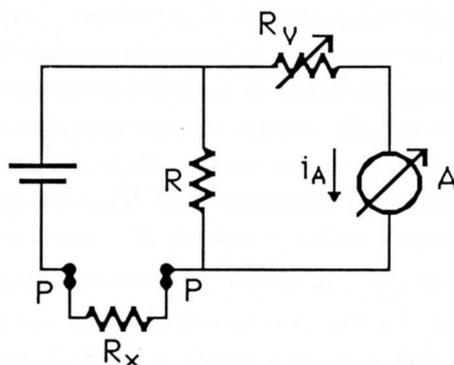


Fig.III.15

$R_V$  contiene anche la resistenza interna dell'amperometro \*. Troviamo la dipendenza della corrente  $i_A$  che circola nell'amperometro, in funzione di  $R_X$ :

$$i_A = \frac{\mathcal{E}}{R_X + R \parallel R_V} \cdot \frac{R}{R + R_V} = \frac{\mathcal{E}}{R_X \left(1 + \frac{R_V}{R}\right) + R_V} = \frac{i_{fs}}{1 + R_X \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}\right)} \quad (\text{III.19})$$

dove  $i_{fs} = \mathcal{E}/R_V$  rappresenta la corrente di fondo scala. Riportando in grafico  $i_A = i_A(R_X)$  otteniamo l'andamento di Fig.16.

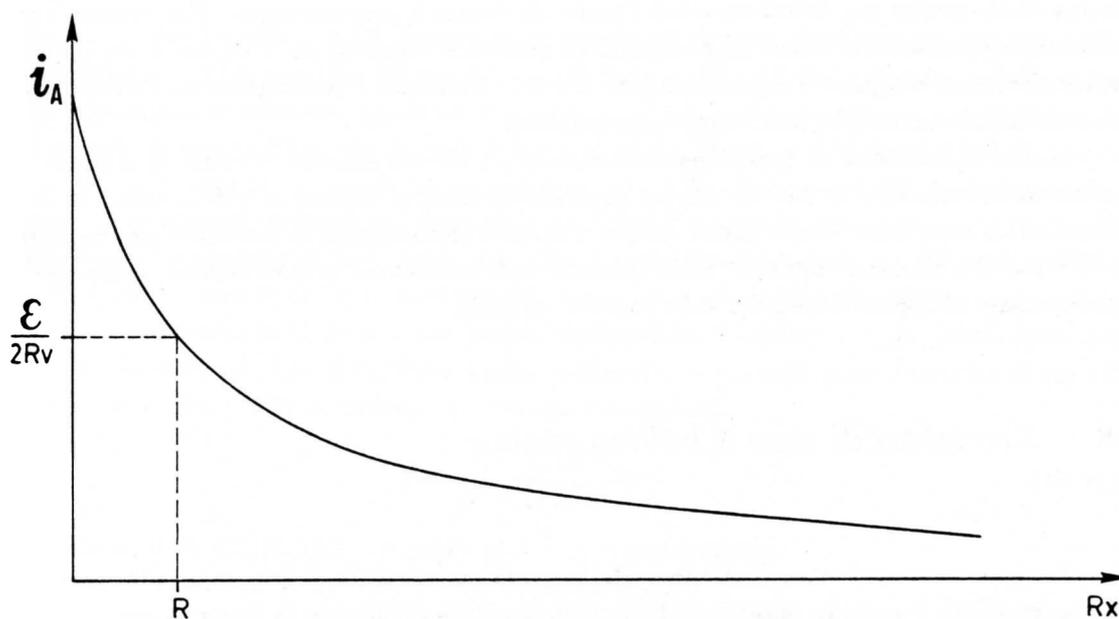


Fig.III.16

\* Il simbolo adottato per  $R_V$  sta a significare una resistenza di valore variabile (reostato). Vedremo più avanti qualche esempio di come esso si possa realizzare (Cap.IV,§1).

Se vogliamo convertire la scala dello strumento da *Ampère* a *Ohm*, avremo una scala “invertita” e oltretutto non lineare: lo zero della corrente corrisponde a  $R_X \rightarrow \infty$ , mentre  $R_X = 0$  corrisponde alla massima corrente ( $i_{fs}$ ). Poiché  $\mathcal{E}$  (ordine di grandezza di qualche  $V$ ) è fornita da una pila, inserita dentro la scatola che contiene anche lo strumento, essa non si mantiene costante nel tempo e occorre, prima di ogni misura, verificare la taratura: la procedura è estremamente semplice e consiste nel sostituire la resistenza  $R_X$  con un cortocircuito; variando  $R_V$  mediante un’opportuna manopola si porta l’ago dello strumento sul fondo scala (corrispondente a  $0 \Omega$ ); a questo punto lo strumento è tarato e si può procedere all’inserzione di  $R_X$  e alla sua misura.

La scala non consente misure molto precise di  $R_X$ , soprattutto di quelle che danno luogo a correnti  $i_A$  molto al di sotto di  $\frac{\mathcal{E}}{2R_V}$ , in quanto gli errori di lettura diventano, da questo punto in poi, estremamente importanti. La Fig.16 ci fa infatti vedere che per correnti piccole la pendenza molto modesta di  $i_A = i_A(R_X)$  comporta grosse indeterminazioni su  $R_X$ , anche per moderate incertezze su  $i_A$ .

Guardiamo, facendo anche un esempio numerico, per quali valori di  $R_X$  la corrente si dimezza rispetto al valore di fondo scala  $i_{fs} = i_A(R_X = 0)$ . Si abbiano i seguenti valori:

$$\begin{cases} \mathcal{E} \simeq 1 V \\ R \simeq 20 \Omega \\ R_V \simeq 100 k\Omega \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Quando  $R_X = R$  la corrente si dimezza; infatti dalla 19) si ottiene:

$$i_A(R_X = R) = \frac{\mathcal{E}}{2R_V + R} \simeq \frac{\mathcal{E}}{2R_V} = \frac{i_{fs}}{2} \quad (\text{III.21})$$

La precisione è quindi dominata dalla classe dello strumento solo per resistenze fino a qualche decina di  $\Omega$ , mentre per valori superiori l’errore di lettura è preponderante. Per ovviare a questo problema tali strumenti hanno la possibilità di cambiare valore di  $R_x$  a centro scala (gli estremi nominali restano sempre 0 e  $\infty$ ) aumentando  $R$  e  $R_V$ . Un limite a questa procedura è stabilito dalla sensibilità dello strumento usato come amperometro.

Misure di resistenza di qualità intrinsecamente più elevata saranno descritte in seguito: alcune (*Ponti di Wheatstone, di Kelvin, Misure potenziometriche*) si basano su galvanometri usati come rivelatori di zero; altre invece fanno ricorso a metodi elettronici, non foss’altro per migliorare le prestazioni dei rivelatori di zero. Tutti questi metodi consentono misure estremamente precise ed hanno campi di applicazione assai vasti (dai  $m\Omega$  ai  $M\Omega$ ).

## 8.— Rivelatori di zero a bobina mobile

Si tratta sostanzialmente di galvanometri in cui la caratteristica di gran lunga più curata in fase di progettazione è stata la sensibilità; la precisione ed eventualmente la linearità sono di modesto interesse. All’impiego come rivelatori di zero, si adattano perfettamente galvanometri con filo di torsione e lettura a leva ottica, possibilmente dotati di uno shunt universale che consenta di lavorare in condizioni prossime a quelle critiche e di adattare la sensibilità del rivelatore al grado di azzeramento desiderato. E’ importante che lo strumento possa indicare sia correnti di un segno che dell’altro (sia cioè a zero centrale) e che esista anche la possibilità di regolare lo zero dello strumento

(ciò è sempre necessario lavorando con strumenti sensibili); se il sistema di lettura a leva ottica è realizzato dall'utente con proiettore e scala mobile, si tratterà solo di spostare la scala o il proiettore, se invece si tratta di strumenti "integrati", il controllo viene fatto agendo sull'estremo fisso del filo di torsione, dotato di manopola di aggiustamento.

Come vedremo in numerosi esempi nel seguito, i sistemi di misura di "zero" nei quali questi strumenti trovano impiego, consistono nel rendere nulla la ddp  $\mathcal{E}_z$  fra due terminali di una rete lineare che contiene la grandezza da misurare  $G_x$  (una resistenza o una fem ad esempio) ed almeno un altro componente elettrico  $P$  (per esempio una resistenza) che l'utente è in grado di variare.

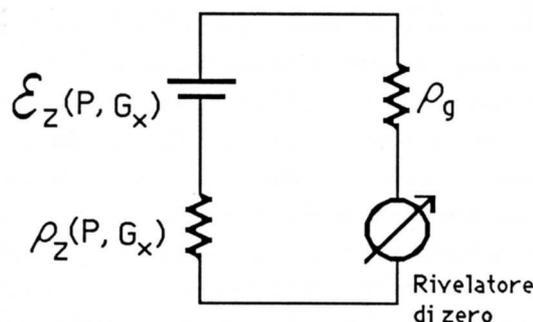


Fig.III.17

Rispetto ai due terminali ove è inserito lo strumento, il circuito potrà sempre mettersi nella forma equivalente di Thévenin (Fig.17) con  $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z(P, G_x)$  e  $\rho_z = \rho_z(P, G_x)$  (citando esplicitamente le uniche dipendenze di interesse, quelle da  $P$  e da  $G_x$ );  $\rho_g$  è la resistenza interna del rivelatore di zero. Il metodo di misura è tale che quando  $P$  assume il valore  $P_o$  per cui  $\mathcal{E}_z(P_o, G_x) = 0$ , allora sussiste una semplice relazione fra la grandezza  $G_x$  e  $P_o$  che permette di determinare  $G_x$ . Senza entrare in ulteriori dettagli che dipendono dal tipo di misura in esame, notiamo che tanto più è sensibile lo strumento di zero, tanto più piccola sarà l'incertezza con cui potremo stabilire che  $\mathcal{E}_z(P_o)$  è effettivamente nulla; in altri termini, tanto più è sensibile lo strumento, tanto più la sua indicazione  $\varphi$  si discosterà da zero per piccole variazioni di  $P$  attorno a  $P_o$  (e quindi tanto più piccola sarà l'indeterminazione di  $G_x$  dovuta alla sensibilità). In generale, dato il circuito di Fig.17, abbiamo ( $\varphi$  indicazione dello strumento,  $K_r$  costante reometrica):

$$\varphi = \frac{1}{K_r} \frac{\mathcal{E}_z(P, G_x)}{\rho_z(P, G_x) + \rho_g} \quad (\text{III.22})$$

che nell'intorno di  $P_o$  ( $\mathcal{E}_z(P_o, G_x) = 0$ ,  $\varphi(P_o, G_x) = 0$ ) si può scrivere:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{K_r} \frac{\Delta\mathcal{E}_z(P, G_x)}{\rho_z(P_o, G_x) + \rho_g} \quad (\text{III.23})$$

Il rivelatore di zero che, a parità di  $\Delta\mathcal{E}_z(P, G_x)$  e  $\rho_z(P_o, G_x)$ , darà l'indicazione  $\Delta\varphi$  più grande sarà da preferire; abbiamo già affrontato questo problema nel Cap.II,§4 e abbiamo visto che, potendo scegliere fra tanti galvanometri tutti uguali fra loro salvo il numero delle spire della bobina, quello con  $\rho_g$  uguale a  $\rho_z(P_o, G_x)$  è da preferire.

Nel seguito incontreremo anche rivelatori di zero che si basano su strumenti elettronici, caratterizzati da elevatissima sensibilità voltmetrica ( $< 1 \mu V/div$ ) e resistenza interna ( $\rho_g \simeq 10^8 \div 10^{10} \Omega$ ); come vedremo essi sono estremamente utili in situazioni in cui la presenza di una grossa  $\rho_z(P, G_x)$  riduce la sensibilità ottenibile con un galvanometro.

Quanto ai simboli per il rivelatore di zero useremo sia la notazione RZ che ND (*Null Detector*).

## 9.— Strumenti universali a bobina mobile

Gli strumenti universali a bobina mobile (detti anche *multimetri* – o *tester* – *analogici*), sono strumenti che consentono, usando un unico equipaggio mobile, di misurare sia differenze di potenziale che correnti continue (e magari anche le analoghe grandezze in corrente alternata), nonché resistenze. La selezione delle varie funzioni (ddp in continua: DCV -Direct Current Volt-, correnti in continua: DCA -Direct Current Ampère-, resistenze:  $\Omega$ ) viene fatta tramite una manopola che, azionando opportuni commutatori, realizza le varie configurazioni elettriche attorno alla bobina del galvanometro. Ad esempio, quando selezioniamo la misura di corrente continua, la bobina (chiusa sulla resistenza critica) viene collegata in parallelo allo shunt delle correnti, a sua volta inserito fra i due morsetti di ingresso; una volta selezionata la funzione DCA, il cambiamento delle varie portate di corrente (effettuato mediante un selettore) varia le connessioni dello shunt e quindi i relativi rapporti (vedi Fig.6). Analogamente la selezione di funzione DCV inserisce in serie alla bobina le resistenze di valore opportuno, corrispondenti al fondo scala selezionato (vedi Fig.13). Nella configurazione a Ohmetro avremo viceversa un circuito di quelli visti nel §7 e quindi il multimetro deve contenere al suo interno una pila, esclusivamente per questa funzione. Sarà inoltre presente un controllo di *zero-Ohm* per tarare l'Ohmetro nelle varie portate.



Fig.III.18

La scala è in genere multipla, cioè del tipo in Fig.18; vale a dire ci saranno almeno tre scale direttamente tarate in  $V$ ,  $mA$ ,  $\Omega$ ; ognuna di esse sarà a sua volta divisa in più di un modo, per accoppiarsi con i vari fondo scala possibili.

Ovviamente lo strumento dispone di due morsetti di ingresso, che vanno utilizzati per collegarlo al circuito su cui si vogliono compiere le misure. In genere, se si tratta di misure di corrente, il tipo di inserzione è – anche se provvisorio – non proprio immediato: infatti esso richiede l'interruzione del ramo di misura, il ripristino del collegamento tramite lo strumento e quindi la misura vera e propria. Quanto alle misure di differenza di potenziale, esse possono farsi ( e di fatto quasi sempre si fanno) senza interrompere il circuito, ma stabilendo un contatto provvisorio fra i morsetti dello strumento e i due terminali del circuito fra cui vogliamo misurare la ddp. Per fare questo si adoperano i cosiddetti *puntali* che sono in dotazione allo strumento: essi nient'altro sono che due cavetti (ognuno collegato a un morsetto del multimetro) che recano all'estremità libera un conduttore rigido (in genere ottone cromato) terminante a punta. Il contatto con il circuito esterno si realizza premendo questa punta contro il terminale di interesse (Fig.19).

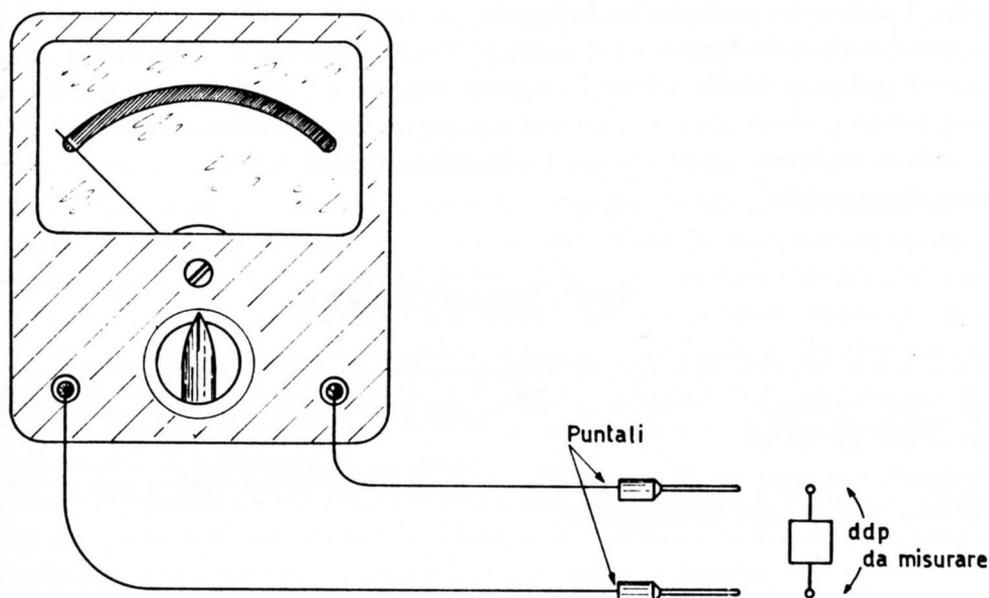


Fig.III.19

Le misure col multimetro sono quelle in cui più spesso si rendono necessarie le correzioni fra valore misurato e valore preesistente alla misura, proprio perché le inserzioni dello strumento sono di tipo provvisorio e non permanente.

Quanto alla misura di resistenze, il collegamento si effettua adoperando i puntali, appoggiandoli (magari con una pressione *decisa* per evitare eccessive resistenze di contatto) ai capi della resistenza da misurare. La configurazione impiegata è quella della Fig.15, dove PP sono i puntali. Prima di

procedere alla misura sarà bene, ponendo gli estremi dei puntali in cortocircuito fra loro, controllare che l'ago vada a fondo scala, ovvero segni  $R = 0$ ; se ciò non si verifica si agisce sul controllo *zero-Ohm* (si varia cioè la resistenza  $R_V$  di Fig.15), fino ad ottenere la condizione di cui sopra. Ricordiamo che tale controllo si rende necessario sia per correggere un eventuale invecchiamento della pila che per compensare la resistenza non nulla dei puntali (in questo modo infatti la si sottrae automaticamente nelle misure successive). Il multimetro analogico è uno strumento in genere di qualità non eccelsa (difficilmente è di classe inferiore di 2) e di sensibilità non troppo spinta. Queste caratteristiche sono in gran parte dovute al fatto che esso è lo *strumento portatile* per antonomasia, e fra le sue doti la robustezza gioca un ruolo primario; purtroppo quest'ultima non si accompagna quasi mai a grandi sensibilità e precisioni. Difficilmente gli  $\Omega/V$  dello strumento sono superiori a 10000 (cioè la corrente di fondo scala dello strumento base è  $100 \mu A$ ), molto spesso sono anche inferiori. Multimetri di qualità assai buona possono avere 100000  $\Omega/V$ . Essi sono (o *erano*, perché sono oramai soppiantati dagli strumenti elettronici in quasi tutti i loro utilizzi) estremamente utili per fare diagnosi su circuiti elettrici in maniera rapida; misure vere e proprie di accuratezza superiore a qualche percento non sono con essi possibili; tuttavia essi, insieme ad un oscillografo, costituiscono molto spesso l'attrezzatura base per misure nel campo dei circuiti elettronici dove, nella maggioranza dei casi, le grandezze da misurare non richiedono precisioni particolarmente spinte.

Qualora si vogliano compiere misure più accurate (diciamo meglio del percento) delle grandezze elettriche, il multimetro analogico lascia il posto o a strumenti a bobina mobile dedicati (voltmetri, amperometri) o a metodi di misura (ad esempio i *Ponti*) o a strumenti universali di tipo elettronico (al giorno d'oggi quasi sempre digitali). Di questi ultimi ve n'è una vastissima gamma: anche i più economici hanno prestazioni spesso superiori a quelle dei vecchi multimetri analogici più sofisticati. Prima però di descrivere questi strumenti esaminiamo metodi "classici" di misura di resistenze e differenze di potenziale.

#### NOTA BIBLIOGRAFICA

**FR 59, LA 38, DA 75 e CO 85** sviluppano ampiamente gli argomenti di questo capitolo. Con un taglio decisamente orientato all'utilizzo pratico degli strumenti, gli argomenti sono anche trattati in **CO 83, ZI 86**.

Si ricorda comunque che gli approfondimenti degli argomenti del capitolo sono di fatto costituiti dalla pratica con le misure in laboratorio.

## IV

### I PONTI PER LA MISURA DI RESISTENZE

#### 1.- Resistori e campioni di resistenza

I resistori *commerciali* che generalmente vengono impiegati nella costruzione di apparecchiature elettriche e elettroniche sono in genere di piccolo wattaggio (da alcuni *Watt* fino a un minimo tipico di  $1/8$  di *Watt*) e si presentano come cilindretti aventi alle estremità due reofori per saldare il resistore al resto del circuito (Fig.1).

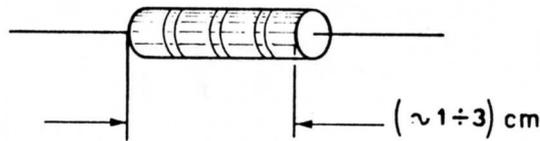


Fig.IV.1

Il cilindretto reca anche delle fascette colorate che, in accordo a un codice adottato internazionalmente, danno il valore della resistenza e la sua tolleranza. Il campo dei valori coperto da questo tipo di resistenze va tipicamente da qualche decimo di  $\Omega$  a qualche decina di  $M\Omega$ . Il materiale resistivo vero e proprio è un *impasto di carbone* a coefficiente di temperatura abbastanza contenuto ( $\sim 5 \cdot 10^{-4} / ^\circ C$ ); in resistori di qualità superiore si tratta invece di un sottile *strato di una lega metallica* a piccolo coefficiente di temperatura ( $\sim 5 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$ ) depositato su un supporto ceramico e successivamente smaltato all'esterno. In entrambi i casi è realizzato un contatto di tipo ohmico fra l'elemento resistivo vero e proprio e i due reofori.

La tecnica di costruzione dei resistori è altamente affidabile, tanto che in moltissime applicazioni di precisione, come negli strumenti elettronici di misura, le caratteristiche di stabilità e costanza nel tempo dei resistori a strato metallico si confanno ai requisiti più stringenti.

Nelle misure di precisione in laboratorio, i campioni che sono più utili sono quelli che consentono di disporre di un grosso campo di variazione di valori (diciamo 4-6 decadi, cioè 4-6 ordini di grandezza) a passi costanti entro la decade, in modo da coprire praticamente con continuità tutto il campo; si tratta quindi di *cassette di resistenze* e non di semplici resistori (Fig.2).

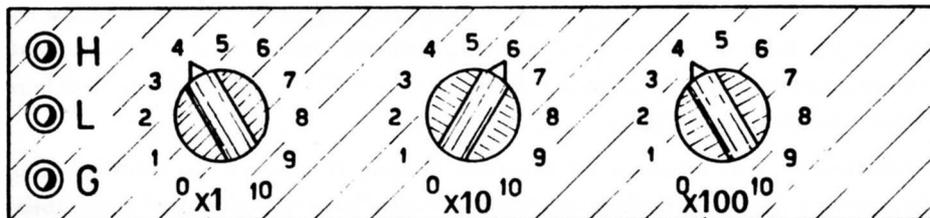


Fig.IV.2

Il valore di resistenza assunto dalla cassetta è dato dalla posizione delle manopole (a undici posizioni), una per decade (nella Fig.2: 3 decadi, una per  $10\Omega$  totali, una per  $100\Omega$  e l'ultima per  $1000\Omega$ ). La resistenza impostata compare tra i morsetti H e L; vi è anche un terzo morsetto G sulla cui funzione per il momento non ci soffermiamo, poiché interessa principalmente le applicazioni della cassetta in corrente alternata. Nella Fig.3 è riportato un esempio di come si può realizzare una decade di resistenze del tipo ora descritto:

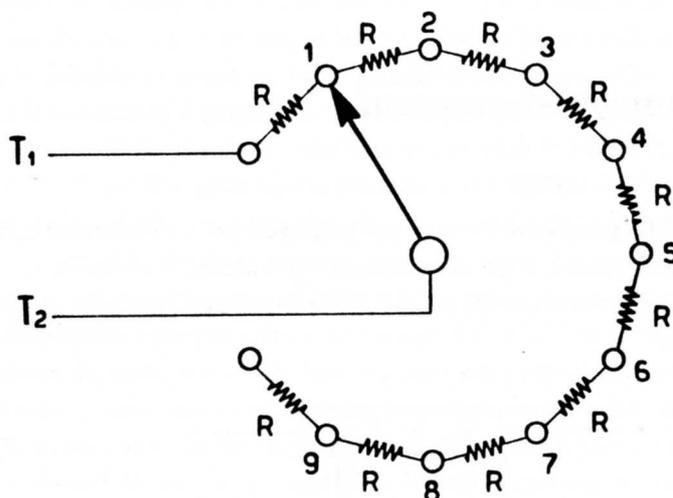


Fig.IV.3

A seconda della posizione del cursore, fra i due terminali  $T_1$  e  $T_2$  è presente una resistenza pari alla serie di  $n$  resistenze tutte nominalmente uguali e pari a  $R$ , con  $n$  variabile fra 0 e 10. Quello di Fig.3 è da considerare il circuito equivalente e non il circuito reale: la configurazione reale infatti si realizza tramite combinazioni leggermente più complesse della semplice serie di resistori tutti uguali. I resistori campione sono resistori a filo e il materiale di cui son fatti è in genere o Manganina o leghe addirittura superiori dal punto di vista della stabilità con la temperatura ( $\sim 2 \cdot 10^{-5}/^{\circ}C$ ). La precisione di taratura dei campioni varia da decade a decade ed è più alta quella relativa delle decadi a più alto valore ( $0.05\% \div 0.02\%$  per campioni di alta qualità). L'elemento più critico delle cassette campione (soprattutto per le decadi di piccolo valore) è costituito dai commutatori che devono introdurre la resistenza più bassa possibile; essi quindi devono essere stabili e robusti meccanicamente; inoltre non devono introdurre fem di tipo elettrochimico e per questo sono rivestiti con uno strato di grasso inerte che oltre ad assicurare la lubrificazione, protegge la superficie di contatto da aggressioni chimiche. Essendo i commutatori chiusi all'interno della cassetta, essi sono anche protetti dalla polvere.

In laboratorio esistono anche altre cassette campione, decisamente meno moderne, tutte di precisione ragguardevole ( $\frac{\Delta R}{R} \sim 5 \cdot 10^{-4}$  per valori da  $100 \Omega$  in su), che coprono, meno finemente, campi di valori più limitati; al posto dei commutatori essi hanno *cavicchi*, cioè *spinotti conici* che vengono inseriti, con una pressione decisa, in opportune sedi e cortocircuitano così le resistenze che non si vogliono inserire (vedi Fig.4).

Una precauzione fondamentale da prendere quando si adopera un resistore, è quella di non superare la massima potenza dissipabile su di esso, pena il danneggiamento irreversibile del resistore medesimo; lavorando con le cassette campione questa precauzione merita un particolare scrupolo nell'essere rispettata poiché si rischia di danneggiare apparecchiature di particolare pregio. In

corrispondenza di ogni decade il costruttore riporta la massima corrente che si può far circolare sulle resistenze della decade (cioè indirettamente il wattaggio). Quindi, prima quindi di montare le resistenze campione si abbia cura di stimare quale sarà la corrente che circolerà in esse una volta montate; per questa valutazione ci si può servire di un multimetro per misurare la tensione dei generatori e la resistenza degli altri resistori del circuito.

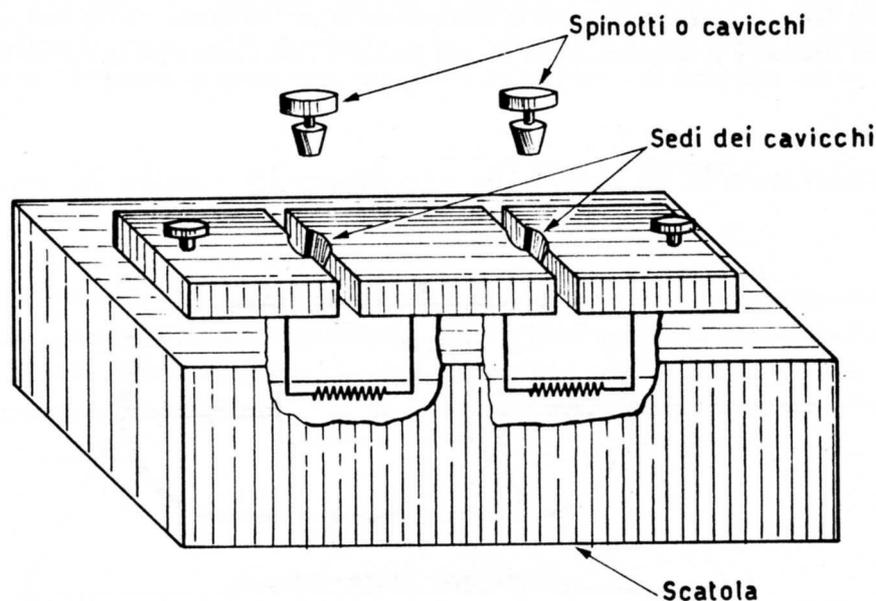


Fig.IV.4

Resistenze campione di piccolo valore ( $< 1\Omega$ ) non vengono realizzate come visto sopra, cioè con due soli terminali di uscita, perché quando sono inserite nel circuito non è più possibile distinguere fra il contributo alla resistenza totale derivante dal resistore vero e proprio e quello dovuto ai collegamenti e ai contatti. Esse sono pertanto realizzate (si ricordi lo shunt da alta corrente del Cap.III,§4) con 4 terminali a morsetto, due particolarmente robusti (*terminali di corrente*,  $T_C$  in Fig.5) e due di dimensioni standard (*terminali di tensione*,  $T_V$  in Fig.5).

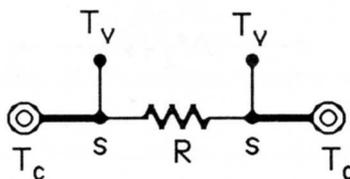


Fig.IV.5

I reofori dei terminali di tensione sono saldati in S all'estremità della resistenza vera e propria. La necessità di realizzare resistori di piccolo valore con questa tecnica può essere compresa in base a quanto detto nel Cap.III, §4 e sarà comunque ancor più evidente quando descriveremo i metodi di

misura di resistenze di piccolo valore.

Campioni di resistenze di valore molto elevato ( $> 10^7 \Omega$ ) sono principalmente curati dal punto di vista dell'isolamento fra i due reofori: infatti perdite superficiali anche piccole fra i due terminali del resistore, possono alterarne il valore in maniera sostanziale. Per questo motivo, resistenze di valore elevato sono generalmente racchiuse in ampole di vetro evacuate, o riempite di gas inerte (Fig.6) e trattate all'esterno con una vernice ai siliconi. Così, oltre a proteggere l'elemento resistivo dall'umidità dell'atmosfera, si riducono drasticamente le perdite spurie fra i reofori in quanto il vetro è un ottimo isolante e il rivestimento ai siliconi presenta ridottissime perdite superficiali.

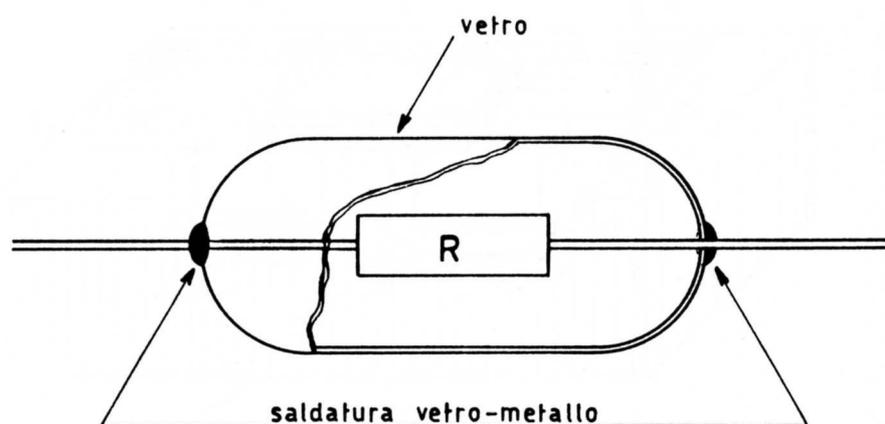


Fig.IV.6

In questo paragrafo abbiamo trattato solo di resistori impiegati in corrente continua; abbiamo cioè sorvolato sui problemi che si incontrano nella realizzazione di resistori che mantengano buone caratteristiche anche in corrente alternata. Questo aspetto sarà trattato in dettaglio nei Capp.IX e X.

Accenniamo ora alle resistenze variabili con continuità e a come esse sono realizzate: un modo tipico è quello di disporre di un filo di lega ad alta stabilità (per esempio Manganina) e di realizzare, mediante un pattino (detto  *cursore* ) un contatto strisciante (vedi Fig.7).

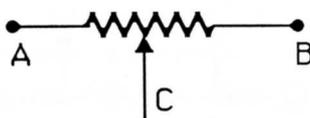


Fig.IV.7

La resistenza fra A e C e fra C e B varia a seconda della posizione di C. Quello in figura è propriamente detto  *potenziometro* ; per usarlo come  *reostato*  (cioè come resistenza variabile fra due terminali, per esempio A e C), lo si può montare come in Fig.8).



Fig.IV.8

Questa configurazione offre, rispetto a quella precedente, il vantaggio che se durante il movimento di C il contatto peggiora addirittura fino ad interrompersi, la continuità è comunque assicurata. Invece di adoperare un contatto strisciante su un filo metallico si può anche usare un contatto strisciante su un sottile supporto conduttore depositato su un blocco di materiale isolante.

## 2.— *Principio di misura di resistenza col Ponte di Wheatstone*

Il *Ponte di Wheatstone* è il metodo principe per la misura accurata di resistenze; è interessante studiare il metodo in dettaglio sia per il suo interesse pratico (è un metodo di misura ancora attuale), sia perché rappresenta il *prototipo* di molte altre varianti nel campo delle misure di grandezze elettriche.

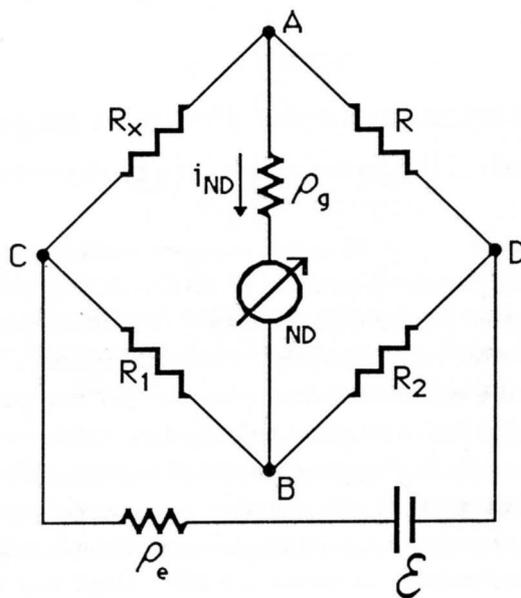


Fig.IV.9

Il circuito corrispondente al Ponte di Wheatstone è mostrato in Fig.9:  $R_x$  è la resistenza di cui si vuol misurare il valore, mentre  $R_1$ ,  $R_2$  ed  $R$  sono resistenze di valore noto. ND è il rivelatore di zero,  $\mathcal{E}$  un generatore di forza elettromotrice, mentre  $\rho_g$  e  $\rho_e$  sono le resistenze interne del rivelatore di zero e del generatore rispettivamente.

Supponiamo che la condizione di zero su ND sia soddisfatta; ciò significa che  $i_{ND} = 0$  e pertanto  $V_A$  e  $V_B$  sono equipotenziali. Prendendo come nodo di riferimento D, possiamo calcolarci la tensione  $V_A$  e  $V_B$  con la formula del partitore ( $i_{ND} = 0$ ):

$$V_A = V_C \cdot \frac{R}{R_x + R} \quad (\text{IV.1})$$

$$V_B = V_C \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.2})$$

Imponendo la condizione di equilibrio, ovvero l'equipotenzialità di  $V_A$  e  $V_B$ , si ricava:

$$\frac{R}{R_x + R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.3})$$

che può mettersi nella forma:

$$\frac{R}{R_x} = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{IV.4})$$

La (4) consente di esprimere il valore della resistenza incognita in funzione di quelle note

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R \quad (\text{IV.5})$$

La (5) ci dice che la condizione di equipotenzialità fra A e B, non dipende né da  $\rho_g$ , né da  $\rho_e$ , né da  $\mathcal{E}$ , ma solo dal valore delle quattro resistenze che costituiscono il ponte propriamente detto. Essendo non difficile procurarsi resistenze campione di precisione ragguardevole, questo è un obiettivo vantaggioso rispetto agli altri metodi di misura di resistenze visti nel capitolo precedente, per i quali il valore di  $R_x$  dipendeva dalla taratura di uno o più strumenti. Tuttavia vedremo fra poco che la sensibilità della misura, che in qualche caso può limitarne la precisione, *dipende* dal valore di *tutte le resistenze* in gioco ed anche da  $\mathcal{E}$ .

### **3.— Procedure di azzeramento del Ponte ed errori di misura dovuti alla precisione dei campioni**

Nelle realizzazioni pratiche  $R_1$  ed  $R_2$  sono resistenze campione che possono assumere valori diversi, scalati in maniera abbastanza grossolana (1-10-100-1000 $\Omega$ ), mentre  $R$  è una cassetta campione a più decadi. Il rivelatore di zero è generalmente un galvanometro dotato di shunt, cioè con varie portate, o, come si dice, di varie *sensibilità*. Prima di montare il Ponte è bene considerare il wattaggio delle resistenze onde evitarne il danneggiamento; per fare queste valutazioni è necessario avere un'idea del valore di  $R_x$ . Per ottenerla si può usare un multimetro. Scelti i parametri  $\mathcal{E}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  ed eventualmente  $\rho_e$  in modo da rispettare i limiti di potenza sulle resistenze campione (anche su  $R_x$ , se se ne conosce il wattaggio), si può procedere a montare il ponte. Come regola generale si tenga presente che – a meno che non sia specificato diversamente – le resistenze in laboratorio devono essere adoperate in modo da dissiparvi al massimo 0.25W. Dopo aver verificato, ed eventualmente aggiustato, lo zero del galvanometro in assenza di eccitazione, si accende il generatore e si procede all'azzeramento del ponte: partendo da sensibilità basse del galvanometro, si cerca lo zero agendo su  $R$ , tenendo fissi i valori di  $R_1$  e  $R_2$ ; quindi si aumenta la sensibilità del rivelatore di zero e si insegue con  $R$  la condizione di equilibrio; la procedura si conclude quando il galvanometro, posto nella massima sensibilità, segna zero. L'esistenza di una condizione di zero col galvanometro nella portata più sensibile, presuppone un passo di variazione di  $R$  estremamente fine. Viceversa, non di rado la sensibilità del metodo è così buona che l'impostazione di due valori di  $R$ ,  $R'$  e  $R''$  che differiscono per la più piccola variazione effettuabile sulla cassetta (per esempio 0.1 $\Omega$ ), provoca il posizionamento del galvanometro una volta da una parte rispetto allo zero ( $l'$ ), un'altra dalla parte opposta ( $l''$ ). Se ciò si verifica, il valore di  $R$  corrispondente allo zero va ottenuto per interpolazione dei due valori  $R'$  e  $R''$  e delle due letture  $l'$  e  $l''$ . Rinviando momentaneamente il problema della

sensibilità, riprendiamo l'espressione di  $R_x$  e valutiamo gli errori *a priori* che commettiamo nella sua determinazione. Considerando gli errori massimi, avremo a causa della (5):

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (\text{IV.6})$$

dove questi errori sono quelli *a priori*, generalmente forniti dal costruttore. Poiché gli errori relativi sulle decadi delle cassette non sono tutti uguali, dovremo fare un po' di attenzione nel valutarli. Se, ad esempio,  $R$  corrispondente all'equilibrio è risultata essere  $5417\Omega$  l'errore  $\frac{\Delta R}{R}$  si otterrà come

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{R} [5000 \cdot \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_3 + 400 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_2 + 10 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_1 + 7 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0] \quad (\text{IV.7})$$

dove  $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_n$  indica l'errore, fornito dal costruttore, sulla decade  $n$ -esima,  $n$  essendo l'esponente di 10 che individua la decade.

La presenza del rapporto  $\frac{R_1}{R_2}$  nella formula (5) che esprime  $R_x$  in funzione delle grandezze note, suggerisce una procedura di misura che esalta ulteriormente la precisione del metodo. Infatti, supponiamo di aver compiuto una prima misura con dei valori qualsiasi di  $R_1$  e  $R_2$ ; otterremo all'equilibrio un valore  $R'$  per  $R$  tale che  $R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R'$ . Facciamo quindi una seconda misura che differisce dalla precedente unicamente per lo scambio di  $R_1$  con  $R_2$ . Otterremo lo zero per un valore  $R'' \neq R'$ , ma tale che  $R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot R''$ .  $R_x$  può allora essere valutata dalla media geometrica delle due misurazioni:

$$R_x = \sqrt{R' \cdot R''} \quad (\text{IV.8})$$

con una indeterminazioni *a priori*:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R'}{R'} + \frac{1}{2} \frac{\Delta R''}{R''} \quad (\text{IV.9})$$

La precisione non dipende in alcun modo dalla taratura delle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ .

Sembrirebbe che il metodo potesse applicarsi indipendentemente dal valore di  $R_1$  e di  $R_2$ . In pratica ciò non è vero e la procedura di fatto richiede che  $R_1 \approx R_2$ . Infatti, supponiamo che  $\frac{R_1}{R_2} \approx 10$ .

In questo caso  $\frac{R'}{R''} \approx 10^{-2}$  e sarà assai difficile coprire con la cassetta campione, a meno che non abbia un numero di decadi particolarmente elevato, entrambi i valori con sufficiente risoluzione. Inoltre nelle due configurazioni il regime delle correnti nei vari rami è assai diverso e questa dissimmetria non aiuta certo la compensazione di eventuali effetti spuri; la procedura dello scambio di  $R_1$  con  $R_2$  si adotta quindi solo quando  $R_1$  è di valore prossimo a  $R_2$ .

#### 4.— **Sensibilità del Ponte di Wheatstone: misura sperimentale**

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato anche il caso in cui la variazione più fine possibile nella resistenza campione  $R$ , provocava una deflessione talmente ampia del galvanometro che il valore di  $R$  corrispondente all'equilibrio era ottenibile solamente mediante interpolazione. Molto probabilmente in un caso di questo genere l'errore associato alla sensibilità finita del metodo, risulterà inferiore a quello di taratura del campione. Se, ad esempio, la più piccola variazione di  $R$  corrisponde ad una sua variazione relativa di  $10^{-5}$ , essa sarà trascurabile rispetto all'errore di taratura di  $R$

medesimo ( $\sim 20$  o  $50$  volte maggiore a seconda del campione). In generale però la indeterminazione associata alla sensibilità non sarà trascurabile rispetto agli altri contributi e pertanto occorre sempre darle una valutazione.

Diamo intanto una definizione della sensibilità della misura col Ponte di Wheatstone:

$$S = \lim_{\Delta R_x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\frac{\Delta R_x}{R_x}} \quad (\text{IV.10})$$

cioè essa è il rapporto (per  $\Delta R_x \rightarrow 0$ ) fra la variazione dell'elongazione sullo strumento ( $\Delta l$ ) e la corrispondente variazione relativa della resistenza  $R_x$  da misurare.

Questa definizione consente di valutare l'errore relativo  $(\frac{\Delta R_x}{R_x})_S$ , dovuto alla sensibilità, nel seguente modo: se  $\Delta l_m$  rappresenta la minima deflessione percepibile (diciamo  $\frac{1}{4}$  della divisione più piccola), allora:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right)_S = \frac{\Delta l_m}{(S)_{eq}} \quad (\text{IV.11})$$

dove si è usata la notazione  $(S)_{eq}$  per indicare che la sensibilità in gioco è quella attorno alla posizione di equilibrio del ponte, ovvero allo zero del galvanometro.

La sensibilità così definita sarebbe assai scomoda da misurare, poiché si tratterebbe di andare ad aggiungere resistenze piccole in serie ad  $R_x$  ( $R_x + \Delta R_x$ ) o grosse in parallelo ( $R_x - \Delta R_x$ ), dovremmo cioè operare sul ramo di  $R_x$ . Si può procedere diversamente, agendo su  $R$  che è una cassetta di resistenze: infatti, valendo all'equilibrio la (5) e essendo fissate  $R_1$  e  $R_2$ , abbiamo:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right)_{eq} = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{eq} \quad (\text{IV.12})$$

e pertanto la sensibilità, data dalla (10), può essere valutata, all'equilibrio come:

$$(S)_{eq} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta l}{\Delta R}\right)_{eq} \cdot (R)_{eq} \quad (\text{IV.13})$$

Nel seguito a meno che non sia necessario per evitare equivoci, ometteremo il simbolo  $eq$ , ma resta inteso che la sensibilità di cui parleremo è quella nell'intorno dell'equilibrio del ponte.

In pratica per misurare la sensibilità si procede come segue: una volta raggiunto lo zero, o un intorno dello zero, con il galvanometro nella portata più sensibile, si effettua una variazione  $\Delta R_M$  di  $R$  tale che il galvanometro compia una variazione di deflessione  $\Delta l_M$  sufficientemente ampia da poter essere valutata senza eccessiva indeterminazione. La sensibilità, nell'intorno dell'equilibrio, è allora approssimata dall'espressione:

$$S_M \approx \frac{\Delta l_M}{\Delta R_M} \cdot R_M \quad (\text{IV.14})$$

L'indice M sta a ricordare che questa valutazione è il risultato di una misura; l'errore di sensibilità nella misura di  $R_x$  verrà quindi valutato come:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right)_S = \frac{\Delta l_m}{S_M} \quad (\text{IV.15})$$

Facciamo un esempio: adoperando un galvanometro nella portata più sensibile ( $100nA/div$ ), con  $R_x \approx 500\Omega$ ,  $R_1 = R_2 \approx 1000\Omega$  e  $\mathcal{E} = 1.2 V$ , sperimentalmente si trovano variazioni di  $8div/\Omega$  attorno al valore di  $R$  corrispondente all'equilibrio; pertanto dalla (14) otteniamo:

$$S_M \approx 8 \cdot 500 = 40 \text{ div}/\% \quad (\text{IV.16})$$

ovvero si ha una variazione di 40 divisioni nel galvanometro per una variazione dell'1% di  $R$ ; equivalentemente  $S_M$  può essere scritta come

$$S_M = 4 \cdot 10^3 / 100\% \quad (\text{IV.17})$$

Tenendo conto che si può apprezzare fino ad  $\frac{1}{4}$  di divisione, la (15) ci dice che:

$$\left( \frac{\Delta R_x}{R_x} \right)_S = 6 \cdot 10^{-5} \quad (\text{IV.18})$$

Questo valore va confrontato con l'errore di taratura su  $R$ , che coincide con l'indeterminazione finale di  $R_x$  se si effettua la procedura di scambio di  $R_1$  e  $R_2$ :

$$\left( \frac{\Delta R}{R} \right)_{tar} \approx 5 \cdot 10^{-4}$$

Non sempre si ottengono delle condizioni di così alta sensibilità; se per esempio avessimo avuto da misurare una resistenza di  $500K\Omega$  sicuramente la nostra sensibilità sarebbe stata decisamente inferiore.

Nel prossimo paragrafo studieremo in dettaglio la ricerca delle condizioni di massima sensibilità dal punto di vista teorico; tuttavia anche sperimentalmente è possibile determinare la condizione di migliore sensibilità per la misura di  $R_x$  facendo misure con vari rapporti  $\frac{R_1}{R_2}$  e misurando, per ognuna di queste configurazioni, la sensibilità. La combinazione  $R_1 - R_2$  che dà la migliore sensibilità, cioè il massimo di  $S_M$ , è da preferire, purché la riduzione dell'errore di sensibilità non porti contropartite su altri errori: se ad esempio l'ottimizzazione della sensibilità, comporta la scelta di una resistenza campione troppo piccola ( $\leq 10\Omega$ ), questa configurazione è sconsigliabile: l'indeterminazione valutabile a priori infatti aumenta, poiché le resistenze dei cavetti di collegamento diventano non più trascurabili rispetto alla resistenza dei campioni utilizzati.

## 5.- *Sensibilità del Ponte con un galvanometro come rivelatore di zero. Valutazione teorica.*

Se si vuole dare una valutazione teorica della sensibilità attorno all'equilibrio

$$(S)_{eq} = \left( \frac{\Delta l}{\Delta R_x} \right)_{eq} \cdot R_x$$

occorre innanzitutto esplicitare l'elongazione del rivelatore di zero in funzione o della corrente che lo attraversa o della tensione ai suoi morsetti. Se il rivelatore di zero è un galvanometro, avremo

$$l = \frac{i_g}{K_A} \quad (\text{IV.19})$$

dove  $K_A$  è la costante reometrica. Pertanto, sostituendo al rapporto incrementale la derivata parziale avremo:

$$(S)_{eq} = \frac{1}{K_A} \left( \frac{\partial i_g}{\partial R_x} \right)_{eq} \cdot R_x \quad (\text{IV.20})$$

Il problema è a questo punto ricondotto a calcolare  $i_g$ .

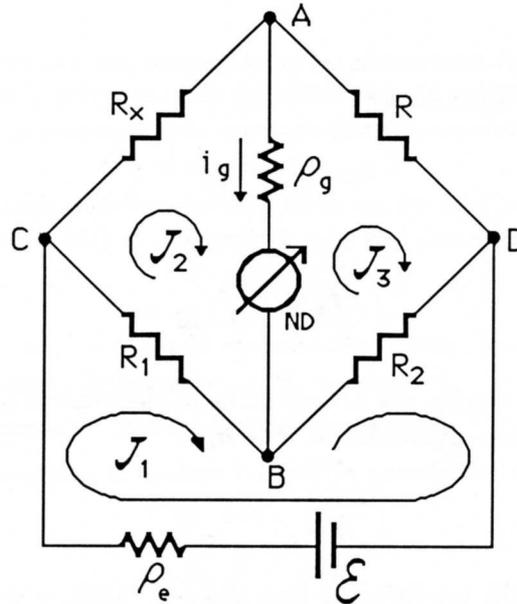


Fig.IV.10

Seguendo il formalismo delle correnti di maglia (Fig.10), si possono calcolare  $\mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$  e quindi  $i_g = \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3$ . Si trova così:

$$i_g = \frac{\begin{vmatrix} \rho_e + R_1 + R_2 & \mathcal{E} & -R_2 \\ -R_1 & 0 & -\rho_g \\ -R_2 & 0 & \rho_g + R + R_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \rho_g + R_1 + R_2 & -R_1 & \mathcal{E} \\ -R_1 & R_1 + R_x + \rho_g & 0 \\ -R_2 & -\rho_g & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_e + R_1 + R_2 & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + R_x + \rho_g & -\rho_g \\ -R_2 & -\rho_g & \rho_g + R + R_2 \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{E}(R_1 R - R_x R_2)}{D} \quad (\text{IV.21})$$

con  $D$  dato da

$$D = (\rho_e + R_1 + R_2)(R_1 + R_x + \rho_g)(\rho_g + R + R_2) - 2R_1 R_2 \rho_g - R_2^2(R_1 + R_x + \rho_g) - \rho_g^2(\rho_e + R_1 + R_2) - R_1^2(\rho_g + R + R_2) \quad (\text{IV.22})$$

Posto  $i_g = \frac{N}{D}$ , essendo  $N = \mathcal{E}(R_1 R - R_x R_2)$ , si ha:

$$\frac{\partial i_g}{\partial R_x} = \frac{\frac{\partial N}{\partial R_x} D - N \frac{\partial D}{\partial R_x}}{D^2} = \frac{\partial N}{\partial R_x} \frac{1}{D} - i_g \frac{\partial D}{\partial R_x} \frac{1}{D} \quad (\text{IV.23})$$

Imporre la condizione di equilibrio  $i_g = 0$  porta a:

$$\left( \frac{\partial i_g}{\partial R_x} \right)_{eq} = \left( \frac{\partial N}{\partial R_x} \frac{1}{D} \right)_{eq} \quad (\text{IV.24})$$

se, come si può verificare, non ci sono divergenze in  $\frac{\partial D}{\partial R_x} \frac{1}{D}$ .

Sviluppando il calcolo per il membro di destra della (24) e tenendo della (5), si trova:

$$\left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x}\right)_{eq} = \frac{-\mathcal{E}R_2R_1}{[\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)][\rho_g(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} \quad (IV.25)$$

Per ottenere il risultato (24), avremmo potuto procedere anche diversamente facendo ricorso al teorema di Thévenin applicato ai terminali A e B della Fig.10. Dette  $\mathcal{E}_{Th}$  e  $\rho_{Th}$  la fem e la resistenza di Thévenin fra A e B, abbiamo per  $i_g$ :

$$i_g = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{\rho_g + \rho_{Th}} \quad (IV.26)$$

Pertanto

$$\left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x}\right)_{eq} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{Th}}{\partial R_x}\right)_{eq} \frac{1}{(\rho_{Th})_{eq} + \rho_g} + (\mathcal{E}_{Th})_{eq} \left[\frac{\partial}{\partial R_x} \left(\frac{1}{\rho_{Th} + \rho_g}\right)\right]_{eq} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{Th}}{\partial R_x}\right)_{eq} \frac{1}{(\rho_{Th})_{eq} + \rho_g} \quad (IV.27)$$

in quanto è nulla  $(\mathcal{E}_{Th})_{eq}$ .

Per  $\mathcal{E}_{Th}$  (la ddp fra A e B quando è assente il galvanometro) si trova:

$$\mathcal{E}_{Th} = \frac{\mathcal{E}}{\rho_e + \frac{(R_x + R)(R_1 + R_2)}{R_x + R + R_1 + R_2}} \cdot \left(\frac{R}{R_x + R} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \cdot \frac{(R_x + R)(R_1 + R_2)}{R_x + R + R_1 + R_2} \quad (IV.28)$$

Quanto a  $(\rho_{Th})_{eq}$  essa si può calcolare tenendo presente che all'equilibrio un ponte si comporta simmetricamente nei confronti del generatore e del rivelatore: vale a dire se l'eccitazione è inserita fra A e B, come occorre fare per misurare la nostra  $\rho_{Th}$ , C e D risultano equipotenziali. Il calcolo di  $\rho_{Th}$  si può allora fare indifferentemente sia cortocircuitando che lasciando aperto il collegamento CD (purché ci si ricordi di inserire nel risultato la condizione di equilibrio, cioè  $R = R_x \frac{R_2}{R_1}$ ). Procedendo così si trova:

$$(\rho_{Th})_{eq} = \frac{R_2(R_1 + R_x)}{R_1 + R_2} \quad (IV.29)$$

Derivando la (28) rispetto a  $R_x$ , imponendo la condizione di equilibrio e inserendo il risultato nella (27) si ritrova ovviamente la (25).

Pertanto la sensibilità del Ponte di Wheatstone all'equilibrio vale:

$$(S)_{eq} = \frac{1}{K_A} \left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x}\right)_{eq} \cdot R_x = \frac{-\mathcal{E}R_2R_1R_x}{K_A[\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)][\rho_g(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} \quad (IV.30)$$

Non si dia particolare importanza al segno della (30), poiché quello che interessa è di fatto il modulo di  $(S)_{eq}$ .

Nelle condizioni pratiche che si incontrano, il galvanometro è dato (e quindi  $K_A$  e  $\rho_g$  sono fissati) e ottimizzare la misura di  $R_x$  significa assegnare agli altri parametri del circuito i valori che massimizzano (in valore assoluto) la sensibilità  $(S)_{eq}$ . Intanto si nota che la sensibilità aumenta all'aumentare di  $\mathcal{E}$  (cosa d'altronde ovvia) e che a parità di  $\mathcal{E}$  si ha vantaggio al diminuire di  $\rho_e$ . Restano da scegliere  $R_1$  e  $R_2$  che massimizzano  $|(S)_{eq}|$ . Imponendo le condizioni di stazionarietà  $\frac{\partial S_{eq}}{\partial R_1} = \frac{\partial S_{eq}}{\partial R_2} = 0$  si trova, dopo qualche calcolo per la verità un po' laborioso:

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{\frac{R_x \rho_e (R_x + \rho_g)}{R_x + \rho_e}} \\ R_2 = \sqrt{\rho_e \rho_g} \\ R = \sqrt{\frac{R_x \rho_g (R_x + \rho_e)}{R_x + \rho_g}} \end{cases} \quad (IV.31)$$

Queste condizioni, dette di *Heaviside* dal nome di colui che per primo risolve il problema oggetto di questo paragrafo, stabiliscono i valori che nella misura di una certa resistenza  $R_x$ , fissato il galvanometro e il generatore, devono essere assegnati a  $R_1$  e  $R_2$  per massimizzare la sensibilità. Esse sono di validità generale, ma nella pratica trovano -come vedremo- scarsa applicazione, poiché in esse non si tiene conto degli altri vincoli cui le resistenze  $R_1, R_2$  e  $R$  devono sottostare.

Consideriamo un caso tipico:  $\rho_e \ll 1\Omega$ ,  $\rho_g \sim 20\Omega$ . A voler rispettare la condizione (31) si incapperebbe nel problema di dover fare  $R_1$  e  $R_2$  assai piccole, dell'ordine di  $\rho_e$ , ed anche  $R$  decisamente inferiore a  $R_x$ . In questo caso le condizioni (31) non possono essere soddisfatte: infatti anche se fosse possibile reperire campioni di resistenza di valore piccolo e sufficientemente precisi, tale precisione verrebbe sicuramente compromessa dal contributo, parzialmente erratico, derivante dalle resistenze dei cavetti e dei contatti. Si finirebbe così, nello sforzo acritico di massimizzare la sensibilità, col peggiorare la qualità complessiva della misura di  $R_x$ , aumentando gli errori di tipo sistematico. In altre condizioni, prima ancora che intervengano i limiti sopra detti, occorre tener conto del vincolo imposto dal wattaggio finito delle resistenze, che si traduce in un limite superiore alla corrente, in almeno uno dei rami del ponte. Se tale vincolo esiste occorre tenerne conto esplicitamente nella ricerca del massimo di sensibilità, essendo certamente non corretto ricercare il massimo incondizionato della sensibilità come fatto sopra (considerando  $\mathcal{E}$  costante) e poi aumentare  $\mathcal{E}$  fino ad ottenere la massima corrente consentita nel ramo. Supponiamo, per esempio, che esista un limite massimo  $I_M$  per la corrente che circola nel ramo di  $R_x$ , ovvero un limite di wattaggio su  $R_x$ . All'equilibrio la corrente  $I_M$  che circola nel ramo  $R_x - R$  è data da:

$$I_M = \frac{\mathcal{E}R_1}{\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)} \quad (\text{IV.32})$$

e pertanto la sensibilità all'equilibrio può esprimersi come (vedi (30)):

$$(S)_{eq} = -\frac{I_M R_2 R_x}{K_A [\rho_g(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} = -\frac{I_M}{K_A \left[ \frac{\rho_g}{R_x} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) + \frac{R_1}{R_x} + 1 \right]} \quad (\text{IV.33})$$

Questa espressione ci dice che, fissata  $I_M$  al massimo valore possibile, la sensibilità è tanto migliore quanto più  $R_1 < R_x, R_2$ . Al solito non sarà opportuno diminuire più di un tanto  $R_1$ , pena incontrare i problemi di precisione già detti.

In qualche testo si legge che il massimo assoluto di sensibilità del Ponte di Wheatstone si ha quando  $\rho_e = \rho_g = R_x = R_1 = R_2 = R$ ; questa è una affermazione che va fatta con molte precisazioni. Chiariamo innanzitutto i termini esatti del problema: supponiamo di avere un galvanometro in cui è possibile scegliere il tipo di avvolgimento e di disporre di un numero  $N$  molto grande di generatori, ognuno di forza elettromotrice  $\epsilon$  e resistenza interna  $\rho_e$  e poniamoci la seguente domanda: quali sono l'avvolgimento, la disposizione dei generatori e i valori di  $R_1$  e  $R_2$  che massimizzano la sensibilità della misura di  $R_x$ ? Sappiamo già che per quanto riguarda il galvanometro (Cap.II, §4) il migliore avvolgimento è quello che ha resistenza pari a quella del circuito su cui è chiuso (ovvero quella data dalla (29)) e pertanto

$$\rho_g = \frac{R_2(R_1 + R_x)}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.34})$$

Per quanto riguarda i generatori, si noti che la soluzione è quella ottenuta nel §10 del Cap.I, cioè che conviene disporre i generatori in configurazioni di serie e paralleli tali che la resistenza interna complessiva  $\rho_e$  sia uguale alla resistenza del circuito. Infatti si tratta anche in questo caso di massimizzare la corrente sul carico poiché così facendo si massimizza la fem di Thévenin che viene

poi applicata al galvanometro. Il valore della resistenza del carico vista dal generatore, all'equilibrio vale  $\frac{R_x(R_1 + R_2)}{R_1 + R_x}$  e pertanto

$$\rho_e = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_x} \cdot R_x \quad (\text{IV.35})$$

che combinata con la (34) dà

$$\rho_e \rho_g = R_2 R_x \quad (\text{IV.36})$$

Abbiamo così fissato la migliore condizione sui parametri  $\mathcal{E}$ ,  $\rho_e$ ,  $K_A$  e  $\rho_g$ , tenendo conto dei vincoli; sappiamo già che ottimizzare i parametri  $R_1$ ,  $R_2$  dà luogo alle condizioni (31); queste ultime, insieme alla (36) danno finalmente:

$$\rho_e = \rho_g = R_1 = R_2 = R = R_x \quad (\text{IV.37})$$

E' vera quindi l'affermazione, ma rimane quasi di puro interesse accademico, anche perché non tiene in alcun conto i limiti che possono derivare dal wattaggio finito delle resistenze. In questa medesima prospettiva è bene ricordare che in una misura col Ponte di Wheatstone non ha interesse di per sé la massimizzazione della sensibilità, magari anche con qualche vincolo imposto, quanto piuttosto che l'errore dovuto alla sensibilità sia reso decisamente inferiore a quello di taratura dei campioni (nel nostro caso  $\sim 0.05\%$ ). Si può ad esempio vedere che con  $\mathcal{E} = 10V$ ,  $\rho_e < 0.1\Omega$ ,  $\rho_g \approx 20\Omega$ ,  $K_A = 10^{-7}A/div$ , e resistenza  $R_x$  fino a qualche decina di  $k\Omega$ , l'errore di sensibilità di fatto non è neppure un problema ed anche in condizioni assai lontane dal massimo della sensibilità, l'errore resta dominato dalla taratura dei campioni. Verifichiamo questo punto con qualche esempio:

A)  $R_x = 10\Omega$ ; la condizione (31) imporebbe  $R_1 \approx 1.7\Omega$ ,  $R_2 \approx 1.41\Omega$  quindi valori troppo piccoli. Poniamo quindi  $R_1$  e  $R_2$  ad un valore che non comprometta la precisione dei campioni:  $10\Omega$ . Otteniamo così  $S \approx 8 \cdot 10^3 div/\%$ , che dà luogo, supponendo di poter distinguere  $\frac{1}{4}$  di divisione, a una incertezza ben inferiore all'errore di taratura; si noti poi che se le resistenze non sono del wattaggio sufficiente ( $2.5 W$ ), dovremo ridurre  $\mathcal{E}$  fino a rientrare nei limiti consentiti.

B) per  $R_x = 10k\Omega$  dalla (31) otteniamo  $R_1 = 31.6\Omega$ ,  $R_2 = 1.41\Omega$ ; ponendo  $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$  abbiamo  $S \approx 90 div/\%$  che corrisponde ad un errore relativo di sensibilità su  $R_x$ :  $\approx 0.003\%$ , ancora piccolo rispetto all'errore di taratura.

C) per  $R_x = 100k\Omega$  la sensibilità che si ottiene ( $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ , contro i valori ottimali  $R_1 = 100\Omega$   $R_2 = 1.41\Omega$ ) è  $S = 9 div/\%$  (contro  $9.7 div/\%$  ottimali e  $8.8 div/\%$  con  $R_1 = 10 k\Omega$  e  $R_2 = 100 \Omega$ ), corrispondente a  $\approx 0.03\%$ , che risulta in questo caso confrontabile con l'errore di taratura.

Dagli esempi A), B), C) sopra riportati risulta evidente che dovendo misurare resistenze  $R_x < 10^4\Omega$ , il metodo del Ponte di Wheatstone realizzato come sopra descritto, cioè con un buon galvanometro a rivelare lo zero, porta ad errori su  $R_x$  dominati dalla precisione del campione (dell'ordine di qualche parte su  $10^4$ ), mentre per  $R_x > 10^5\Omega$  il contributo all'errore proveniente dalla sensibilità può facilmente dominare sulle altri indeterminazioni.

## 6.— *Sensibilità del Ponte con un microvoltmetro come rivelatore di zero*

Il metodo del Ponte di Wheatstone è stato ideato quando gli unici rivelatori di zero utilizzabili erano i galvanometri; al giorno d'oggi è possibile usare rivelatori di zero di prestazioni decisamente superiori, ad esempio misuratori di tensione assai sensibili (*microvoltmetri*) con resistenze di ingresso estremamente elevate, anche  $> 10^{11}\Omega$ .

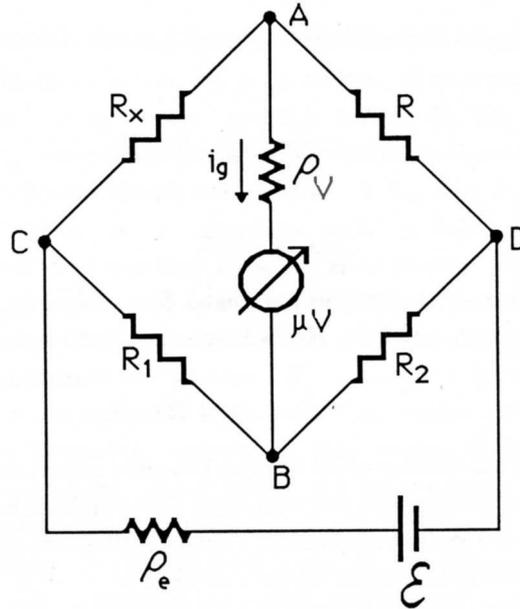


Fig.IV.11

Consideriamo la sensibilità del metodo in questo caso (Fig.11), supponendo di avere un microvoltmetro ( $\mu V$ ) che abbia una costante voltmetrica  $K_V = 10^{-6} V/div$  e  $\rho_V = 10^8 \Omega$ .

La sensibilità del metodo in questo caso (vedi (10)) si definisce come

$$(S)_{eq}^{\mu V} = \frac{1}{K_V} \left( \frac{\partial V_g}{\partial R_x} \right)_{eq} \cdot R_x = \frac{\rho_V}{K_V} \left( \frac{\partial i_g}{\partial R_x} \right)_{eq} \cdot R_x \quad (IV.38)$$

e possiamo così sfruttare i risultati precedenti per il calcolo di  $i_g$  (30):

$$(S)_{eq}^{\mu V} = \frac{-\rho_V}{K_V} \frac{\mathcal{E} R_x R_2 R_1}{[\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)][\rho_V(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} \quad (IV.39)$$

Si vede subito che il microvoltmetro si comporta come un galvanometro avente una sensibilità massima estremamente più elevata:  $\frac{\rho_V}{K_V} = 10^{14} div/A$  contro  $\frac{1}{K_A} = 10^7 div/A$  nel caso del galvanometro precedentemente descritto.

Le condizioni di massima sensibilità (31) su  $R_1$  e  $R_2$  restano applicabili anche in questo caso; questa volta, almeno finché  $\rho_e \ll R_x \ll \rho_V$  (quasi sempre cioè, visti i valori di  $\rho_e$  e  $\rho_V$ ) esse danno:

$$R_2 = \sqrt{\rho_e \rho_V} \quad R_1 = R_2 \quad R = R_x \quad (IV.40)$$

Si noti che la prima delle (40) è una relazione sostanzialmente indeterminata e l'unica prescrizione è di fatto l'uguaglianza di  $R_1$  e  $R_2$ . A queste conclusioni si può anche arrivare direttamente osservando che le ipotesi fatte  $\rho_e \rightarrow 0$ ,  $\rho_V \rightarrow \infty$ , corrispondono ad avere un generatore ideale di tensione e per rivelatore di zero un voltmetro ideale. In queste ipotesi, la ddp  $V_g$  ai capi del rivelatore vale:

$$V_g = \mathcal{E} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R}{R + R_x} \right) \quad (IV.41)$$

Calcolando  $\left( \frac{\partial V_g}{\partial R_x} \right)_{eq}$  partendo dalla (41) e sostituendo questa grandezza nella (38) si ottiene una espressione per  $(S)_{eq}^{\mu V}$  il cui massimo comporta la condizione (40).

Si può verificare con qualche esempio numerico che la sensibilità di misura risulta ora estremamente elevata e poco dipendente dalla scelta di  $R_1$  e  $R_2$  purché uguali (consideriamo solo casi in cui  $R_x > 10^5 \Omega$ , perché solo in questi casi è di effettiva utilità l'impiego di un microvoltmetro al posto di un galvanometro).

A)  $R_x = 10^6 \Omega$ : il valore massimo della sensibilità è di circa  $2.5 \cdot 10^4 \text{ div}/\%$  e rimane praticamente costante da  $R_1 = R_2 = 10 \Omega$  a  $R_1 = R_2 = 10^6 \Omega$ .

B)  $R_x = 10^8 \Omega$ : si ottengono per  $R_1 = R_2$  (da 10 a  $10^6 \Omega$ ) sensibilità  $S \approx 1.7 \cdot 10^4 \text{ div}/\%$ .

Se  $R_x > 10^6 \Omega$  le configurazioni in cui  $R_1 = R_2$  non sono sempre praticabili, data la difficoltà di reperire per  $R$  campioni di valore elevato e sufficientemente accurati. Vanno adottate viceversa configurazioni che consentono l'uso di  $R \leq 10^5 \Omega$  ottenibili con le usuali cassette campione. Consideriamo quindi la sensibilità del ponte nell'ipotesi di dover misurare  $R_x = 10^6$  e  $10^8 \Omega$ , rispettando il vincolo ora detto su  $R$ .

A')  $R_x = 10^6 \Omega$ ,  $R_1 = 1000 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$  ( $R = 10000 \Omega$ ): si ottiene una sensibilità decisamente inferiore ( $(S)_{eq}^{\mu V} \approx 10^3 \text{ div}/\%$ ) rispetto al valore massimo, ma ancora più che sufficiente per non compromettere la qualità della misura di  $R_x$ .

B')  $R_x = 10^8 \Omega$ ,  $R_1 = 50000 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$  ( $R = 20000 \Omega$ ):  $(S)_{eq}^{\mu V} = 20 \text{ div}/\%$  che dà un errore di sensibilità ancora assai inferiore a quello di taratura.

L'uso del microvoltmetro come rivelatore di zero risulta estremamente utile anche quando esiste un limite molto basso per corrente che può circolare in un ramo (si veda il paragrafo successivo), per esempio quello di  $R_x$ . Riprendendo il risultato (33), otteniamo:

$$(S)_{eq}^{\mu V} = \frac{-\rho_V}{K_V} \frac{I_M}{\frac{\rho_V}{R_x} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) + \frac{R_1}{R_x} + 1} \quad (\text{IV.42})$$

che per  $\rho_V \approx 10^8 \Omega$  può senz'altro approssimarsi come:

$$(S)_{eq}^{\mu V} \approx \frac{-1}{K_V} \frac{I_M R_x}{\left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right)} \quad (\text{IV.43})$$

Tale sensibilità dipende solo dal rapporto  $\frac{R_1}{R_2}$  ed è tanto migliore quanto più  $R_2 > R_1$ .

Vediamo ciò su un esempio, ponendo  $I_M = 50 \mu A$ ,  $R_x = 20 \Omega$ : per  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{10}$  si ha  $|(S)_{eq}^{\mu V}| \approx 9 \text{ div}/\%$  che dà  $\left( \frac{\Delta R_x}{R_x} \right) \approx 0.03\%$  e quindi comparabile con quello di taratura. Aumentare ancora  $\frac{R_2}{R_1}$  migliora al più del 10% il risultato precedente.

Concludendo si può affermare che l'uso del microvoltmetro come rivelatore di zero permette di estendere di alcuni ordini di grandezza il campo di applicazione del metodo del Ponte di Wheatstone, mantenendo per il resto la strumentazione ordinaria, ad esempio senza dover crescere oltre misura la fem del generatore, né far ricorso a valori molto elevati dei campioni di resistenza.

## 7.— Misure della resistenza interna di un galvanometro

Il procedimento di misura si basa sul circuito riportato in Fig.12 che ricorda molto da vicino un Ponte di Wheatstone:

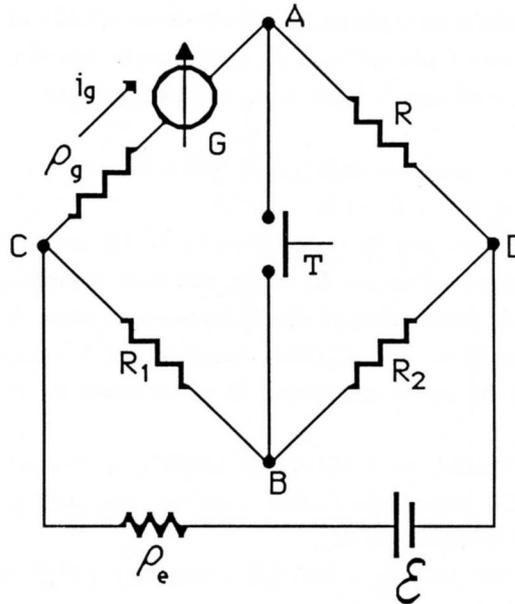


Fig.IV.12

Mantenendo  $\mathcal{E}$  sufficientemente piccola e usando una resistenza  $\rho_e$  molto grande si fa in modo che la corrente che circola nel galvanometro, posto alla massima sensibilità, lo invii a fondo scala (indifferentemente a destra o a sinistra dello zero). L'equilibrio del ponte, cioè l'equipotenzialità dei terminali A e B sarà individuata da quei valori di  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R$  per i quali l'apertura e chiusura del tasto T non provoca apprezzabili spostamenti dell'indice del galvanometro, cioè della corrente  $i_g$ . In queste condizioni varrà:

$$\rho_g = \frac{R \cdot R_1}{R_2} \quad (\text{IV.44})$$

Essendoci un limite per la corrente  $i_g$  (diciamo  $5\mu A$ ), la sensibilità della misura sarà corrispondentemente ridotta. Non possiamo però - per carcarla - usare alcuna delle formule derivate precedentemente, perché questa volta si tratta di calcolare le variazioni di  $i_g$  rispetto a  $(i_g)_{eq}$ , dove  $i_g$  non è la corrente nel ramo di rivelazione.

La sensibilità (all'equilibrio) va pertanto definita come

$$(S)_{eq} = \frac{(\Delta i)_{T}}{\Delta \rho_g} \cdot \rho_g = \frac{1}{K_A} \frac{(\Delta i_g)_{T}}{\Delta \rho_g} \cdot \rho_g \quad (\text{IV.45})$$

dove  $K_A$  è la costante reometrica del galvanometro,  $\frac{(\Delta \rho_g)}{\rho_g}$  è la variazione percentuale di  $\rho_g$  rispetto al valore di equilibrio e  $(\Delta i_g)_T$  rappresenta la variazione di  $i_g$  fra quando il tasto è aperto e quando è chiuso.  $(\Delta i_g)_T$  risulta:

$$|(\Delta i_g)_T| = (i_g)_{eq} \Delta \rho_g \frac{R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + \rho_g)} \quad (\text{IV.46})$$

come si può dimostrare, calcolando  $i_g$  a tasto aperto e a tasto chiuso e prendendo poi la differenza fra i due valori, arrestandosi al primo ordine in  $\Delta \rho_g$ . Otteniamo così:

$$|(S)_{eq}| = \frac{1}{K_A} (i_g)_{eq} \frac{\rho_g R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + \rho_g)} \quad (\text{IV.47})$$

La sensibilità è quindi tanto migliore quanto più  $\frac{R_1}{\rho_g}, \frac{R_1}{R_2} \ll 1$ . Nel caso concreto della misura in laboratorio:  $\rho_g \approx 20\Omega$  e quindi prendendo  $R_1 = 10\Omega$  (valori inferiori creano problemi a causa

della resistenza dei cavetti) e  $R_2 = 1k\Omega$  si ha ( $K_A = 10^{-7}A/div$ ,  $i_g = 5 \cdot 10^{-6}A$ ) otteniamo  $|S_{eq}| \approx 0.33div/\%$  e quindi l'errore  $(\frac{\Delta\rho_g}{\rho_g})_S \approx 0.8\%$  supponendo di apprezzare  $\frac{1}{4}$  di divisione.

Se viceversa montiamo al posto del tasto un microvoltmetro e procediamo all'azzeramento come se si trattasse di un Ponte di Wheatstone convenzionale, troveremo (vedi (43)) una sensibilità tale da dare un errore  $(\frac{\Delta\rho_g}{\rho_g})_S \approx 0.3\%$  decisamente migliore, ma non ancora perfettamente soddisfacente; la sensibilità si può ulteriormente migliorare aumentando la corrente del galvanometro (basta farlo lentamente in modo da non dare brusche sollecitazioni meccaniche): il galvanometro adesso si comporta davvero come una pura resistenza e pertanto la sua indicazione non è più di interesse. Vedremo più avanti altri sistemi per misurare la resistenza interna di un galvanometro.

Il metodo di misura descritto per primo, quello che fa ricorso al tasto, oltre a non essere particolarmente sensibile soffre anche di un altro problema, dovuto alle forze elettromotrici che si possono avere al contatto di due metalli quando le superfici non siano all'equilibrio termodinamico (per esempio perché è in atto una debole reazione chimica dovuta alla non perfetta pulizia delle superfici dei contatti): effettuando la misura si osserva che il valore di  $\rho_g$  cui corrisponde l'indifferenza della corrente  $i_g$  rispetto alle commutazioni del tasto, è diverso a seconda della polarità del generatore. Il fenomeno si può spiegare pensando che il tasto chiuso introduca una piccola (anche solo qualche  $\mu V$ ) fem  $E_C$ . Se così è, quando si è regolata  $\rho_g$  fino ad ottenere l'equilibrio, in realtà non abbiamo reso A e B equipotenziali, piuttosto abbiamo ottenuto che fra di essi ci sia una ddp  $V_A - V_B = E_C$ , tale che la chiusura del tasto non altera il regime di corrente. Se si inverte la polarità della batteria, le correnti inviate da essa si invertono, mentre la fem  $E_C$  mantiene il suo segno. Prendendo la media dei valori di  $\rho_g$  così ottenuti si ha una stima di  $\rho_g$  che si può dimostrare esente dall'effetto spurio, a meno di effetti del secondo ordine in  $\frac{E_C}{V}$ , dove  $V$  è la ddp ai capi del ponte.

## 8.— Fem parassite e azzeramento del rivelatore di zero

La misura di resistenze col Ponte di Wheatstone si basa sulla identificazione di uno zero nel valore della ddp fra due terminali; è chiaro pertanto che la presenza, fra questi due terminali, di forze elettromotrici "spurie" o "parassite", cioè riconducibili a cause diverse dal *non equilibrio* del ponte, potrà compromettere la correttezza del metodo e sarà pertanto da evitare, tanto più quanto meno sensibile è la configurazione di misura. Poiché l'origine fisica di queste forze elettromotrici *parassite* è varia, diverse sono le precauzioni da adottare per ridurne l'entità; di queste precauzioni parleremo ora brevemente, nonché degli accorgimenti da seguire per ridurre gli effetti qualora tali fem non siano state del tutto rimosse.

Fra le precauzioni è fondamentale evitare di toccare durante il montaggio del circuito le superfici dei conduttori (morsetti e cavi) che, pressate l'una contro l'altra, costituiranno poi i contatti fra i conduttori della rete; una simile precauzione riduce sia le fem di contatto dovute ad azioni chimiche, sia le differenze di potenziale termoelettriche dovute all'istaurarsi di gradienti di temperatura fra i conduttori. Le differenze di temperatura, aspettando qualche minuto si riducono notevolmente, ma eventuali fem di contatto possono persistere a lungo: un modo per compensare il loro effetto è quello di aggiustare lo zero del rivelatore, quando quest'ultimo (galvanometro o microvoltmetro) è chiuso sul circuito con il generatore spento e cortocircuitato. Questa procedura, fa cioè coincidere lo zero del rivelatore non con lo zero di tensione ma con lo zero dell'effetto da misurare e compensa le

eventuali fem spurie. Il controllo dell'azzeramento del galvanometro è in genere meccanico ed agisce sull'estremo *fisso* del filo di torsione; nel microvoltmetro l'azzeramento si fa tramite il controllo di "offset" che spiegheremo più avanti. Il sistema ora descritto, di compensazione *statica* di fem parassite funziona fintanto che le fem in questione rimangono le stesse sia in presenza che in assenza di eccitazione. Ciò è vero con buona approssimazione nel caso visto prima delle fem di contatto del tasto, poiché anche quando il generatore è acceso le correnti in gioco sono comunque piccole. Tuttavia, in generale, quando circola corrente nel circuito l'effetto Joule provoca innalzamenti di temperatura, rispetto a quella ambiente, non uniformemente distribuiti; anche quando questi gradienti raggiungono una configurazione stazionaria, essi provocano fem di tipo termoelettrico (effetto Seebeck, effetto Thomson) la cui entità, oltre a dipendere dall'intensità dei gradienti, è fortemente legata al tipo di conduttori impiegati. Per eliminare o comunque ridurre gli effetti di queste fem si usa il sistema prima descritto di compiere due misure a polarità del generatore invertite. Il metodo porterebbe ad una compensazione esatta degli effetti parassiti qualora questi (cioè le fem elettrochimiche, quelle termoelettriche e le distribuzioni di gradienti di temperatura nel circuito) non dipendessero dal senso della corrente inviata dal generatore: ciò è vero solo per alcuni effetti, ma non tutti. Si pensi ad esempio all'effetto Peltier che produce il riscaldamento o il raffreddamento di una giunzione fra due metalli, a seconda che la corrente attraversi la giunzione in un verso o nell'altro. Se si ha motivo di ritenere che questi effetti non siano predominanti, il metodo delle polarità invertite può essere soddisfacentemente applicato e si hanno drastiche riduzioni degli effetti parassiti.

## 9.— Misure di piccole resistenze.

### *Doppio ponte di Thomson*

Abbiamo visto che resistori di basso valore in genere sono provvisti di 4 terminali (Fig.13), due cosiddetti di corrente (A e B) e due cosiddetti di tensione (a e b).

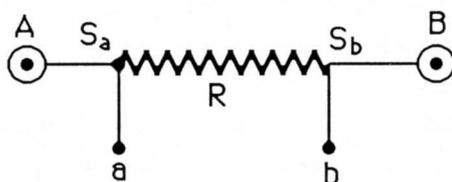


Fig.IV.13

La resistenza di interesse è quella fra i punti di saldatura  $S_a$  e  $S_b$ .

Supponiamo di dover misurare una resistenza siffatta, disponendo di una resistenza campione  $R$  di piccolo valore e conseguentemente a 4 terminali.

Montiamo quindi un Ponte di Wheatstone come in Fig.14:

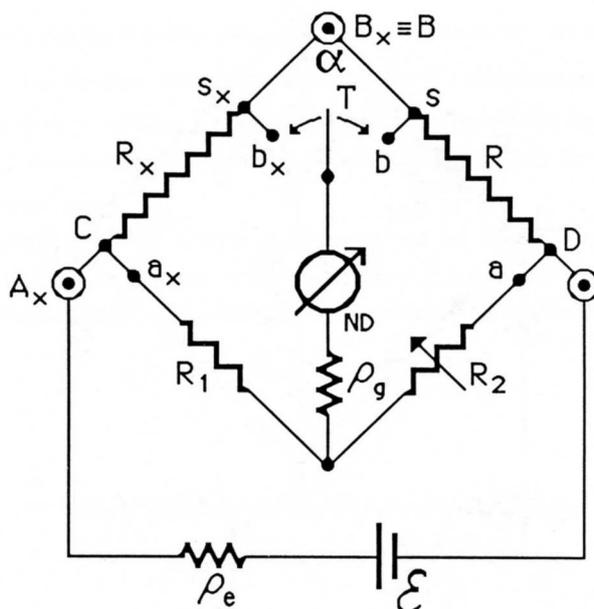


Fig.IV.14

dove  $R_1$  e  $R_2$  sono due resistori di valore assai maggiore di  $R_x$  e  $R$ ;  $R_2$  è un resistore variabile. All'equilibrio la corrente che circola in  $R_1$  e  $R_2$  è assai inferiore rispetto a quella in  $R_x$  e  $R$  e le resistenze spurie dei tratti  $C - a_x$  e  $D - a$  saranno trascurabili rispetto a  $R_1$  e  $R_2$  rispettivamente. A seconda che l'estremo T del rivelatore sia collegato a  $b_x$  o a  $b$ , l'equilibrio si otterrà per due valori diversi di  $R_2$ : infatti poiché  $R_x$  ed  $R$  sono di valore assai piccolo, la resistenza associata sia ai reofori che al contatto fra di essi in  $B_x = B$ , influenzerà l'equilibrio. Collegando T con  $b_x$ , detta  $\alpha$  la resistenza fra  $S_x$  e  $S$  avremo:

$$R_x = \frac{R + \alpha}{R_2'} \cdot R_1 \quad (\text{IV.48})$$

Collegando viceversa T con  $b$ , avremo:

$$R_x = \frac{R}{R_2''} \cdot R_1 - \alpha \quad (\text{IV.49})$$

Eliminando  $\alpha$  fra queste due equazioni si ottiene:

$$R_x = R \frac{R_1 (R_2'' + R_1)}{R_2'' (R_2' + R_1)} \quad (\text{IV.50})$$

Con questo metodo si riesce ad eliminare l'influenza della resistenza  $\alpha$  che non è nota e non è in genere di alcun interesse; inoltre essa dipende da fattori difficilmente controllabili, quali la tensione al contatto  $B_x - B$  e lo stato di pulizia delle superfici.

Nonostante che il metodo ora descritto non sia di larga applicazione e gli venga piuttosto preferito il metodo del *Doppio Ponte di Thomson* che descriveremo fra breve, esso ha il pregio di mettere in chiara evidenza la possibilità di eseguire misure di precisione con resistori a 4 terminali seguendo l'accorgimento di far passare nei terminali di tensione correnti sufficientemente basse - come nel ramo del rivelatore di zero - oppure di porli in serie a resistenze decisamente più grosse - come nel ramo  $R_1 - R_2$ .

Come anticipato, l'eliminazione dell'influsso di  $\alpha$  nella determinazione di  $R_x$ , si ottiene in genere mediante l'uso del Doppio Ponte di Thomson, disegnato in Fig.15:

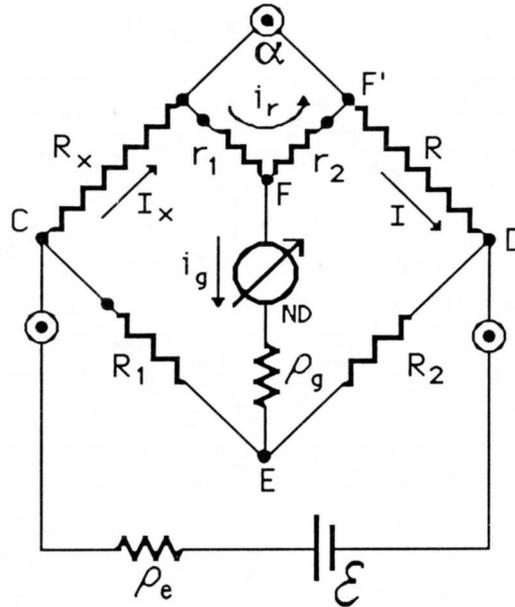


Fig.IV.15

$r_1$  e  $r_2$  sono due resistenze molto maggiori di  $R_x$  e  $R$  e conseguentemente anche molto maggiori di  $\alpha$ . Dalla condizione per l'equilibrio del ponte ( $i_g = 0$ ,  $I_x = I$ ), si ha  $V_F - V_E = 0$ . Per  $V_E$  abbiamo:

$$(V_E - V_D) = (V_C - V_D) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.51})$$

Quanto a  $V_F$  possiamo scrivere

$$V_F - V_D = (V_{F'} - V_D) + i_r r_2 = I \cdot R + i_r r_2 \quad (\text{IV.52})$$

Per la regola della ripartizione delle correnti in un parallelo, vale:

$$i_r = I \frac{\alpha}{r_1 + r_2 + \alpha} \quad (\text{IV.53})$$

Abbiamo inoltre:

$$I = \frac{(V_C - V_D)}{R_x + R + \frac{(r_1 + r_2)\alpha}{(r_1 + r_2 + \alpha)}} \quad (\text{IV.54})$$

Pertanto dalla (54) e (53), uguagliando i secondi membri di (52) e (51), otteniamo:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(R + \frac{r_2 \alpha}{r_1 + r_2 + \alpha})}{R_x + R + \frac{(r_1 + r_2)\alpha}{r_1 + r_2 + \alpha}} \quad (\text{IV.55})$$

e quindi

$$R_x = \frac{RR_1}{R_2} + \frac{R_1 \alpha (\frac{r_2}{R_2} - \frac{r_1}{R_1})}{r_1 + r_2 + \alpha} \quad (\text{IV.56})$$

Quindi se  $\frac{r_2}{R_2} = \frac{r_1}{R_1}$  la condizione di equilibrio è la medesima del Ponte di Wheatstone.

Per questo motivo  $R_1 - R_2$  e  $r_1 - r_2$  sono due resistenze variabili con un unico comando meccanico che provvede a variare contemporaneamente i rapporti  $\frac{R_1}{R_2}$  e  $\frac{r_1}{r_2}$ , mantenendoli sempre uguali fra

loro. L'esatto azzeramento del secondo termine della (56) è tanto meno importante quanto più  $\alpha$  è piccolo rispetto a  $(r_1 + r_2) \frac{R}{R_2}$  e si cerca sempre di fare in modo che il collegamento dei terminali di corrente introduca la minor resistenza possibile. Un semplice controllo dell'annullamento dell'ultimo termine si compie interrompendo il collegamento  $\alpha$ : se il ponte resta in equilibrio la condizione  $\frac{r_2}{R_2} = \frac{r_1}{R_1}$  è soddisfatta sufficientemente bene.

In questo come in altri ponti (in quello di Wheatstone ad esempio) spesso il ramo  $R_1 - R_2$  è costituito da una unica resistenza (magari a filo) provvista di cursore centrale scorrevole C (Fig.16); esso stabilisce la ripartizione fra  $R_1$  e  $R_2$  della resistenza totale  $R$  secondo quanto visto alla fine del §1.

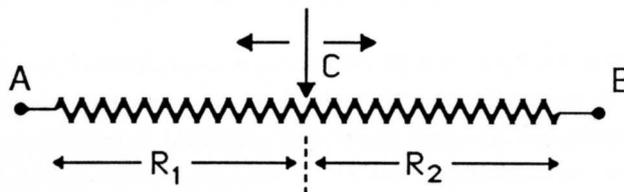


Fig.IV.16

Quest'ultimo è il principio con cui si realizzano resistenze variabili con precisione molto buona: infatti se il filo che costituisce la resistenza è ben calibro (cioè a sezione costante) e il pattino stabilisce il contatto in un tratto sufficientemente breve e ben definito, la resistenza fra un estremo A del filo e il cursore C sarà semplicemente data da  $R_1 = R_{CA} = R_{AB} \frac{l}{L}$  dove  $l$  è la lunghezza del filo fra A e il cursore C e  $L$  è la lunghezza totale. Una tale configurazione di resistenze variabili si indica con il nome di *partitore a filo* o *potenziometro a filo*. Nel Doppio Ponte di Thomson le resistenze  $R_1 - R_2$  e  $r_1 - r_2$  possono essere realizzate entrambe in questo modo, cioè tramite due partitori a filo che vengono poi agganciati meccanicamente ad un unico comando.

Con l'uso del Doppio Ponte di Thomson sono possibili misure di resistenze estremamente basse fino a qualche  $\mu\Omega$ . Non entriamo nei dettagli del problema della sensibilità del metodo che può essere valutata seguendo la falsariga del procedimento usato per il Ponte di Wheatstone.

## 10.— Misura di resistenze di isolamento

Abbiamo visto che l'introduzione nel ramo di rivelazione del microvoltmetro ad alta resistenza di ingresso, consente la misura di resistenze elevate (fino a  $R_x \approx 10^8 \Omega$ ) senza compromettere eccessivamente la sensibilità del metodo se la misura viene fatta con generatori di fem nel campo della decina di Volt. Questo metodo è senz'altro opportuno quando si voglia conoscere il valore di una certa resistenza  $R_x$  in bassa tensione. Se viceversa si tratta di misurare resistenze di isolamento di strutture contenenti dielettrici e studiate per sopportare grosse differenze di potenziale, allora in questi casi l'informazione ottenuta in bassa tensione è di scarso interesse: infatti all'aumentare della ddp applicata insorgono fenomeni (microscariche superficiali, effluvi) che non possono senz'altro essere descritti come effetti di tipo ohmico, ma che, compromettendo l'isolamento, sono di primario interesse. Per effettuare questo tipo di misure occorrono metodi di misura e tecnologie tutti particolari, studiati per sollecitare l'elemento resistivo con elevate differenze di potenziale. Non descriveremo

queste tecniche e ci limitiamo a osservare che difficilmente esse possono essere considerate misure di resistenza in senso stretto, perché se tali fossero, la grandezza  $R$  dovrebbe essere indipendente dalla tensione applicata; viceversa quello che si studia è una  $R = R(V)$ , la quale non può farsi discendere in alcun modo dalla legge di Ohm.

Più avanti, quando saranno discussi i metodi di misura della carica, impareremo a misurare resistenze di valore elevato sfruttando le proprietà dei circuiti costituiti dalla serie di un condensatore e una resistenza; vedremo che il metodo si presta a compiere misure di  $R$  sia in bassa che relativamente alta tensione.

#### NOTA BIBLIOGRAFICA

**FR 59**, **LA 38**, **DA 75**, **CO 85** e **ZI 86** trattano ampiamente l'argomento di questo capitolo. Per quanto riguarda le caratteristiche costruttive delle resistenze campione e non, le migliori e più aggiornate informazioni si possono trarre dai cataloghi delle ditte costruttrici. Informazioni aggiornate, ma non così dettagliate, si possono comunque trovare su **ZI 86**, **CO 83**, **BE 82** e in **CO 85**. Tecniche di costruzione in alcuni casi tuttora valide si trovano su **LA 38**. Più aggiornata, ma non ancora completamente attuale, è la trattazione su **TE 50** (sez. 2).

Un ragionevole approccio al problema della sensibilità del Ponte di Wheatstone si può trovare su **DA 75**. Su questo stesso argomento si suggerisce la lettura degli articoli originali:

Heaviside: "Electrical Papers" pagine 3 ÷ 13  
(Mac Millan)(1892).

## IL METODO POTENZIOMETRICO

### 1.- Principio di misura

Consideriamo il circuito in Fig.1: la seconda legge di Kirchhoff ci dice che la corrente  $i$  è zero se e solo se  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ , indipendentemente dal valore di  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ; il circuito consente quindi di confrontare direttamente i valori di due fem di Thévenin.

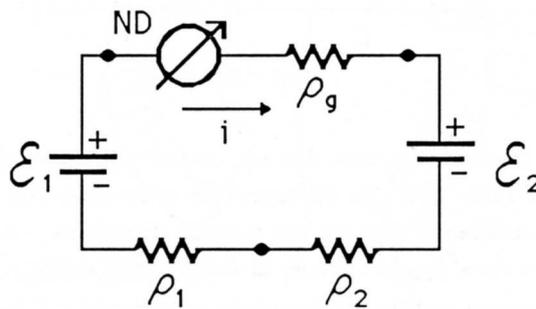


Fig.V.1

Rispetto a una misura con un voltmetro questo metodo presenta il vantaggio di non derivare corrente dai generatori, anzi la misura richiede proprio l'annullarsi di questa corrente. E' chiaro che il metodo ora descritto può essere utilmente impiegato per misurare differenze di potenziale solo quando è disponibile un generatore di fem che copra, con continuità, un campo sufficientemente vasto di differenze di potenziale (cioè un generatore variabile di fem).

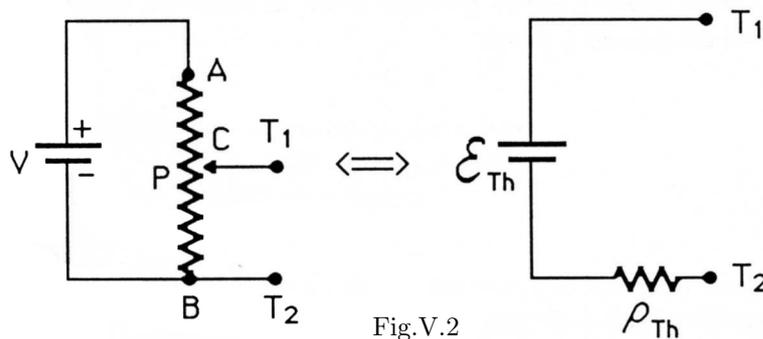


Fig.V.2

Si può realizzare questo generatore mediante un partitore di tensione (Fig.2), poiché nessuna prescrizione è fatta circa il valore della sua resistenza interna (salvo che non sia infinita).

$$\mathcal{E}_{Th} = V \cdot \frac{R_{CB}}{R_{AB}} \quad (V.1)$$

$$\rho_{Th} = R_{CB} \parallel R_{CA} \quad (V.2)$$

Il partitore di tensione in figura consente di ottenere ai terminali  $T_1$  e  $T_2$  una fem variabile con continuità fra 0 e  $V$  Volt, con una resistenza equivalente di Thévenin compresa fra zero ( $C \equiv B$  o  $C \equiv A$ ) e un massimo di  $\frac{P}{4} = \frac{R_{AB}}{4}$  quando C equipartisce la resistenza  $R_{AB}$ . Un circuito del tipo in Fig.3 permette pertanto di misurare, senza derivare da essa alcuna corrente, qualunque forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  (compresa fra 0 e  $V$ ).

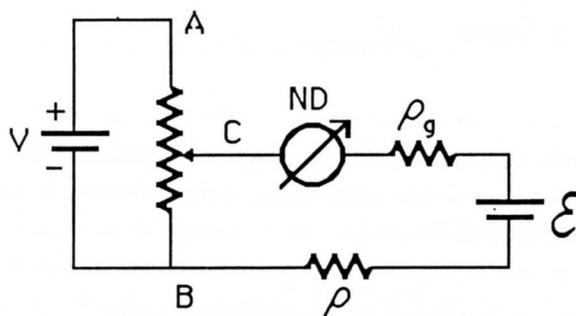


Fig.V.3

La misura si effettua cercando lo zero dell'indicazione del galvanometro agendo sul cursore C. Quando si è ottenuto lo zero, allora la differenza di potenziale ( $V_C - V_B$ ) uguaglia  $\mathcal{E}$ . Prima però di poter dire di aver realizzato davvero un metodo di misura occorre mostrare che esiste la possibilità di risalire facilmente e con precisione al valore della differenza di potenziale ai capi del potenziometro C-B: per ottenere questa informazione si costruisce il partitore di tensione con del filo calibro e quindi la relazione fra la resistenza  $R_{CB}$  e la lunghezza del filo compresa fra C e B è di pura proporzionalità. Inoltre si fa in modo che lo spostamento  $l$  o  $\varphi$  del cursore lungo il filo possa misurarsi mediante una scala rettilinea (se il potenziometro è disposto lungo un segmento di retta (Fig.4a) oppure angolare se, come spesso accade, il filo è disposto lungo una circonferenza (Fig.4b).\*) Le lunghezze così misurate sono proporzionali alla ddp fra l'estremo fisso ( $l, \varphi = 0$ ) e il cursore: per avere quindi una vera e propria misura della differenza di potenziale basta conoscere il valore di essa per una posizione qualunque del cursore ( $E_o, l_o$ ).

Supponiamo di avere tarato il nostro partitore a filo, di conoscere cioè  $E_o$  e  $l_o$ ; pertanto per una generica posizione del cursore  $l$ , varrà:

$$(V_C - V_B) = \frac{l}{l_o} \cdot E_o \quad (V.3)$$

Strumenti che misurano differenze di potenziale, basati su questo principio (dovuto a *Poggendorf*) son detti *potenziometri* e i metodi di misura associati *potenziometrici*.

\* nelle Figg.4, 5 e 7 il filo potenziometrico è disegnato con un tratto continuo e non a zig-zag, perché si sono volute mettere in evidenza le caratteristiche *meccaniche* del dispositivo; non si dimentichi per questo che si tratta di un conduttore avente resistenza ben definita e *non nulla*.

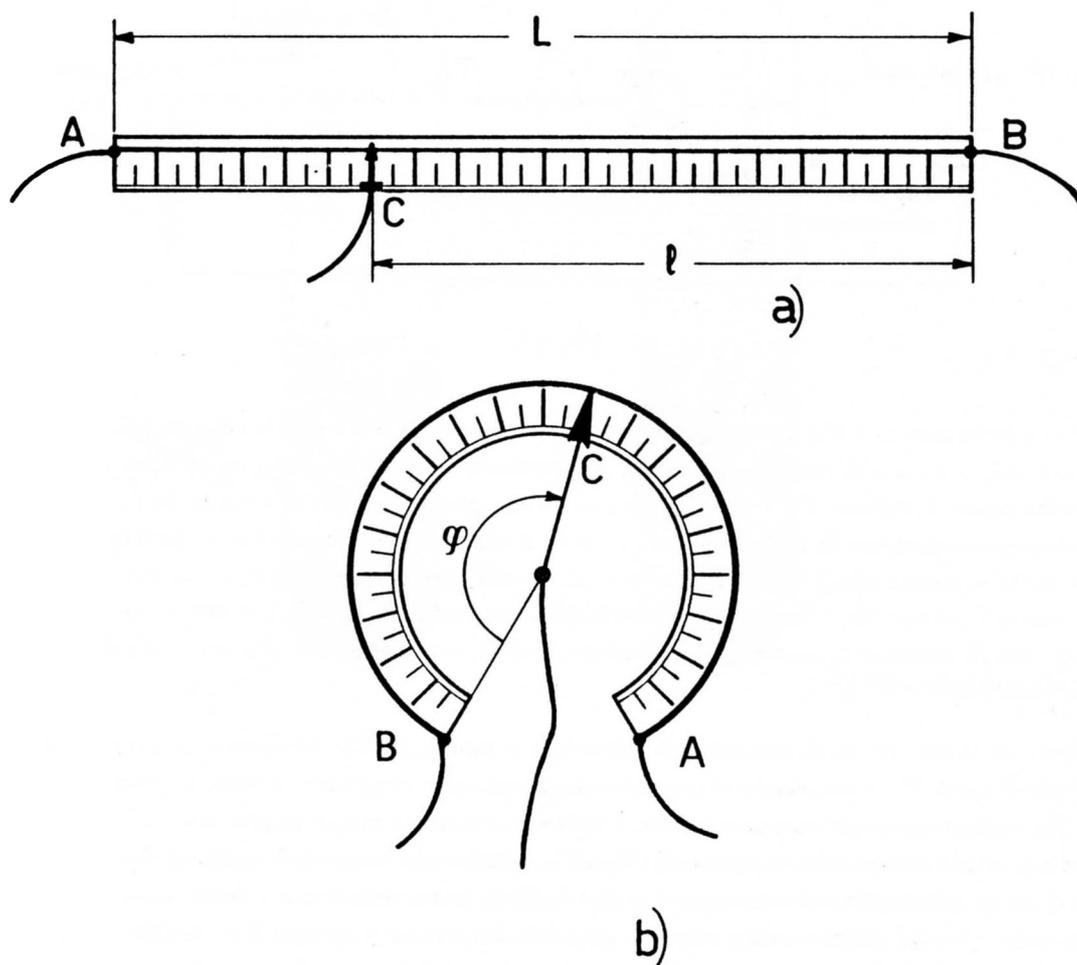


Fig.V.4

## 2.- *Campioni di forza elettromotrice e taratura di un potenziometro*

Nel paragrafo precedente abbiamo accennato alla necessità di tarare il potenziometro tramite una fem nota, possibilmente con buona precisione. Allo scopo di effettuare questa taratura, il circuito si realizza in modo da poter regolare la corrente che scorre sul filo potenziometrico e la si aggiusta in modo che, con la fem di taratura inserita e il galvanometro a zero, la lettura della distanza del cursore dall'origine coincida numericamente col valore della fem; in questo modo, anche nell'utilizzo successivo, la lettura della posizione del cursore darà direttamente il valore della forza elettromotrice incognita senza dover ricorrere ogni volta alla pur semplice relazione (3).

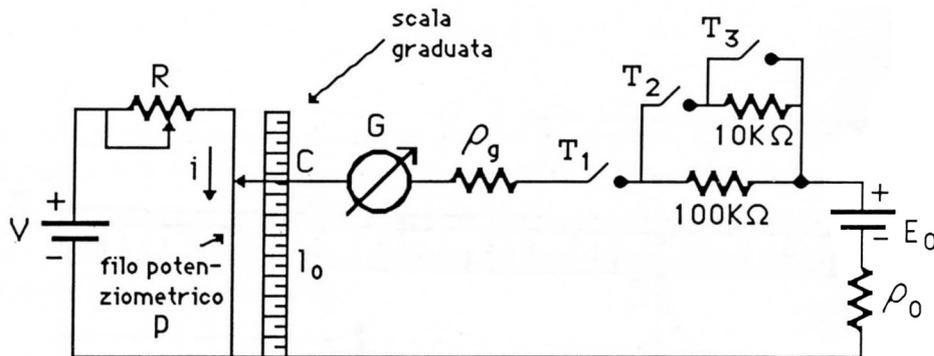


Fig.V.5

Con riferimento alla Fig.5, sia  $E_o$  un generatore campione elettrochimico di fem (*pila campione, standard cell*) e  $\rho_o$  la sua resistenza interna. La taratura del potenziometro si effettua impostando preventivamente il cursore  $C$  in corrispondenza di una precisa posizione sulla scala  $l_o$ , coincidente numericamente col valore di  $E_o$ ; agendo sul reostato  $R$  si regola la corrente  $i$  fino a che il galvanometro (posto nella massima sensibilità), con tutti e tre i tasti pressati, non segna 0. Il potenziometro è allora tarato e nel seguito, quando a  $E_o$  si sostituisca un generatore ( $E_x, \rho_x$ ), si dovrà aver cura di non muovere più  $R$ , cosicché la lettura della posizione  $l_x$  di  $C$ , corrispondente allo zero del galvanometro, darà il valore numerico di  $E_x$ .

Durante la procedura di azzeramento occorrerà agire con molta attenzione, prima tenendo premuto solo il tasto  $T_1$ , e azzerando il galvanometro; una volta raggiunto lo zero, si premerà *anche* il tasto  $T_2$ ; aggiusteremo nuovamente lo zero e infine si otterrà la massima precisione di azzeramento tenendo premuti *contemporaneamente*  $T_1, T_2$  e  $T_3$ . Si procede in questo modo perché la pila campione  $E_o$  è un apparecchio da una parte molto preciso, come vedremo fra poco, da un'altra molto delicato che *non tollera* di erogare correnti superiori a qualche  $\mu A$ , pena il cambiamento semipermanente della fem  $E_o$ ; il tasto triplo ha proprio la funzione di limitare la corrente erogata dalla pila campione quando siamo ancora lontani dall'equilibrio, inserendo in serie col circuito resistenze via via decrescenti.

Non entreremo nei dettagli costruttivi di una pila campione; diremo soltanto che si tratta di una pila elettrochimica (Fig.6) nella quale due elettrodi di Platino pescano rispettivamente in una goccia di Mercurio ricoperta da una pasta di  $Hg_2SO_4$  e  $CdSO_4$  (polo positivo) e l'altro in un amalgama di Cadmio circondato di cristalli di  $CdSO_4$ . Una pila del genere, detta pila campione *Weston* dal nome del suo perfezionatore, ha costituito per decenni lo standard fondamentale di fem a motivo dei seguenti fatti:

- il valore della fem  $E_o$  è notevolmente costante in funzione della temperatura (coefficiente di temperatura  $\simeq -0.004\%/^{\circ}C$  nell'intorno di  $20^{\circ}$ )
- pile campione Weston costruite con procedure anche assai diverse differiscono fra di loro al più per 10 ppm (parti per milione)
- la fem  $E_o$  si mantiene inalterata per lunghi periodi di tempo.

Il valore di  $E_o$  a  $20^{\circ}C$  vale  $E_o = 1.01864 V$  (con una incertezza di un'unità sull'ultima cifra a seconda delle procedure costruttive). Quanto alla resistenza interna essa è abbastanza elevata, dell'ordine del  $k\Omega$  e, come vedremo, questo ha un effetto negativo sulla sensibilità della procedura di taratura.

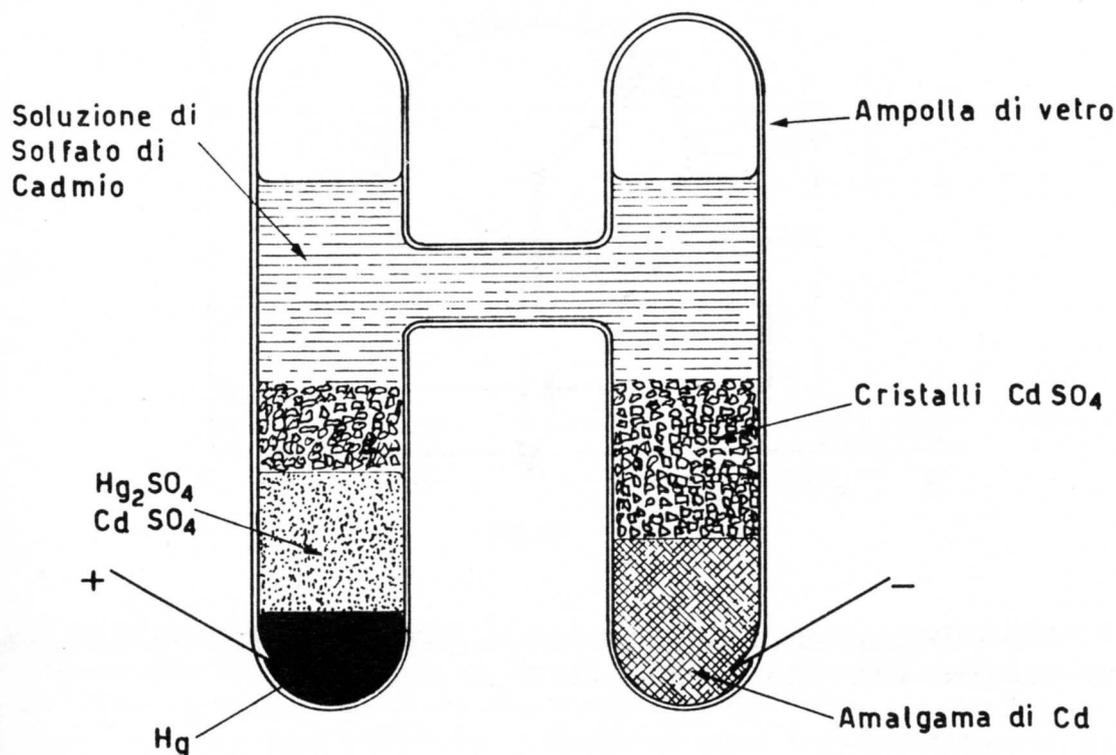


Fig.V.6

La pila campione ora descritta è propriamente detta *saturata*, con riferimento alla soluzione di solfato di Cadmio. Esiste una versione della pila Weston, detta *non-saturata* (nella quale cioè la soluzione di  $\text{CdSO}_4$  non è satura) o *secondaria* che, rispetto alla pila saturata, offre il vantaggio di avere un coefficiente di temperatura inferiore di circa un ordine di grandezza. Ciò consente l'uso di tale pila in misure di grande precisione, senza fare ricorso a bagni termostatici; tuttavia la superiorità dal punto di vista termico è accompagnata da una peggiore stabilità rispetto all'invecchiamento. Una pila Weston non-saturata presenta infatti una diminuzione di circa  $10^{-4}V/\text{anno}$ , contro una inapprezzabile variazione -anche su periodi di tempo di decine di anni- della versione saturata.

Al giorno di oggi, usando dei sistemi basati su diodi Zener (vedi Cap.XVII, §5) si riescono a fare degli standard di tensione con caratteristiche di stabilità anche superiori alle pile campione e soprattutto senza alcun problema connesso con l'erogazione di correnti anche non piccole.

### 3.- Linearità di un potenziometro

Abbiamo visto che per utilizzare un partitore resistivo come elemento base di un potenziometro, è necessaria l'esistenza di una relazione di proporzionalità fra la resistenza del tratto di conduttore compreso fra il cursore e l'estremo fisso scelto come origine degli spostamenti, e lo spostamento corrispondente (lineare o angolare) che viene fatto fare al cursore medesimo. Il partitore sarà tanto più adatto allo scopo, quanto più la relazione di proporzionalità fra queste due grandezze sarà accuratamente verificata. Ricorrendo ad un esempio (vedi Fig.7) guardiamo cosa accade in pratica:

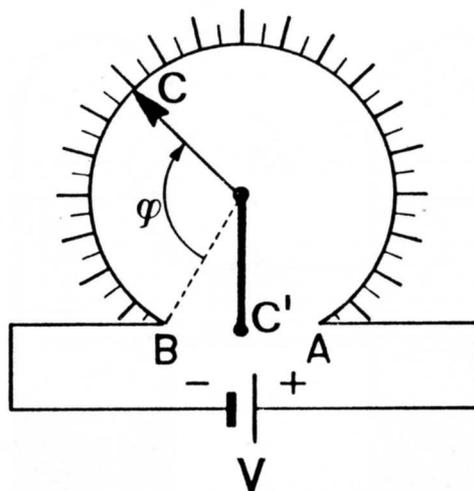


Fig.V.7

detta  $V$  la ddp applicata agli estremi del partitore resistivo e  $v$  la ddp fra  $C'$  (equipotenziale con  $C$ ) e  $B$ , supposto il filo calibro, vale la relazione di pura proporzionalità:

$$\frac{v}{V} = \frac{\varphi}{\varphi_T} \quad (\text{V.4})$$

dove  $\varphi$  misura la posizione del cursore rispetto all'estremo  $B$  e  $\varphi_T$  è il valore che tale coordinata assume quando tutto il partitore è inserito ( $C \equiv A$ ). Nella realtà dei fatti questa relazione non è mai esattamente rispettata in quanto:

a) anche quando il cursore *coincide* con la posizione  $B$  ( $C \equiv B$ ), la tensione fra  $C'$  e  $B$  non è esattamente zero e per questo non si può avere pura proporzionalità, ma semplice linearità fra  $v$  e  $\varphi$

b) inoltre il filo non sarà perfettamente calibro per cui la relazione fra  $v$  e  $\varphi$  non è esattamente di tipo lineare.

Per quantificare lo scostamento dalla linearità di un partitore (e quindi anche di un potenziometro) si procede come segue: si definisce come *linearità* la deviazione massima (espressa come percento della ddp applicata  $V$ ) fra la ddp effettivamente presente  $v(\varphi)$  e il valore dato della linea retta passante per il minimo e il massimo dei valori di ddp *attesi* a inizio e fondo corsa ( $\varphi = 0, \varphi = \varphi_T$ ). Nel caso del nostro partitore, i valori attesi per  $v$  agli estremi sono:

$$v(\varphi = 0) = 0, v(\varphi = \varphi_T) = V.$$

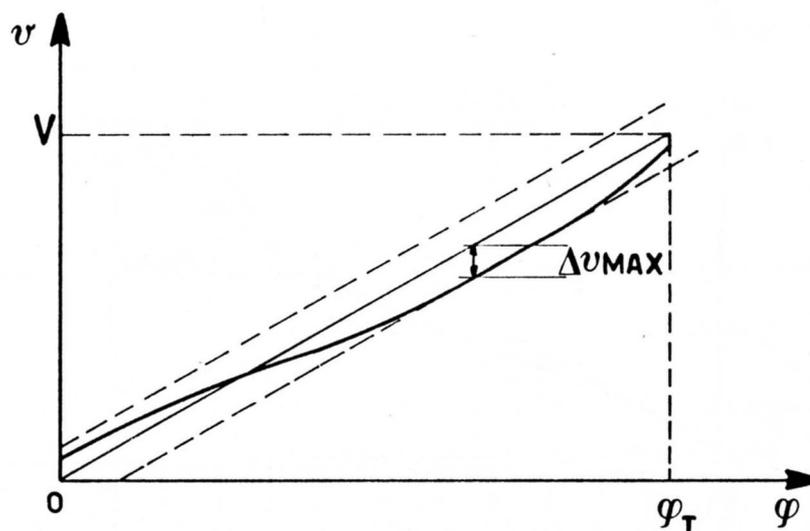


Fig.V.8

Nella Fig.8 è riportata sia la retta ideale che una possibile curva effettiva di risposta: rispetto ai casi di potenziometri reali di qualità anche solo discreta, l'effetto di non linearità è molto esagerato; la massima deviazione  $\Delta v_{MAX}$  definisce una fascia di indeterminazione attorno alla retta ideale cui è associato un errore *a priori* di *non-linearità*. In accordo con quanto detto sopra la *linearità*, nel caso della Fig.8, vale (espressa in percento):

$$l = \frac{\Delta v_{MAX}}{V} \cdot 100 \quad (\text{V.5})$$

I costruttori di partitori resistivi forniscono sempre la linearità  $l$ , e quasi mai la curva effettiva  $v, \varphi$ ; l'errore percentuale di linearità per un generico valore  $v$  si calcola (in percento) come:

$$\left( \frac{\Delta v}{v} \right)_l = \frac{l}{v} \cdot V \quad (\text{V.6})$$

Poiché  $\frac{v}{V}$  è sempre  $< 1$  l'errore percentuale di *linearità* (o meglio di *non linearità*) è sempre maggiore della linearità medesima e solo a fondo corsa le due grandezze coincidono. Quella ora definita si chiama propriamente *linearità ai terminali* (*terminal based linearity*) ed è la grandezza che serve nella maggior parte dei casi. Può essere talvolta utile anche la conoscenza della *linearità assoluta*  $l_a$  che è definita con riferimento alla Fig.9.

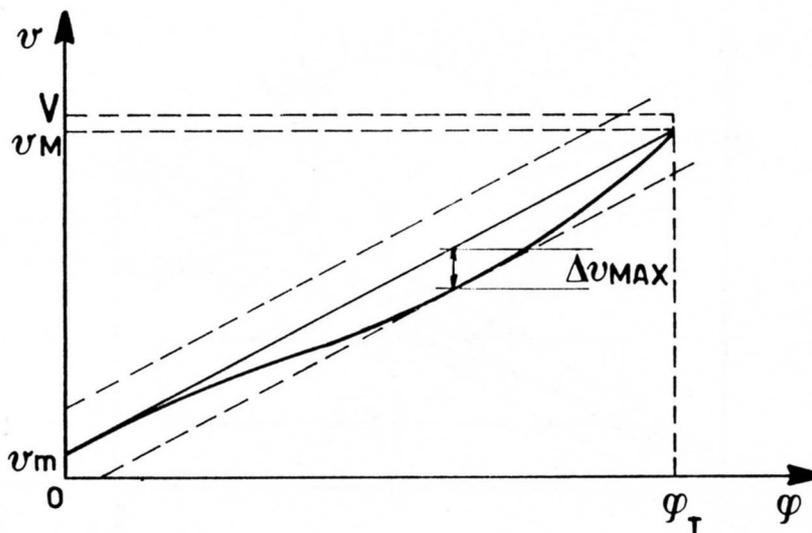


Fig.V.9

La deviazione è misurata questa volta rispetto alla retta passante non per i valori attesi di  $v$  per  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \varphi_T$ , bensì passante per i valori che la tensione effettivamente assume all'inizio e al fondo corsa. La informazione sulla linearità assoluta serve quando, per motivi di precisione, si vuole risalire alla tensione non tramite la semplice legge di proporzionalità (4):  $\frac{v}{V} = \frac{\varphi}{\varphi_T}$ , ma piuttosto, noti o misurati  $v(\varphi = 0) = v_m$  e  $v_M = v(\varphi_T)$ , mediante:  $v = v_m + \frac{\varphi}{\varphi_T}(v_M - v_m)$ . Procedendo in questo modo, poiché la linearità assoluta  $l_a$  è più piccola della linearità ai terminali  $l$ , si ottiene una riduzione dell'indeterminazione *a priori* delle misure.

#### 4.- Un esempio di potenziometro

Riportiamo in questo paragrafo lo schema (Fig.10) di un potenziometro (Student's Potentiometer della Leeds and Northrup) che contiene in sé molte delle caratteristiche tipiche di potenziometri di buona qualità. Limitiamoci per ora a considerare il ramo dove circola la corrente  $i_p$ : esso contiene la resistenza potenziometrica costituita da 16 resistenze tutte nominalmente uguali ( $50 \Omega$ ); la sedicesima è costituita da un filo calibro con presa intermedia. La caduta variabile ai capi della resistenza ( $E^+ - E^-$ ) è ottenuta prelevando la differenza di potenziale fra un contatto mobile compreso fra due resistenze fisse contigue e un cursore che ripartisce la caduta sull'ultima resistenza a filo. Il comando meccanico che seleziona la variazione grossa ( $E^-$ ) presenta (vedi Fig.11) in una finestrella della scatola dell'apparecchio, un numero (1.5, 1.4,  $\dots$ , 0.0, vedi Fig.10), che, moltiplicato per 10, coincide col numero di resistenze fisse inserite fra i contatti.

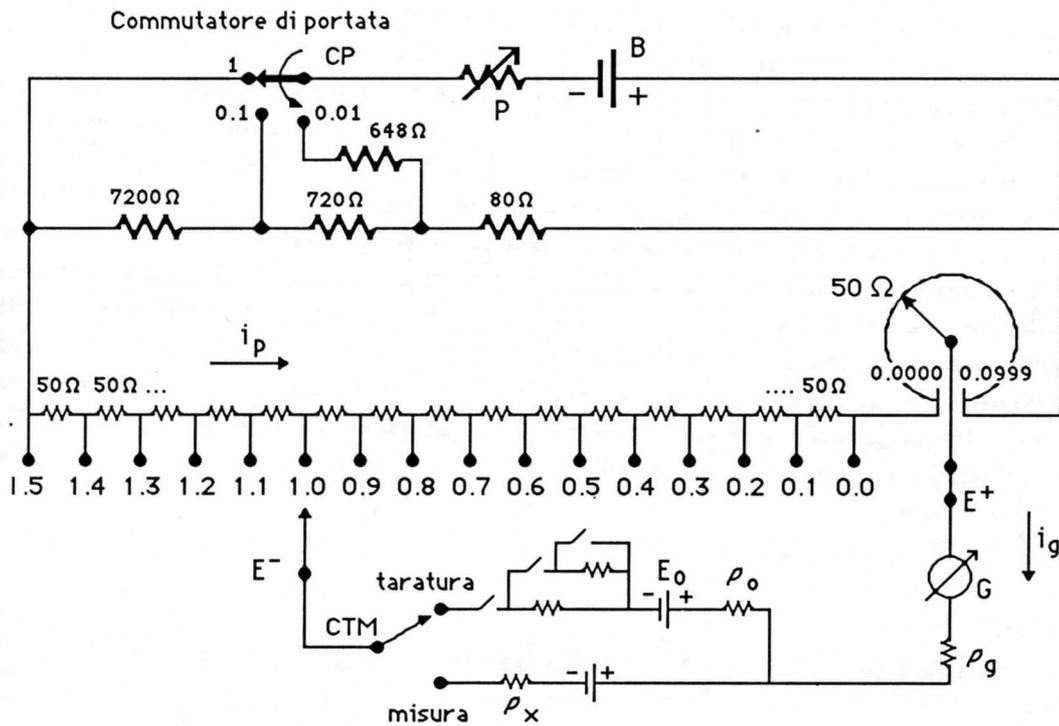


Fig.V.10

Accanto a questo numero compare la scala corrispondente allo spostamento angolare del cursore ( $E^+$ ). Tale spostamento è suddiviso in 200 parti ognuna delle quali, nelle medesime unità delle divisioni grosse, corrisponde a 0.0005. Il numero che compare così composto nella finestrella è proporzionale alla frazione della resistenza totale ( $800\Omega$ ) compresa fra i due contatti mobili  $E^+ - E^-$ . Se poi si fa in modo che nella resistenza potenziometrica scorra una corrente di  $2.00mA$ , allora il numero dà direttamente in Volt la ddp  $E^+ - E^-$ .

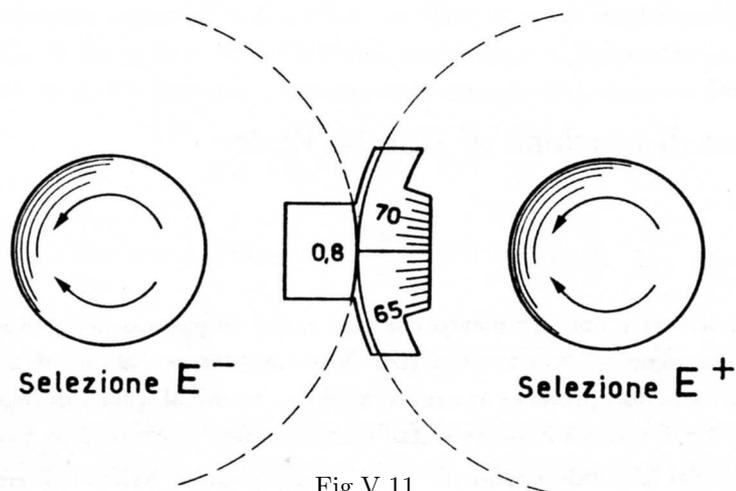


Fig.V.11

Descriviamo ora l'operazione di taratura con riferimento alla Fig.10: supponiamo che il commutatore CP sia in posizione "1" e il commutatore CTM sia in posizione "Taratura". Dopo aver preventivamente impostato sul potenziometro, tramite le manopole che comandano i cursori  $E^+$  ed  $E^-$ , il valore 1.01864 (se siamo a  $20^\circ C$ ), agiremo sul tasto  $T_1 T_2 T_3$  nonché sul reostato P fino ad azzerare la corrente nel galvanometro, posto nella massima sensibilità; il potenziometro è ora tarato e sulla resistenza potenziometrica scorrono esattamente  $2\text{ mA}$ . Commutando CTM su posizione "Misura" saremo quindi in grado di misurare qualunque ddp  $\mathcal{E}_x$  compresa fra 0 e  $1.6\text{ V}$ . Per ridurre l'influenza dell'errore di lettura (metà della divisione più piccola) nella misura di ddp inferiori a  $0.16\text{ V}$ , lo strumento prevede la possibilità di ridurre la corrente attraverso la resistenza potenziometrica di un fattore 10 e 100. Ciò si può fare (vedi Fig.10) agendo sul commutatore CP; è facile verificare che nella posizione 0.1 la corrente totale di  $2.2\text{ mA}$  si smista ora in modo che attraverso la resistenza potenziometrica scorrano  $200\text{ }\mu\text{A}$  e nella posizione 0.01  $20\text{ }\mu\text{A}$ , tutto questo mantenendo fisso il reostato P. In questo modo, oltre al fondo scala  $1.6\text{ V}$ , abbiamo anche quelli di  $160$  e  $16\text{ mV}$ . Nel suo complesso lo strumento consente quindi di misurare ddp comprese fra pochi  $\mu\text{V}$  e  $1.6\text{ V}$  con le seguenti tolleranze:

Portata 1:

linearità (ai terminali): $3 \cdot 10^{-4}$	corrispondente a	$(\Delta V)_{lin} = 0.50 \cdot 10^{-3}\text{V}$
lettura :		$(\Delta V)_{let} = 0.25 \cdot 10^{-3}\text{V}$

Portata 0.1:

linearità (ai terminali): $6 \cdot 10^{-4}$	corrispondente a	$(\Delta V)_{lin} = 0.10 \cdot 10^{-3}\text{V}$
lettura :		$(\Delta V)_{let} = 0.025 \cdot 10^{-3}\text{V}$

Portata 0.01:

linearità (ai terminali): $6 \cdot 10^{-4}$	corrispondente a	$(\Delta V)_{lin} = 0.01 \cdot 10^{-3}\text{V}$
lettura :		$(\Delta V)_{let} = 0.0025 \cdot 10^{-3}\text{V}$

## 5.— Il divisore di tensione di Kelvin-Varley

Il *divisore di tensione* è uno strumento che può essere impiegato in tutte le condizioni e tipi di misura di un potenziometro. Sua caratteristica è quella di presentare fra due terminali (detti di uscita) una ddp pari alla ddp presente ai capi di altri due terminali (detti di ingresso) moltiplicata per un fattore  $< 1$ , il cui valore è impostato dall'utente tramite opportuni controlli.

Il principio su cui si basa tale strumento, nella forma dovuta a *Kelvin e Varley*, è estremamente semplice.

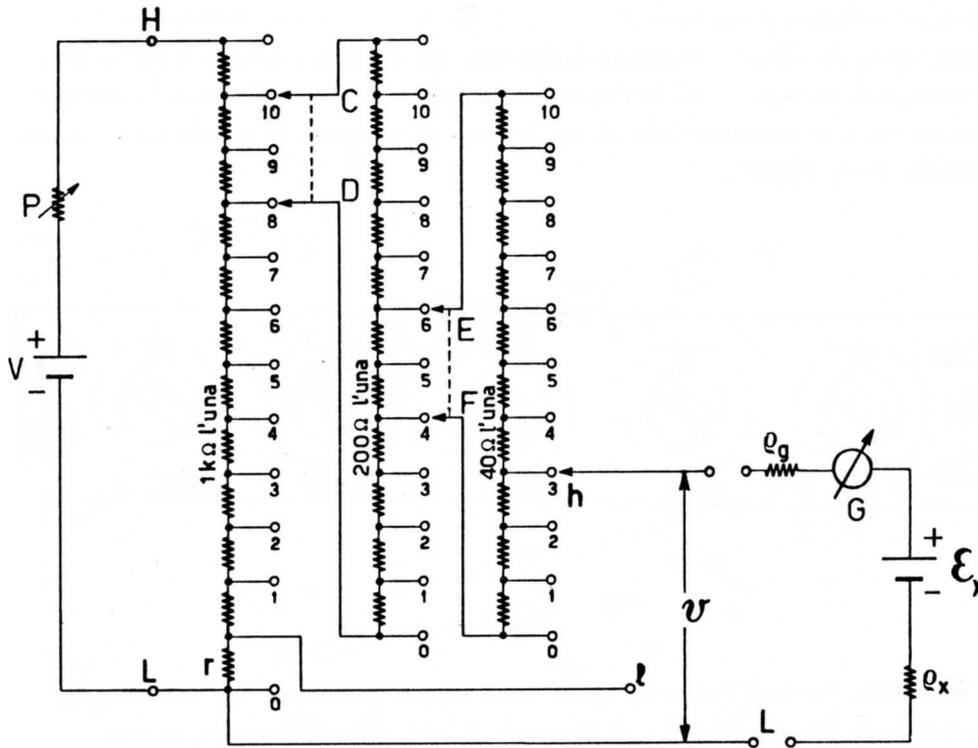


Fig.V.12

Vediamolo con riferimento alla Fig.12, in cui è riportato un esempio di divisore a tre decadi: se nel galvanometro G la corrente è zero, allora  $v = \mathcal{E}_x$  con  $v$  data da:

$$v = (V_H - V_L) \cdot 0.843 \tag{V.7}$$

Infatti, se nel galvanometro non circola corrente la tensione fra  $h$  e  $L$  può essere vista come la somma:

$$v = v_h - v_L = (v_D - v_L) + (v_F - v_D) + (v_h - v_F) \tag{V.8}$$

Con riferimento alla prima e seconda serie di resistenze e ammettendo  $r$  trascurabile, notiamo che la resistenza complessiva fra H e L è sempre data da  $10 \text{ k}\Omega$ , indipendentemente dalla posizione del doppio cursore C-D\*: infatti fra C e D la resistenza vale comunque  $1 \text{ k}\Omega$  in quanto essa è il parallelo di  $2 \text{ k}\Omega$  con una resistenza complessiva di  $2 \text{ k}\Omega$  a sua volta ottenuta come somma di 9 resistenze da  $200 \Omega$  più il parallelo di due gruppi da  $400 \Omega$  l'uno, anche questo, indipendente dalla posizione del secondo doppio pattino (E-F). Pertanto possiamo scrivere, usando la formula del partitore:

$$(v_D - v_L) = (V_H - V_L) \cdot \frac{8}{10} \tag{V.9}$$

$$(v_F - v_D) = (v_C - v_D) \cdot \frac{4}{10} = (V_H - V_L) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \tag{V.10}$$

\* il doppio cursore è realizzato in modo che quando esso viene spostato, la posizione mutua dei due contatti non cambia, cioè essi interessano sempre gli estremi opposti di due resistenze contigue delle serie delle 11 resistenze della decade

$$(v_h - v_F) = (v_E - v_F) \cdot \frac{3}{10} = (v_C - v_D) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = (V_H - V_L) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \quad (\text{V.11})$$

e quindi in definitiva il risultato (7).

Il numero delle decadi può estendersi facilmente, almeno fino a quando il valore delle resistenze rimane al di sopra di un valore minimo rispetto al quale la resistenza dei cursori è ancora trascurabile.

Discutiamo ora le caratteristiche di un divisore di tensione di questo tipo a cinque decadi (General Radio, mod. 1455-B):

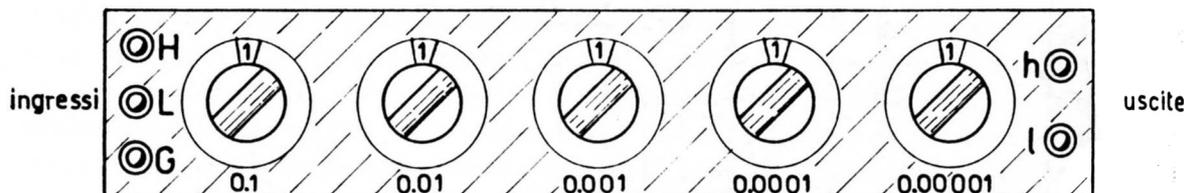


Fig.V.13

ogni manopola (esclusa l'ultima) agisce sulla coppia di cursori che permette le 10 possibili ripartizioni entro la decade (Fig.13). Il morsetto G è in cortocircuito con la scatola metallica ed è utile principalmente nelle applicazioni in corrente alternata. I morsetti a cui si applica la ddp da misurare sono H e L. La ddp pari a quella fra H e L, moltiplicata per il numero composto dalla posizione delle manopole, è presente fra i morsetti h e l. Nella descrizione del principio di funzionamento data precedentemente, la differenza di potenziale in uscita era prelevata fra *h* e *L*. Questo ultimo tipo di configurazione ha il difetto di non tener conto della resistenza (per la verità piccola) dei cursori, mentre la ddp fra *h* e *l* tiene conto di questo fatto in quanto *l* si trova a un potenziale leggermente più alto di *L* grazie alla caduta sulla resistenza  $r (\simeq 10^{-3}\Omega)$  che compensa un analogo innalzamento di tensione al terminale *h* dovuto alla resistenza dei cursori (non disegnata). Conseguentemente le caratteristiche di linearità sono migliori nella configurazione a 4 terminali (H, L ingresso, *h* e *l* uscita) che non a tre (H, L ingresso, *h*, L uscita). La linearità ai terminali dello strumento è diversa a seconda del rapporto impostato e dipende, come detto sopra, anche dal tipo di configurazione (4 o 3 terminali):

rapporto	linearità ai terminali (ppm della ddp in ingresso)		linearità assoluta (ppm della ddp in ingresso)
	4 terminali	3 terminali	
0.1 ÷ 1.0	20	20	20
0.01 ÷ 0.1	10	10	10
0.001 ÷ 0.01	2.0	2.2	2.0
0.0001 ÷ 0.001	0.34	0.5	0.3
0.00001 ÷ 0.0001	0.07	0.23	0.03

Consideriamo la linearità ai terminali: essa è tanto migliore quanto più piccola è la decade in uso, tuttavia l'errore relativo di linearità è maggiore per i rapporti più piccoli, poichè la linearità diminuisce meno rapidamente di un fattore 10 fra decade e decade. Ad esempio per un rapporto

$r = 0.50000$  l'errore relativo su  $v = r \cdot V$  dovuto alla linearità (vedi (6))

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{l}{v} \cdot V = \frac{l}{r}$$

vale  $4 \cdot 10^{-5}$  (sia per la configurazione a 4 che a 3 terminali), per un rapporto 0.05 l'errore relativo sale a  $2 \cdot 10^{-4}$  (4 e 3 terminali) e così via fino a un errore relativo di  $1.2 \cdot 10^{-3}$  (4 terminali) o  $5 \cdot 10^{-2}$  (3 terminali) per un rapporto di  $5 \cdot 10^{-5}$ .

Quanto alla linearità assoluta si può osservare che essa differisce tanto di più da quella ai terminali, quanto più piccolo è il rapporto di tensione: ciò corrisponde al fatto che al diminuire della tensione di uscita cresce di importanza l'effetto della differenza di potenziale  $v_m$  presente fra i terminali di uscita quando l'impostazione del rapporto è 0.00000. A meno che non interessino precisioni particolarmente spinte anche per piccoli valori del rapporto di tensione, ci si può in genere basare sulla linearità ai terminali, effettuando la taratura su un unico valore di ddp, per esempio con una pila campione di fem  $E_0$ .

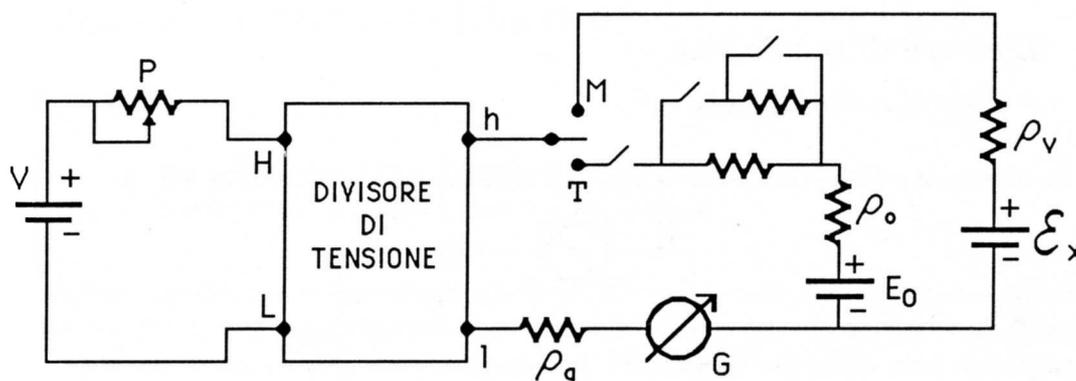


Fig.V.14

Detto  $r_o$  il rapporto corrispondente all'azzeramento del galvanometro con la pila campione inserita, e detto  $r$  il rapporto per cui si azzerava il galvanometro con il tasto in posizione M, la forza elettromotrice  $\mathcal{E}_x$  sarà data da (vedi Fig.14):

$$\mathcal{E}_x = \frac{r}{r_o} \cdot E_0 \quad (\text{V.12})$$

Il reostato  $P$  ha la funzione di poter regolare la differenza di potenziale  $V_H - V_L$ , cioè quella che viene poi ripartita dal divisore: essa sarà data da  $V_H - V_L = V \cdot \frac{R_{in}}{P + R_{in}}$ , dove  $R_{in}$  è la resistenza di ingresso del divisore, pari come abbiamo già visto a  $10 \text{ k}\Omega$ ; tale valore è indipendente dal valore del rapporto impostato, purchè fra i terminali di uscita non sia derivata corrente (in pratica una corrente piccola rispetto al rapporto  $(v_h - v_l)/R_u$ , essendo  $R_u$  la resistenza di Thévenin fra i terminali di uscita  $h$  e  $l$ . Su questo punto torneremo nel prossimo paragrafo.

I valori della linearità dello strumento sono tali che, almeno in via di principio, la precisione delle misure può essere assai elevata. Altre cause di errore, che possono limitare in pratica la precisione raggiungibile, sono le seguenti: innanzitutto la stabilità (in funzione della temperatura ed eventualmente di altri parametri, ad esempio il tempo) del generatore di tensione  $V$ ; infatti ogni instabilità di  $V$  si ripercuote sulla tensione di uscita con una uguale instabilità relativa; inoltre le variazioni di  $P$  (vedi Fig.14) in funzione della temperatura portano a modificazioni di  $V_H - V_L$ .

Se il generatore di tensione è di buona qualità e se il reostato è fatto con leghe tipo Manganina, sia per  $V$  che per  $P$  le stabilità possono essere di qualche  $10^{-5}/^{\circ}C$ . Gli effetti considerati possono quindi compromettere le precisioni nominali del divisore solo se durante la misura si hanno sbalzi di temperatura di svariati gradi centigradi. Analoga considerazione va fatta sull'influenza della stabilità della resistenza di ingresso  $R_{in}$  ( $2 \cdot 10^{-5}/^{\circ}C$ ). Quanto poi alla stabilità dei rapporti di divisione, poiché le resistenze del divisore sono tutte fatte con lo stesso materiale (oltretutto ad alta stabilità:  $2 \cdot 10^{-5}/^{\circ}C$ ), essi risentono estremamente poco degli sbalzi di temperatura e in quasi tutti i casi pratici il problema può francamente dimenticarsi.

Un altro effetto che può compromettere la precisione delle misure può derivare dalla presenza di fem termoelettriche dovute a gradienti di temperatura nel circuito; abbiamo già detto di questi effetti e di alcune precauzioni da prendere per ridurne l'influenza. Nel prossimo paragrafo considereremo un altro contributo alla indeterminazione associata a questo metodo di misura, collegato alla sensibilità finita del rivelatore di zero; in molte situazioni sperimentali questo effetto dà il contributo maggiore agli errori sulla ddp misurata.

## 6.— L'errore di sensibilità e il rivelatore di zero

Lo schema di principio riportato in Fig.1 e riprodotto per comodità nella Fig.15

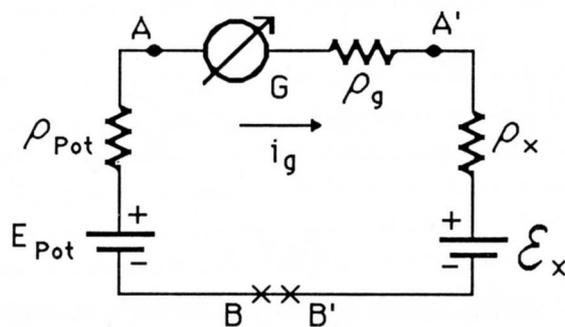


Fig.V.15

può essere interpretato come lo schema equivalente secondo Thévenin di una qualunque misura potenziometrica, indipendentemente dal fatto che essa utilizzi un potenziometro o un divisore di tensione.  $A$  e  $B$  rappresentano i terminali del potenziometro (o del divisore di tensione), mentre  $A'$  e  $B'$  quelli fra cui si vuole misurare la ddp  $\mathcal{E}_x$ . Questo schema generale consente di mettere bene in evidenza l'effetto della sensibilità finita del galvanometro: infatti, la seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito di Fig.15, dà:

$$E_{pot} - \mathcal{E}_x = i_g(\rho_{pot} + \rho_g + \rho_x) \quad (V.13)$$

che garantisce l'uguaglianza fra  $E_{pot}$  e  $\mathcal{E}_x$  solo se  $i_g = 0$ . D'altronde sappiamo che esiste un limite per la corrente minima rivelabile ( $i_{gm}$ ), associato alla più piccola deflessione osservabile e alla costante reometrica dello strumento. Lo sperimentatore cioè non può garantire l'azzeramento esatto della corrente  $i_g$ , ma solo un limite superiore  $i_{gm}$  per essa. Conseguentemente la (13) ci dà proprio, per  $i_g = i_{gm}$ , l'errore di sensibilità  $(\Delta\mathcal{E}_x)_S$  su  $\mathcal{E}_x$ :

$$(\Delta\mathcal{E}_x)_S = i_{gm}(\rho_{pot} + \rho_g + \rho_x) \quad (V.14)$$

Per fare un caso realistico supponiamo che  $i_{gm} = 2.5 \cdot 10^{-8} A$  con  $\rho_g \simeq 20 \Omega$  e utilizziamo il potenziometro descritto nel §4 (Fig.10). Se vogliamo valutare l'errore dato dalla (14) occorre dare una valutazione di  $\rho_{pot}$ , la resistenza equivalente di Thévenin fra  $E^+$  ed  $E^-$ ; chiaramente essa dipende dal punto di lavoro, nonché dal valore di resistenza assunto dal reostato  $P$ ; per valutare  $\rho_{pot}$  consideriamo il potenziometro nelle tre portate (1, 0.1, 0.01) con inserite o solo 10 o tutte e 16 le resistenze da  $50 \Omega$  (rispettivamente righe "A" e "B" nella tabella), assumendo che  $P = 4 k\Omega$  (valore ragionevole se  $B \simeq 10V$ ):

Portata 1:

$$\begin{aligned} A: \quad \rho_{pot} &= 500 \Omega \parallel [300 \Omega + (8000 \Omega \parallel P)] \simeq 430 \Omega && \text{oppure} \\ B: \quad \rho_{pot} &= 800 \Omega \parallel (8000 \Omega \parallel P) \simeq 620 \Omega \end{aligned}$$

Portata 0.1:

$$\begin{aligned} A: \quad \rho_{pot} &= 500 \Omega \parallel [7500 \Omega + (800 \Omega \parallel P)] \simeq 470 \Omega && \text{oppure} \\ B: \quad \rho_{pot} &= 800 \Omega \parallel (7200 \Omega + 800 \Omega \parallel P) \simeq 730 \Omega \end{aligned}$$

Portata 0.01:

$$\begin{aligned} A: \quad \rho_{pot} &= 500 \Omega \parallel [8220 \Omega + 80 \Omega \parallel (648 \Omega + P)] \simeq 470 \Omega && \text{oppure} \\ B: \quad \rho_{pot} &= 800 \Omega \parallel [7920 \Omega + 80 \Omega \parallel (648 \Omega + P)] \simeq 730 \Omega \end{aligned}$$

Se avessimo considerato una posizione dei cursori  $E^+ - E^-$  molto ravvicinata,  $\rho_{pot}$  si sarebbe avvicinata a  $0 \Omega$ . I dati sopra riportati ci mostrano che la resistenza equivalente di Thévenin del potenziometro dipende molto dalla posizione dei due cursori, ma molto poco dalla portata: comunque la resistenza si mantiene al di sotto di  $730 \Omega$  in tutte le configurazioni e in tutte le portate. Pertanto l'errore assoluto di sensibilità dovuto al solo potenziometro e galvanometro (ovvero se  $\rho_x \ll (\rho_{pot} + \rho_g)$ ) si mantiene comunque al di sotto di  $\simeq 20 \mu V$  ( $2.5 \cdot 10^{-8} \times 8 \cdot 10^2 V$ ) e quindi in molte situazioni è trascurabile. Se invece, come spesso capita,  $\rho_x$  è elevata, allora si possono verificare situazioni di misura in cui l'errore di sensibilità domina rispetto agli altri. Consideriamo il caso della pila campione che ha una resistenza interna  $\rho_o \simeq 1 k\Omega$ : ciò porta un errore di sensibilità nella taratura di circa  $45 \mu V$  ( $\rho_o + \rho_g + \rho_{pot} \simeq 1800 \Omega$ ) maggiore dell'errore con cui è nota  $E_o$ . Se poi si usa il divisore di tensione, occorrerà valutare la  $\rho_{pot}$  di Thévenin fra  $h$  e  $l$  (o  $h$  e  $L$ , ma sono praticamente identiche); in questo caso il calcolo è assai più complicato che nel caso del potenziometro; comunque si trova che tale resistenza è sempre minore di  $\simeq 2.9 k\Omega$  (supposto il reostato  $P$  di valore  $\ll 10 k\Omega$ ); il valore minimo tende anche in questo caso a zero quando il rapporto impostato tende a 0.

Molto spesso, invece di calcolare  $\rho_{pot}$  e l'errore di sensibilità, conviene piuttosto dare una valutazione sperimentale delle medesime quantità: per fare ciò si varia di una quantità finita l'impostazione del potenziometro o del divisore di tensione rispetto al valore di equilibrio e si osserva di quante divisioni si sposta il galvanometro; la variazione corrispondente al minimo spostamento apprezzabile del galvanometro ( $\simeq \frac{1}{4}$  di divisione) dà direttamente l'errore di sensibilità sulla tensione (o meglio: sull'impostazione del potenziometro o del divisore e quindi sulla tensione). Se poi, supponendo di conoscere  $\rho_g$ , si conosce o si misura  $\rho_{pot}$  (sostituendo il generatore  $V$  con un cortocircuito), si può anche risalire, almeno approssimativamente a  $\rho_x$ . Con questo metodo si può dare per esempio una valutazione approssimata della resistenza interna della pila campione.

Riassumiamo gli errori che si commettono in una misura potenziometrica. La relazione che si sfrutta è:

$$\mathcal{E}_x = \frac{r}{r_o} E_o \quad (\text{V.15})$$

dove  $r$  e  $r_o$  sono le letture fatte sul potenziometro (o divisore di tensione) in corrispondenza dello zero del galvanometro, quando siano in misura  $\mathcal{E}_x$  e  $E_o$  rispettivamente. Sarà allora

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x} = & \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} + \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} + \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sensibilità}} + \\ & + \left( \frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{linearità}} + \left( \frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{lettura}} + \left( \frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{sensibilità}} + \left( \frac{\Delta E_o}{E_o} \right)_{\text{campiono}} \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

qualora  $\left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sensibilità}}$  sia valutata sperimentalmente.

Se la valutazione dell'errore di sensibilità è fatta sulla base della conoscenza di  $\rho_{pot}$ ,  $\rho_x$  e  $\rho_g$  e di  $i_{gm}$ , allora varrà:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x} = & \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} + \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} + \left( \frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{linearità}} + \left( \frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{lettura}} + \\ & + i_{gm} \left( \frac{\rho_x + \rho_{pot x} + \rho_g}{\mathcal{E}_x} + \frac{\rho_o + \rho_{pot o} + \rho_g}{E_o} \right) + \left( \frac{\Delta E_o}{E_o} \right)_{\text{campiono}} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

dove i simboli dovrebbero essere sufficientemente eloquenti da non richiedere ulteriori spiegazioni. Le formule ora date valgono ovviamente per gli errori massimi.

Nel caso di una misura col potenziometro del tipo descritto nel §4 sarà opportuno cercare di minimizzare questi errori *a priori*, scegliendo la portata più adatta: come esempio, supponiamo di dover misurare una ddp  $\mathcal{E}_x = 10mV$  con una  $\rho_x = 1 \Omega$ ; nelle varie portate la situazione degli errori valutati a priori è la seguente (vedi pagina 110):

Portata 1:

$$\left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \quad \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} = 2.5 \cdot 10^{-2} \quad \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sens}} < 10^{-4}$$

Portata 0.1:

$$\left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} \simeq 1 \cdot 10^{-2} \quad \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} = 2.5 \cdot 10^{-3} \quad \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sens}} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$$

Portata 0.01:

$$\left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} \simeq 1 \cdot 10^{-3} \quad \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} = 2.5 \cdot 10^{-4} \quad \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sens}} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$$

Conviene effettuare la misura nella portata 0.01 perché in essa è minimo l'errore  $\left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{totale}}$ . Simili problemi si pongono qualora si misuri con un divisore di tensione.

Dal contesto dovrebbe essere chiaro che ancora una volta -come nel ponte di Wheatstone- il limite della precisione deriva dal rivelatore di zero, qualora le resistenze in gioco siano abbastanza elevate. Ad esempio una resistenza  $\rho_x = 10^5 \Omega$  stabilisce, sia nel caso che si utilizzi un potenziometro che un divisore di tensione, un errore (indipendente da  $\mathcal{E}_x$ )  $\Delta \mathcal{E}_x \simeq 2.5mV$  che in un gran numero di casi vanifica le caratteristiche di precisione degli strumenti. Anche qui, come nel caso del ponte di Wheatstone, l'uso di un microvoltmetro elettronico ( $K_V = 10^{-6} V/div$ ,  $\rho_V > 10^8 \Omega$ ) porta a dei

miglioramenti sostanziali nella sensibilità della misura: infatti lo schema della misura in questo caso diviene quello di Fig.16:

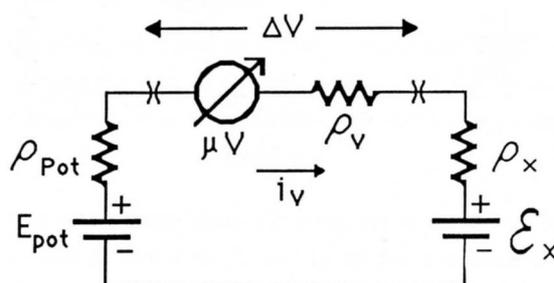


Fig.V.16

e quindi

$$E_{pot} - \mathcal{E}_x = i_V(\rho_V + \rho_x + \rho_{pot}) \simeq \Delta V \left(1 + \frac{\rho_x + \rho_{pot}}{\rho_V}\right) \quad (\text{V.18})$$

dove abbiamo posto  $i_V \cdot \rho_V = \Delta V$ , ovvero proprio la differenza di potenziale che si legge sul microvoltmetro. Conseguentemente, fintanto che  $\rho_V \gg (\rho_x + \rho_{pot})$ , l'errore assoluto su  $\mathcal{E}_x$  dovuto alla sensibilità corrisponde alla tensione più piccola misurabile dallo strumento; ad esempio  $\simeq 0.50 \mu V$  se la divisione più piccola corrisponde a  $1 \mu V$ .

L'uso di tali rivelatori di zero consente quindi di effettuare accurate misure di ddp a partire da un centinaio di  $\mu V$  in su, essendo la precisione unicamente limitata dalla linearità del potenziometro o del divisore per valori di ddp maggiori di qualche  $mV$ , e per tensioni più piccole dalla linearità, più eventualmente altri effetti spuri quali ad esempio le fem di origine termoelettrica e le instabilità intrinseche (rumore) del rivelatore di zero. Su quest'ultimo punto torneremo molto più avanti, nel Cap.XV.

## 7.— Misure di fem e resistenze equivalenti

### di Thévenin fra due terminali

Elenchiamo qui di seguito, schematicamente, alcune misure di differenza di potenziale e resistenza interna fra due terminali.

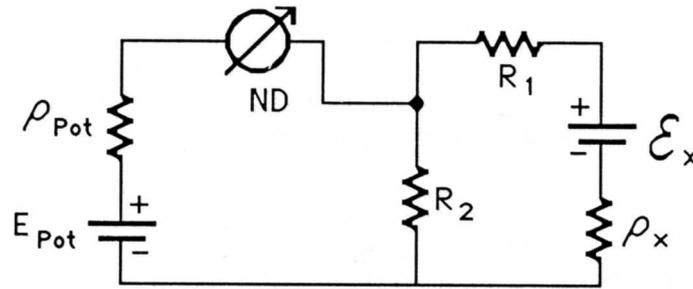


Fig.V.17

Con il Potenziometro, poiché la corrente nella resistenza potenziometrica propriamente detta non deve superare  $2 \text{ mA}$ , il massimo valore di fem  $\mathcal{E}_x$  misurabile direttamente è  $1.6 \text{ V}$ . Tuttavia è facile risalire al valore di una fem più elevata montando un partitore di tensione realizzato con due resistenze note (vedi Fig.17):

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{pot} \cdot \frac{R_1 + R_2 + \rho_x}{R_2} \quad (\text{V.19})$$

Se  $\rho_x$  non è trascurabile rispetto a  $R_1$  e  $R_2$ , occorre, mediante una coppia diversa  $R_1 - R_2$ , fare un'altra misura e dal complesso delle due misurazioni ricavare  $\mathcal{E}_x$  e  $\rho_x$ . L'indeterminazione su  $\mathcal{E}_x$  (e  $\rho_x$ ) risentirà oltre che dei soliti contributi di errore, anche dell'indeterminazione con cui sono note  $R_1$  e  $R_2$ . Un simile metodo si può applicare anche quando  $\mathcal{E}_x$  sia  $\leq 1.6 \text{ V}$  e si voglia determinare sia  $\mathcal{E}_x$  che  $\rho_x$ . In questo caso la presenza di  $R_1$  è inessenziale e introduce solo una complicazione. Se  $\rho_x$  è piccola e non compromette la sensibilità, una misura diretta, senza  $R_2$  cioè, dà direttamente  $\mathcal{E}_x$ . Una seconda misura con  $R_2$  tale che dimezzi  $\mathcal{E}_x$ , ci dice subito  $\rho_x = R_2$ . In questo tipo di misura se  $\rho_x$  è piccola occorre verificare che siano rispettati i wattaggi delle varie resistenze e che non si richieda una erogazione eccessiva di corrente da parte del generatore (soprattutto se è una pila).

Se  $\rho_x$  è grande, ma ancora non tanto da compromettere la sensibilità del galvanometro come rivelatore di zero, si può compiere una prima misura scegliendo  $R_2 \ll \rho_x$ , ma tale da dare pur sempre una ddp misurabile con piccolo errore; otterremo così:

$$\mathcal{E}'_{pot} = \mathcal{E}_x \cdot \frac{R_2}{R_2 + \rho_x} \simeq \mathcal{E}_x \cdot \frac{R_2}{\rho_x} = i_{cc} R_2 \quad (\text{V.20})$$

dove  $i_{cc}$  rappresenta la corrente di cortocircuito fra i due terminali. In una seconda misura si può aggiungere in serie a  $R_2$  una resistenza  $R_1$ :

$$\mathcal{E}''_{pot} = \mathcal{E}_x \cdot \frac{R_2}{R_2 + \rho_x + R_1} \simeq \frac{\mathcal{E}_x}{\rho_x} \cdot \frac{R_2}{1 + \frac{R_1}{\rho_x}} \quad (\text{V.21})$$

Si regola poi  $R_1$  fino ad ottenere  $\mathcal{E}''_{pot} = \frac{\mathcal{E}'_{pot}}{2}$ ; in questa condizione  $R_1 = \rho_x$ . L'approssimazione introdotta dall'aver trascurato  $R_2$  rispetto a  $\rho_x$  dovrà non introdurre un errore di schematizzazione superiore agli altri errori di misura; se ciò non è possibile, sarà opportuno sviluppare i calcoli esattamente, cioè senza approssimazioni.

Se infine  $\rho_x$  è così grande che la sensibilità risulta gravemente compromessa, allora occorre impiegare nelle misure precedenti il microvoltmetro come rivelatore di zero (sempre che siano disponibili campioni di resistenza di valore sufficientemente elevato, necessari nell'ultimo metodo descritto).

Osserviamo che molto spesso in questo tipo di misure non occorre ricorrere propriamente ad un microvoltmetro, ma basta usare un buon multimetro elettronico con una risoluzione di  $100 \mu V$  e una resistenza di ingresso di  $10 M\Omega$ . Infatti con tale strumento -assai meno delicato da utilizzarsi- si ottiene una precisione nella misura di zero (e cioè una incertezza in  $\Delta V$  data dal voltmetro) di  $10^{-4} V$  quasi sempre sufficientemente piccola, almeno per  $\mathcal{E}_x$  dell'ordine del Volt. La resistenza di ingresso  $\rho_V = 10 M\Omega$  è inoltre sufficientemente elevata da non provocare forti diminuzioni della sensibilità, a meno che  $\rho_x$  non sia molto maggiore di  $\rho_V$ .

Quanto al Divisore di tensione, con esso si possono compiere tutte le misure descritte in questo paragrafo, con il vantaggio aggiuntivo che non esiste il limite a  $1.6 V$  sulla tensione massima misurabile; il Divisore di tensione disponibile in laboratorio può accettare in ingresso tensioni fino a circa  $200 V$ .

## 8.— Taratura di voltmetri e amperometri

La taratura, oppure il controllo della precisione dichiarata, di un voltmetro si può fare con il circuito di Fig.18.

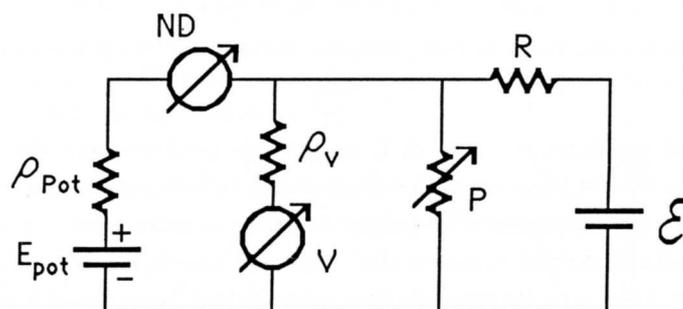


Fig.V.18

Il circuito è estremamente semplice: tramite la regolazione del reostato  $P$  si cambia la tensione  $V$  ai capi dello strumento; tale ddp è contemporaneamente misurata dal multimetro e dal potenziometro (preventivamente tarato). Con questo metodo si può controllare la precisione dello strumento per tutta la gamma dei valori misurabili. Per quanto riguarda i componenti  $\mathcal{E}$ ,  $R$ ,  $P$ , occorre che siano stabili, la loro precisione essendo irrilevante. Nel caso che la resistenza di Thévenin  $\rho_{pot}$  sia molto minore di  $\rho_V$ , lo schema può essere ulteriormente semplificato: lo riportiamo in Fig.19 nell'ipotesi di utilizzare il divisore di tensione anziché il potenziometro:

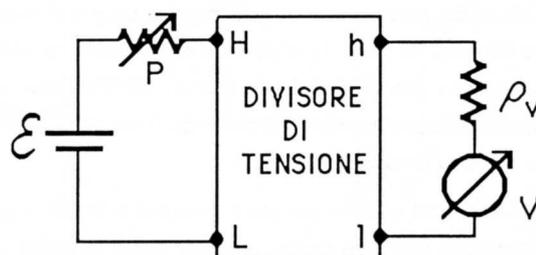


Fig.V.19

Supponiamo che il divisore sia stato preventivamente tarato con una pila campione; variando i rapporti del divisore si tara direttamente il voltmetro.

Dovendo tarare un amperometro, lo schema può essere quello di Fig.20, identico sia che si usi il potenziometro che il divisore di tensione (entrambi dovranno essere stati preventivamente tarati):

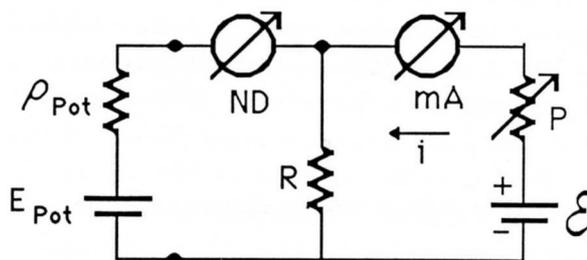


Fig.V.20

Soddisfatta che sia la condizione di zero, avremo, indicando con  $i$  il valore della corrente

$$i = \frac{E_{pot}}{R} \quad (V.22)$$

Variando  $P$  si può cambiare il valore di  $i$ ; se si vuole produrre una curva di taratura dello strumento, detta  $i_L$  la corrente letta sul milliamperometro, riporteremo in grafico  $i_L - i$  in funzione di  $i$ ; se facciamo questo per vari valori di  $i$  potremo, nell'utilizzo successivo del milliamperometro, correggere le letture sulla base della spezzata che congiunge i punti sperimentali.

Se lo strumento da tarare è molto sensibile (per esempio  $1\mu A$  fondo scala) è necessario aumentare  $R$  e  $P$  e può accadere che la sensibilità ne risenta fino al punto di compromettere la precisione della misura; al solito, l'uso di un microvoltmetro come rivelatore di zero risolve il problema.

## 9.— Misura di resistenze

Con riferimento alla Fig.21, quando  $E^+$  ed  $E^-$  sono collegati rispettivamente ai morsetti 1 e 2, all'equilibrio si ha:

$$E_{pot}^{12} = R^* \cdot i \quad (V.23)$$

mentre quando sono collegati 3 e 4:

$$E_{pot}^{34} = R_x \cdot i \tag{V.24}$$

e pertanto

$$R_x = \frac{E_{pot}^{34}}{E_{pot}^{12}} \cdot R^* \tag{V.25}$$

e se  $R^*$  è una resistenza nota,  $R_x$  è così determinata.

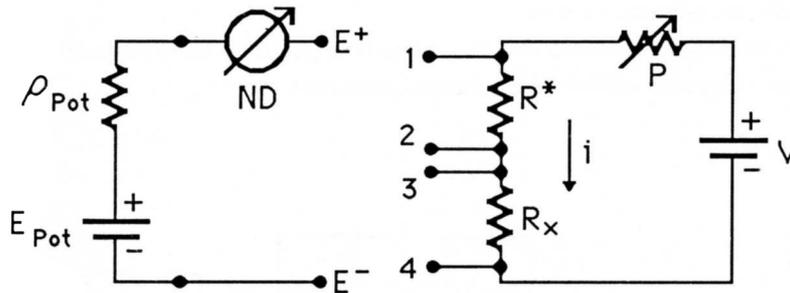


Fig.V.21

Il sistema è particolarmente adatto quando le resistenze  $R_x$  e  $R^*$  sono di piccolo valore e a 4 terminali: in questo caso i terminali di corrente vengono usati per stabilire i collegamenti con  $P$  e  $V$  e  $R^*$  e  $R_x$  fra di loro, mentre i terminali di tensione (due per ogni resistenza) vengono correttamente utilizzati per misurare le cadute ai capi delle resistenze. In questo caso è assai evidente l'utilità di avere 4 terminali: le resistenze dei contatti e dei collegamenti non entrano minimamente in gioco nella misura della caduta ohmica. I terminali di tensione possono essere anche collegamenti con sezione piccola e resistenza relativamente grande rispetto a quella da misurare, in quanto la corrente attraverso di essi è, all'equilibrio, nominalmente nulla o comunque quella corrispondente al limite di sensibilità ( $< 10^{-7}A$ , se si usa il galvanometro come rivelatore di zero, assai inferiore se si usa il microvoltmetro).

Può essere a questo proposito istruttivo considerare quantitativamente la situazione delle correnti nella misura (Fig.22): supponiamo di avere da

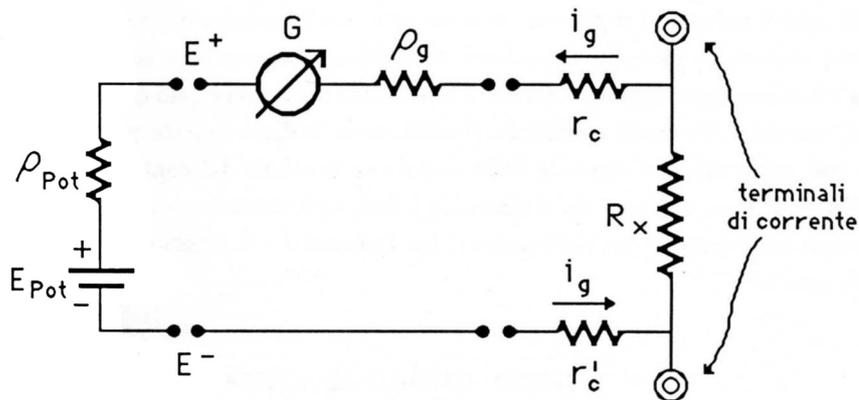


Fig.V.22

misurare una resistenza di  $1 \cdot 10^{-2}\Omega$ . Una corrente di  $10^{-1}A$  provocherà su  $R_x$  una caduta di  $1mV$  ancora misurabile con buona precisione mediante il potenziometro. Essendo all'equilibrio

$i_g \leq 2.5 \cdot 10^{-8} A$ , se vogliamo che la caduta (cioè l'errore di sensibilità) sulla resistenza  $(\rho_{pot} + \rho_g + r_c + r'_e + R_x) = R_s$  dovuta a questa corrente sia minore dell' 1% di 1 mV dovremo avere

$$R_s \leq \frac{10^{-5}}{2.5 \cdot 10^{-8}} = 400 \Omega$$

Un limite di tal genere può derivare soltanto da  $\rho_{pot}$ , non certo dai collegamenti che introdurranno resistenze di alcuni ordini di grandezza inferiori; tuttavia col potenziometro che abbiamo descritto, trattandosi di misurare una ddp di 1 mV, la resistenza  $\rho_{pot}$  risulterà dell'ordine di 50  $\Omega$  e quindi non avremo problemi. In ogni caso, qualora  $\rho_{pot}$  fosse di valore più elevato, sarà anche in questa misura utile un microvoltmetro.

Prima di concludere, ricordiamo che un'alternativa possibile all'utilizzo di resistenze a 4 terminali, è quella di un razionale utilizzo dei morsetti standard.

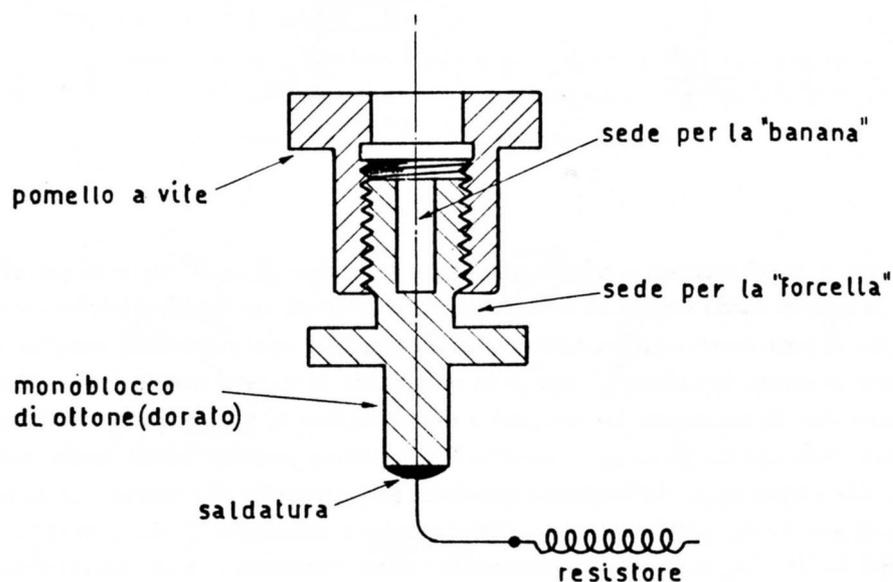


Fig.V.23

Essi sono in genere fatti in modo (Fig.23) da avere la possibilità di accogliere in una sede un terminale di cavo a *spinotto* ( o *banana*) e in un'altra un terminale a *forcella*. Il contatto che si può assicurare con la forcella pressata -tramite il pomello a vite- contro il conduttore del morsetto è di qualità senz'altro migliore rispetto a quello del contatto a banana e può quindi essere utilizzato come terminale di corrente. Se come terminale di tensione si utilizza la sede per un terminale a banana, la tensione così misurata non dipende dalla caduta di tensione del contatto dei terminali a forcella e pertanto la resistenza che così determiniamo è ben riproducibile e perfettamente definita, anche se essa contiene la resistenza dei collegamenti fra i morsetti e il resistore vero e proprio disegnato a spirale nella figura.

#### NOTA BIBLIOGRAFICA

**FR 59, LA 38, DA 75, MA 72 e ZI 86** trattano in maniera dettagliata molti degli argomenti del capitolo.

Su **FR 71** si potrà trovare una descrizione del principio di funzionamento delle pile elettrochimiche.

Su **LA 38** sono riportate informazioni sulle pile campione; stesso argomento è trattato su **CO 85** con qualche notizia su campioni di fem più moderni.

Per quanto riguarda gli strumenti e le loro caratteristiche, è opportuno consultare i manuali dei costruttori (“Student Potentiometer” della Leeds & Northrup e “Voltage Divider” della General Radio).

## VI

### MISURE COL GALVANOMETRO BALISTICO

#### 1.— Concetto di capacità, condensatori

In base alle leggi dell'elettrostatica sappiamo che, dato un conduttore lontano da altri conduttori, è possibile introdurre una quantità detta *capacità* (simbolo  $C$ ) definita come il rapporto fra la carica  $q$  accumulata sul conduttore e il potenziale  $\varphi$  di quest'ultimo:

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (\text{VI.1})$$

$C$  dipende dalla forma del conduttore e dalla costante dielettrica del mezzo in cui è immerso. L'unità di misura della capacità è il *Farad* ( $F$ ) pari a 1 *Coulomb/Volt*. Molto spesso si usano i sottomultipli, poiché il *Farad* è una unità estremamente grande. A titolo di esempio la capacità di una sfera di raggio  $R$  uniformemente carica vale

$$C = \frac{\int_S dq}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dq}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{VI.2})$$

Ricordando che  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$ , si trova che se  $R = 1 \text{ cm}$ ,  $C = 1.11 \text{ pF}$ .

Per aumentare la carica che si può accumulare in un conduttore, si possono porre due conduttori molto vicini l'uno all'altro e applicare ad essi una certa differenza di potenziale  $V$ . Se tutte le linee di campo uscenti da uno dei due conduttori sono captate dall'altro (se cioè si ha *induzione completa*), si trova che le cariche sui due conduttori sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto e che è possibile definire la capacità di questo insieme di conduttori come il rapporto costante fra il valore assoluto della carica  $q$  comune ai due conduttori e la differenza di potenziale  $V$ :

$$C = \frac{q}{V} \quad (\text{VI.3})$$

Questo insieme di conduttori costituisce quello che si chiama un *condensatore*; i due conduttori (separati da un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ ) sono detti *armature* del condensatore. Il motivo per cui si riescono in questo caso a ottenere accumuli di carica sulle armature superiori rispetto a quelli sui due conduttori isolati, si comprende osservando che se si considera una armatura, il valore assoluto del potenziale di essa si abbassa notevolmente, rispetto al caso che fosse isolata, a causa della carica di segno opposto collocata nelle sue immediate vicinanze.

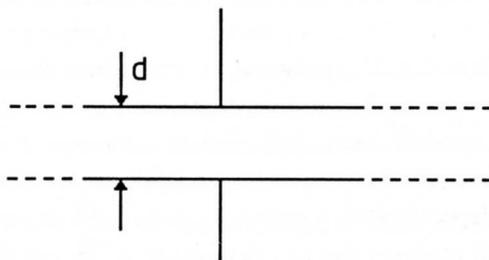


Fig.VI.1

Calcoliamo a titolo di esempio la capacità  $C$  di un condensatore costituito da due conduttori piani indefiniti posti a distanza  $d$  fra loro (Fig.1). Detta  $\pm\sigma$  la densità superficiale di carica sulle armature, si trova che il campo elettrico  $\vec{E}$  all'interno è diretto perpendicolarmente alle armature ed è di modulo costante pari a  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$ . La ddp fra le armature risulta così  $V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0\epsilon_r}$ . Poiché il modulo della carica accumulata su una delle due armature vale  $Q = \sigma S$ , la capacità è data da  $C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$ .

I condensatori trovano larga applicazione nei circuiti elettrici e elettronici; il loro simbolo circuitale è quello riportato in Fig.2,



Fig.VI.2

che rappresenta schematicamente il caso di un condensatore a superfici piane e parallele, al quale tutti i condensatori sono riconducibili con una approssimazione generalmente buona. Spesso le armature dei condensatori sono costituite da due fogli conduttori, separati da un dielettrico e avvolti l'uno sull'altro; detta  $S$  la superficie delle due armature,  $d$  la distanza fra di esse (cioè lo spessore del dielettrico),  $\epsilon_r$  la costante dielettrica relativa, la capacità di questo condensatore vale:  $C \approx \frac{2\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$  a patto che la distanza  $d$  sia molto minore del raggio di curvatura delle superfici dei conduttori.

I condensatori possono collegarsi fra di loro così come si possono collegare le resistenze; tuttavia se vogliamo calcolare la capacità di condensatori in parallelo troviamo che le capacità si sommano, mentre le capacità di condensatori in serie si ottengono prendendo l'inverso della somma degli inversi. Questo risultato si comprende immediatamente se si osserva che la relazione fra carica e differenza di potenziale

$$Q = CV \quad (\text{VI.4})$$

è di proporzionalità, come fra corrente e tensione, salvo che la capacità è a moltiplicare la tensione e non la corrente e pertanto si comporterà nei confronti della carica e della tensione come una conduttanza nei confronti della corrente e della tensione (principio di dualità: Cap.I,§6). Conseguentemente

se abbiamo due condensatori di cui uno molto maggiore dell'altro ( $C_1 \gg C_2$ ), se li poniamo in serie otteniamo un condensatore avente una capacità  $\approx C_2$ , mentre se li poniamo in parallelo otteniamo un condensatore  $\approx C_1$ .

Per quanto riguarda gli ordini di grandezza, i condensatori che normalmente vengono impiegati nei circuiti elettrici e elettronici molto raramente hanno capacità maggiori di qualche centinaio di  $\mu F$ ; spesso hanno valori di qualche ordine di grandezza inferiore, fino a pochi  $pF$ .

Un condensatore rappresenta un elemento a *costanti concentrate*, ovvero le due armature sono completamente affacciate l'una all'altra e quindi tutte le linee di campo elettrico vanno da un conduttore all'altro; spesso può capitare che due conduttori di un circuito, per esempio due resistenze, si trovino una in vicinanza dell'altra; anche in questo sistema di conduttori si può pensare di definire una capacità, anche se non si ha induzione completa; in questi casi si parla di *costanti distribuite* e se volessimo trattare correttamente anche questi casi, numerose complicazioni interverrebbero. Nel seguito, forti anche del fatto che queste capacità parassite sono in genere piccole, tratteremo in dettaglio solo condensatori, cioè costanti concentrate, con tutte le semplificazioni che ne derivano. Quando occorrerà, parleremo anche delle capacità distribuite, ma comunque la trattazione resterà estremamente qualitativa.

## 2.— Circuiti R-C serie

Una conseguenza molto importante del fatto che la capacità sia concentrata in una zona dello spazio limitata e che le due armature si affaccino completamente l'una all'altra, è che si possono continuare a considerare come stazionarie (cioè  $\text{div } \vec{j} = 0$ ) le configurazioni circuitali del tipo in Fig.3.

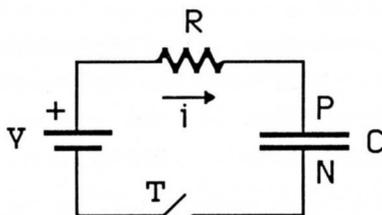


Fig.VI.3

Essa corrisponde ad avere un circuito  $R - C$  serie con un generatore di tensione e un tasto che supponiamo di chiudere al tempo  $t = 0$ , partendo con le condizioni iniziali  $q(0) = 0$ , cioè condensatore scarico.

Alla chiusura del tasto, il generatore inizia a erogare corrente, provocando un accumulo di carica positiva sull'armatura P e di carica negativa su N; questo processo si interrompe quando la carica

depositatasi sulle armature è tale da garantire una differenza di potenziale  $V_C = \frac{q}{C}$  uguale alla fem  $V$  del generatore. E' facile rendersi conto che durante la fase di carica la corrente, in un generico istante  $t$ , è sempre la stessa in ogni punto del circuito: infatti, a causa dell'induzione completa, la carica che viene depositata su un'armatura è, istante per istante, uguale e contraria a quella che viene sottratta dall'altra. Pertanto l'intensità di corrente è la stessa in ogni sezione del circuito, ovvero varrà  $\text{div } \vec{j} = 0$ . Tuttavia, se volessimo considerare anche lo spazio occupato dal dielettrico fra le armature, troveremmo che in esso la condizione di stazionarietà non è affatto rispettata: infatti attraverso il dielettrico non circola alcuna corrente vera e, mentre in tutto il resto del circuito non si ha accumulo di cariche ( $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ), sulle armature succede esattamente il contrario, cioè su di esse  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ . L'induzione completa garantisce però che in ogni istante le due cariche sono uguali e contrarie e, pur essendo su ogni armatura considerata singolarmente  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ , sull'insieme delle due armature  $(\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_N}{\partial t}) = 0$  e la solenoidalità del vettore  $\vec{j}$  è garantita in tutto il circuito. Questo fatto è estremamente importante, perché consente, anche nel caso in cui la rete contenga condensatori, di definire un'unica intensità di corrente se il circuito è costituito da una sola maglia e in genere, cioè per un circuito con più maglie, di applicare la legge dei nodi.

Ammettiamo anche che le dimensioni fisiche del circuito siano molto piccole rispetto al prodotto della velocità della luce per l'intervallo di tempo nel quale l'assetto elettrico dei conduttori appartenenti al circuito cambia apprezzabilmente (vedremo fra poco che tale tempo è dell'ordine di  $R \cdot C$  e quindi il requisito sarà ampiamente soddisfatto): in questa ipotesi possiamo considerare il campo elettrico dovuto alle cariche del circuito come un campo elettrostatico conservativo e possiamo continuare a sfruttare la seconda legge di Kirchhoff.

Esaminiamo allora il circuito di Fig.3 e, per risolverlo, applichiamo la seconda legge di Kirchhoff, ovvero sfruttiamo la proprietà che il campo elettrostatico è conservativo (vedi (I.52)); essendo la ddp ai capi del condensatore  $V_C = V_P - V_N = \frac{q}{C}$ , possiamo scrivere:

$$iR + \frac{q}{C} - V = 0 \quad (\text{VI.5})$$

con la condizione  $q(0) = 0$ . Ricordando che  $i = \frac{dq}{dt}$ , sostituendo questa espressione nella (5) e riordinando i termini, si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R} \quad (\text{VI.6})$$

Un integrale particolare è  $q_p = CV$  e corrisponde alla situazione a regime, quando cioè la carica sulle armature dà luogo ad un ddp pari a quella applicata dal generatore. La soluzione dell'equazione omogenea associata si trova separando le variabili:

$$q_0 = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.7})$$

Pertanto la soluzione finale:

$$q = q_p + q_0 = CV + A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.8})$$

dà, una volta che si soddisfi  $q(0) = 0$ :

$$q(t) = CV \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \quad (\text{VI.9})$$

Per la corrente otterremo, derivando la (9):

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.10})$$

In Fig.4 è riportato l'andamento di  $q(t)$  (scala di sinistra) e di  $i(t)$  (scala di destra).

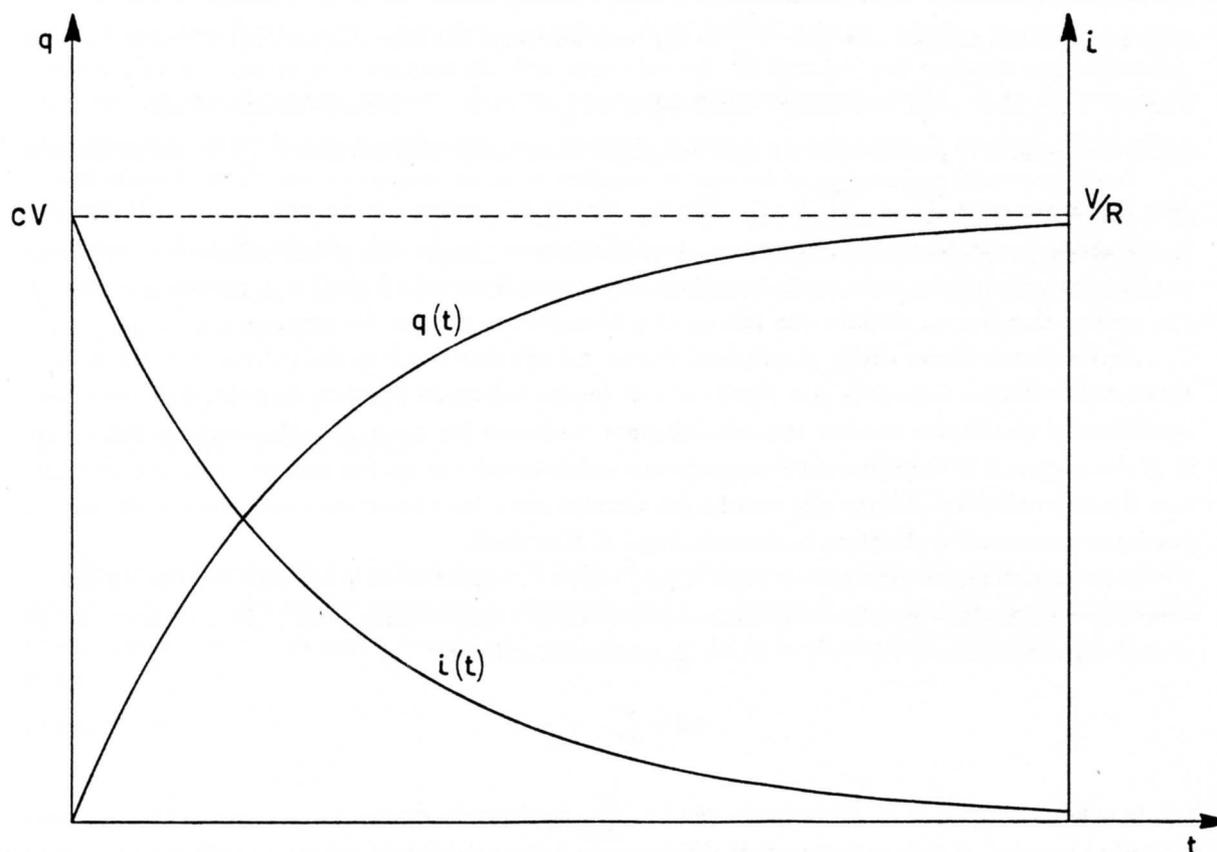


Fig.VI.4

Da notare la discontinuità della corrente che, all'istante di chiusura del tasto, passa bruscamente dal valore 0 al valore  $i(0^+) = \frac{V}{R}$ ; ovvero, all'istante iniziale il condensatore si comporta come un cortocircuito; al passare del tempo la carica si accumula sulle sue armature e la ddp che si viene a creare si oppone a  $V$  e tende a ridurre la corrente che circola nella resistenza; dopo un tempo sufficientemente grande rispetto a  $RC = \tau$  (detta *costante di tempo*) la corrente è andata praticamente a zero, mentre la carica ha di fatto raggiunto il suo valore asintotico e il condensatore si comporta come un circuito aperto.

Gli andamenti della carica accumulata sul condensatore e della corrente nel circuito danno, a parte una costante, l'andamento della tensione ai capi del condensatore e ai capi della resistenza rispettivamente. Nel Cap.XII, §2 impareremo che circuiti  $R - C$  nei quali la ddp è misurata ai capi del condensatore sono detti circuiti *passa-basso*, mentre quelli ove la ddp di interesse è misurata ai capi della resistenza son detti *passa-alto*; studieremo questi circuiti in dettaglio nel caso del regime sinusoidale delle correnti e in quella occasione comprenderemo anche il motivo di tali denominazioni.

Supponiamo ora di avere il circuito di Fig.5

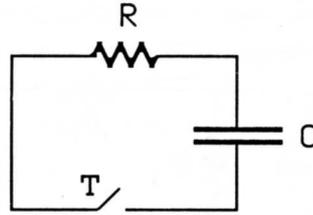


Fig.VI.5

con il condensatore carico ad una tensione  $V$ ; se al tempo  $t = 0$  chiudiamo il tasto, avremo:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (\text{VI.11})$$

con  $q(0) = CV$ . Integrando la (11), troviamo:

$$q = CV \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.12})$$

cioè questa volta la carica decade esponenzialmente con costante di tempo  $\tau = RC$ . La corrente vale:

$$i(t) = -\frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.13})$$

ovvero essa ha un comportamento uguale a quello nella fase di carica del condensatore, salvo che è cambiata di segno.

Come conclusione possiamo dire che in un circuito  $RC$  serie la carica e la scarica del condensatore avvengono con un tempo caratteristico  $\tau$  dopo il quale, nella fase di carica la tensione ai capi del condensatore ha raggiunto un valore circa uguale al 63% del suo valore finale, mentre nella fase di scarica la tensione si è ridotta di altrettanto (63%) rispetto a quella di partenza. Gli asintoti -per definizione- si raggiungono solo dopo un tempo infinito, tuttavia dopo un tempo pari a 4 costanti di tempo il residuo di tensione della fase di scarica è meno del 2% del valore iniziale (differisce meno del 2% dal valore finale nel caso della carica); dopo  $10\tau$  queste differenze sono ridotte a meno di  $5 \cdot 10^{-6}$  e quindi nella maggioranza dei casi gli asintoti potranno considerarsi di fatto raggiunti. Alcuni esempi numerici: se  $C = 1\mu F$ ,  $R = 1k\Omega$  allora  $\tau = 10^{-3}s$  e quindi  $10^{-2}s$  dopo la commutazione del tasto possiamo dire che il condensatore si è o completamente caricato (Fig.3) o completamente scaricato (Fig.5).

### 3.— *Il galvanometro in regime balistico; il caso di smorzamento nullo*

Consideriamo un galvanometro del tipo descritto nel Cap.II il cui moto è governato dalla equazione differenziale (II.23):

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(C + \frac{G^2}{R}\right)\dot{\varphi} + E\varphi = Gi$$

Supponiamo ora (Fig.6), che al tempo  $t = 0$  sia  $i(0) = 0$  e il galvanometro sia fermo e a riposo ( $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ ).

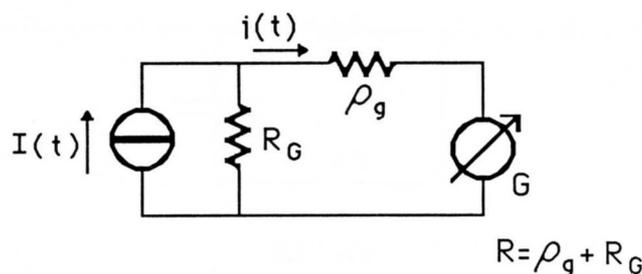


Fig.VI.6

A partire dall'istante  $t = 0^+$  un generatore impulsivo di corrente  $I(t)$  invii una corrente  $i = i(t) = I(t) \cdot \frac{R_G}{R_G + \rho_g}$  per un tempo  $\tau \ll T$ , dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{E}{\mathcal{J}} - \frac{(C + \frac{G^2}{R})^2}{4\mathcal{J}^2}}} \quad (\text{VI.14})$$

è il periodo di oscillazione del galvanometro (vedi II,§3). Se ci chiediamo quali sono i valori di  $\varphi$  e  $\dot{\varphi}$  dopo il tempo  $\tau$  possiamo integrare l'equazione (II.23) fra 0 e  $\tau$ :

$$\mathcal{J} \int_0^\tau \ddot{\varphi} dt + (C + \frac{G^2}{R}) \int_0^\tau \dot{\varphi} dt + E \int_0^\tau \varphi dt = G \int_0^\tau i dt \quad (\text{VI.15})$$

L'integrale  $\int_0^\tau i dt$  è uguale alla carica totale che ha attraversato una qualunque sezione del circuito, quindi in particolare l'avvolgimento del galvanometro. Calcolando gli integrali a primo membro della (15) otteniamo:

$$\mathcal{J} [\dot{\varphi}(\tau) - \dot{\varphi}(0)] + (C + \frac{G^2}{R}) \dot{\varphi}(\theta_V) \tau + E \varphi(\theta_S) \tau = GQ \quad (\text{VI.16})$$

dove, secondo il *teorema della media*,  $\theta_V$  e  $\theta_S$  sono due istanti compresi fra 0 e  $\tau$ . Inoltre, essendo  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , abbiamo:

$$\mathcal{J} \dot{\varphi}(\tau) + (C + \frac{G^2}{R}) \dot{\varphi}(\theta_V) \tau + E \varphi(\theta_S) \tau = GQ \quad (\text{VI.17})$$

e facendo tendere  $\tau$  (e quindi  $\theta_V$  e  $\theta_S$ ) a zero, essendo  $\dot{\varphi}(\theta_V)$  e  $\varphi(\theta_S)$  necessariamente finiti (avendosi  $\dot{\varphi}(0) = 0, \varphi(0) = 0$  e  $\tau \cdot \ddot{\varphi}(0)$  finito), abbiamo:

$$\dot{\varphi}(\tau) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \quad (\text{VI.18})$$

Pertanto dopo un tempo  $\tau$  molto piccolo si ha una velocità finita, proporzionale alla carica  $Q$  passata nel circuito, mentre  $\varphi(\tau)$  sarà dell'ordine di  $\dot{\varphi}(\tau) \cdot \tau$  cioè infinitesimo in  $\tau$ . Se ora quindi consideriamo il moto successivo al passaggio dell'impulso di corrente, scegliendo il tempo  $\tau$  come nuova origine dei tempi dobbiamo semplicemente integrare l'equazione:

$$\mathcal{J} \ddot{\varphi} + (C + \frac{G^2}{R}) \dot{\varphi} + E \varphi = 0 \quad (\text{VI.19})$$

con

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \quad (\text{VI.20})$$

Consideriamo dapprima il caso ideale in cui lo smorzamento dell'aria sia trascurabile e  $R$  sia così grande che anche lo smorzamento elettrodinamico possa essere considerato nullo. La soluzione della (19), in questo caso semplificato, è la soluzione  $\varphi_0$  dell'equazione:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi}_0 + E\varphi_0 = 0 \quad (\text{VI.21})$$

e va ricercata nella forma

$$\varphi_0 = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \operatorname{cos} \omega_0 t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{\mathcal{J}}} \quad (\text{VI.22})$$

Sostituendo le condizioni iniziali (20) abbiamo  $B = 0$  e  $A = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0}$  e quindi

$$\varphi_0 = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (\text{VI.23})$$

Il moto è pertanto descritto da una senoide i cui massimi valgono  $\varphi_{0M} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0}$ . Possiamo quindi scrivere

$$Q = K_B^0 \varphi_{0M} \quad (\text{VI.24})$$

$$K_B^0 = \frac{\omega_0 \mathcal{J}}{G} = \frac{E}{\omega_0 G} \quad (\text{VI.25})$$

$K_B^0$  è detta *costante balistica in condizioni di smorzamento nullo* e rappresenta la costante di proporzionalità fra la carica che ha attraversato il galvanometro nel tempuscolo  $\tau$  e l'ampiezza delle oscillazioni del moto successivo. La formula (25) ci dice quindi che, eccitando il galvanometro con un impulso di corrente molto breve ma avente integrale finito  $Q$  (*eccitazione balistica*), esso compie delle oscillazioni la cui ampiezza è proporzionale a  $\dot{\varphi}(0)$  e quindi a  $Q$  (che risulta così misurabile); nel prossimo paragrafo faremo vedere che un simile risultato vale anche quando si ammetta la presenza di uno smorzamento finito. Il galvanometro eccitato con questo tipo di impulsi è detto lavorare in *regime balistico*.

Quando il galvanometro è eccitato con una corrente continua  $i$ , la lettura viene fatta sulla posizione segnata dall'indice asintoticamente, mentre quando il galvanometro lavora in regime balistico la lettura è istantanea, riguardando essa l'ampiezza del moto periodico: conseguentemente l'errore di lettura è, a parità di elongazione, più elevato nel caso dell'uso balistico che nel caso di una lettura di corrente.

La relazione (25) suggerisce che la costante balistica a smorzamento nullo  $K_B^0$  può essere scritta (vedi II.9)

$$K_B^0 = \frac{K_r}{\omega_0} = \frac{K_r}{2\pi} \cdot T \quad (\text{VI.26})$$

cioè, nota che sia  $K_r$  e il periodo  $T$  di un galvanometro, si può risalire direttamente al valore della costante balistica in condizioni di smorzamento nullo.

#### 4.— *Il galvanometro balistico nel caso di smorzamento finito*

Consideriamo ora il caso, molto più realistico, in cui è presente uno smorzamento finito.

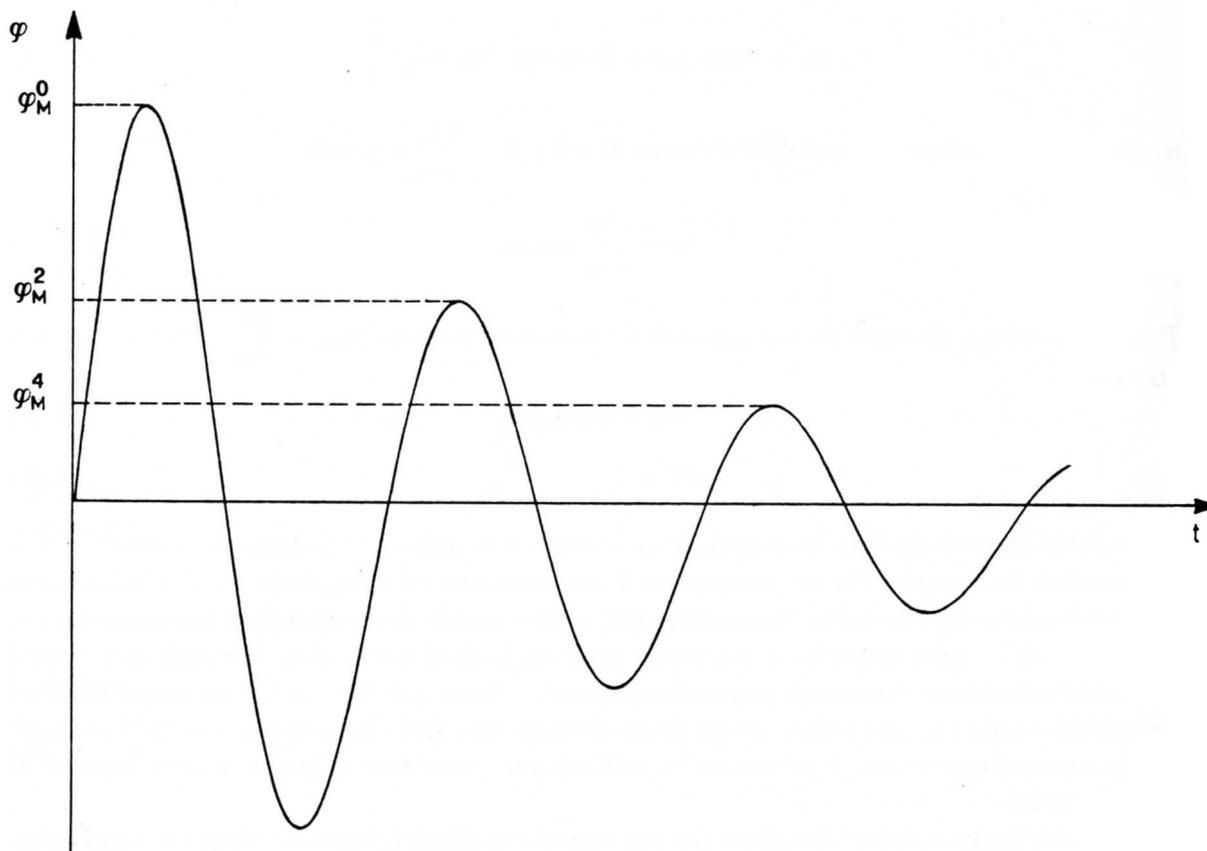


Fig.VI.7

Allora l'equazione differenziale da studiare è la (19) con le condizioni iniziali (20). Supponendo che la resistenza  $R$  sia maggiore di quella critica, in base a quanto visto nel Cap.II,§3, la soluzione va ora ricercata nella forma

$$\varphi(t) = \exp(-\sigma_1 t) \cdot (A \sin \sigma_2 t + B \cos \sigma_2 t) \quad (\text{VI.27})$$

con

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left(C + \frac{G^2}{R}\right) / (2\mathcal{J}) \\ \sigma_2 = \frac{\sqrt{|4E\mathcal{J} - (C + \frac{G^2}{R})^2|}}{2\mathcal{J}} \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{E}{\mathcal{J}} = \omega_0^2 \end{cases} \quad (\text{VI.28})$$

In base alle condizioni iniziali si trova:

$$\varphi(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t) \operatorname{sen} \sigma_2 t \quad (\text{VI.29})$$

che rappresenta una oscillazione smorzata, come in Fig.7. Rispetto al caso di smorzamento nullo, questa volta l'ampiezza del moto risulta ridotta a causa del termine in  $\dot{\varphi}$  nella (19): anche l'ampiezza del primo massimo risente di questo smorzamento, e risulta inferiore a  $\frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2}$  pur rimanendo proporzionale a  $Q$ .

Calcoliamoci i valori dei vari massimi a partire dal primo, imponendo nella (19) che  $\dot{\varphi}(t) = 0$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} [-\sigma_1 \exp(-\sigma_1 t) \cdot \operatorname{sen} \sigma_2 t + \sigma_2 \exp(-\sigma_1 t) \cdot \cos \sigma_2 t] \quad (\text{VI.30})$$

Indicando con  $t_S$  i valori per cui  $\dot{\varphi}(t_S) = 0$  abbiamo

$$\tan \sigma_2 t_S = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (\text{VI.31})$$

e pertanto

$$t_S = \frac{1}{\sigma_2} \left[ \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + n\pi \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VI.32})$$

La condizione di stazionarietà individua sia i massimi ( $n = 0, 2, 4, \dots$ ) che i minimi ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) e ricordando che il periodo  $T = \frac{2\pi}{\sigma_2}$ , la (32) può anche scriversi come:

$$t_S = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + n \frac{T}{2} \quad (\text{VI.33})$$

Consideriamo ora il primo massimo ( $n = 0$ ) che avviene per  $t_S = t_M^0$ . Il valore che  $\varphi$  assume è allora ( $\operatorname{sen} \left[ \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ ):

$$\varphi(t_M^0) = \varphi_M^0 = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \quad (\text{VI.34})$$

Pertanto abbiamo ancora una relazione di proporzionalità fra il valore del primo massimo e la carica che ha attraversato il circuito nel tempuscolo  $\tau$ :

$$Q = \frac{\mathcal{J}\omega_0}{G} \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \varphi_M^0 = K_B^0 \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \varphi_M^0 = K_B \cdot \varphi_M^0 \quad (\text{VI.35})$$

Abbiamo reintrodotta la costante balistica a smorzamento nullo definita nella (25); la (35) ci dice che in condizioni di smorzamento finito la *costante balistica*  $K_B = \frac{Q}{\varphi_M^0}$  è maggiore di  $K_B^0$  per un fattore  $\exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) > 1$ . La costante balistica di un galvanometro, non essendo come  $K_r$ , una caratteristica della soluzione a regime, ma di quella transitoria, *dipende* dallo smorzamento; sembrerebbe quindi che dovesse essere necessario tarare il galvanometro tutte le volte che cambia la resistenza del circuito su cui è chiuso, cambiando con essa lo smorzamento. In pratica ciò non è necessario poiché, per un certo smorzamento, è possibile determinare sperimentalmente il fattore correttivo da apportare a  $K_B^0$  per ottenere  $K_B$ : nel prossimo paragrafo troveremo allora che, nota  $K_B^0$ , si può determinare  $K_B$ , o viceversa, misurata  $K_B$ , si può risalire a  $K_B^0$ .

### 5.— Il decremento logaritmico

Per determinare il rapporto

$$\frac{K_B}{K_B^0} = \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

è sufficiente conoscere il rapporto  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  che in via di principio è noto solo quando lo siano i vari parametri del galvanometro, nonché  $\bar{R}$ .

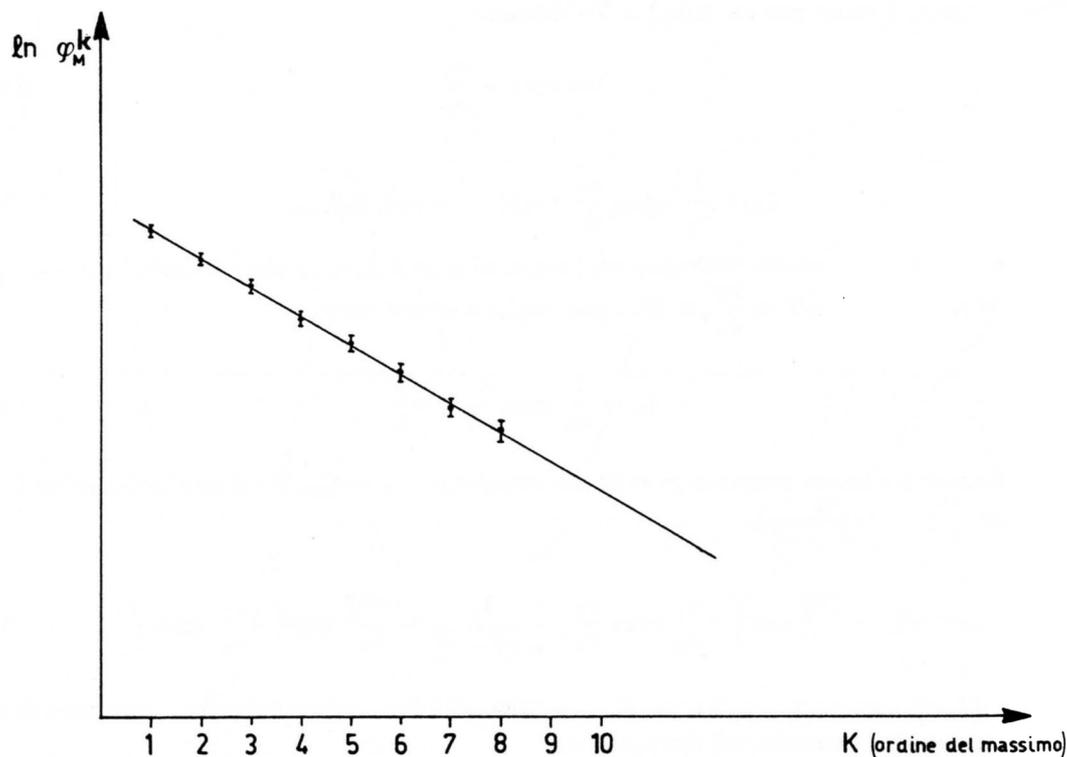


Fig. VI.8

Tuttavia se si considera il rapporto di due massimi (o minimi) successivi, in base alla (33), si ha:

$$\frac{\varphi_M^n}{\varphi_M^{n+2}} = \frac{\exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - n\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)}{\exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - (n+2)\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)} = \exp\left(2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \quad (\text{VI.36})$$

e facendone il logaritmo, si ottiene:

$$\Lambda = \ln \frac{\varphi_M^n}{\varphi_M^{n+2}} = 2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (\text{VI.37})$$

$\Lambda$  è detto *decremento logaritmico* e palesemente non dipende dall'ordine del massimo (o del minimo) considerato. Inoltre, e questo è il fatto più importante, esso dipende solo dal galvanometro e

dalla resistenza del circuito, non certo dalle condizioni iniziali del moto (cioè da  $Q$ ). Quanto alla sua determinazione, essa si può ottenere misurando, una volta che il galvanometro abbia ricevuto l'impulso di carica, non solo il primo dei massimi, ma anche il secondo e i successivi.  $\Lambda$  si può ricavare semplicemente dal rapporto fra il primo e il secondo massimo; alternativamente, cercando di sfruttare al meglio l'informazione raccolta, si può riportare in grafico il logaritmo dell'ampiezza dei vari massimi successivi in funzione dell'ordine  $k$  del massimo (Fig.8; si noti che l'indice  $k$  non coincide con l'indice  $n$ ).

Essendo  $\ln \varphi_M^k = \ln \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} 2\pi(k-1) = \operatorname{cost} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} 2\pi k$ , la pendenza della retta è data da  $\Lambda = 2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ , che può determinarsi tramite un minimo di  $\chi^2$ . Supponendo di avere ottenuto  $\Lambda$  dall'andamento sperimentale, possiamo riscrivere la (35) come:

$$Q = K_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \cdot \varphi_M^0 \quad (\text{VI.38})$$

In genere, di un dato galvanometro balistico si conosce  $K_B^0$  e quindi, misurato  $\Lambda$ , si può risalire a  $K_B$ . Viceversa, tarare un galvanometro balistico vuol dire misurare, in presenza di un certo smorzamento,  $K_B$  e  $\Lambda$  e quindi determinare  $K_B^0$ . La relazione (38) nel caso in cui lo smorzamento sia assai piccolo, assume una forma più semplice: in questa ipotesi infatti il rapporto fra due massimi successivi è vicino ad 1 e pertanto  $\Lambda \ll 1$ . Conseguentemente

$$\exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(\frac{\Lambda}{4}\right) \approx 1 + \frac{\Lambda}{4} \quad (\text{VI.39})$$

Inoltre, essendo  $\Lambda \ll 1$ ,  $\Lambda = \ln \frac{\varphi_M^0}{\varphi_M^2} = \ln \left(\frac{\varphi_M^2 + \varphi_M^0 - \varphi_M^2}{\varphi_M^2}\right) = \ln \left(1 + \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{\varphi_M^2}\right) \approx \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{\varphi_M^0}$  e si trova

$$Q \approx K_B^0 \left(1 + \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{4\varphi_M^0}\right) \varphi_M^0 = K_B^0 \left(\varphi_M^0 + \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{4}\right) \quad (\text{VI.40})$$

Una approssimazione ancor migliore si può ottenere sostituendo, al posto di  $\exp(\Lambda/4)$ ,  $4\sqrt{\frac{\varphi_M^0}{\varphi_M^2}}$ ; in ogni caso, queste formule sono sicuramente più facili da maneggiarsi dell'espressione esatta (38); soprattutto per quanto riguarda il calcolo della propagazione dell'errore può essere molto comodo usare la (40) anziché la (38); l'approssimazione che si compie così nel calcolare l'errore è in genere più che buona anche in quei casi dove l'approssimazione che si commetterebbe nell'usarla per calcolare  $Q$  sarebbe troppo grossolana.

Per ora abbiamo considerato solo i casi in cui lo smorzamento è finito, ma comunque abbastanza piccolo da garantire un moto oscillatorio; ciò non significa che il galvanometro balistico non si possa usare anche in condizioni critiche (o addirittura per  $R < R_c$ ); così facendo però, la sensibilità di misura si riduce, anche se ci si guadagna in tempo di misura, a causa del molto più rapido ritorno a zero. Qualora la resistenza sia quella critica, potremo trovare la soluzione della (19) come abbiamo fatto nel Cap.II, §3; oppure possiamo prendere la soluzione oscillatoria (29) e farne il limite per  $\sigma_2 \rightarrow 0$ :

$$\varphi_{crit}(t) = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t) \operatorname{sen} \sigma_2 t = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{GQ}{\mathcal{J}} \exp(-\sigma_1 t) \frac{1}{\sigma_2} (\sigma_2 t + \dots) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} t \cdot \exp(-\sigma_1 t) \quad (\text{VI.41})$$

Riportando la (41) in grafico si trova l'andamento in Fig.9.

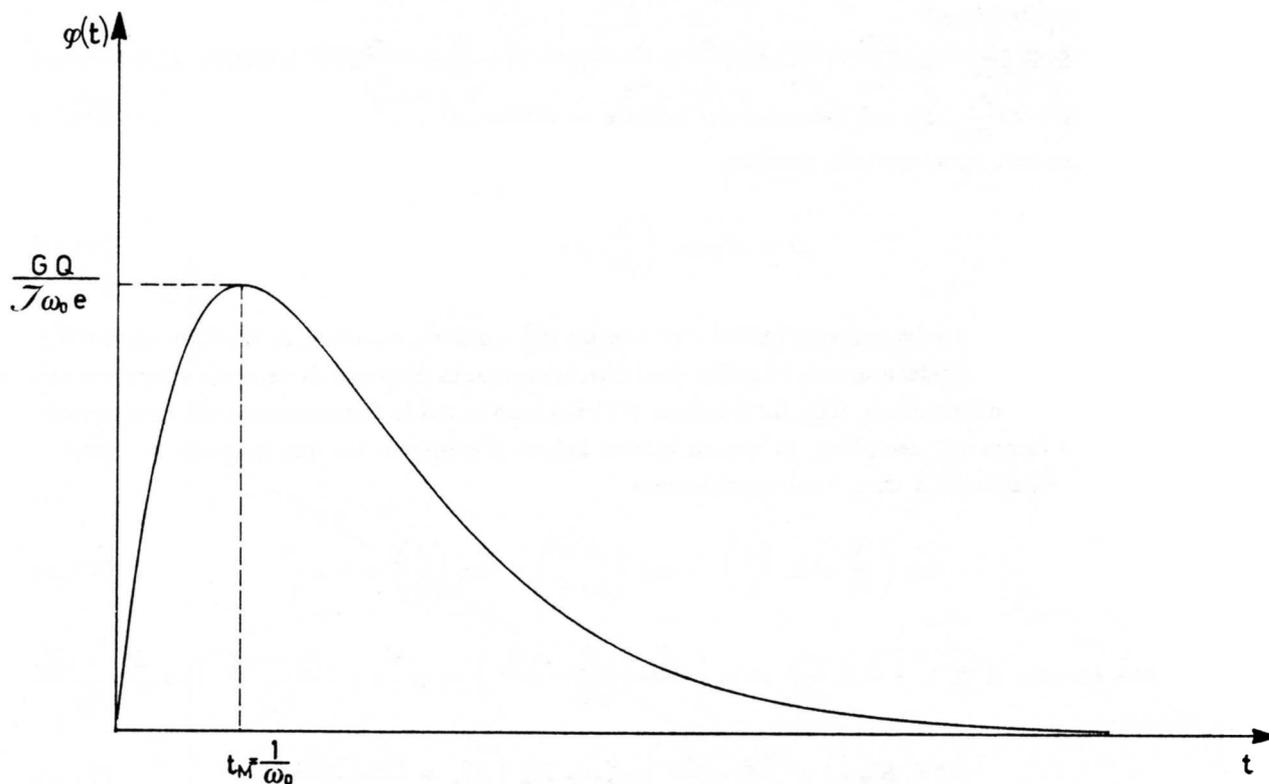


Fig.VI.9

Il massimo, questa volta unico, si ha per  $t_M = \frac{1}{\omega_0}$  e il valore del massimo è  $\frac{GQ}{\mathcal{J}(\sigma_1)_{crit} \cdot e} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0 \cdot e}$ . Pertanto  $K_B^{crit} = K_B^0 \cdot e$ , cioè la sensibilità nel caso di moto critico è ridotta di un fattore  $e$ . Tuttavia non è tanto la ridotta sensibilità a sconsigliare l'utilizzo del galvanometro balistico in condizioni critiche o sottocritiche, quanto il fatto che non è più possibile risalire a  $K_B$  anche conoscendo  $K_B^0$  (non è più definibile il decremento logaritmico); occorre allora tarare il galvanometro tutte le volte che si cambia il valore della resistenza su cui esso è chiuso.

## 6.— Resistenza interna del generatore e risposta del galvanometro balistico

Per ora ci siamo limitati a studiare il caso di un generico impulso di corrente cui è associata una certa carica  $Q$ , senza soffermarci particolarmente sulle caratteristiche del generatore (o comunque del dispositivo) che invia questa carica. In pratica i casi che si incontrano più spesso e in cui ha

interesse la misura di carica sono i seguenti: scarica o carica di un condensatore posto in serie al galvanometro, oppure variazioni di flusso di un campo magnetico attraverso una bobina anch'essa collegata in serie al galvanometro. I due circuiti sono schematizzati nella Fig.10 nel caso che il galvanometro sia collegato direttamente, senza shunt:

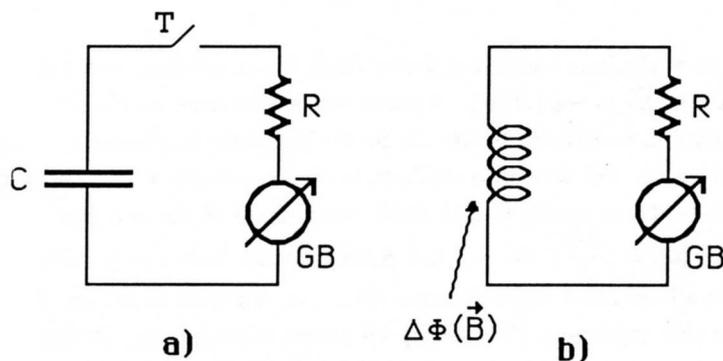


Fig.VI.10

Quanto al circuito della Fig.10a sappiamo (§1) che se si chiude il tasto T e il condensatore è inizialmente carico, la carica accumulata nel condensatore passa in un tempo dell'ordine di  $\tau = RC$  attraverso il circuito; se  $\tau = RC \ll T$  (periodo del galvanometro) durante la scarica il galvanometro resta fermo, ma acquista, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, una velocità finita. Sappiamo anche che il moto successivo sarà costituito da oscillazioni smorzate, il primo massimo delle quali è legato alla carica  $Q$  dalla relazione (35):  $Q = K_B \varphi_M^0$ . Il moto è smorzato solamente dall'aria; lo smorzamento elettromagnetico è assente poiché il condensatore si comporta come un circuito aperto\*: vale a dire nel moto seguente all'eccitazione impulsiva il galvanometro si trova chiuso su un circuito con resistenza praticamente infinita.

La aggiunta di qualunque resistenza  $r$  in parallelo al galvanometro comporta una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni e ciò per due ragioni indipendenti: la prima è che nella fase di scarica, non tutta la carica del condensatore passa nel galvanometro, ma solo la frazione  $\frac{r}{r+R}$ , in quanto la corrente di scarica segue la solita legge di ripartizione in un parallelo; la seconda ragione è che il galvanometro si trova chiuso su una resistenza totale  $R+r$  e la costante balistica risulta aumentata per la presenza dello smorzamento elettrodinamico, assente se  $r = \infty$ .

Nel caso del circuito di destra (Fig.10b) la situazione è assai differente:  $L$  rappresenta un conduttore in forma di numerose spire avvolte concordemente (un po' come la bobina di un galvanometro). Supponiamo che la bobina  $L$  sia immersa da un tempo indefinito in un campo magnetico  $\vec{B}$  che dia luogo ad un certo flusso  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con le spire della bobina. Al tempo  $t = 0$  facciamo variare il flusso di  $\vec{B}$  portandolo a 0 in un tempo  $\tau \ll T$ ; ciò si può fare, ad esempio, allontanando la bobina, senza interrompere i collegamenti, e portandola in una zona di campo magnetico nullo. Sappiamo (vedi Cap.II,§1) che durante tutto l'intervallo di tempo in cui il flusso di  $\vec{B}$  cambia si genera nel circuito una fem  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$  che invia una corrente  $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$  nel galvanometro. E' questa la corrente che costituisce l'impulso di eccitazione. Quando l'impulso si è esaurito sarà passata nel

\* in realtà si trova che questo è vero solo se  $\tau = RC \ll T$ ; d'altronde questa è anche la condizione richiesta per un corretto funzionamento balistico e quindi ammettiamo che essa sia soddisfatta.

galvanometro una carica  $Q$  pari a

$$Q = \int_0^\tau i(t)dt = \frac{-1}{R} \int_0^\tau \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} dt = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{R} \quad (\text{VI.42})$$

dove  $\Delta\Phi$  rappresenta la variazione totale del flusso di  $\vec{B}$  fra la condizione a  $t = \tau$  e quella a  $t = 0$ ; se  $\Phi(\vec{B}(\tau)) = 0$  allora  $\Delta\Phi(\vec{B}) = -\Phi(\vec{B}(0))$ . Il moto successivo sarà quello solito del galvanometro balistico, chiuso però su una resistenza totale  $R$ . Se ci chiediamo in questo caso se si ha vantaggio, dal punto di vista del valore del massimo dell'ampiezza, a crescere o diminuire di  $R$ , dobbiamo, come nel caso precedente, tener conto di due fatti: aumentare  $R$  da una parte porta alla diminuzione della carica totale  $|Q| = \left| \frac{\Delta\Phi}{R} \right|$ , da un'altra della costante balistica (tramite la riduzione dello smorzamento) e quindi all'aumento dell'ampiezza del moto, a parità di carica. Per sapere quale dei due effetti prevale, occorre esprimere l'ampiezza del primo massimo  $\varphi_M$  in funzione di  $R$  tenendo fissi gli altri parametri fra cui, in particolare,  $\Delta\Phi$ . Nel caso di  $R \geq R_C$  abbiamo (vedi (38))

$$\varphi_M = \frac{1}{K_B^0} \exp\left(-\frac{\Lambda(R)}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda(R)}\right) \frac{\Delta\Phi}{R} \quad (\text{VI.43})$$

con

$$\Lambda(R) = 2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2\pi \frac{C + \frac{G^2}{R}}{\sqrt{|4EJ - (C + \frac{G^2}{R})^2|}} \quad (\text{VI.44})$$

Per  $R = R_C$  abbiamo  $\Lambda \rightarrow \infty$  e quindi

$$\varphi_M = \frac{1}{K_B^0 \cdot e} \frac{\Delta\Phi}{R_C} \quad (\text{VI.45})$$

Per  $R < R_C$  procedendo come nel §4 per la ricerca della soluzione del moto (questa volta sottocritico), troviamo per il massimo:

$$\varphi_M = \frac{1}{K_B^0} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\omega_0}\right) \frac{\Delta\Phi}{R} \quad (\text{VI.46})$$

Se riportiamo in grafico  $\varphi_M$  in funzione di  $\frac{R}{R_C}$  troviamo un andamento del tipo in Fig.11 (smorzamento dell'aria nullo)

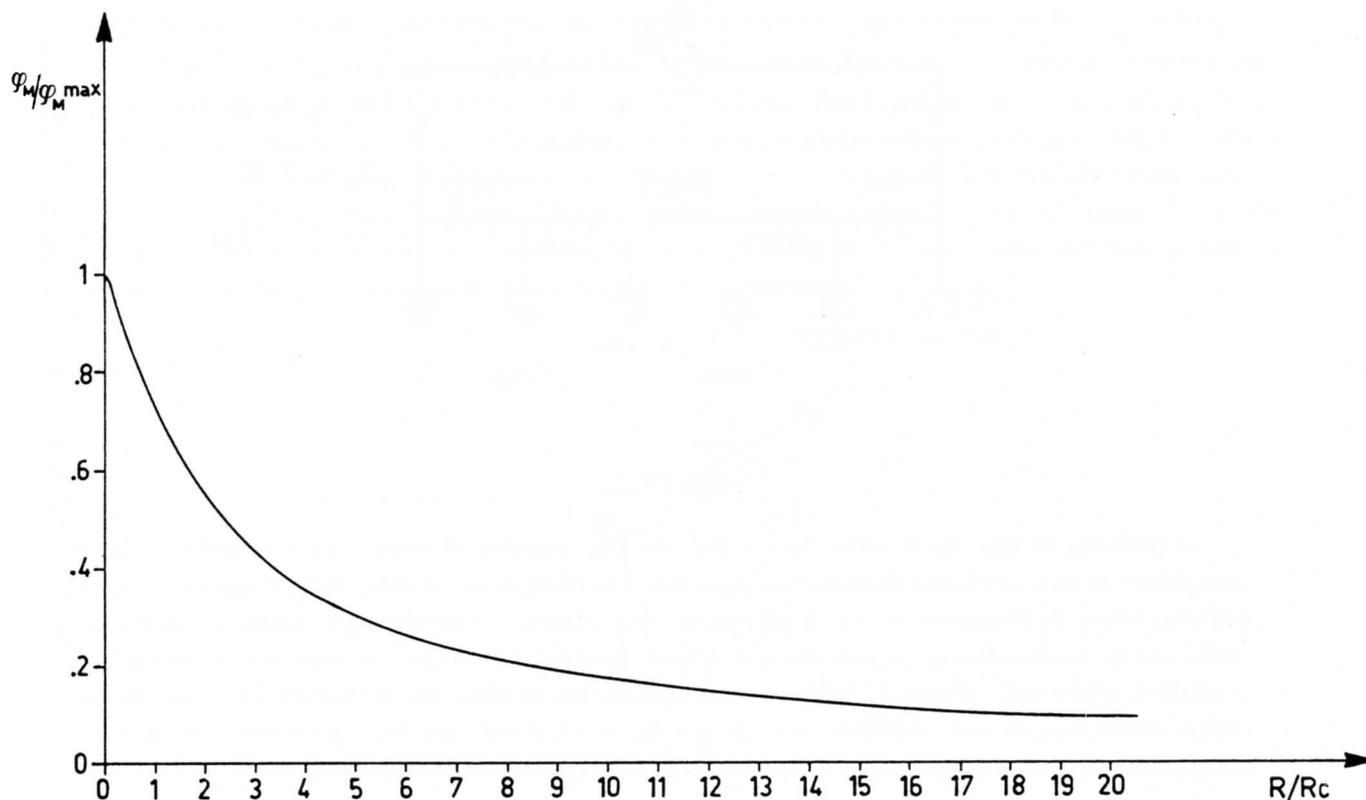


Fig.VI.11

vale a dire che per quanto riguarda l'ampiezza si avrebbe vantaggio a diminuire  $R$ . Si nota però che il miglioramento non è particolarmente forte (per  $R \rightarrow 0$  il massimo è circa 5 volte più ampio che per  $R = 10R_C$ ) e in genere ciò non ripaga del fatto che per  $R \leq R_C$ , per ogni misura occorre tarare lo strumento, anche se si conosce  $K_B^0$  e non semplicemente misurare  $\Lambda$ , come invece basta fare quando il moto è oscillatorio. Esiste anche un'altra contropartita a diminuire eccessivamente  $R$  (che oltretutto non scenderà mai sotto il valore di  $\rho_g + \rho_L$ , cioè la serie delle resistenze interne dello strumento e della bobina): la valutazione di  $\Delta\Phi$  viene a dipendere da una resistenza ( $R$ ) che risulta nota con precisione modesta, come inevitabilmente accade quando si tratta della resistenza interna di uno strumento o di una bobina, non fosse altro perché, essendo dovuta ad un avvolgimento di rame, dipende non debolmente dalla temperatura.

Concludendo, possiamo affermare che in entrambi i casi di una eccitazione del tipo *generatore di corrente* (condensatore, resistenza interna molto grande) o del tipo *generatore di tensione* (bobina, resistenza interna molto piccola), il funzionamento del galvanometro balistico in regime oscillatorio è conveniente, nel secondo caso principalmente per semplicità nella procedura di taratura.

Nel suo impiego pratico il galvanometro è spesso accoppiato ad uno shunt del tipo "universale" che consente l'adeguamento della sensibilità alle specifiche esigenze. Un tipico esempio di complesso *galvanometro balistico - shunt* è mostrato in Fig.12 e si riferisce alla configurazione effettivamente disponibile in laboratorio:

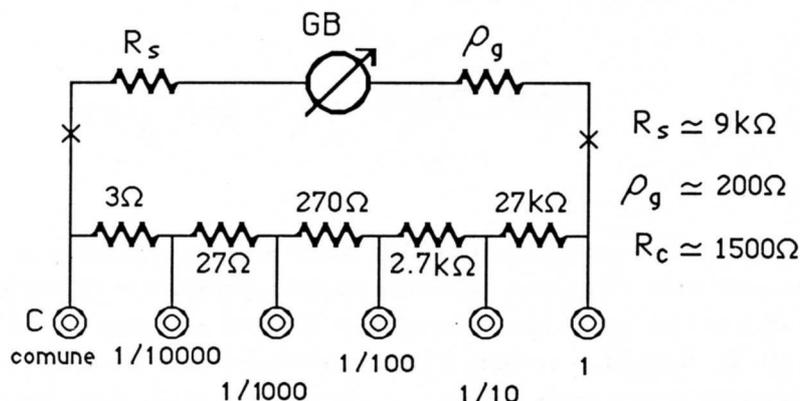


Fig. VI.12

la presenza di una  $R_S$  in serie, fissa e così elevata, consente di avere il galvanometro in ogni caso chiuso su una resistenza decisamente superiore a quella critica. Questa configurazione, a causa dell'alto valore di resistenza su cui il galvanometro è chiuso, è senz'altro più adatta a misure di carica con un condensatore, che non con una bobina. Infatti è sì vero che conviene lavorare in regime oscillatorio anche nelle misure di carica con una bobina, ma va detto che converrebbe disporre di un galvanometro magari meno sensibile, ma con  $\rho_g$  e  $R_C$  le più piccole possibile; giustificheremo questa affermazione quando tratteremo la misura assoluta del campo di induzione magnetica.

## 7.— *L'approssimazione balistica e gli accorgimenti per rispettarla*

Tutti i calcoli sviluppati fino a qui sono fatti nelle ipotesi che la durata  $\tau$  dell'impulso di corrente sia così piccola rispetto al periodo del galvanometro  $T$ , che il moto si possa studiare con le condizioni iniziali  $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ . Tutto questo comporta una approssimazione: infatti, dopo il passaggio della carica,  $\varphi$  sarà sì molto prossimo a zero, ma non esattamente nullo. Ciò ha come conseguenza che il massimo del moto successivo  $\varphi_M$  non vale esattamente quanto abbiamo calcolato, ma leggermente meno. Si trova tuttavia che, detta  $\tau$  la durata dell'impulso di corrente, la differenza fra il massimo "balistico"  $\varphi_M^*$  e quello reale  $\varphi_M$  è un infinitesimo del secondo ordine in  $\frac{\tau}{T}$ :

$$\varphi_M \approx \varphi_M^* \left(1 - \alpha \frac{\tau^2}{T^2}\right) \quad (\text{VI.47})$$

Il coefficiente  $\alpha$  dipende dalla forma dell'impulso e per forme realistiche dell'impulso di corrente  $\alpha < 1$ . Nell'Appendice A è svolto il calcolo per un impulso di corrente rettangolare di durata  $\tau$  e per un impulso di tipo esponenziale con costante di tempo  $\tau$  e stessa carica del precedente.

Il risultato (47) ci dice che l'approssimazione balistica può essere buona anche nel caso in cui  $\frac{\tau}{T}$  non è poi molto piccolo; si pensi infatti che se  $\frac{\tau}{T} \approx 0.1$ , l'ampiezza reale differisce da quella balistica per meno dell'1%. Anche la posizione del massimo risulta spostata (dell'ordine di  $\tau$ ), ma ciò è assolutamente inessenziale per quanto riguarda la misura della carica.

Nonostante che l'effetto sul valore del massimo sia dell'ordine di  $\frac{\tau^2}{T^2}$ , in molti casi può essere problematico riuscire a soddisfare l'approssimazione balistica. Ricordando che  $T = \frac{2\pi}{\sigma_2} \approx 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{E}}$  si vede che per realizzare galvanometri da usare preferenzialmente in regime balistico conviene avere momenti di inerzia elevati e costanti di richiamo piccole: i due requisiti sono conflittuali fra di loro poiché aumentare  $\mathcal{J}$  significa anche aumentare la massa e quindi sollecitare di più il filo di torsione. Molto spesso l'aumento del momento di inerzia è ottenuto montando delle piccole masse, lontane il più possibile dall'asse (vedi Fig.13); ciò comporta una particolare cura nel bilanciamento, poiché piccole dissimmetrie nella disposizione tendono a spostare dall'allineamento verticale la bobina, compromettendo lo scorrimento di questa nel sottile traferro.

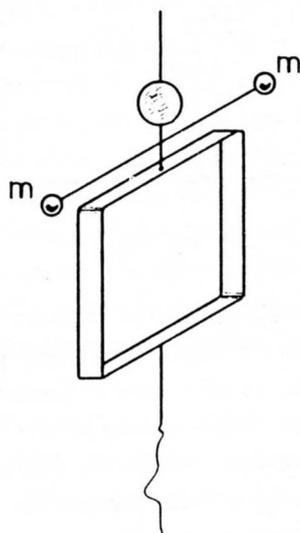


Fig.VI.13

Con accorgimenti di questo tipo sono stati realizzati galvanometri balistici con periodi fino a varie centinaia di secondi. Un'altra particolarità costruttiva di un galvanometro balistico è di possedere un buon isolamento fra i fili dell'avvolgimento: infatti poiché esso funziona con una breve eccitazione di corrente –cui corrisponde però una carica finita– le intensità istantanee possono essere assai elevate, con grosse cadute di tensione ai capi del galvanometro. Per questo l'isolamento deve essere tale da garantire la possibilità di sostenere ddp di svariati ordini di grandezza superiori a quelle che lo stesso strumento deve sostenere quando lavora da misuratore di corrente.

## 8.— *Taratura di un galvanometro balistico*

### *Misura di capacità*

L'operazione di taratura di un galvanometro usato in condizioni balistiche consiste nella determinazione di  $K_B$  e, tramite la misura del decremento logaritmico, di  $K_B^0$ . L'operazione richiede la conoscenza della quantità di carica che passa nel circuito e ciò è ottenuto facendo scaricare sul galvanometro un condensatore noto  $C_0$  a cui è stata applicata una ddp nota  $V_0$ : allora  $Q_0 = C_0V_0$  ed è possibile tarare lo strumento. Il circuito che si può utilizzare è quello in Fig.14:

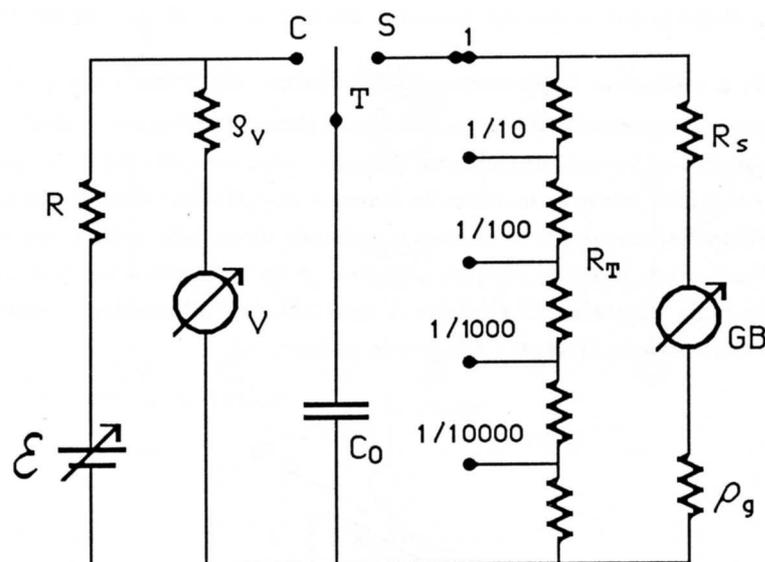


Fig.VI.14

$\mathcal{E}$  è un generatore di fem variabile e può essere ottenuto con un partitore o con un generatore elettronico variabile. Supponiamo che il tasto T sia nella posizione C da un tempo indefinito. Al condensatore sarà quindi applicata la differenza di potenziale  $V_0$  misurata dal voltmetro. Si commuta quindi il tasto nella posizione S. Da questo istante comincia la scarica del condensatore, ed essa avviene con una costante di tempo  $\tau = C_0 \cdot R_T \parallel (R_S + \rho_g)$ , se, come in figura, lo shunt è collegato in posizione 1 ( $R_T \parallel (R_S + \rho_g) \approx 7K\Omega$  nel caso del laboratorio). Se  $C_0$  è dell'ordine del  $\mu F$ ,  $\tau \approx 7 \cdot 10^{-3} s$  e in qualche centesimo di secondo, ovvero in un intervallo di tempo  $\ll T (\approx 6s)$  praticamente tutta la carica sarà passata nel galvanometro. In realtà solo la frazione  $\frac{R_T}{R_S + R_T + \rho_g}$  della carica totale sarà passata nel galvanometro; tuttavia se consideriamo lo shunt e il galvanometro come un tutt'uno, possiamo tarare lo strumento complessivo, schematizzandolo come in Fig.15 con  $R'_g$  dipendente dal rapporto di shunt adottato.

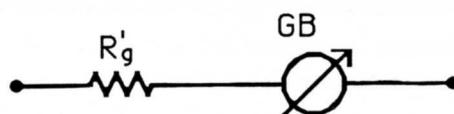


Fig.VI.15

Del moto successivo del galvanometro registreremo il primo e il secondo massimo e magari anche i successivi, almeno fino a che l'errore di lettura non sarà diventato così grande da rendere non significativa la misura. Avremo quindi (vedi (38)):

$$Q_0 = C_0 V_0 = K_B \varphi_M = K_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \varphi_M$$

dove  $\Lambda$  sarà stato determinato o dal rapporto dei primi due massimi o da un fit dei vari massimi in funzione del loro ordine;  $\varphi_M$  è il valore del primo massimo. Se ci interessa  $K_B^0$  sfrutteremo questa informazione, altrimenti, se nel seguito useremo il galvanometro con lo stesso smorzamento, sarà sufficiente conoscere  $K_B$ . Finché si ecciterà il galvanometro con questo metodo, cioè scaricando un condensatore e adoperando lo stesso shunt (indipendentemente dal rapporto in uso), avremo davvero sempre lo stesso smorzamento poiché il condensatore contribuisce con una resistenza infinita e la resistenza su cui è chiuso il galvanometro è sempre data da  $\rho_g + R_S + R_T$ .

Se la lettura della deflessione della bobina viene fatta con il metodo della leva ottica, detto  $l_M$  lo spostamento massimo sulla scala, avremo una relazione del tipo  $Q_0 = k_B l_M$  dove  $k_B$  è legato a  $K_B$  da una semplice legge di proporzionalità finché l'angolo è piccolo. Altrimenti occorrerà usare la relazione esatta  $Q_0 = k_B \cdot d \operatorname{atan} \frac{l_M}{d}$  dove  $d$  è la distanza fra lo strumento e la scala graduata su cui si legge  $l_M$ . Si veda a questo proposito quanto detto nel Cap.II,§2. Poiché la determinazione del massimo è affetta da un errore di lettura che può essere relativamente grosso e poiché in letture diverse tale errore interviene indipendentemente dai precedenti, può convenire, dato un certo valore della tensione  $V_0$ , ripetere la misura varie volte e prendere poi la *media del campione*  $l_{Mi}$  e come errore la *standard deviation* o 3 volte la standard deviation se vogliamo considerare gli errori massimi. Per ridurre i tempi morti fra una misura e l'altra, cioè per abbreviare il tempo che il galvanometro impiega per tornare nell'origine e fermarsi, esiste sulla scatola dello shunt un contatto che cortocircuita la resistenza  $R_T$  dello shunt e massimizza lo smorzamento.

Ripetendo la misura per vari valori di  $V_0$ , si può anche verificare la costanza di  $K_B$ , ovvero la linearità dello strumento; questo controllo si può fare indipendentemente dalla precisione con cui è noto  $C_0$  che è sempre lo stesso; la accuratezza di questa misura dipenderà però dalla precisione su  $V_0$  e dall'errore di lettura.

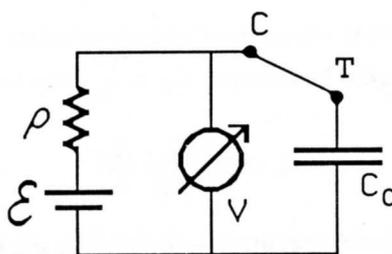


Fig.VI.16

Una domanda che è ragionevole porsi riguarda la durata dell'intervallo di tempo durante il quale il tasto deve essere lasciato nella posizione C per essere sicuri che il condensatore si sia caricato. Una prima risposta viene dalla misura stessa di  $V_0$ : quando l'indicazione del voltmetro è stazionaria, evidentemente la carica su  $C_0$  ha raggiunto il valore di regime. D'altronde la costante di tempo di carica  $\tau_c$  è facilmente trovata tramite l'equivalente di Thévenin del circuito di carica (lo strumento

disegnato in Fig.16 rappresenta un voltmetro ideale con resistenza infinita, vedi anche Fig.14):

$$\begin{cases} \rho = \frac{R\rho_V}{R + \rho_V} \\ \mathcal{E}_{Th} = \mathcal{E} \frac{\rho_V}{R + \rho_V} \end{cases} \quad (\text{VI.48})$$

Ricordando le conclusioni del §2 si trova che  $\tau_c = \rho C_0 \approx RC_0$  poiché in genere  $\rho_V \gg R$ . Il motivo della presenza di  $R$  è che all'istante iniziale (quando cioè si chiude il tasto su C) la corrente vale:  $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$ , limitata proprio dalla presenza di una  $R$  finita. In assenza di  $R$  la corrente iniziale assumerebbe valori estremamente elevati (nominalmente  $\infty$ ) che rischierebbero di danneggiare il contatto C del tasto.

Supponendo ora di avere misurato  $K_B$  (o  $k_B$ ) e  $K_B^0$ , possiamo utilizzare il galvanometro per determinare la capacità  $C_X$  di un condensatore: infatti basterà sostituire  $C_0$  con  $C_X$  e misurare la prima elongazione, magari variando o  $\mathcal{E}$  o i rapporti di shunt o entrambi per ottenere una elongazione sufficientemente ampia. Detta  $\varphi_{MX}$  l'elongazione corrispondente al primo massimo (risultato di una media su varie misure) avremo (se il rapporto di shunt è 1 in entrambi i casi):

$$VC_X = K_B \varphi_{MX} \quad (\text{VI.49})$$

con

$$K_B = \frac{C_0 V_0}{\varphi_M} \quad (\text{VI.50})$$

e quindi

$$C_X = \frac{C_0 V_0}{V} \frac{\varphi_{MX}}{\varphi_M} \quad (\text{VI.51})$$

Se i valori di  $C_X$  e  $C_0$  lo consentono e abbiamo avuto l'accortezza di usare lo stesso valore di  $V$  in entrambi i casi (non abbiamo cioè mosso il controllo che regola la tensione  $\mathcal{E}$  e abbiamo sufficienti garanzie sulla stabilità del generatore), possiamo eliminare ogni dipendenza dalla tensione:

$$C_X = C_0 \frac{\varphi_{MX}}{\varphi_M} \quad (\text{VI.52})$$

Se questa condizione, con entrambe le elongazioni ragionevolmente ampie, si riesce a soddisfare solo per differenti rapporti di shunt (perché ad esempio  $C_X > \frac{C_0}{10}$ ) dovremo tenerne esplicitamente conto:

$$C_X = C_0 \frac{\varphi_{MX}}{\varphi_M} \frac{S_0}{S_X} \quad (\text{VI.53})$$

dove  $S_0$  e  $S_X$  rappresentano i rapporti di shunt impiegati nella misura con  $C_0$  e  $C_X$  rispettivamente (se  $C_0 = 1\mu F$ ,  $C_X \approx 10\mu F$  converrà fare  $S_0 = 1$  e  $S_X = \frac{1}{10}$ ).

La definizione dei parametri ottimali della misura in genere non è immediata, anzi si tratterà di fare preventivamente delle misure "di sondaggio" volte a determinare almeno approssimativamente  $C_X$ ; solo a questo punto si potrà decidere la migliore misura di  $C_X$  tramite la scelta dei rapporti di shunt e della ddp  $\mathcal{E}$ .

## 9.— Misura di resistenze di valore elevato

### Resistenza di fuga

Supponiamo di dover misurare il valore di una resistenza  $R_X$  di valore elevato. Una valutazione di  $R_X$  si può ottenere col circuito di Fig.17:

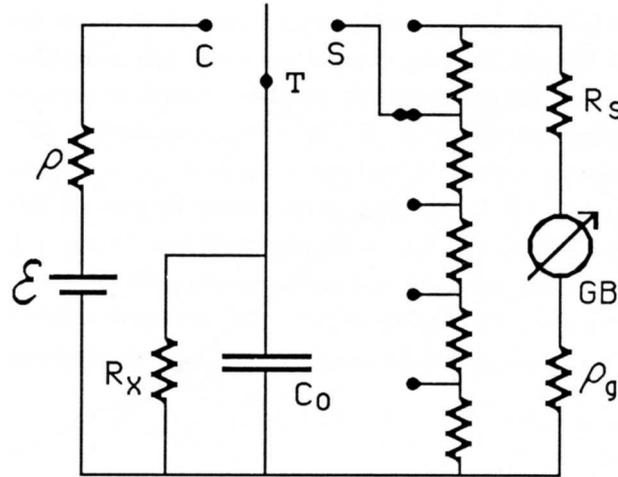


Fig.VI.17

La resistenza  $R_X$  è posta in parallelo ad un condensatore di capacità nota  $C_0$ , in modo che  $\tau = R_X C_0$  sia almeno dell'ordine di qualche decina di secondi. Poniamo il tasto in C; in un tempo pari a qualche costante di tempo  $\tau_C \approx \rho C_0$  (se  $R_X \gg \rho$ ) il condensatore si carica fino a possedere una carica pari a

$$C_0 \cdot V = Q_0 \quad (\text{VI.54})$$

dove

$$V = \frac{\mathcal{E} R_X}{R_X + \rho} \approx \mathcal{E} \quad (\text{VI.55})$$

Se ora commutiamo in un tempo  $\theta \ll \tau$  il tasto dalla posizione C alla posizione S, la carica  $Q_0$  viene misurata dal galvanometro; senza particolari accorgimenti il tempo  $\theta$  che occorre per effettuare la commutazione manuale del pulsante, risulta  $< 10^{-1} s$ . Chiamiamo  $l_{M0}$  il primo massimo del moto successivo del galvanometro balistico.

Riportiamo quindi in C il tasto e successivamente, quando il galvanometro si sarà fermato, apriamo il contatto C e lasciamo ora il tasto nella posizione intermedia I per un tempo  $t_1$ , con il condensatore  $C_0$  e la resistenza  $R_X$  isolati dal resto del circuito. A partire dall'istante  $t = 0$  in cui si interrompe il collegamento in C, il condensatore inizia a scaricarsi attraverso  $R_X$  con la seguente legge:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{R_X C_0}\right) \quad (\text{VI.56})$$

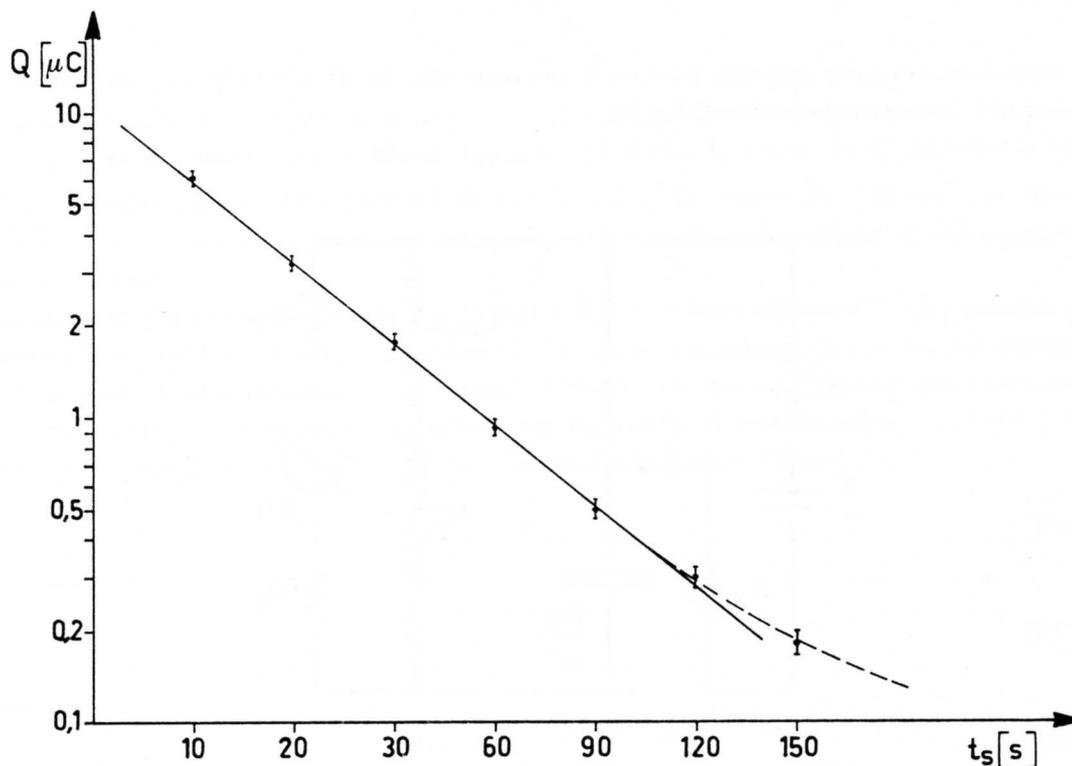


Fig. VI.18

Al tempo  $t_1$  portiamo il tasto in S; nel galvanometro passerà una carica  $Q_1 = Q_0 \exp\left(\frac{-t_1}{R_X C_0}\right)$  alla quale corrisponderà una elongazione massima  $l_{M1}$ . Si trova così:

$$\frac{l_{M0}}{l_{M1}} = \exp\left(\frac{t_1}{R_X C_0}\right) \quad (\text{VI.57})$$

quindi

$$R_X = \frac{1}{C_0} \frac{t_1}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M1}}} \quad (\text{VI.58})$$

Anche in questo caso è opportuno ripetere la misura varie volte per ridurre l'indeterminazione di  $t_1$ , di  $l_{M0}$  e di  $l_{M1}$ .

Per diminuire l'errore su  $t_1$  conviene anche operare con  $t_1$  più grande possibile, ma ciò significa che  $l_{M1} \ll l_{M0}$  e quindi una elongazione molto piccola con conseguenti grossi errori relativi di lettura. L'uso dello shunt consente di ovviare a questo problema: la misura di  $Q_0$  si può fare, aumentando opportunamente  $\mathcal{E}$ , con lo shunt posto su un rapporto  $< 1$ , mentre la lettura al tempo  $t_1$  può effettuarsi riducendo la partizione dello shunt. Con questo semplice metodo è possibile prendere misure per vari valori di tempo di scarica  $t_s$  e riportare poi in un grafico  $Q(t_s)$  in funzione di  $t_s$  (Fig.18). E' utile usare una carta semilogaritmica (asse Y logaritmico). La pendenza della retta migliore che passa per i punti sperimentali dà:  $-\tau = -R_X C_0$  e consente la migliore determinazione di  $R_X$  fra tutte quelle ottenibili dai dati sperimentali. Se la curva segue il decadimento per varie

costanti di tempo e se il condensatore non è di ottima qualità, si potrà anche osservare una deviazione dall'andamento previsto (curva tratteggiata in figura). Esso corrisponde al fenomeno della *ritenzione di carica* da parte del dielettrico fra le armature. Tale fenomeno dipende dalla qualità del condensatore e quanto più è piccolo l'effetto, tanto più il condensatore sarà adatto a misure di carica di alta precisione.

Guardando più in dettaglio il circuito di Fig.17 ci si accorge che la resistenza effettivamente misurata non è  $R_X$ , ma il parallelo di  $R_X$  e la resistenza di fuga del condensatore  $C_0$ : infatti ogni condensatore reale usato in continua può schematizzarsi come un condensatore ideale di capacità  $C_0$  con in parallelo una resistenza  $R_f$  (generalmente molto grande). L'origine fisica di questa resistenza va ricercata sia nel dielettrico, che non è un isolante perfetto, sia nel fatto che delle perdite possono anche avvenire tramite le superfici esterne dell'involucro del condensatore. Per condensatori commerciali  $R_f > 10^9\Omega$ , tipicamente  $10^{10} - 10^{11}\Omega$ . E' opportuno quindi, dopo aver misurato la resistenza posta in parallelo a  $C_0$ , toglierla e ripetere la misura seguendo una analoga procedura per stimare  $R_f$ . Poiché  $R_f$  sarà in genere assai maggiore di  $R_X$  i tempi di attesa saranno scelti corrispondentemente più lunghi; se ad esempio  $C_0 = 1\mu F$ ,  $R_f = 10^9\Omega$ ,  $\tau = 10^3 s$  e quindi per avere una riduzione di ampiezza del 50% occorre attendere qualcosa come un quarto d'ora. D'altronde per tempi di scarica brevi le ampiezze del massimo differiscono poco da quelle fatte con tempo di scarica  $t = 0$  e conseguentemente le misure risultano affette da un errore molto grosso. Infatti da:

$$R_f = \frac{t_1}{C_0} \frac{1}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M1}}} \quad (\text{VI.59})$$

si ha

$$\frac{\Delta R_f}{R_f} = \frac{\Delta t_1}{t_1} + \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\frac{\Delta l_{M0}}{l_{M0}} + \frac{\Delta l_{M1}}{l_{M1}}}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M1}}} \quad (\text{VI.60})$$

e se  $\frac{l_{M0}}{l_{M1}} \approx 1$  avremo un forte innalzamento del contributo di errore associato alle elongazioni. Per misurare grosse  $R_f$  con  $R_f C_0 \gg 100s$  conviene, anziché procedere come sopra, misurare direttamente la quantità di carica che serve a ripristinare il valore di carica posseduta dal condensatore per  $t = 0$  (vedi Fig.19)

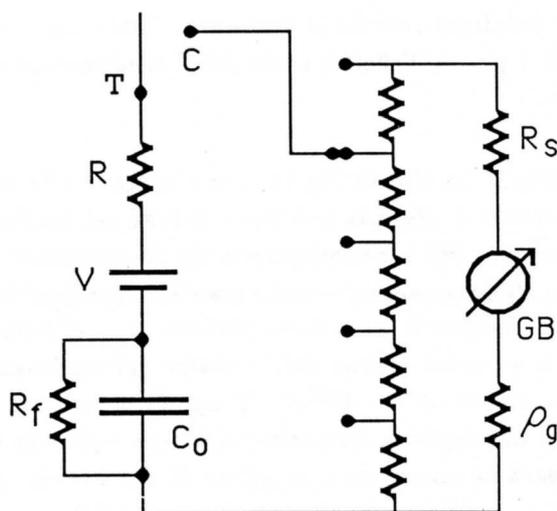


Fig.VI.19

Si carica il condensatore con il tasto T in C; avendo cura di usare una ddp  $V$  sufficientemente elevata, si fa la misura con un rapporto di shunt  $S_0 = \frac{1}{10}$  o  $\frac{1}{100}$ . Si misura così  $Q_0$  (in quanto il tempo di carica sarà  $\ll T$ ) e varrà:

$$Q_0 = k_B \cdot l_{M0} \cdot \frac{1}{S_0} \quad (\text{VI.61})$$

Si apre quindi il contatto in C, si fa partire il cronometro; si cambia il rapporto di shunt ponendo il galvanometro nella massima sensibilità ( $S_f = 1$ ). Dopo un tempo di attesa  $t$ , durante il quale la carica su  $C_0$  diminuisce di

$$\Delta Q = Q_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{R_f C_0}\right) \right] \quad (\text{VI.62})$$

si ripristina il collegamento C; nel galvanometro passa la carica  $\Delta Q$  e la prima elongazione ci darà

$$\Delta Q = k_B \cdot l_{M1} \frac{1}{S_f} \quad (\text{VI.63})$$

Combinando le due informazioni abbiamo:

$$\frac{l_{M0} S_f}{l_{M1} S_0} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{t}{R_f C_0}\right)} \quad (\text{VI.64})$$

e quindi

$$R_f = \frac{t}{C_0} \frac{1}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M0} - l_{M1} \frac{S_0}{S_f}}} \quad (\text{VI.65})$$

È facile rendersi conto che in questo caso gli errori di lettura su  $l_{M0}$  e  $l_{M1}$  non compromettono particolarmente la misura di  $R_f$ . Infatti se  $t \ll R_f C_0$ , come in genere sarà, altrimenti avremmo adoperato l'altro metodo, la (64) ci dice che:

$$\frac{l_{M1} S_0}{S_f l_{M0}} \approx \frac{t}{R_f C_0} \quad (\text{VI.66})$$

e quindi

$$R_f \approx \frac{t}{C_0} \frac{l_{M0}}{l_{M1}} \frac{S_f}{S_0} \quad (\text{VI.67})$$

Abbiamo così

$$\frac{\Delta R_f}{R_f} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\Delta l_{M0}}{l_{M0}} + \frac{\Delta l_{M1}}{l_{M1}} + \frac{\Delta S_f}{S_f} + \frac{\Delta S_0}{S_0}$$

senza alcun particolare innalzamento degli errori relativi su  $l_{M0}$  e  $l_{M1}$ .

## 10. – Misure di forza elettromotrice con grosse resistenze in serie

Se abbiamo un generatore di forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  con una resistenza in serie  $\rho$ , possiamo determinare  $\mathcal{E}$  caricando un condensatore  $C_0$  e misurando poi  $Q_\infty = \mathcal{E}C_0$  col galvanometro balistico. Il simbolo  $Q_\infty$  sta a ricordare che il tempo di carica  $t_c$  dovrà essere  $\gg \rho C_0$ . Si tratta cioè di una misura in tutto e per tutto simile a quella descritta nel §8. Se poi la resistenza  $\rho$  è sufficientemente elevata, si può scegliere  $C_0$  in modo tale che  $\tau = \rho C_0$  cada nel campo delle decine di secondi o più e per avere una discreta misura di  $\rho$  si procede così: anziché caricare  $C_0$  per un tempo  $t_c \gg \tau$  fino a  $Q_\infty$ , lo si carica per tempi confrontabili con  $\tau$  e poi si scarica  $C_0$  sul galvanometro balistico. Riportando in grafico  $\ln(Q_\infty - Q(t_c))$  si ha una retta di pendenza  $-1/\rho C_0$  e quindi si può risalire a  $\rho$  (vedi Fig.20).

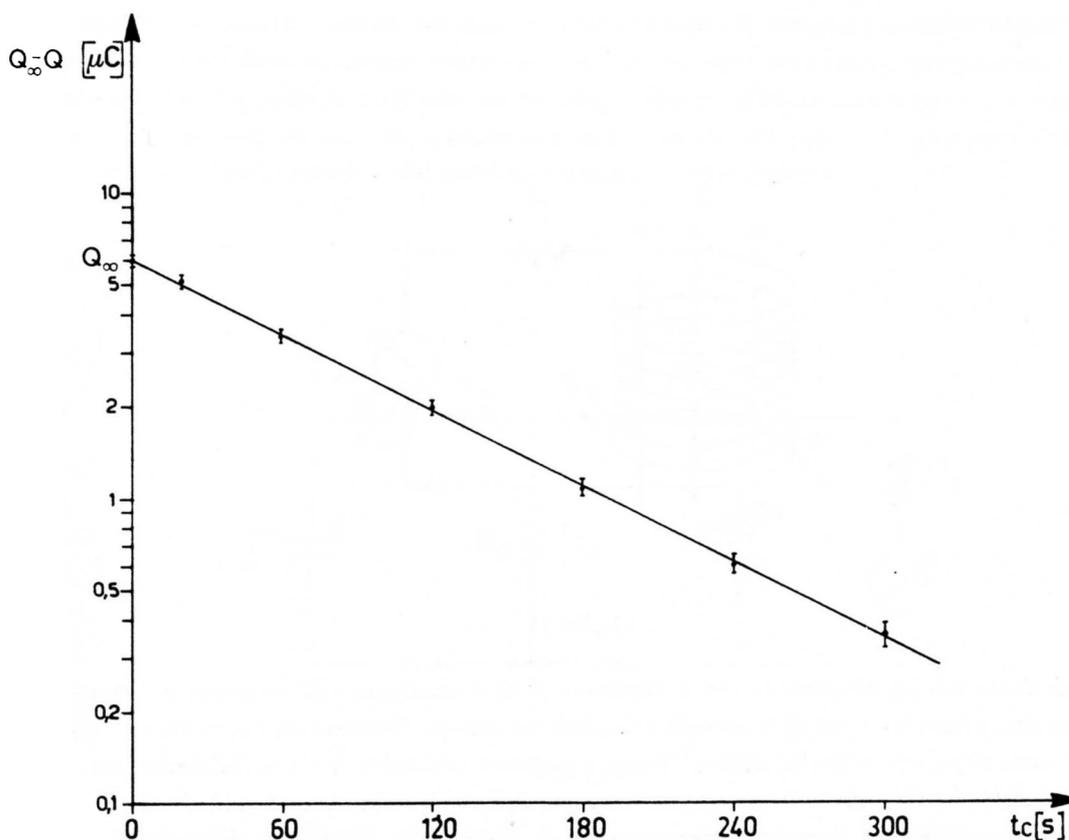


Fig. VI.20

## 11.— Misura assoluta del campo di induzione magnetica

Supponiamo di voler misurare il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  presente in una regione limitata dello spazio, per esempio fra le espansioni polari di un magnete. Una sonda costituita da numerose spire di filo di rame sottile avvolte concordemente su un supporto di geometria nota (*sonda di Felici*, dal nome del suo ideatore) e un galvanometro balistico consentono una misura assoluta di  $\vec{B}$ . Infatti (vedi Fig.21) detta  $S$  la superficie di una spira e  $n$  il numero delle spire, il flusso  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con la bobina, supponendo  $\vec{B}$  omogeneo, vale:  $\Phi(\vec{B}) = nSB \cos \theta$  dove  $\theta$  è l'angolo fra  $\vec{B}$  e la normale alle spire, ammesso che le spire siano piane e parallele fra loro. Supponendo di poter fare in modo che  $\theta = 0$ , abbiamo

$$\Phi(\vec{B}) = nSB \quad (\text{VI.68})$$

Ammettiamo che la sonda si trovi in questa configurazione da un tempo sufficientemente lungo col galvanometro fermo nell'origine, ed estraiamo la sonda dalle espansioni polari portandola in una zona di campo residuo  $|\vec{B}_r| \ll |\vec{B}|$ : abbiamo allora un cambiamento del flusso  $|\Delta\Phi| \approx nSB$ . Questo, come sappiamo, provoca nel circuito il passaggio di una carica  $Q = \frac{\Delta\Phi}{R}$  e se la variazione di  $\Delta\Phi$  è avvenuta in un tempo  $\tau \ll T$ , allora la prima elongazione del galvanometro varrà:

$$l_M = \frac{\Delta\Phi}{R} \frac{1}{k_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right)} \quad (\text{VI.69})$$

nell'ipotesi che  $R$  sia  $> R_c$ . Come al solito  $\Lambda$  sarà determinato sperimentalmente in base alle elongazioni successive.

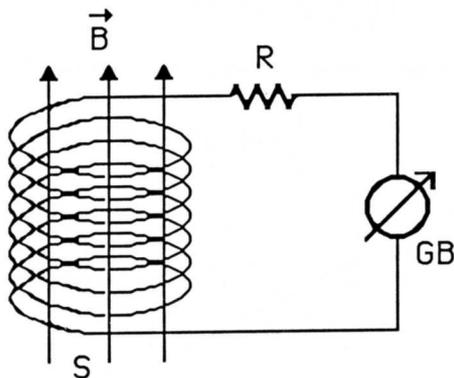


Fig.VI.21

Come detto nel §6, nonostante che a diminuire  $R$  ci si guadagni nell'ampiezza del moto, altre considerazioni, prima fra le quali la necessità di poter facilmente determinare  $k_B$ , portano a scegliere una resistenza superiore a quella critica. Occorre pertanto conoscere  $\Lambda$  e possibilmente con piccolo errore. Ciò richiede che almeno il secondo massimo sia sufficientemente ampio in modo che l'errore di lettura non ne pregiudichi la accurata determinazione. Uno studio dettagliato del problema mostra

che per ottimizzare la misura di  $\Delta\Phi$ , cioè minimizzare l'errore relativo su  $\Delta\Phi$ , occorre scegliere  $R \approx 4R_c$  e dedurre  $\Lambda$  dall'ampiezza di almeno 3 o 4 massimi successivi tramite il *fit* del loro andamento; comunque, anche prendendo solo il secondo massimo, la condizione ottimale per  $R$  è sempre  $R \approx 4R_c$ , anche se l'errore su  $\Lambda$  necessariamente cresce. Pertanto se ci chiediamo quale è l'avvolgimento ottimale per un galvanometro balistico usato in questo modo troviamo, in base alla (69) e ricordando che  $k_B^0 \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_g}}$ ,  $R_c \propto \rho_g$  ( $\rho_g$  è la resistenza dell'avvolgimento) che si ha una ampiezza del primo massimo tanto più grande quanto più  $\rho_g$  è piccola:  $l_M \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_g}}$ . La precisione della determinazione di  $|\vec{B}|$

$$B = \frac{l_M \cdot R}{nS} k_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \quad (\text{VI.70})$$

dipende, oltre che dalla precisione di  $l_M$  e di  $\Lambda$ , anche da quella di  $S$ . Anzi non di rado se  $S$  è piccola (alcuni  $\text{cm}^2$ ) come è necessario per avere una informazione la più puntuale possibile su  $B$ ,  $\Delta S$  può essere l'errore predominante.

## 12.— Determinazione dei parametri di un galvanometro

Riportiamo qui alcuni dei metodi per la misura della resistenza interna, della costante reometrica e della resistenza critica di un galvanometro; il valore di queste grandezze insieme a quello della costante balistica a smorzamento nullo  $K_B^0$  (oppure del periodo  $T$  dello strumento, sempre in condizioni di smorzamento nullo) definiscono completamente il comportamento del galvanometro. Quanto alla misura della resistenza critica, essa si può compiere eccitando il galvanometro (balisticamente o no) e, variando la resistenza su cui esso è chiuso, studiandone il ritorno a zero oppure il raggiungimento dell'asintoto, se si eccita con una corrente costante. La resistenza critica  $R_c$  è individuata come limite inferiore del moto sovracritico cioè oscillatorio.

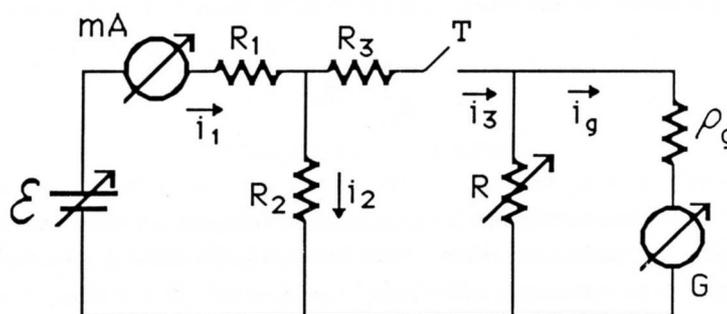


Fig. VI.22

Con riferimento alla Fig.22, essendo  $R_3 \gg R_2$  per avere una grossa ripartizione della corrente ( $i_3 \ll i_2$ ), si può eccitare il galvanometro chiudendo T per un istante e poi riaprendolo: il ritorno a

zero avverrà in modo oscillatorio se  $R + \rho_g > R_c$ ; variando  $R$  si determinerà  $R_c$ . Tale determinazione non sarà mai particolarmente precisa, ma d'altra parte la conoscenza di  $R_c$  – sia perdonato il gioco di parole – non è mai critica per la determinazione delle grandezze ( $i$  e  $q$ ) che un galvanometro consente di misurare.

Quanto alla determinazione della costante reometrica si può procedere usando il circuito di Fig.22 (con  $R$  soppressa per semplicità e T chiuso), misurando  $i_1$ ; note  $R_3$  e  $R_2$  si può risalire a  $i_3 = i_g$ . La deflessione a regime  $l_r$  sarà data da:

$$l_r = \frac{i_3}{k_r} \quad (\text{VI.71})$$

Sappiamo che per la misura di  $k_r$  valgono precauzioni simili a quelle per  $k_B$ ; le correzioni sono necessarie se l'angolo corrispondente a  $l_r$  non è abbastanza piccolo.

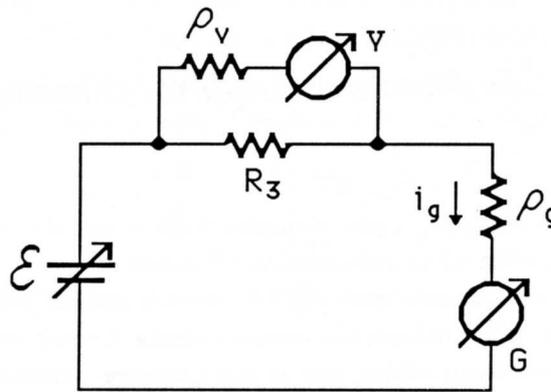


Fig.VI.23

Alternativamente a questo metodo, se  $R_3$  è un buon resistore campione potremo misurare la ddp ai suoi estremi (vedi Fig.23) e da questa risalire a  $i_3$  e quindi a  $k_r$ . Ovviamente la misura deve essere fatta o con un potenziometro e un rivelatore di zero che abbia una  $i_{gm} \ll i_3$  o meglio con uno strumento elettronico con resistenza di ingresso o tanto elevata da poter essere trascurata o elevata (ad esempio  $10M\Omega$ ) e nota con una discreta precisione; in quest'ultimo caso avremo

$$i_g = \frac{V}{R_3 \rho_v} (R_3 + \rho_v) \quad (\text{VI.72})$$

La precisione con cui è nota  $\rho_v$  non è poi tanto importante se  $\rho_v \gg R_3$ , come si può facilmente verificare. Si noti che la misura di  $V$  non può essere effettuata con un voltmetro analogico; se infatti  $\rho_v$  non è sufficientemente grande non sarà possibile limitare la corrente  $i_3$  a valori da dare elongazioni nel campo di misura del galvanometro. Ad esempio se  $\mathcal{E} \approx 10^{-1}V$  per avere  $i_3 \approx 10^{-6}A$  occorrerà  $R_3 \approx 10^5\Omega$ . Voltmetri analogici molto sensibili e di pregio hanno al più  $10^5\Omega/V$  e conseguentemente, posti sul fondo scala  $0.1V$  presenterebbero  $\rho_v = 10^4\Omega$ , troppo piccola per le esigenze richieste. Quanto alla misura della resistenza interna  $\rho_g$ , abbiamo già descritto un metodo che utilizza il Ponte di Wheatstone. Vediamo ora un metodo che può dare risultati anche più precisi e soprattutto è più semplice da realizzare. Si tratta sostanzialmente del circuito precedente con un piccolo cambiamento: in parallelo a  $\rho_g$  è posta una resistenza  $R$  variabile (Fig.24)

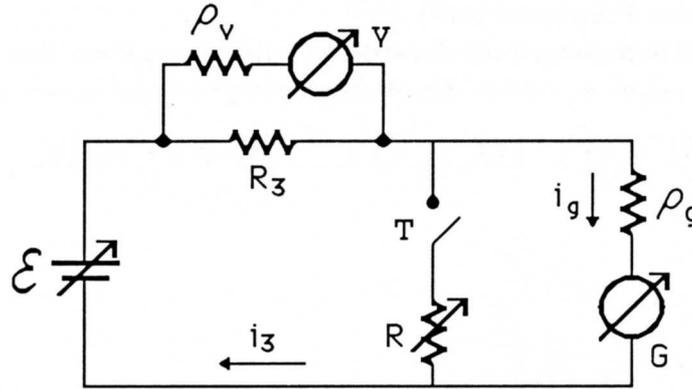


Fig. VI.24

Detta  $i_g^\infty$  la corrente con  $R = \infty$ , cioè con T aperto, varrà:

$$i_g^\infty = \frac{\mathcal{E}}{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g} \quad (\text{VI.73})$$

Se poniamo ora  $R$  in parallelo a  $\rho_g$ , chiudendo il tasto T, otteniamo:

$$i_g = \frac{\mathcal{E}}{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g \parallel R} \cdot \frac{R}{\rho_g + R} \quad (\text{VI.74})$$

I valori di  $i_g^\infty$  e  $i_g$  sono dati dalla lettura delle elongazioni sul galvanometro e non occorre che esso sia tarato, basta essere sicuri della sua linearità; infatti il rapporto delle correnti sarà uguale al rapporto delle elongazioni e varrà:

$$\frac{i_g^\infty}{i_g} = \frac{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g \parallel R}{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g} \cdot \frac{\rho_g + R}{R} = \frac{1 + \frac{\rho_g \parallel R}{R_3 \parallel \rho_v}}{1 + \frac{\rho_g}{R_3 \parallel \rho_v}} \quad (\text{VI.75})$$

Se  $R_3 \parallel \rho_v \gg \rho_g$  e  $R = \rho_g$ , avremo  $\frac{i_g^\infty}{i_g} = 2$  e il metodo prende il nome di *metodo del dimezzamento*.

Se la condizione di  $i_3 = \text{cost}$ , corrispondente a dire e  $R_3 \parallel \rho_v \gg \rho_g$ , non è soddisfatta occorrerà, dalla (75) ricavare  $\rho_g = \rho_g(R, R_3, \rho_v, \frac{i_g^\infty}{i_g})$ .

### NOTA BIBLIOGRAFICA

Per il galvanometro balistico valgono i suggerimenti dati nella nota del Cap. II. Ai testi di Fisica generale (**FR 71, JA 75, PA 62, FE 63**) si rimanda per le definizioni di capacità e condensatori. Quanto al problema della ritenzione di carica nei dielettrici si può vedere ad esempio (sono trattazioni assai ponderose):

- a) Tareev: "Physics of Dielectric Materials"  
MIR (1975)
- b) Zwicker: "Physical Properties of Solid Materials"  
Pergamon (1954) Cap. 7

- c) Anderson: "Dielectrics"  
Science Paperbacks (1967)

L'Appendice A del testo svolge il calcolo del deficit balistico; non è senz'altro una amena lettura, ma può, se non altro, servire a prendere dimestichezza con gli sviluppi in serie arrestati agli ordini superiori al primo.

## VII

### I COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

#### 1.— Definizioni

Consideriamo due circuiti rigidi e fissi nello spazio, ognuno costituito da una sola maglia, posti a distanza finita l'uno dall'altro. Supponiamo che in uno di essi (1) circoli la corrente  $i_1$ . Essa dà luogo nello spazio circostante ad un campo di induzione magnetica  $\vec{B}_1(P)$ : se il mezzo in cui i due circuiti sono immersi è isotropo, indefinito, omogeneo e caratterizzato da una permeabilità magnetica  $\mu_r$ ,  $\vec{B}_1(P)$  vale:

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{i_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (\text{VII.1})$$

$\vec{r}$  rappresenta il vettore che unisce il trattino  $d\vec{l}_1$  del circuito considerato ed il punto  $P$ ;  $i_1$  è stato portato fuori dal segno di integrazione poiché, nell'ipotesi implicitamente ammessa di stazionarietà ( $\text{div } \vec{j} = 0$ ),  $i_1$ , pur potendo dipendere dal tempo, è la stessa istante per istante in tutto il circuito. Questo campo di induzione magnetica si concatena sia con il circuito 1 medesimo che con il circuito 2, dando luogo a due flussi in genere non nulli; tali flussi, nelle ipotesi sopradette riguardo al mezzo circostante, valgono:

$$\begin{cases} \Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_1 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_1} \left( \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_1 = i_1 L_1 \\ \Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_2 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_2} \left( \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_2 = i_1 L_{12} \end{cases} \quad (\text{VII.2})$$

dove  $S_1$  e  $S_2$  sono due superfici *qualunque* che abbiano come contorno il circuito 1 e 2 rispettivamente. La possibilità di scrivere i due flussi come grandezze proporzionali alla corrente  $i_1$  deriva dal fatto che la *complicata* espressione a fattore della corrente è una costante, qualora la geometria dei due circuiti sia fissata. Se avessimo considerato gli effetti dovuti alla presenza di una corrente  $i_2$  nel circuito 2 avremmo trovato:

$$\begin{cases} \Phi_{22} = i_2 L_2 \\ \Phi_{21} = i_2 L_{21} \end{cases} \quad (\text{VII.3})$$

Nelle ipotesi ammesse è facile dimostrare che  $L_{12} = L_{21}$ . I coefficienti  $L_1$ ,  $L_2$  e  $M = L_{12} = L_{21}$  sono detti rispettivamente *coefficienti di autoinduzione* del circuito 1, del circuito 2 e di *mutua induzione* dei circuiti 1 e 2. Si trova che i coefficienti di autoinduzione sono positivi, mentre il segno del coefficiente di mutua induzione dipende dalla scelta del verso positivo delle correnti nei due circuiti.

Supponiamo ora che le correnti  $i_1$  e  $i_2$  siano dipendenti dal tempo; pertanto anche i flussi di induzione magnetica ad essi associati varieranno nel tempo e nei due circuiti si osserveranno delle fem indotte del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{11} + \Phi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{12}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (\text{VII.4})$$

Si osservi che la costanza della geometria e quindi di  $L_{ij}$  permette di considerare la sola derivata della corrente; qualora la geometria non fosse fissa si osserverebbero anche variazioni nell'assetto meccanico dei due circuiti (vedi Capp. XI e XX) e avremmo dovuto considerare anche la derivata temporale dei coefficienti di auto e mutua induzione.

La unità di misura dei coefficienti di auto e mutua induzione è lo *Henry* ( $H$ ) che vale:

$$[H] = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}^2}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{secondo}}{\text{Ampère}}$$

come si può facilmente verificare in base alle relazioni sopra riportate.

## 2.— *Le induttanze e le induttanze mutue*

Le ipotesi semplificative ammesse nel paragrafo precedente in pratica non si verificano quasi mai e pertanto nella valutazione dei coefficienti di auto e mutua induzione intervengono altri fattori fondamentali, quali ad esempio le proprietà magnetiche (e in particolare ferromagnetiche) dei corpi posti nelle vicinanze dei due circuiti. Si può tuttavia dimostrare con ragionamenti basati sul calcolo dell'energia associata a questi sistemi di correnti, che  $L_{12} = L_{21}$  sempre, anche nei casi reali. I coefficienti di autoinduzione e mutua induzione, che si vengono a creare fra circuiti posti nelle vicinanze l'uno dell'altro, sono generalmente piccoli (diciamo dell'ordine dei  $\mu H$ ). Come nel caso della resistenza di un ramo che è concentrata in un preciso elemento fisico appositamente costruito (il resistore) e non distribuita uniformemente, o quasi, lungo tutto il ramo, così per il coefficiente di autoinduzione (e mutua induzione) si fa in modo che esso sia concentrato in una particolare porzione del ramo (o di due rami). Tale elemento fisico, nel caso del coefficiente di autoinduzione, è detto *induttore o induttanza o bobina* ed è generalmente realizzato avvolgendo numerose spire di filo conduttore (generalmente rame) su un supporto; quest'ultimo è di materiale ferromagnetico qualora si vogliano ottenere coefficienti di autoinduzione elevati senza aumentare eccessivamente il numero di spire. E' abbastanza ovvio che il coefficiente di autoinduzione cresca all'aumentare del numero  $n$  delle spire poiché così facendo si moltiplica per  $n$  sia il valore di  $\vec{B}$  prodotto dalla corrente che l'area della superficie con cui esso si concatena; altrettanto chiaro è che l'inserzione di materiale ad alta permeabilità magnetica  $\mu_r$  entro queste spire aumenta il coefficiente di autoinduzione \*. Pertanto, nella geometria ora detta (a *solenoide*)  $L$  aumenta approssimativamente come il quadrato del numero delle spire e dipende linearmente dalla permeabilità  $\mu_r$  del supporto (o *nucleo*). Quanto alla realizzazione di coefficienti di mutua induzione si opera similmente, per esempio avvolgendo su uno stesso supporto, spesso di materiale ad alta permeabilità magnetica, due fili conduttori

---

\* anche gli  $L$  definiti nelle (2) e (3) crescono proporzionalmente a  $\mu_r$ , ma il confronto col caso in esame va fatto con molta cautela, date le ipotesi con cui quelle formule erano ricavate.

ognuno costituente un ramo delle due maglie che devono presentare il coefficiente di mutua induzione desiderato; un tipico esempio di circuiti aventi un elevato coefficiente di mutua induzione è costituito dal *trasformatore*.

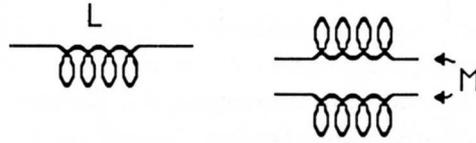


Fig.VII.1

I simboli circuitali per indicare le induttanze e le mutue induttanze sono quelli in Fig.1 se sono avvolte su supporto con  $\mu_r \approx 1$  oppure quelli di Fig.2, se il supporto è ad alta permeabilità magnetica.

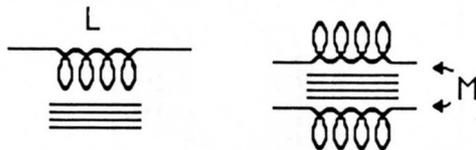


Fig.VII.2

Se due circuiti presentano un coefficiente di mutua induzione finito, ognuno di essi ha un coefficiente di autoinduzione non nullo. Si trova che vale la seguente relazione:  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . Nel caso in cui valga la relazione di uguaglianza (o comunque si sia molto vicini a questa condizione) si dice che fra i due circuiti c'è un accoppiamento *stretto*, in caso contrario l'accoppiamento è detto *lasco*.

Mentre idealmente una induttanza (o una mutua induttanza) è completamente caratterizzata dal corrispondente coefficiente di autoinduzione  $L$  (o dai coefficienti di autoinduzione  $L_1$ ,  $L_2$  e mutua induzione  $M$ ), nei casi reali almeno un contributo di resistenza in serie sul ramo deve essere considerato; esso è dovuto al conduttore, in genere sottile e di lunghezza non trascurabile, che costituisce l'avvolgimento (o gli avvolgimenti).

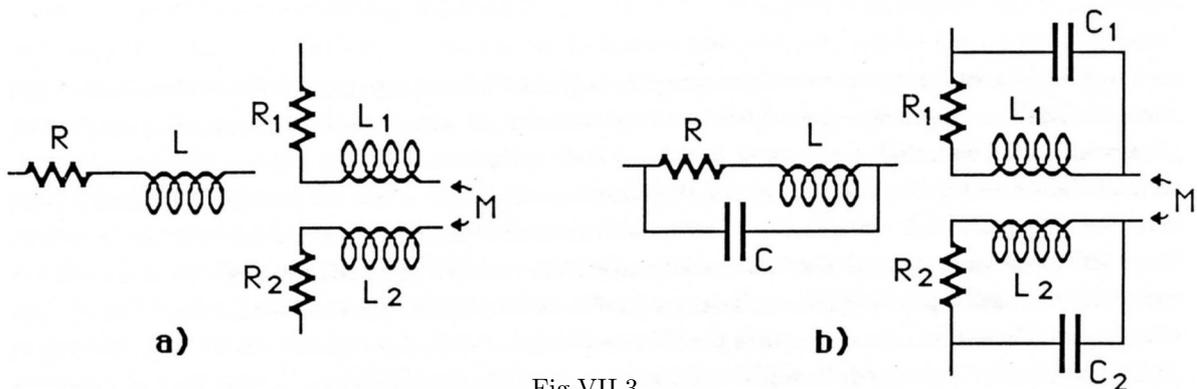


Fig.VII.3

Pertanto una induttanza e una mutua induttanza reali sono approssimate, con una schema-

tizzazione spesso sufficientemente accurata, nel modo di Fig.3a. Occorre fin d'ora osservare che il passaggio della corrente nell'induttanza provoca due tipi di fenomeni fisici completamente differenti, uno *reversibile*, ovvero la creazione del campo magnetico e quindi l'immagazzinamento di energia ( $W_R = \frac{1}{2}Li^2$ ), un altro tipicamente *irreversibile*, ovvero l'effetto Joule sulla parte resistiva. Vedremo, quando tratteremo le correnti alternate, che, data una induttanza, è possibile introdurre il cosiddetto *parametro di qualità*  $Q$  che dice quanto il componente in questione si avvicina al caso ideale:  $\frac{L}{R}$  il più grande possibile. Oltre alla inevitabile presenza di una resistenza, un altro problema che si incontra nella costruzione di induttanze e di induttanze mutue, è la capacità che si forma fra i vari strati di spire, sovrapposti l'uno sull'altro; conseguentemente, in certe condizioni (vedi Cap. IX sulle correnti alternate e Cap. XIII sui circuiti risonanti), non è più sufficientemente accurata la schematizzazione adottata in Fig.3a, ma occorre tener conto almeno di una capacità in parallelo all'induttanza come in Fig.3b.

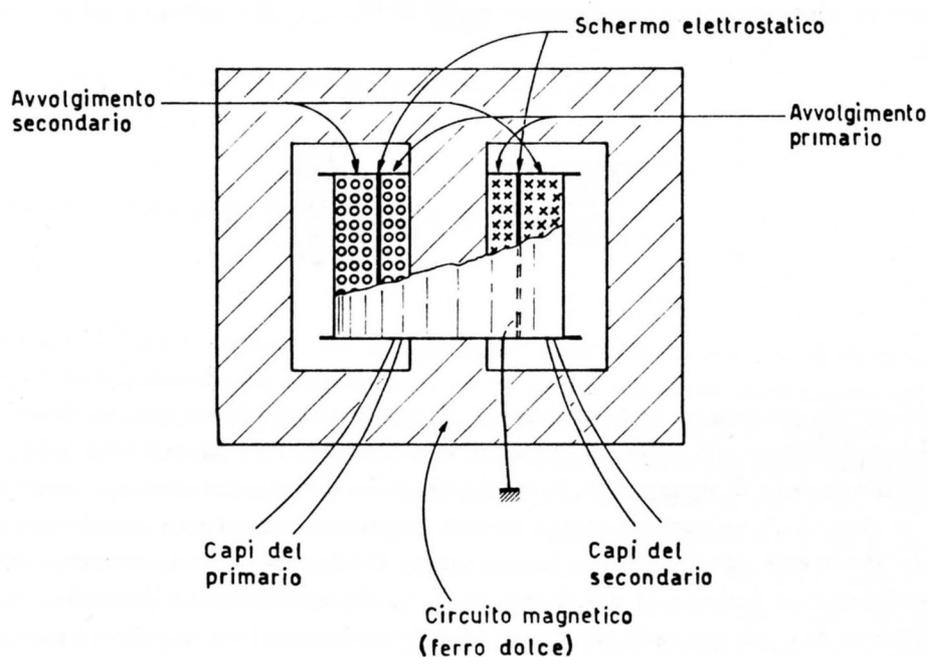


Fig. VII.4

In realtà la situazione è ancor più complicata poiché queste capacità risultano distribuite fra i vari strati dell'avvolgimento che costituisce l'induttanza; per evitare o almeno ridurre questi effetti gli avvolgimenti delle induttanze non sono mai fatti nella banale forma a solenoide, ma piuttosto vengono scelte configurazioni particolari che minimizzano queste capacità parassite. In maniera del tutto simile, quando si realizza un alto coefficiente di mutua induzione fra due circuiti, si forma inevitabilmente una capacità fra i due avvolgimenti, soprattutto se questi sono avvolti su uno stesso supporto; un caso tipico è quello della capacità fra avvolgimento primario e secondario di un trasformatore. Un sistema assai semplice per ridurre praticamente a zero questo effetto è quello (Fig.4) di interporre fra i due avvolgimenti il cosiddetto schermo elettrostatico cioè un conduttore riferito a un potenziale opportuno (per esempio a terra). Un altro sistema è quello di avvolgere primario e secondario sul medesimo circuito magnetico per permettere la concatenazione dei flussi di induzione, ma su due rami distinti della struttura (Fig.5).

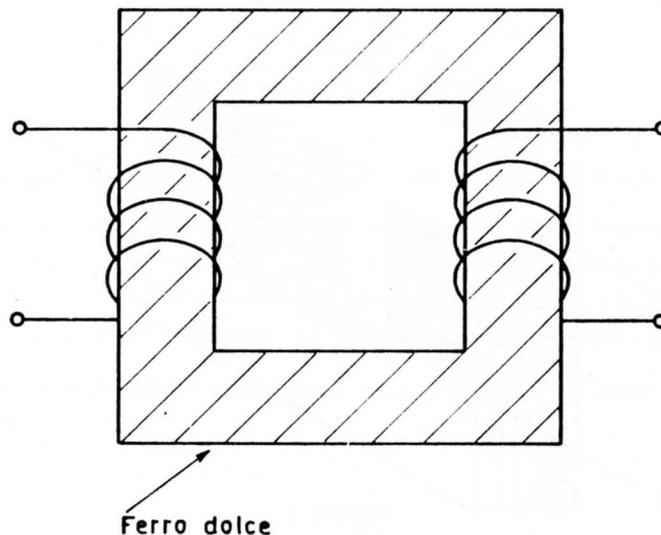


Fig.VII.5

Ritorniamo sulla dipendenza del coefficiente di induzione dalla permeabilità magnetica  $\mu_r$  del nucleo su cui l'induttanza è avvolta. Nei *materiali ferromagnetici*, che sono quelli di maggior interesse a causa dell'alto valore di  $\mu_r$  ( $10^2 - 10^5$ ), la magnetizzazione avviene mediante il meccanismo dell'orientazione dei *domini magnetici* e si trova che la magnetizzazione, e quindi  $\mu_r$ , dipende fortemente dal campo magnetizzante, cioè da  $i$ : la magnetizzazione è particolarmente elevata, e così  $\mu_r$ , per piccoli (ma non piccolissimi) valori della corrente e decresce all'aumentare dell'eccitazione fino a tendere a 1, ovvero si assiste a un fenomeno di saturazione corrispondente al fatto che quando nel materiale tutti i domini si sono orientati, ulteriori aumenti della magnetizzazione non sono più possibili. Conseguentemente, una certa induttanza o induttanza mutua ha un campo di correnti di funzionamento in cui  $L$  o  $M$  sono ragionevolmente costanti, ma al di fuori di questi valori di corrente i coefficienti decrescono; a parità di  $L$  o  $M$ , tanto maggiore è la sezione del nucleo della bobina, tanto maggiore sarà la corrente a cui la bobina può operare, poiché corrispondentemente aumenta il numero di domini magnetici in grado di cooperare alla magnetizzazione. Altri problemi connessi con l'uso di induttanze o mutue induttanze con nuclei ferromagnetici, sono costituiti dalle *correnti parassite* e dalla *isteresi*. Le prime sono dovute al fatto che se il materiale del nucleo è conduttore, le variazioni del flusso di  $\vec{B}$  attraverso di esso provocano correnti parassite indotte che sottraggono energia al sistema dissipandola per effetto Joule e riscaldando il nucleo. Il loro effetto si riduce interrompendo il più possibile la continuità elettrica del nucleo, preservandone le caratteristiche magnetiche: tipicamente si ricorre a lamierini impacchettati e isolati fra di loro, anziché a un unico blocco di materiale, come in Fig.6. In altre condizioni si usano nuclei ferromagnetici a bassa conducibilità elettrica (*ferriti*). Quanto all'isteresi (vedi Cap.XIX sulle misure di campi magnetici), essa, in quanto fenomeno tipicamente irreversibile, provoca dissipazione di energia all'interno del nucleo sotto forma di calore. Su questi argomenti torneremo quando parleremo dell'utilizzo delle induttanze nei circuiti in alternata.

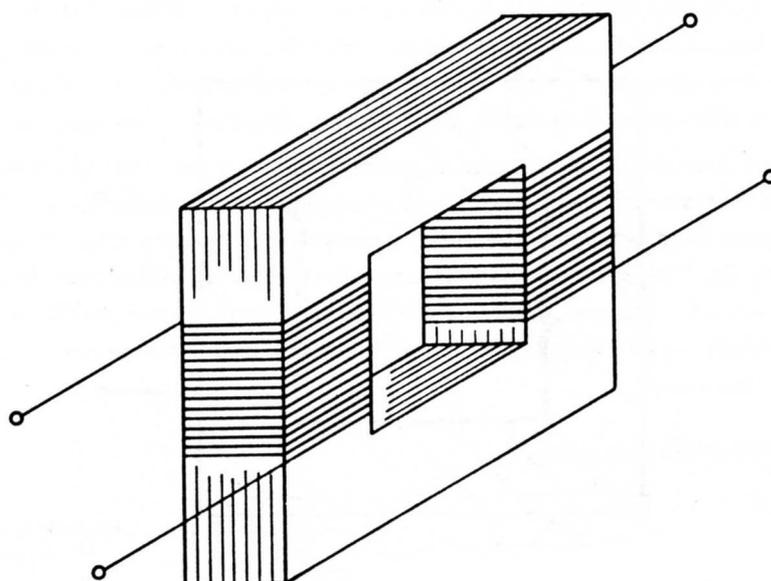


Fig. VII.6

### 3.— Il regime transitorio delle correnti e delle tensioni in presenza di coefficienti di auto e mutua induzione

Supponiamo di disporre del circuito L-R serie di Fig. 7 costituito da un generatore di fem, una induttanza  $L$  con in serie una resistenza di avvolgimento  $R$ , un tasto  $T$  e una ulteriore resistenza  $\rho$ .

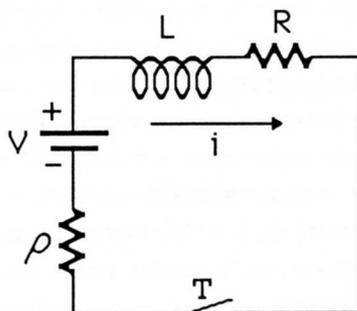


Fig. VII.7

Qui, come nel seguito ove non ingeneri confusione, si designerà con lo stesso simbolo  $L$  sia l'elemento circuitale (l'induttanza) che il valore del coefficiente di autoinduzione (così come usualmente facciamo per le resistenze e per le capacità).

Il problema da risolvere è quello di trovare l'andamento della corrente  $i$  a partire da certe condizioni iniziali prefissate. Nel caso in questione supponiamo che  $i(0^-) = 0$ , cioè tasto aperto. A  $t = 0^+$  supponiamo di chiudere il tasto. La seconda legge di Kirchhoff ci permette di trovare la relazione fra le grandezze in esame (continuiamo ad ammettere  $\text{div } \vec{j} = 0$ ):

$$V - L \frac{di}{dt} = i(R + \rho) \quad t > 0 \quad (\text{VII.5})$$

dove abbiamo considerato la presenza di due fem nel circuito, quella del generatore di tensione continua e quella di autoinduzione. Si tratta di risolvere l'equazione differenziale del primo ordine, lineare a coefficienti costanti

$$\frac{L}{R + \rho} \frac{di}{dt} + i = \frac{V}{R + \rho} \quad (\text{VII.6})$$

Se supponiamo che la funzione  $i(t)$  sia continua, allora  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ . Questa condizione inserita nella (6) dà per  $\frac{di}{dt}(0)$  un valore finito che conforta l'ipotesi di avere ammesso la continuità di  $i(t)$ . Sulla base di considerazioni energetiche è possibile dare una giustificazione *fisica* della continuità di  $i$ : all'atto della chiusura del tasto il generatore comincia a fornire energia a ritmo finito e pertanto l'energia magnetica  $\frac{1}{2}Li^2$  non può variare di un valore finito in un tempo infinitesimo.

Troviamo dapprima la soluzione a regime  $i_R$  della (6), cioè il cosiddetto integrale particolare. E' facile verificare che:

$$i_R = \frac{V}{R + \rho} \quad (\text{VII.7})$$

rappresenta tale soluzione; essa ci dice che dopo un tempo sufficientemente lungo, una induttanza reale si comporta come una pura resistenza  $R$ . L'integrale dell'equazione omogenea associata  $i_A$ , è ottenibile separando le variabili

$$\frac{di_A}{i_A} = -\frac{R + \rho}{L} dt \quad (\text{VII.8})$$

Ne segue

$$i_A = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{VII.9})$$

dove  $\tau = \frac{L}{R + \rho}$ , avente le dimensioni di un tempo, è detta *costante di tempo*.

La soluzione per  $i$  si ottiene sommando  $i_A$  e  $i_R$  e determinando  $I_0$  in base alle condizioni iniziali  $i(0) = 0$ :

$$I_0 = -\frac{V}{R + \rho} \quad (\text{VII.10})$$

Si ottiene così

$$i(t) = \frac{V}{R + \rho} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (\text{VII.11})$$

Nella Fig.8 è riportato l'andamento di  $i(t)$ :

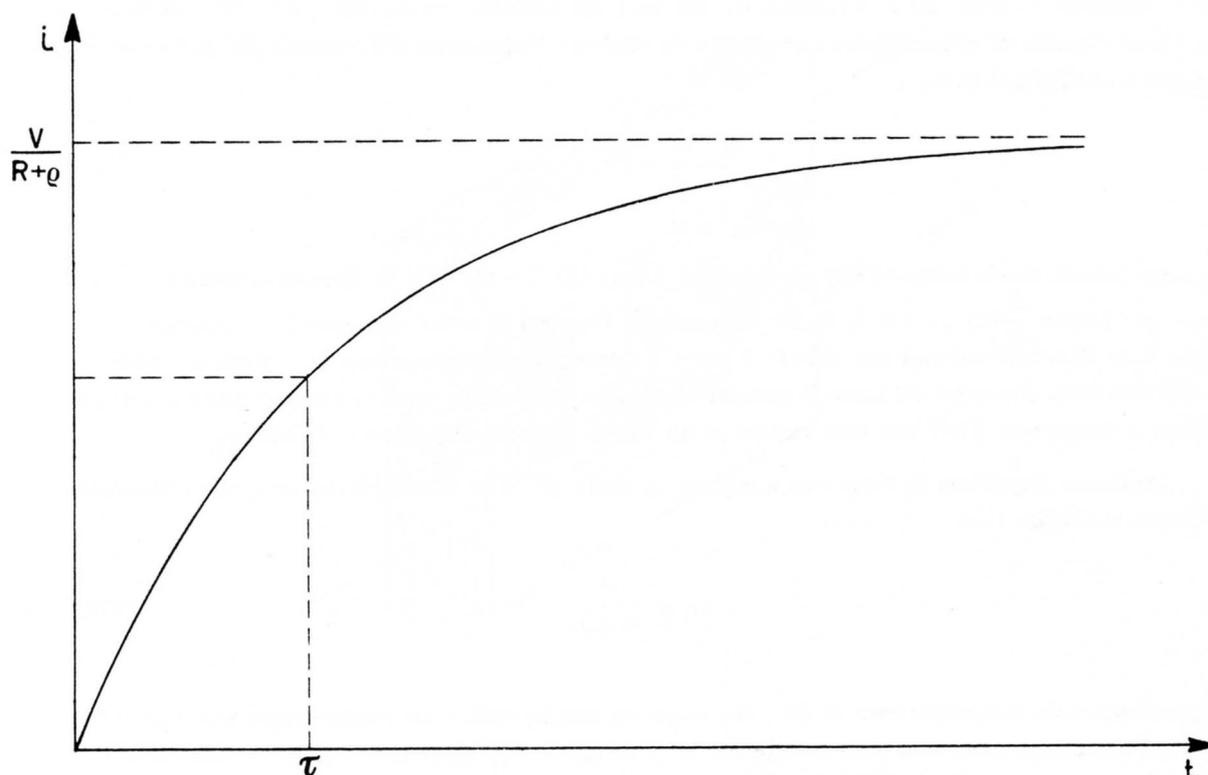


Fig.VII.8

Si noti che per  $t = \tau$  la corrente ha raggiunto un valore pari a  $\frac{V}{R+\rho} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx \frac{V}{R+\rho} \cdot 0.632$ . Possiamo chiederci ora cosa accadrebbe se  $V$  passasse bruscamente a 0 partendo da una situazione di regime in cui  $i = cost = \frac{V}{R+\rho}$ . Si troverebbe

$$i = \frac{V}{R+\rho} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{VII.12})$$

con  $\tau$  ancora dato da  $\frac{L}{R+\rho}$ . Si faccia attenzione che il brusco passaggio di  $V$  da un valore finito a 0 non si ottiene certo aprendo il tasto T di Fig.7; infatti in questo caso sarebbe la corrente a passare bruscamente a zero. Le brusche variazioni di corrente portano a delle *discontinuità fisiche* nel sistema in quanto corrispondono a brusche variazioni dell'energia accumulata sotto forma di campo magnetico. Ad esempio l'apertura del tasto T, facendo variare  $i$  da un valore finito a zero in un tempo  $\Delta t$  estremamente breve (con un tasto opportuno si può anche avere  $\Delta t \approx 10^{-9}s$ ), comporta una derivata di  $i$  molto elevata e conseguentemente una fem indotta  $-L \frac{di}{dt}$  così grande da far scoccare una scintilla fra i contatti del tasto e da provocare una emissione di onde elettromagnetiche. L'energia associata a questa scintilla e a questo irraggiamento è proprio parte di quella che prima dell'apertura del tasto si trovava immagazzinata sotto forma di campo magnetico ( $\frac{1}{2}Li^2$ ).

Riprendendo le soluzioni (11) e (12), si vede che la corrente tanto più rapidamente raggiunge il valore asintotico, a parità di  $L$ , quanto più grande è la resistenza del circuito; si osservi la differenza rispetto al caso del circuito R-C serie dove il circuito rispondeva tanto più lentamente alle variazioni di tensione quanto più grande era  $R$ , a parità di  $C$ .

Consideriamo ora il caso di due circuiti accoppiati tramite un coefficiente di mutua induzione  $M$  (Fig.9).

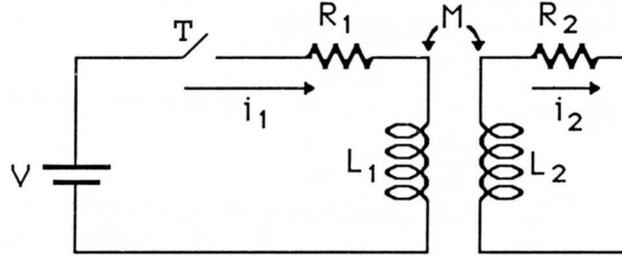


Fig.VII.9

$R_1$  e  $R_2$  rappresentano la somma complessiva delle resistenze in serie nel circuito 1 e 2 rispettivamente. Supponiamo di chiudere il tasto  $T$  al tempo  $t = 0^+$  avendo  $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$ . La seconda legge di Kirchhoff applicata alle due maglie ci consente di scrivere il seguente sistema di equazioni differenziali (per  $t > 0$ ):

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = V \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.13})$$

Manipolando opportunamente il sistema si ottengono le due seguenti equazioni differenziali, separate nelle variabili  $i_1$  e  $i_2$ :

$$\begin{cases} i_1 + \frac{di_1}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{d^2 i_1}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = \frac{V}{R_1} \\ i_2 + \frac{di_2}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{d^2 i_2}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.14})$$

dove

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad \theta^2 = \frac{M^2}{R_1 R_2} \quad (\text{VII.15})$$

Le soluzioni analitiche dettagliate per  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  con riguardo anche al tipo di accoppiamento stretto o lasco sono ricavate nell'Appendice B; in tale appendice si discute anche il problema delle condizioni iniziali, che nel caso in esame risulta assai più delicato che non nel caso di una sola induttanza. Riportiamo qui di seguito la soluzione per  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_0 - \frac{I_0}{2} \left[ \frac{(L_1 R_2 - R_1 L_2)}{\sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}} + 1 \right] \cdot \exp \rho_1 t + \\ \quad + \frac{I_0}{2} \left[ \frac{(L_1 R_2 - R_1 L_2)}{\sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}} - 1 \right] \cdot \exp \rho_2 t \\ i_2(t) = \left[ \frac{-I_0 M R_1}{\sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}} \right] \cdot (\exp \rho_1 t - \exp \rho_2 t) \end{cases} \quad (\text{VII.16})$$

essendo

$$\begin{cases} I_0 = \frac{V}{R_1} \\ \rho_1 = \frac{-(L_1 R_2 + R_1 L_2) + \sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}}{2(L_1 L_2 - M^2)} \\ \rho_2 = \frac{-(L_1 R_2 + R_1 L_2) - \sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}}{2(L_1 L_2 - M^2)} \end{cases} \quad (\text{VII.17})$$

In Fig.10 si riportano gli andamenti di  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  per il caso  $L_1 = 0.4 H$ ,  $L_2 = 0.005 H$ ,  $M = 0.042 H$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$  e  $V = 10 V$  che corrisponde a una situazione ottenibile in laboratorio con componenti effettivamente disponibili.

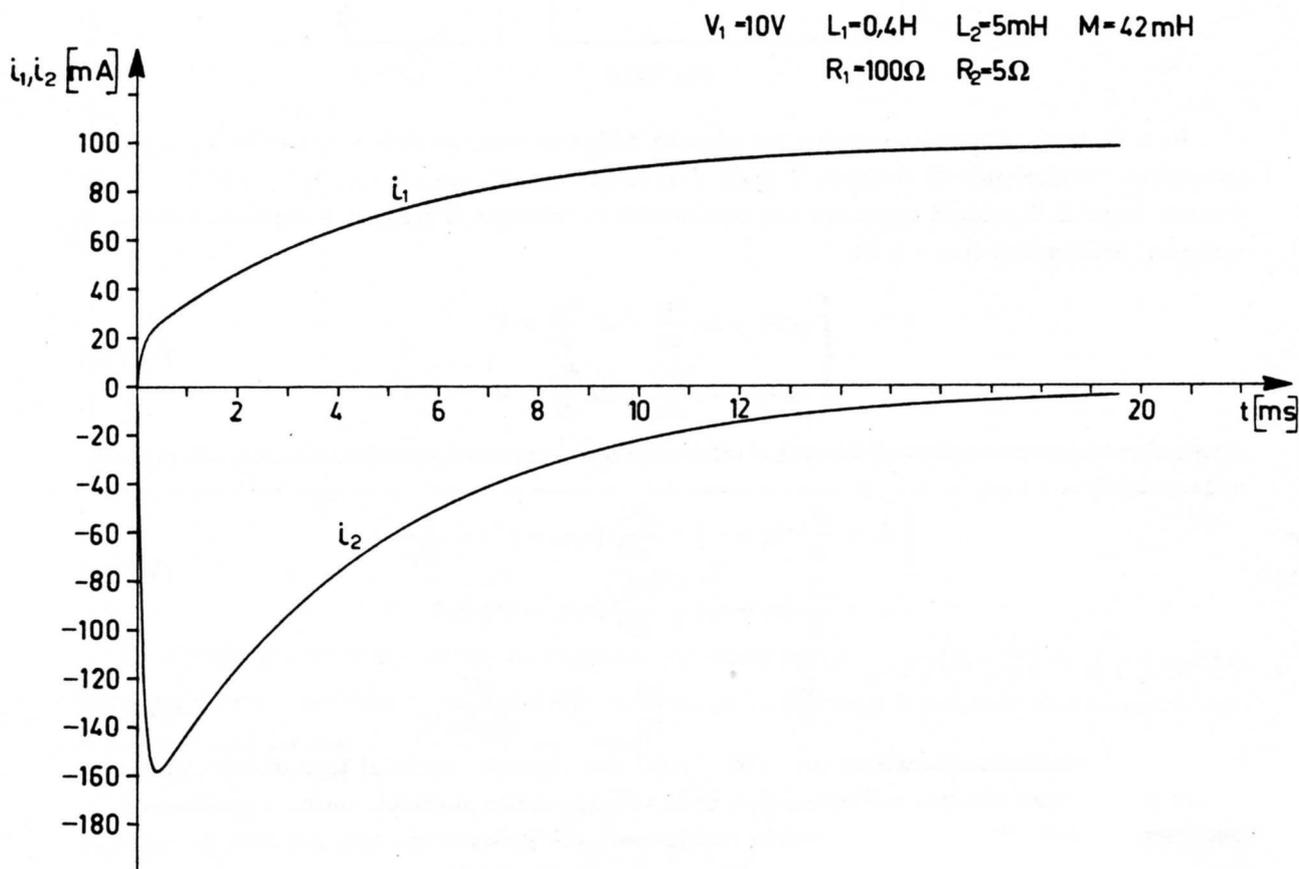


Fig.VII.10

Senza entrare nei dettagli che si possono comunque trovare nell'Appendice B, si osservi che dopo un tempo  $t$  molto maggiore di  $1/\rho_1$  e di  $1/\rho_2$ ,  $i_1$  ha praticamente raggiunto il valore asintotico  $\frac{V}{R_1}$  e  $i_2$  è tornata a zero.

Consideriamo ora l'andamento di  $i_2(t)$  quando, partendo dalla situazione stazionaria a tasto chiuso ( $i_1 = \frac{V}{R_1}$  e  $i_2 = 0$ ), si apre il tasto T (Fig.9). Preso l'istante di apertura del tasto come nuova origine dei tempi, la corrente  $i_1$  in un tempo  $\Delta t$  estremamente piccolo, andrà a zero. Supponiamo che l'intervallo di tempo  $\Delta t$  che la corrente  $i_1$  impiega ad andare a zero sia molto più piccolo delle costanti di tempo in gioco; possiamo allora trovare la soluzione per  $i_2$  ragionando nel seguente modo:

durante il tempo  $\Delta t$ ,  $\frac{di_1}{dt}$  è estremamente elevata e dovendo continuare a valere:

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (\text{VII.18})$$

con  $i_2$  finita, durante la breve transizione di  $i_1$  varrà, quasi esattamente:

$$\frac{di_2}{dt} \approx -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad (\text{VII.19})$$

La (19), integrata fra i due estremi della transizione  $(0, \Delta t)$ , dà:

$$i_2(\Delta t) = \frac{M}{L_2} i_1(0) = \frac{M}{L_2} \frac{V}{R_1} \quad (\text{VII.20})$$

Si osservi che il valore di  $i_2(\Delta T)$  non dipende dalla resistenza del circuito 2. Per  $t > \Delta t$ , essendo  $i_1(t) = 0$ , deve essere soddisfatta l'equazione differenziale:

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (\text{VII.21})$$

con  $i_2(\Delta t) = \frac{M}{L_2} \frac{V}{R_1}$  che ha come soluzione:

$$i_2(t) = i_2(\Delta t) \exp\left[-\frac{(t-\Delta t)}{\tau_2}\right] \approx i_2(\Delta t) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad t > \Delta t \quad (\text{VII.22})$$

essendo  $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$ .

Nel prossimo paragrafo vedremo che è possibile misurare il coefficiente di mutua induzione fra due circuiti, proprio sfruttando il comportamento dei circuiti eccitati e diseccitati nel modo ora descritto.

#### 4.- Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un galvanometro balistico

Un metodo per misurare il coefficiente di mutua induzione  $M$  fra due circuiti, usando un galvanometro balistico è quello mostrato in Fig.11.

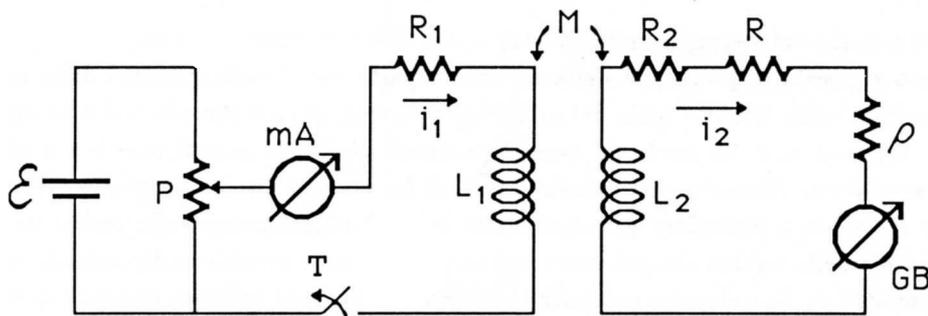


Fig.VII.11

Supponiamo che il tasto T sia chiuso da un tempo indefinitamente lungo: la corrente  $i_1$  si trova a un valore di regime  $i_1 = i_{10}$  ed è misurata dal milliamperometro. Apriamo ora il tasto T. Conosciamo già l'andamento di  $i_2(t)$  (vedi (22)) nell'ipotesi che l'apertura del tasto avvenga in un tempo estremamente breve. A noi interessa però una relazione che faccia comparire piuttosto l'integrale  $Q_2 = \int_0^\infty i_2 dt$ , in quanto questa è la quantità che il galvanometro è in grado di misurare; oltretutto troveremo che l'espressione di  $Q_2$  in funzione di M non dipende dai dettagli dell'andamento di  $i_2(t)$ . Infatti, consideriamo l'equazione di Kirchhoff applicata al circuito 2:

$$(R + \rho + R_2)i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (\text{VII.23})$$

e integriamola fra l'istante immediatamente precedente all'apertura del tasto ( $t = 0^-$ ) e il tempo  $\theta$  quando anche l'impulso di corrente  $i_2(t)$  si sia esaurito, in pratica ridotto ad una intensità estremamente piccola. Avremo quindi:  $i_1(0^-) = i_{10}$ ,  $i_1(\theta) = 0$ ,  $i_2(0^-) = 0$  e  $i_2(\theta) = 0$ . Dopo l'integrazione otteniamo:

$$(R + \rho + R_2) \int_{0^-}^{\theta} i_2 dt + L_2 \int_{0^-}^{\theta} \frac{di_2}{dt} dt + M \int_{0^-}^{\theta} \frac{di_1}{dt} dt = 0 \quad (\text{VII.24})$$

e cioè

$$(R + \rho + R_2)Q_2 + L_2 [i_2(\theta) - i_2(0^-)] + M [i_1(\theta) - i_1(0^-)] = 0 \quad (\text{VII.25})$$

Conseguentemente:

$$M = \frac{(R + \rho + R_2)Q_2}{i_{10}} \quad (\text{VII.26})$$

Resta da vedere ora se la carica  $Q_2$  transita in un tempo sufficientemente breve, cosicché l'eccitazione del galvanometro si possa considerare balistica e  $Q_2 = K_B \varphi_M$ . Per rispondere a questa domanda ci aiutano le considerazioni svolte nel paragrafo precedente su  $i_2(t)$ : l'impulso di corrente è un esponenziale decrescente con  $\tau = \frac{L_2}{R + \rho + R_2}$ ; sappiamo già (vedi Cap.VI,§7 e Appendice A) che se  $\tau$  è molto minore del periodo  $T$  del galvanometro, le ipotesi balistiche sono rispettate e la (26) può essere messa sotto la forma

$$M = \frac{(R + \rho + R_2)K_B \varphi_M}{i_{10}} \quad (\text{VII.27})$$

Qualora sia nota  $K_B^0$  occorrerà determinare il decremento logaritmico  $\Lambda$  per ottenere

$$K_B = K_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right)$$

magari usando una formula approssimata (VI.40) se  $\Lambda$  è sufficientemente piccolo.

Per quanto riguarda la precisione della misura, a parte ovvie ottimizzazioni della misura di  $i_{10}$  (il più possibile verso il fondo scala del milliamperometro), si noti che sembrerebbe opportuno diminuire il più possibile  $R$ , in modo da avere  $Q_2$  e quindi  $\varphi_M$  i più grandi possibile e quindi col minimo errore relativo. Tuttavia la diminuzione di  $R$  ha almeno due contropartite: l'incertezza su  $(R_2 + \rho + R)$  viene a dipendere principalmente dall'indeterminazione sulla resistenza interna del galvanometro e della bobina che non sono mai note con grande precisione dipendendo esse dalla temperatura; inoltre, se  $L_2$  è elevata, può anche accadere che l'ipotesi balistica non sia più verificata, perché al diminuire di  $R$  cresce la costante di tempo  $\tau = \frac{L_2}{R_2 + \rho + R}$ .

La misura si può anche effettuare col tasto T in chiusura; in questo caso rimane vera la (26), salvo che ora  $i_{10}$  è la corrente  $i_1$  finale; occorre tuttavia un po' più di attenzione nel soddisfare la condizione di eccitazione balistica poiché questa volta la forma dell'impulso di corrente non è più

un semplice esponenziale con  $\tau = \frac{L_2}{R_2 + \rho + R}$ , ma è la combinazione di due esponenziali che come visto precedentemente può essere assai più lenta (vedi la prima delle (16)).

### 5.— Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un integratore di Miller

In questo paragrafo si suppone che sia noto allo studente il principio di funzionamento di un *integratore di Miller* (o *integratore operazionale*) che si trova illustrato nel Cap.XV, §§4,5.

La sostituzione del galvanometro balistico con un integratore di Miller porta senza dubbio vantaggi nella sensibilità e anche nella precisione della misura, purché si abbia cura di scegliere un amplificatore con *tensione di offset* sufficientemente piccola e *guadagno senza reazione* sufficientemente elevato. Inoltre con l'integratore operazionale viene a cadere la necessità di eccitazione balistica. Tuttavia alcune caratteristiche dell'integratore di Miller fanno sì che il suo impiego richieda precauzioni particolari, non solo per utilizzarlo al meglio, ma anche per non danneggiarlo. Per prima cosa notiamo che l'integratore di Miller funziona correttamente solo se la corrente da integrare si mantiene al di sotto di un certo valore massimo determinato dallo stadio di uscita dell'amplificatore (tipicamente 10-20mA); se la corrente di ingresso supera questo valore, l'amplificatore non è più in grado di mantenere la massa virtuale al suo ingresso "−" e cessa di funzionare correttamente. Se la corrente è molto elevata può anche succedere che la tensione dell'ingresso "−" si allontani assai dal valore della tensione dell'ingresso "+", tanto da danneggiare irreversibilmente l'amplificatore. Inoltre la tensione di offset fa sì che anche in assenza di eccitazione, una corrente pari a  $\frac{V_{off}}{R_i}$  (si veda la Fig.12) entri nell'ingresso "−" e venga pertanto integrata su  $C$  dando così luogo a una variazione della tensione  $V_0$  in funzione del tempo (*deriva*).

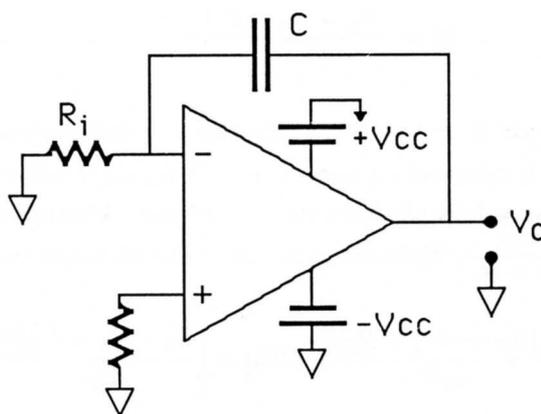


Fig.VII.12

Tale corrente si somma a quella del segnale e quindi può dar luogo a un errore sistematico nel valore dell'integrale; va detto però che misurando la deriva di  $V_0$  in assenza di segnale, è possibile poi apportare le correzioni in presenza di segnale. Tenendo presente questi fatti, un circuito che si adatta particolarmente alla misura di  $M$  con un integratore operazionale è quello di Fig.13:

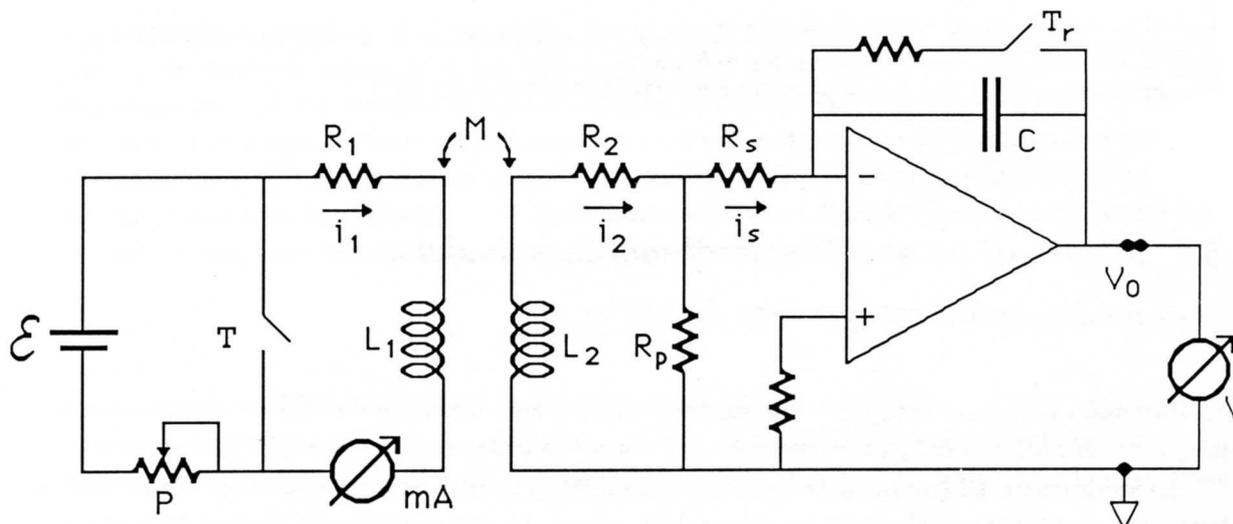


Fig.VII.13

Si osservino le seguenti variazioni rispetto al caso precedente del galvanometro balistico: il tasto T non interrompe mai la corrente  $i_1$ , bensì in chiusura manda a zero la *tensione* applicata alla bobina e in apertura fa passare la tensione da 0 a un valore  $\neq 0$ . Evitando bruschi cambiamenti in  $i_1$ , si evitano impulsi di corrente  $i_2$  con intensità troppo elevate (vedi (22)); questo avviene a spese di una durata maggiore dell'impulso, ma nel caso dell'integratore operazionale ciò non ha rilevanza. Si osservi anche che la costante di tempo  $\tau_1$  del circuito 1 è diversa in apertura e in chiusura. Solo la frazione  $\frac{R_P}{R_P + R_S}$  della carica  $Q_2$  viene misurata dall'integratore e questo consente un comodo controllo sulla sensibilità della misura;  $R_P$  sarà generalmente piccola rispetto a  $R_S$  e varieremo  $R_S$  per ottimizzare le letture di  $V_0 \propto Q_S$  sul voltmetro V (che per sfruttare la precisione del metodo sarà preferibilmente un voltmetro elettronico di precisione, Cap.XIV).

Quanto all'espressione che lega M alle grandezze misurate, ragionando analogamente al paragrafo precedente si trova (l'ingresso "–" è una *massa virtuale*):

$$M = \frac{(R_2 + R_P \parallel R_S) \cdot Q_2}{i_{10}} \quad (\text{VII.28})$$

dove  $i_{10} = \frac{\mathcal{E}}{P + R_1}$  è la corrente di regime. Tale relazione vale indipendentemente dal fatto che la misura sia effettuata aprendo o chiudendo il tasto T, purché  $i_{10}$  sia il valore di regime della corrente  $i_1$  letto dopo l'apertura o prima della chiusura rispettivamente. L'integratore poi dà una risposta  $V_0 = -\frac{Q_S}{C}$  dove  $Q_S = Q_2 \frac{R_P}{R_P + R_S}$ . Pertanto la relazione che dà il risultato voluto è:

$$|M| = \left| \frac{R_2(R_P + R_S) + R_P R_S}{i_{10} R_P} C V_0 \right| = \left| \frac{R_2 + R_S + \frac{R_S R_2}{R_P}}{i_{10}} C V_0 \right| \quad (\text{VII.29})$$

dove, per semplicità, sono stati riportati i valori assoluti, essendo il segno di M dipendente dalle convenzioni adottate.

Vale ancora la pena di osservare che misurando con un oscillografo (Cap.VIII) la differenza di potenziale fra il nodo in cui confluiscono i rami di  $R_2, R_P$  e  $R_S$  e la massa, si possono osservare le forme degli impulsi di corrente e verificare, almeno qualitativamente, gli andamenti teorici previsti per  $i_2(t)$ . Inoltre si può controllare la bontà o meno del tasto, soprattutto in chiusura, andando a

vedere se il segnale di corrente mostra un andamento regolarmente monotono oppure seghettato; se il segnale ha un andamento irregolare, ciò significa che il tasto, all'atto della chiusura, compie dei rimbalzi, cioè una rapida successione di aperture e chiusure. Questa "struttura fine" della chiusura è, per il presente scopo, solo antiestetica, poiché essa non influisce sul risultato finale; infatti le relazioni adottate per la deduzione di  $M$  dipendono solo dai valori che le correnti assumono immediatamente prima della commutazione e molto dopo che questa è avvenuta.

## **6.— Altri metodi per la misura di coefficienti di mutua induzione**

I metodi sopra esposti misurano il valore di  $M$  *in continua*, ovvero essi danno una misura del valore *statico* di  $M$ . In moltissime applicazioni, per esempio nell'utilizzo dei trasformatori, ha interesse conoscere il coefficiente di mutua induzione in alternata. Su possibili misure di  $M$  a frequenze  $\neq 0$ , torneremo nel Cap. XIII, §9.

### **NOTA BIBLIOGRAFICA**

Oltre ai soliti **FR 59**, **LA 38**, **CO 85**, merita di essere citato **LA 57**, principalmente per quanto riguarda le tecniche costruttive dei trasformatori (in generale dei circuiti accoppiati induttivamente). Per simili ragioni si suggerisce anche il Cap. 2 di **TE 57**.

Per la soluzione dettagliata del transitorio di due circuiti accoppiati induttivamente e la discussione delle condizioni iniziali si veda l'Appendice B.

## VIII

# L'OSCILLOGRAFO

### 1. – Introduzione

L'oscillografo è in sostanza un voltmetro che visualizza *in tempo reale* su uno schermo luminoso l'andamento, in funzione del tempo, della differenza di potenziale presente fra due terminali cosiddetti di *ingresso*. Tramite appropriati controlli è possibile variare le scale degli assi verticale, tipicamente da qualche  $mV/cm$  a qualche decina di  $V/cm$ , e orizzontale, da circa  $1 s/cm$  fino al limite superiore dello strumento che in alcuni modelli particolarmente sofisticati può arrivare fino a  $5 \times 10^{-10} s/cm$ . Il limite superiore è determinato da una caratteristica fondamentale dello strumento, la cosiddetta *banda passante*, cioè la gamma di frequenze delle ddp sinusoidali in ingresso che l'oscillografo è in grado di riprodurre senza ridurne sostanzialmente l'ampiezza (per una trattazione estesa del regime sinusoidale delle correnti e della banda passante si vedano i Capp. IX e XII). Molto brevemente possiamo qui ricordare che una ddp sinusoidale è una differenza di potenziale che varia in funzione del tempo, oscillando attorno ad un valor medio nullo; il suo andamento è del tipo

$$v = v_0 \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (\text{VIII.1})$$

con  $t$  che rappresenta il tempo e  $v_0$ ,  $f$  e  $\varphi$  costanti;  $f$  è detta frequenza ed è misurata in *Hertz* ( $Hz$ ); la (1) ci dice fra l'altro che tanto maggiore è  $f$  tanto più rapidamente varia in funzione del tempo la ddp  $v$ .

Tornando all'oscillografo, poiché il limite *inferiore* della sua banda passante è sempre dato dalla *continua* ( $f = 0$ ), il numero che si cita per individuare la banda passante è sempre l'estremo *superiore*: “un oscillografo da  $100 MHz$ ” significa con banda passante da  $0 Hz$  a  $10^8 Hz$ .

Fra le altre funzioni che un oscillografo è in grado di svolgere, una è quella cosiddetta “X-Y”; quando l'oscillografo opera in X-Y, la differenza di potenziale applicata a un ingresso (ingresso Y) dello strumento è presentata sullo schermo non in funzione del tempo, bensì in funzione della differenza di potenziale presente ad un'altra coppia di terminali (ingresso X). Su queste e su altre funzioni espletate dall'oscillografo torneremo più avanti nel capitolo, dopo aver descritto il principio di funzionamento dello strumento.

I blocchi funzionali di un oscillografo possono, molto schematicamente, elencarsi come segue: 1) il *tubo a raggi catodici* con i relativi sistemi di controllo (*intensità e fuoco*); 2) il sistema di controllo della *deflessione elettrostatica*, comprendente gli *amplificatori di ingresso* e gli *amplificatori finali* per la tensione delle *placchette*; 3) la *base dei tempi* e il *circuito di trigger*.

Quelle che noi descriveremo nel seguito sono le caratteristiche di uno strumento di medie prestazioni e non hanno la pretesa di descrivere in dettaglio né come funziona un certo modello di oscillografo, né come sono costruiti gli oscillografi in genere, ma di far vedere come certe prestazioni e funzioni possono essere ottenute.

## 2.— Il tubo a raggi catodici

Il tubo a raggi catodici è un dispositivo che consente di presentare l'andamento in funzione del tempo di una differenza di potenziale; il pregio maggiore di questo sistema di registrazione è la sua estrema rapidità. Sistemi di registrazione grafica di tensioni si ottengono anche fissando solidalmente alla bobina di un galvanometro, che misuri la tensione di interesse, un pennino appoggiato sopra un foglio di carta che a sua volta si muova a velocità costante \*; le bande passanti ottenibili con tale sistema di registrazione sono però assai limitate a causa delle masse in gioco (pennino + bobina); le frequenze più elevate che si possono registrare sono dell'ordine dell'inverso del periodo proprio del sistema e facendo un galvanometro con equipaggio particolarmente leggero e costante di richiamo abbastanza energica (e quindi non particolarmente sensibile) si possono ottenere periodi al più dell'ordine del decimo di secondo.

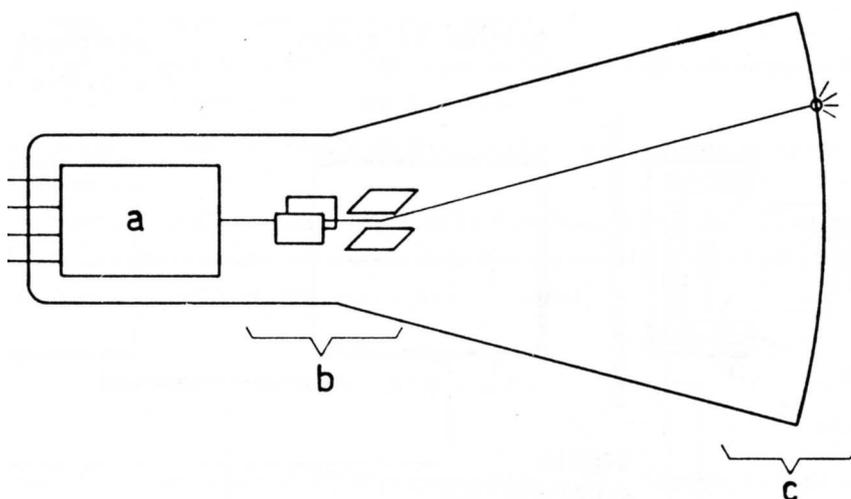


Fig.VIII.1

Nel tubo a raggi catodici un fascetto di elettroni subisce deflessioni elettriche proporzionali alla ddp da misurare e lascia una traccia luminosa nel punto del suo impatto con uno schermo di vetro rivestito di sostanze fosforescenti. L'inerzia in gioco è questa volta quella degli elettroni del fascetto ed è palese il guadagno in tempo di risposta rispetto a qualunque sistema di registrazione elettromeccanico.

---

\* in pratica il pennino non poggia continuamente sul foglio di carta, perché ciò aggiungerebbe un attrito eccessivo al movimento dell'equipaggio; il pennino è usualmente sollevato e, periodicamente, un martelletto lo preme per un istante sul foglio, dando luogo ad una registrazione a punti e non continua.

Il tubo a raggi catodici che noi descriveremo è del tipo a *deflessione elettrostatica*, usato al giorno d'oggi quasi esclusivamente negli oscillografi; in altre applicazioni, ad esempio negli schermi televisivi, i sistemi di deflessione sono di tipo magnetico.

Il tubo a raggi catodici (*Cathode Ray Tube - CRT*) consiste in un recipiente di vetro (dimensione maggiore dell'ordine di alcune decine di *cm*) entro il quale è stato praticato il vuoto ( $\leq 10^{-4} Pa$ ) e fornito di passanti conduttori per applicare dall'esterno le tensioni ai vari elettrodi interni; nel CRT si possono identificare i seguenti blocchi funzionali (si veda Fig.1):

- a) il *cannone elettronico* propriamente detto, costituito a sua volta dalla *sorgente di elettroni*, dal sistema di *estrazione e focalizzazione*
- b) il sistema delle *placchette deflettrici*
- c) il sistema di *post-accelerazione* e lo *schermo*.

La sorgente di elettroni è quella parte del cannone elettronico che emette gli elettroni che poi, sollecitati dai campi elettrici prodotti dagli elettrodi di estrazione e focalizzazione, vanno a costituire il fascetto. Nella Fig.2 è disegnata una sezione del cannone elettronico con il circuito di alimentazione degli elettrodi o *circuito di polarizzazione*; tale sezione passa per l'asse di simmetria del sistema che coincide con l'asse del fascetto elettronico.

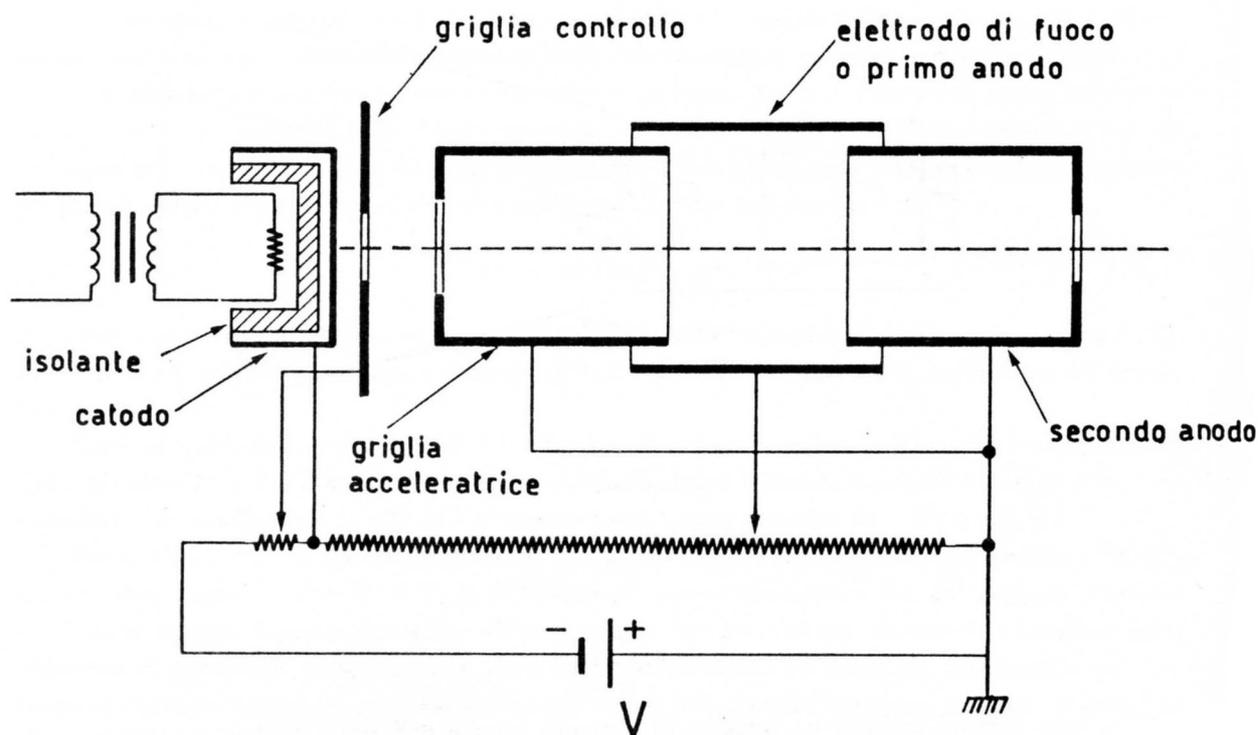


Fig.VIII.2

Tutte le strutture disegnate hanno simmetria cilindrica attorno all'asse del fascetto; ovvero gli elettrodi sono cilindri fra di loro coassiali. La struttura di sinistra è la vera e propria sorgente di elettroni. Essa è costituita dal catodo, un bicchierolo di Nichel rivestito di ossidi di Bario o Stronzio. Esso è tenuto a una temperatura fra  $800$  e  $900^{\circ}C$  da una resistenza, dalla quale è isolato elettricamente, mantenuta a sua volta ad una temperatura di circa  $1000^{\circ}C$  per effetto Joule. A queste

temperature di esercizio il catodo è in grado di emettere una corrente, anche copiosa, di elettroni. Tale emissione, detta *termoionica*, è legata intimamente alla struttura del legame metallico; pertanto, allo scopo di comprendere le caratteristiche salienti dell'emissione termoionica, è necessario studiare con qualche dettaglio in più, rispetto a quanto fatto nel Cap.I, la dinamica degli elettroni di conduzione all'interno del materiale. Dato un campione macroscopico di un metallo, quale ad esempio il catodo in questione, sappiamo che a temperatura ambiente, e a maggior ragione a temperature inferiori, gli elettroni di conduzione, pur essendo liberi di muoversi al suo interno, non sono in grado di abbandonarlo. In maniera del tutto fenomenologica, l'effetto si può attribuire alla presenza di un campo elettrico di doppio strato, ortogonale alla superficie del conduttore e diretto dall'interno verso l'esterno, corrispondente ad una barriera di potenziale di altezza  $E_B$  che gli elettroni non sono in grado di superare, perché essi, a temperatura ambiente, non possiedono una energia cinetica sufficientemente elevata. L'altezza di questa barriera di potenziale è presa rispetto alla minima energia che un elettrone libero all'interno del metallo può possedere, assunta come zero. Esistono metodi sperimentali in grado di valutare  $E_B$  che risulta dell'ordine della decina di Volt; ma si faccia attenzione, ciò non significa che basta applicare dall'esterno una ddp  $E_B$  in senso contrario per estrarre elettroni dal metallo: infatti la barriera agisce a livello microscopico, ovvero su dimensioni molto piccole, dell'ordine delle distanze interatomiche e corrisponde quindi a campi estremamente più elevati di quelli che è possibile applicare con normali tecniche di laboratorio. Quanto alla dinamica degli elettroni di conduzione, la meccanica quantistica insegna che:

1) gli elettroni, essendo confinati entro la buca di potenziale costituita dal campione di materiale, possono accedere solo a un numero finito di stati di energia;

2) degli elettroni presenti nel campione, solo due possono avere la stessa energia, cioè trovarsi nello stesso stato energetico.

Conseguentemente il numero  $\rho(E)$  di elettroni per unità di volume e intervallo di energia\* è esprimibile come prodotto della densità degli stati accessibili  $N(E)$  (*punto1*) e della probabilità  $f(E)$  che lo stato, in condizioni di equilibrio termico, sia occupato (*punto2*):

$$\rho(E) = N(E)f(E) \quad (\text{VIII.2})$$

La meccanica quantistica mostra che  $N(E)$  è proporzionale a  $E^{\frac{1}{2}}$ . Quanto a  $f(E)$  essa è detta *funzione di probabilità di Fermi-Dirac* e vale:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(E-E_F)}{kT}\right)} \quad (\text{VIII.3})$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann ( $= 8.62 \cdot 10^{-5} eV/K = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ );  $T$  è la temperatura assoluta ( $K$ );  $E_F$  è il cosiddetto *livello di Fermi*, caratteristico di quel certo metallo. La (3) ci mostra che  $E_F$ , indipendentemente dal suo valore numerico diverso da metallo a metallo, rappresenta la energia dello stato che, per qualunque temperatura, ha probabilità del 50% di essere occupato. Sofferamoci sulla dipendenza di  $f(E)$  dalla temperatura, con riferimento alla Fig.3.

---

\* in tutte queste espressioni e anche nelle seguenti l'unità di energia adoperata è lo *elettron-Volt* ( $eV$ ) che corrisponde all'energia che una carica elementare  $e$  acquista attraversando la ddp di 1 V:  $1 eV \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$ .

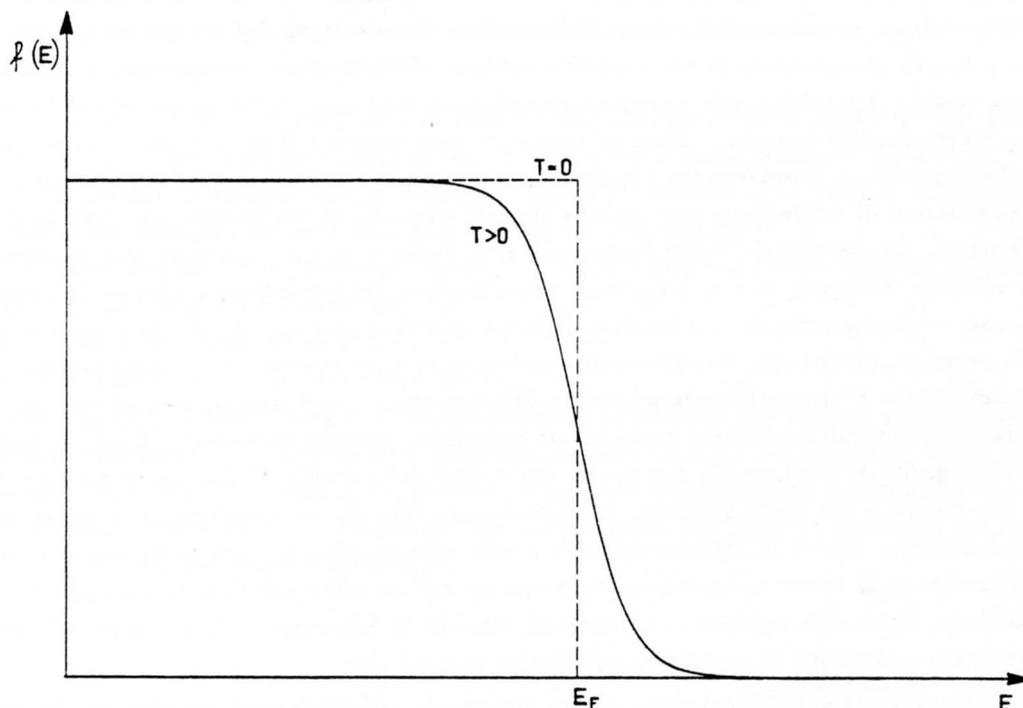


Fig.VIII.3

Per  $T = 0 \text{ K}$  si vede che gli stati con energia  $E < E_F$  sono occupati, mentre non lo sono quelli con energia  $> E_F$ . Questo è un risultato tipicamente quantistico, poiché classicamente ogni particella di un gas (quale è questo insieme di elettroni) a temperatura  $T = 0 \text{ K}$  avrebbe energia cinetica nulla. A temperatura  $T \neq 0$  si vede invece che la curva si smussa e che esiste una probabilità diversa da zero che anche gli stati con energia  $> E_F$  siano occupati. L'effetto è stato estremamente esagerato nel disegno, se  $T$  corrisponde a una temperatura vicina a quella ambiente. Quanto al valore numerico di  $E_F$  esso è dell'ordine dei Volt, e si trova che dipende solo dal numero  $n$  di elettroni di conduzione per  $m^3$  del metallo:

$$E_F = 3.64 \cdot 10^{-19} n^{\frac{2}{3}} \text{ eV}$$

Per il Tungsteno (densità  $\rho = 18.8 \text{ g/cm}^3$ , numero di massa  $A=184$ , due elettroni liberi per atomo) si trova  $E_F = 8.95 \text{ eV}$ . Tornando a  $\rho(E)$  (numero di elettroni per  $\text{cm}^3$  e per  $\text{eV}$ ) si ha la seguente espressione, essendo  $\gamma$  la costante di proporzionalità fra  $N(E)$  e  $E^{\frac{1}{2}}$ :

$$\rho(E) = \frac{\gamma E^{\frac{1}{2}}}{1 + \exp\left(\frac{(E-E_F)}{kT}\right)} \quad (\text{VIII.4})$$

che ha la forma riportata nella Fig.4. Essendo  $E_F < E_B$ , a  $0 \text{ K}$  nessun elettrone può abbandonare il metallo, poiché nessuno di essi possiede una energia sufficiente a superare la barriera ai bordi della buca, ovvero alla superficie del metallo. La differenza  $E_B - E_F = E_W$  è detto *potenziale di estrazione* (in inglese *work function*). A temperatura  $T > 0 \text{ K}$  la (4) ci dice che esiste una coda di elettroni con energia  $> E_F$  e che essa si estende indefinitamente e quindi anche oltre  $E_B$ ; pertanto un certo numero di elettroni ha energia sufficiente per abbandonare il metallo e dobbiamo quindi correggere la osservazione fatta prima, quando abbiamo escluso che gli elettroni di conduzione, a temperatura ambiente, potessero abbandonare un corpo conduttore; tuttavia, sperimentalmente, si

trova che per tutti i metalli questo numero è estremamente basso: ad esempio, per il Tungsteno si calcola che, a  $300\text{ K}$ , escono dalla superficie  $\approx 1.7 \cdot 10^{-50}$  elettroni  $/(s \cdot cm^2)$ . Aumentando la temperatura sufficientemente si può ottenere una emissione di elettroni affatto apprezzabile. La legge che dà l'intensità di corrente per unità di superficie a una certa temperatura è detta di *Dushman-Richardson*:

$$I = \mathcal{A}T^2 \exp\left(\frac{-eE_W}{kT}\right) \quad (\text{VIII.5})$$

con  $\mathcal{A} \approx 10^2 A/(cm^2 K^2)$ . Ad esempio per il tungsteno si trova che mentre per  $T = 300\text{ K}$   $I = 2.5 \cdot 10^{-69} A/cm^2$ , a  $2500\text{ K}$  si possono ottenere  $0.56 A/cm^2$ .

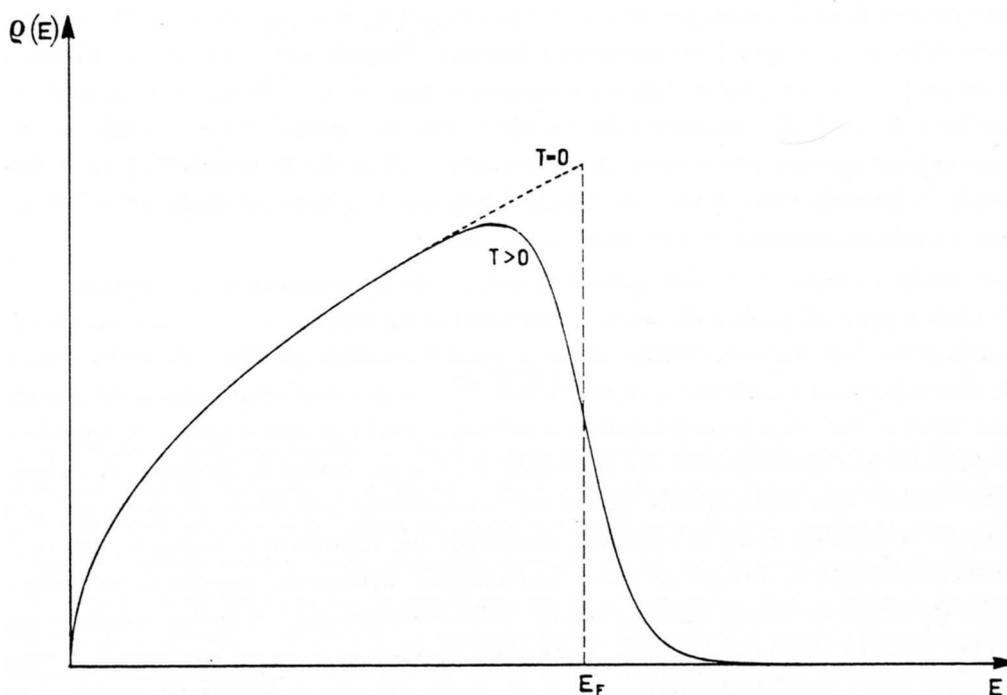


Fig.VIII.4

I metalli alcalino-terrosi, in particolare se sotto forma di ossidi, presentano delle ottime caratteristiche come emettitori di elettroni; a causa del piccolo valore di  $E_W$  sono sufficienti temperature dell'ordine di  $1000\text{ K}$  per avere una resa di corrente confrontabile con quella del tungsteno a  $2500\text{ K}$ . La relativamente bassa temperatura di esercizio consente loro vite molto lunghe (decine di migliaia di ore) e l'impiego del riscaldamento indiretto, illustrato precedentemente, vantaggioso per la migliore definizione del potenziale del catodo. Notiamo per inciso che l'emissione termoionica avviene secondo la legge di Dushman-Richardson (5), purché il metallo sottoposto a riscaldamento venga continuamente rifornito di una corrente di elettroni di intensità pari a quella termoionica, per esempio tramite un collegamento elettrico col conduttore che riceve gli elettroni emessi; se non si facesse così, ma si riscaldasse un corpo isolato, l'intensità della emissione termoionica si andrebbe rapidamente riducendo, in quanto l'ulteriore fuoriuscita di elettroni sarebbe contrastata dal campo elettrico dovuto all'accumulo di carica positiva sul conduttore, formatasi subito dopo l'emissione dei "primi" elettroni.

In base alla distribuzione riportata nella Fig.4, risulta che gli elettroni che escono dal metallo

hanno una distribuzione continua di energia, con un minimo di zero, corrispondente ad una energia nell'interno del metallo uguale a  $E_B$ , e un massimo teoricamente esteso all'infinito. Si trova che l'energia cinetica media degli elettroni che lasciano il conduttore dipende solo dalla temperatura del medesimo e vale:

$$\bar{E} = 2kT = eV_T \quad (\text{VIII.6})$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann. Ad esempio, per  $T = 1000 \text{ K}$ ,  $\bar{E} = 0.17 \text{ eV}$ , una energia che, come vedremo nel seguito, può essere quasi sempre trascurata, date le differenze di potenziale utilizzate nel cannone elettronico per il trasporto del fascio.

La resa di corrente data dalla (5) è in genere esorbitante rispetto alle intensità richieste da un tubo oscillografico (qualche  $\mu A$ ); per di più, sempre dalla (5), si evince che la stabilità di emissione in funzione della temperatura è estremamente limitata. Disponendo di un catodo siffatto e di un altro elettrodo (anodo) a un potenziale moderatamente positivo rispetto ad esso (da qualche decina a un centinaio di Volt), se l'emissione del catodo è sufficientemente elevata, si osserva la nascita di un meccanismo di *auto regolazione*, in conseguenza del quale, la corrente raccolta sull'anodo non dipende di fatto da nient'altro se non dalla differenza di potenziale applicata ai due elettrodi. Studiamo ora tale meccanismo di *emissione autoregolata*.

Supponiamo di disporre di una geometria catodo-anodo estremamente semplificata, cioè due elettrodi piani e paralleli posti a distanza  $d$ , contenuti in un recipiente evacuato e mantenuti a una differenza di potenziale  $V_a$ ; supponiamo anche di poter trascurare gli effetti di bordo e che tutti gli elettroni abbandonino il catodo con una stessa velocità  $u_{0T}$  perpendicolare al catodo. Sappiamo già che questa ultima condizione è assolutamente irrealistica, poiché la velocità degli elettroni è viceversa caratterizzata da una distribuzione che si estende fra 0 e  $\infty$ ; inoltre la direzione di emissione non è senz'altro unica. Allo stato attuale questa schematizzazione può sembrare anche più pesante di quello che poi il risultato finale ci mostrerà; comunque per rispettare al massimo, pur nell'ambito della schematizzazione, la situazione reale, ammettiamo almeno che  $u_{0T}$  sia uguale alla velocità media degli elettroni che escono dalla superficie. Tale velocità cresce con la radice della temperatura e nei casi che effettivamente si incontrano, come abbiamo visto poco sopra, corrisponde a una energia  $\frac{1}{2}mu_{0T}^2 = eV_T = 2kT$  (vedi (6)) inferiore a  $0.2 \text{ eV}$ , molto più piccola all'energia corrispondente alla tensione che stiamo applicando fra catodo e anodo. Facendo riferimento alla Fig.5a dove è riportato l'andamento della ddp fra catodo e anodo per varie temperature, ammettiamo che i potenziali di catodo e anodo siano fissi e mantenuti tali da un opportuno generatore di fem (Fig.5b); la corrente fra anodo e catodo sarà costituita dagli elettroni che lasciano il catodo e vengono attratti dal potenziale positivo dell'anodo. Il generatore di fem riporterà gli elettroni al catodo, mantenendo la neutralità elettrica di questo, nonché di tutti i conduttori del circuito. La presenza della corrente fra catodo e anodo comporta un gradiente nella densità spaziale di elettroni fra catodo e anodo; infatti, a regime, dovendo la corrente essere la stessa attraverso ogni sezione parallela ai due elettrodi ( $\text{div } \vec{j} = 0$ ), essa risulterà dal moto di *pochi elettroni veloci* nelle vicinanze dell'anodo, e di *molti elettroni lenti* nelle vicinanze del catodo; infatti la velocità degli elettroni nello spazio interelettrodo è determinata dalla differenza di potenziale fra il punto ove essi si trovano e il catodo e quindi essa va aumentando via via che gli elettroni si avvicinano all'anodo. Si noti la differenza di questo meccanismo di conduzione rispetto al moto degli elettroni all'interno di un conduttore: in quest'ultimo la densità  $\rho$  degli elettroni è costante e gli elettroni possiedono una velocità proporzionale al campo elettrico, mentre nel caso attuale gli elettroni partono praticamente fermi dal catodo e poi accelerano via via che si avvicinano all'anodo. In questo caso cioè, è la dinamica del moto che stabilisce la densità dei portatori.

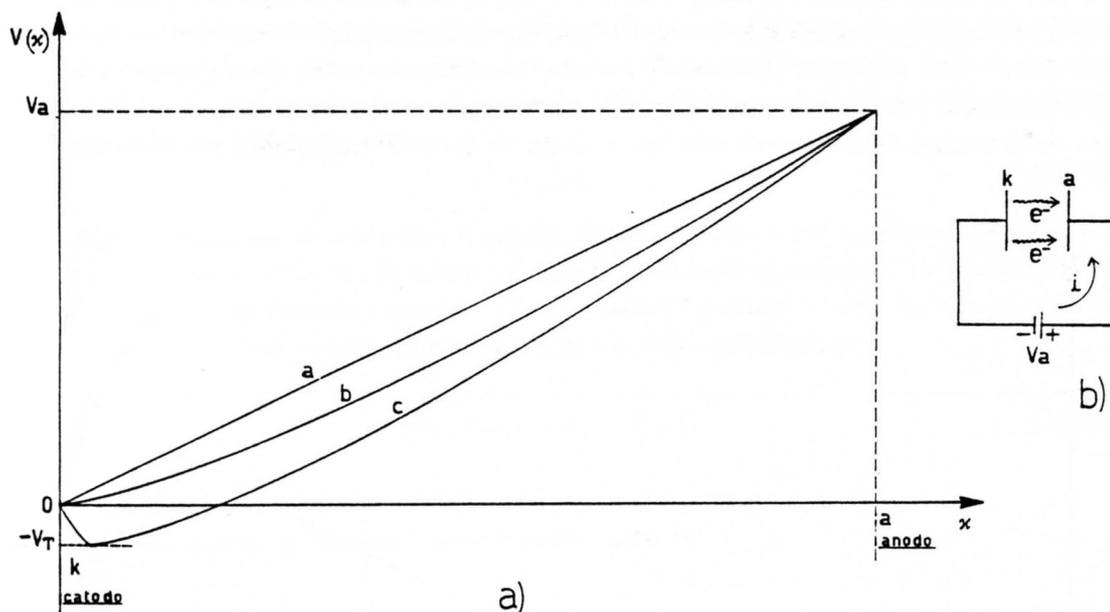


Fig.VIII.5

Per temperature sufficientemente basse le correnti emesse dal catodo sono così piccole che la presenza di una densità di carica negativa nello spazio fra gli elettrodi non altera sensibilmente la distribuzione del potenziale, che continua ad essere caratterizzata da una pendenza costante (curva a)). Tuttavia se la temperatura cresce, aumenta, secondo la (5), anche il numero di elettroni emessi e poiché la velocità degli elettroni ha, in ogni caso, un limite superiore  $u_M$ , raggiunto in prossimità dell'anodo e dato da  $\frac{1}{2}mu_M^2 = eV_a + eV_T$ , la corrente fra gli elettrodi può aumentare soltanto tramite un aumento di densità di carica nello spazio tra di essi; d'altra parte tale aumento comporta una riduzione del potenziale nello spazio fra gli elettrodi, mentre restano costanti i valori del potenziale sul catodo e sull'anodo (vedi curva b)). In tali condizioni tutta la corrente che lascia il catodo continua ad essere raccolta dall'anodo, poiché ogni elettrone che abbandona il catodo risale senza ostacoli la differenza di potenziale, e raggiunge l'anodo. Aumentare ulteriormente la temperatura può dar luogo a una concavità così pronunciata da produrre un minimo del potenziale, inferiore anche a quello del catodo (curva c)); è facile convincersi che tale minimo diventa sempre più profondo all'aumentare di  $T$  fino a che raggiunge, per  $T = T'$ , il valore  $-V_{T'}$ , che corrisponde proprio all'energia  $eV_{T'} = \frac{1}{2}mu_{0T'}^2$  degli elettroni emessi; infatti supponiamo che questo minimo sia ancora più profondo di  $-V_{T'}$ : tutti gli elettroni verrebbero allora respinti da questa zona e ritornerebbero sul catodo, col che la densità locale di carica nella zona del minimo andrebbe rapidamente attenuandosi a causa del drenaggio di elettroni che parte dall'anodo; ciò riporterebbe il potenziale del minimo al valore opportuno per far rifluire corrente dal catodo (cioè proprio  $-V_{T'}$ ).

Aumentare ulteriormente la temperatura fino a  $T''$  oltre quella  $T'$  per cui si è ottenuto il minimo  $-V_{T'}$  "agganciato alla temperatura", non altera sostanzialmente niente nel meccanismo anzidetto; cambierà solo il valore assoluto del minimo che sarà pari a  $-V_{T''} = -\frac{2kT''}{e}$  ed eventualmente la sua collocazione; esso resta comunque confinato nelle vicinanze del catodo a causa del fatto che in questa zona, a causa della bassa velocità degli elettroni, si ha un maggior addensamento di carica.

La situazione di regime è pertanto la seguente: la barriera che si crea fa sì che la maggior parte degli elettroni che abbandonano il catodo, vi ritornino e che solo alcuni la superino; questi ultimi sono proprio nel numero giusto per mantenere la situazione autoconsistente di densità di carica e corrente nella regione dello spazio fra il minimo e l'anodo; la coesistenza di elettroni che, pur avendo tutti la stessa energia, passano o non passano la barriera stabilita dal minimo del potenziale è dovuta al fatto che il minimo del potenziale costituisce un punto di equilibrio instabile per il sistema.

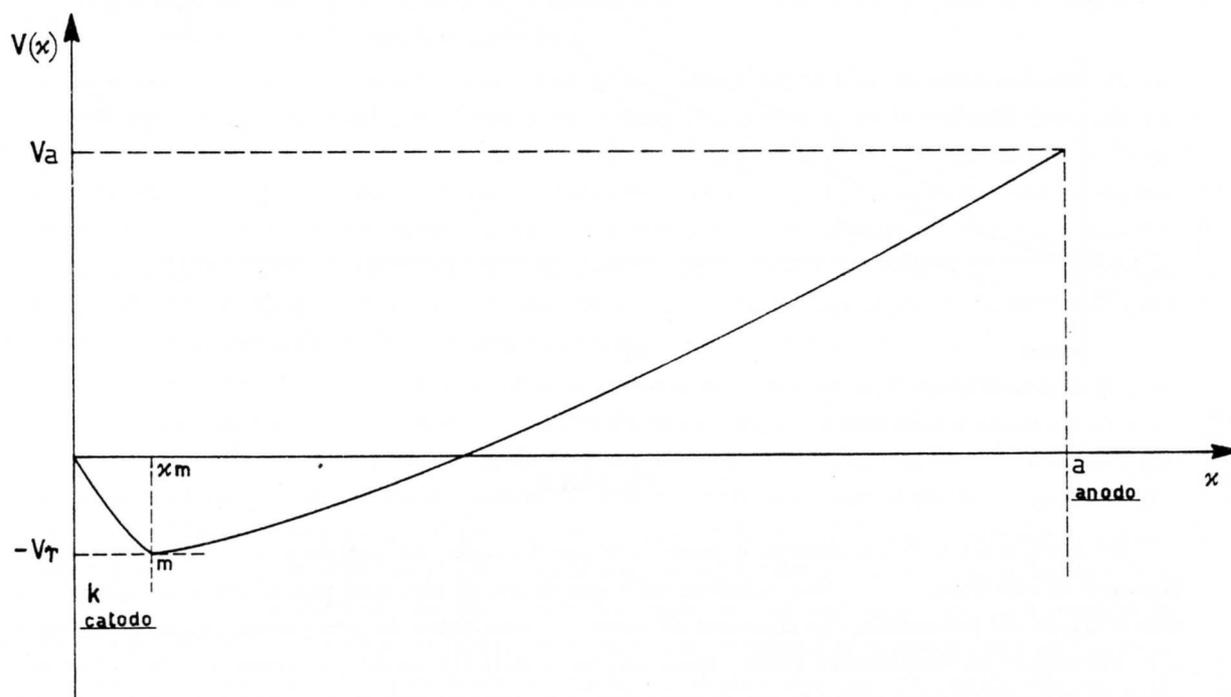


Fig.VIII.6

Inoltre alla coordinata  $x_m$  del minimo del potenziale  $V(x_m) = -V_T$ , si avranno elettroni con velocità nulla conseguentemente una densità localmente infinita di carica, dovendosi avere una corrente finita. Si tenga presente che in realtà gli elettroni non sono monoenergetici, bensì hanno una distribuzione continua di velocità: pertanto il minimo assume la profondità  $-V_B(T)$  tale che gli elettroni con energia superiore a  $eV_B(T)$  sono proprio nel numero giusto per mantenere nello spazio fra il minimo e l'anodo la situazione autoconsistente per quella corrente e quella densità di carica. Oltretutto per quest'ultima, avendosi una distribuzione continua di energia degli elettroni, non si hanno più divergenze in corrispondenza del minimo. Purtroppo questo tipo di trattazione del fenomeno, assai più aderente alla realtà dei fatti, richiede per essere affrontata quantitativamente un apparato matematico notevolmente più complicato; si preferisce esaminare il caso più schematico, anche se irrealistico, di una emissione di elettroni monoenergetici e unidirezionali, poiché esso consente ugualmente di cogliere i fatti salienti del fenomeno in studio e di stilare almeno la traccia della procedura di soluzione del problema applicabile anche al caso più realistico.

Procediamo quindi alla soluzione del problema, supponendo che la temperatura  $T$  del catodo sia superiore rispetto a quel valore limite  $T'$  per cui il minimo del potenziale nello spazio interelettrodo assume il valore  $-V_{T'} = -\frac{2kT'}{e}$  aganciato alla temperatura. Dividiamo lo spazio fra gli elettrodi in due regioni (Fig.6), una, k-m, fra catodo e il punto di minimo del potenziale e un'altra, m-a, fra

il minimo del potenziale e l'anodo. Nella zona k-m gli elettroni emessi dal catodo, normalmente ad esso e tutti con velocità  $u_{0T}$ , viaggeranno verso la zona del minimo del potenziale e ivi giunti verranno per la maggior parte respinti indietro verso il catodo; la differenza di queste due correnti di "andata" e "ritorno" costituisce la corrente  $\vec{j}$  che viene effettivamente raccolta dall'anodo e che è l'unico contributo di corrente nella zona m-a. Perciò nella zona k-m possiamo definire una densità di corrente di elettroni \* di "andata":

$$j^+ = \rho_x^+ u_x^+ \quad (\text{VIII.7})$$

costituita dagli elettroni che abbandonano il catodo. Entrambi i fattori del membro di destra dipendono dalla coordinata  $x$ ;  $\rho^+$  indica il valore assoluto della densità di carica ( $C/m^3$ ) associata agli elettroni che viaggiano da sinistra verso destra (verso positivo dell'asse  $x$ ) e  $u_x^+$  la loro velocità che dipende dal potenziale  $V(x)$  secondo il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m u_x^{+2}(x) = e [V_T + V(x)] \quad (\text{VIII.8})$$

dove  $eV_T = \frac{1}{2} m u_{0T}^2$  con  $u_{0T}$  velocità iniziale degli elettroni diretta secondo l'asse  $x$ .

La densità di corrente di "ritorno", sarà viceversa data da:

$$j^- = \rho_x^- u_x^- \quad (\text{VIII.9})$$

E' facile convincersi che  $u_x^- = -u_x^+$ ; infatti  $j^-$  è dovuta agli elettroni che, giunti con velocità 0 in  $x = x_m$ , ritornano verso il catodo e riacquistano la velocità perduta nella fase di avvicinamento al minimo del potenziale. Pertanto  $j$ , la densità totale di corrente di elettroni nel tratto m-a sarà data da:

$$j = j^+ + j^- = (\rho_x^+ - \rho_x^-) u_x^+ \quad (\text{VIII.10})$$

Nella regione m-a la corrente è esprimibile semplicemente come  $j = \rho_x u_x$  con  $u_x(x)$  data da una formula identica alla (8):

$$\frac{1}{2} m u_x^2(x) = e [V_T + V(x)]$$

Tenendo presente che il segno corretto per le densità di carica è opposto a quello finora adottato, per le due regioni, l'equazione di Poisson dà rispettivamente (caso unidimensionale):

$$k - m : \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{\rho_x^+ + \rho_x^-}{\epsilon_0} \quad (\text{VIII.11a})$$

$$m - a : \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{\rho_x}{\epsilon_0} \quad (\text{VIII.11b})$$

Dalle (7), (9), (10) e (11) abbiamo:

$$\rho_x^+ + \rho_x^- = \frac{j^+}{u_x^+} + \frac{j^-}{u_x^-} = \frac{2j^+ - j}{u_x^+} = \frac{2j^+ - j}{\left(\frac{2e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{VIII.12})$$

$$\rho_x = \frac{j}{u_x} = \frac{j}{\left(\frac{2e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{VIII.13})$$

---

\* per ottenere la densità di corrente vera e propria occorre cambiare il segno delle (7),(9) e (10).

Come già accennato precedentemente,  $\text{div } \vec{j} = 0$  in questa geometria comporta:  $\vec{j} = \text{cost}$ . Anche  $j^+$  è, fissata la temperatura, una costante. Dalle (11), (12) e (13) si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$k - m : \quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2j^+ - j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.14a})$$

$$m - a : \quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.14b})$$

con la condizione che

$$\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x=x_m} = 0 \quad V(x_m) = -V_T = \frac{-2kT}{e} \quad (\text{VIII.15})$$

La (14a) si può anche scrivere:

$$2 \frac{d(V_T + V)}{dx} \cdot \frac{d^2(V_T + V)}{dx^2} = 2 \frac{2j^+ - j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(V_T + V)}{dx} \quad (\text{VIII.16})$$

che integrata dà:

$$\left(\frac{d(V_T + V)}{dx}\right)^2 = 4 \frac{2j^+ - j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{2}} + \text{cost} \quad (\text{VIII.17})$$

La costante vale 0 a causa del fatto che  $\frac{d(V + V_T)}{dx} = 0$  per  $V = -V_T$  e pertanto:

$$\frac{d(V_T + V)}{dx} = -2 \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{4}} \quad x < x_m \quad (\text{VIII.18})$$

La (18) può essere integrata separando le variabili:

$$\int_0^V \frac{d(V + V_T)}{(V + V_T)^{\frac{1}{4}}} = -2 \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} x \quad (\text{VIII.19})$$

ottenendo così :

$$(V + V_T)^{\frac{3}{4}} - V_T^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{2} \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} x \quad x < x_m \quad (\text{VIII.20})$$

La (20) può anche porsi nella forma:

$$(V + V_T)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} (x_m - x) \quad x < x_m \quad (\text{VIII.20a})$$

Procedendo analogamente per  $x > x_m$  si trova

$$(V + V_T)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} (x - x_m) \quad x > x_m \quad (\text{VIII.21})$$

Valutando la (20a) per  $x = 0$  e la (21) per  $x = d$  si ottiene:

$$\frac{d}{x_m} - 1 = \left(\frac{V_a}{V_T} + 1\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{2j^+}{j} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.22})$$

da cui si vede che in tutti quei casi in cui  $j^+ \gg j$ , cioè per temperature  $T > T'$ , la distanza del minimo del potenziale ( $x_m$ ) dal catodo risulta estremamente più piccola di  $d$ ; comunque anche nel

caso limite  $j^+ = j$  resta  $d \gg x_m$  in quanto generalmente  $V_a \geq 100V_T$  per temperature attorno a 1000 K. Pertanto possiamo dire che nella zona fra catodo e anodo la (21), anche trascurando  $V_T$  rispetto a  $V$  e  $x_m$  rispetto a  $x$ , rappresenta con buona approssimazione l'andamento di  $V$  in funzione di  $x$ . Possiamo allora scrivere:

$$V^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left( \frac{j}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m}{2e} \right)^{\frac{1}{4}} x \quad (\text{VIII.23})$$

Questa formula coincide con quella che avremmo ottenuto assumendo  $u_{0T} = 0$ ; se avessimo però fatto questa ipotesi, avremmo perduto una buona parte della fisica del problema legata proprio al meccanismo di produzione e riassorbimento degli elettroni. Valutando la (23) per  $x = d$  e tenendo conto che  $I = Sj$  con  $S$  area dei due elettrodi, otteniamo:

$$I = \alpha V_a^{\frac{3}{2}} \quad (\text{VIII.24})$$

dove  $\alpha$  è una costante che dipende dalla geometria e da costanti universali, non dalla temperatura. La (24) afferma che nel regime di funzionamento ora descritto, detto di *carica spaziale*, cioè di corrente non saturata ( $j \leq j^+$ ), la corrente fra i due elettrodi varia come la potenza  $\frac{3}{2}$  della ddp applicata ed è indipendente dalla temperatura del catodo. (*Legge di Langmuir-Child, Legge di  $V$  a  $\frac{3}{2}$  o Equazione della carica spaziale*). Non è difficile mostrare che questo risultato vale anche in geometria differente, per esempio quando anodo e catodo sono due elettrodi cilindrici coassiali; sperimentalmente questa legge si può verificare proprio in una geometria di questo tipo, misurando l'andamento di  $V$  in funzione di  $I$ , cioè la *curva caratteristica* di un *diodo a vuoto*, costituito da un catodo caldo e da un anodo che raccoglie la carica degli elettroni.

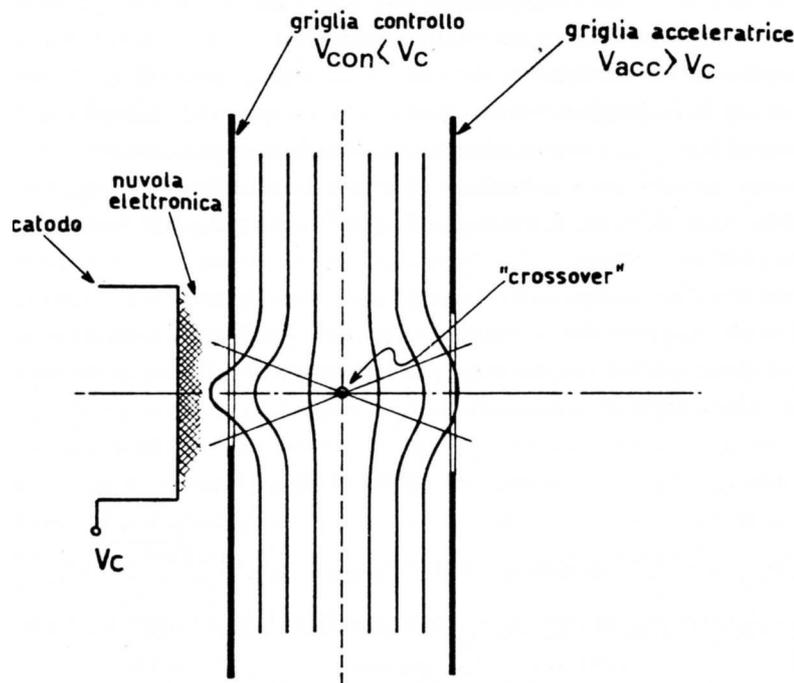


Fig.VIII.7

Tornando ora alla sorgente di elettroni del cannone elettronico, è evidente che la geometria (Fig.2) è assai diversa da quella ora descritta, non fosse altro perché è presente un elettrodo in

più; le conclusioni di sopra, non possono quindi trasferirsi rigidamente a questo caso. Tuttavia anche nel caso del cannone elettronico, si trova che la corrente estratta dal catodo dipende solo dalla geometria e dalla elettrostatica associata, non dalla temperatura del catodo, cioè il sistema lavora in un regime autoregolato di carica spaziale. Guardiamo, almeno qualitativamente, quello che accade, ridisegnando (Fig.7) il particolare del catodo, della griglia controllo e griglia acceleratrice. Prendiamo come riferimento la tensione  $V_C$  del catodo e indichiamo con  $V_{con}$  e  $V_{acc}$  la tensione degli altri due elettrodi; valori tipici delle tensioni  $V_{con}$  e  $V_{acc}$  sono la prima negativa e dell'ordine di una decina di Volt e la seconda positiva dell'ordine del migliaio di Volt. La zona a linee ombreggiate rappresenta la nube elettronica che insiste sopra il catodo, ovvero la zona a più alta densità di carica spaziale. E' questa la zona in cui gli elettroni sono presenti in gran numero e in cui si ha la situazione di regime in cui coesistono due correnti pressoché identiche, una di elettroni che fuoriescono dal catodo per effetto termoionico, un'altra di quelli che vi rientrano respinti proprio dalla carica negativa che sovrasta l'elettrodo. Come abbiamo visto prima queste correnti saranno identiche qualora la corrente estratta dagli elettrodi successivi sia nulla. Sono anche disegnate qualitativamente le linee equipotenziali (in figura la dimensione del foro della griglia controllo è stato assai esagerato rispetto alla realtà). La griglia controllo funge da schermo elettrostatico per il campo dovuto alla griglia acceleratrice. L'efficacia di questo schermo dipende dalla ddp  $V_{con}$ : quando la tensione della griglia controllo è inferiore a un determinato valore negativo, le superfici equipotenziali con  $V > 0$  non riescono a penetrare nel foro e gli elettroni della nuvola elettronica non sentono alcun effetto da parte della griglia acceleratrice; aumentando la tensione della griglia controllo, le equipotenziali riescono a penetrare (come in Fig.7) nella zona della nuvola elettronica e un corrente di elettroni diversa da zero abbandona la zona del catodo. Si può così regolare l'intensità della corrente di elettroni, permettendo che una maggiore o minore frazione della nuvola elettronica venga interessata dall'effetto di estrazione. La geometria è tale che gli elettroni estratti da zone diverse della nuvola elettronica siano sospinti dalle linee di forza (vedi Fig.7) verso una unica zona, là dove il fascetto ha la sua minima sezione. Tale punto, detto di *crossover*, costituisce l'*oggetto* del sistema ottico di foccheggiamento successivo; l'*immagine* del crossover si forma sullo schermo e appare all'esterno come un puntino luminoso. In conclusione, anche nel caso del cannone elettronico la estrazione del fascetto avviene secondo il meccanismo della carica spaziale; quello che cambia, rispetto al caso degli elettrodi piani e paralleli, è la elettrostatica "lontana" dal catodo, assai più complessa del caso precedente.

Dopo aver superato il crossover il fascetto di elettroni presenta una divergenza finita (esagerata nel disegno) e gli elettroni che lo costituiscono sono in fase di accelerazione. Una volta che gli elettroni sono giunti all'interno della griglia acceleratrice si trovano ad un potenziale costante e possiederanno una energia cinetica data da

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_{acc} \quad (\text{VIII.25})$$

Supponendo  $V_{acc} = 2000V$ , la velocità dell'elettrone vale  $v = \sqrt{\frac{2eV_{acc}}{m}} = 2.7 \cdot 10^7 m/s$ , ovvero circa  $\frac{1}{10}$  della velocità della luce (e pertanto il conto sarebbe stato più corretto farlo usando la cinematica relativistica).

Il sistema di elettrodi successivi (vedi Fig.8) ha la funzione di rendere il fascetto convergente; ciò è ottenuto tramite l'azione di lente elettrostatica compiuta dai tre elettrodi: *griglia acceleratrice*, *primo e secondo anodo* (quest'ultimo allo stesso potenziale della griglia acceleratrice). Il primo anodo (o *elettrodo di fuoco*) è posto a un potenziale (variabile) inferiore a quello degli altri due. Per ragioni di simmetria un elettrone che viaggia lungo l'asse (tradizionalmente detto asse  $z$ ) subirà solo forze dirette come l'asse, ovvero un rallentamento passando dalla zona della griglia acceleratrice a quella

del primo anodo e una successiva accelerazione nel passaggio dal primo al secondo anodo, dopo di che proseguirà il suo moto lungo l'asse del sistema con velocità pari a quella che aveva nella zona della griglia acceleratrice.

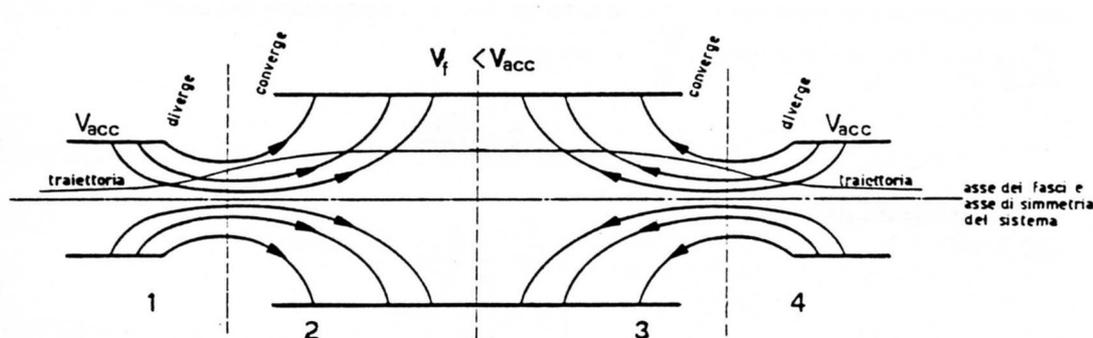


Fig.VIII.8

Con riferimento alla Fig.8, si nota che su un elettrone che procede fuori dall'asse agiscono, oltre le forze che lo rallentano e poi lo accelerano lungo  $z$ , anche delle componenti di forza perpendicolari a questa direzione; tali forze nelle zone 1 e 4 tendono a farlo divergere e nelle zone 2 e 3 a farlo convergere (nella Fig.8 sono disegnate le linee del campo). L'azione complessiva è convergente a motivo del fatto che nelle zone 2 e 3 l'elettrone procede più lentamente e quindi riceve, a parità di forze, un maggior trasferimento di impulso. Inoltre nelle zone 2 e 3 l'elettrone si trova più lontano dall'asse, là dove le linee di forza sono più incurvate e questo aiuta ulteriormente l'azione convergente. La tensione dell'elettrodo di fuoco viene regolata dall'utente durante il funzionamento dell'oscillografo fino ad ottenere l'immagine sullo schermo la più definita possibile; tale immagine sarà tanto più piccola quanto più piccole sono le dimensioni del crossover (tipicamente qualche decimo di mm); si osservi anche che ritoccare l'intensità, cioè il potenziale della griglia controllo, provoca modifiche dell'elettrostatica nelle zone del crossover e quindi uno spostamento di quest'ultimo; pertanto un ritocco della tensione del fuoco si rende necessario dopo una modifica dell'intensità.

All'uscita del secondo anodo abbiamo un fascetto di elettroni con una convergenza abbastanza piccola (lo schermo è ancora assai distante) e tutti aventi un'energia pari a  $eV_{acc}$ . Nel seguito, per semplicità, considereremo gli elettroni come aventi divergenza nulla, cioè come se si trattasse di un fascetto molto collimato costituito da elettroni aventi tutti la stessa velocità diretta unicamente lungo  $z$ .

Nel tratto successivo il fascetto entra nella zona dove, in successione, subisce le deflessioni verticale e orizzontale. La deflessione del fascio è ottenuta nel seguente modo (Fig.9).

Chiamando  $y$  l'asse verticale, positivo verso l'alto, l'elettrone può acquistare una componente di velocità in questa direzione qualora il generatore  $V_{pv}$  applichi una ddp alla coppia di elettrodi. Nella Fig.9 la ddp è applicata da un generatore, mentre in pratica, e vedremo più tardi come ciò si realizza, questa tensione è proporzionale alla ddp istantanea presente all'ingresso Y dell'oscillografo, cioè alla ddp che vogliamo vedere riprodotta sullo schermo. I due elettrodi sono piani e paralleli, centrati sull'asse e sono detti *placchette deflettrici verticali*. La dimensione delle placchette lungo  $z$  sia  $b$ ,

mentre la distanza fra di loro sia  $a$ . Si noti che il potenziale medio delle placchette è sempre allo stesso valore di quello del secondo anodo (che è collegato a massa), per cui l'elettrone non subisce accelerazioni lungo  $z$ . Supponiamo ora che la tensione  $V_{pv}$  sia diversa da zero e mantenga questo valore per tutto il tempo che l'elettrone transita fra le placchette, ovvero che gli intervalli di tempo in cui la ddp  $V_{pv}$  varia apprezzabilmente il suo valore, siano molto maggiori del tempo di transito dell'elettrone fra le placchette. Trascurando gli effetti di distorsione del campo ai bordi, l'elettrone subirà una forza lungo  $y$  pari a  $\frac{V_{pv}}{a} \cdot e$ , per cui:

$$m\ddot{y} = \frac{eV_{pv}}{a} \quad (\text{VIII.26})$$

La (26) integrata dà

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} t \\ y = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} t^2 \end{cases} \quad (\text{VIII.27})$$

mentre lungo  $z$  (vedi (25)):

$$z = z_0 + v_z t = z_0 + \sqrt{\frac{2eV_{acc}}{m}} t \quad (\text{VIII.28})$$

dove  $z_0$  è la coordinata corrispondente all'estremo sinistro delle placchette.

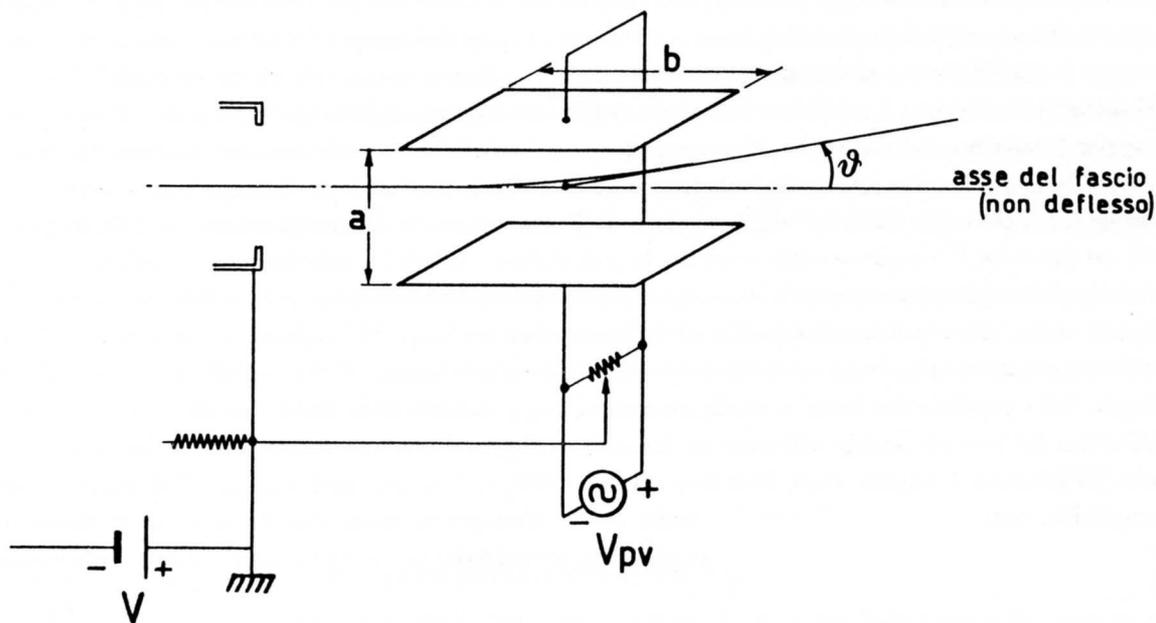


Fig. VIII.9

Si può anche calcolare il tempo  $t_{pp}$  che l'elettrone impiega per attraversare le placchette:

$$t_{pp} = \frac{b}{v_z} = b \sqrt{\frac{m}{2eV_{acc}}} \quad (\text{VIII.29})$$

In base alla (27) e alla (29) si può ricavare lo spostamento lungo  $y$ ,  $y_{pp}$  che l'elettrone ha subito nell'attraversamento delle placchette:

$$y_{pp} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} t_{pp}^2 = \frac{1}{4} \frac{V_{pv}}{V_{acc}} \frac{b^2}{a} \quad (\text{VIII.30})$$

ed anche la componente di velocità acquistata lungo  $y$ :

$$\dot{y}_{pp} = \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} \frac{b}{v_z} \quad (\text{VIII.31})$$

La tangente dell'angolo di deflessione si può calcolare dal rapporto:

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}_{pp}}{v_z} = \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} \frac{b}{v_z^2} = \frac{1}{2} \frac{V_{pv}}{V_{acc}} \frac{b}{a} \quad (\text{VIII.32})$$

Dalle (32) e (30) si ottiene allora:

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \frac{V_{pv}}{V_{acc}} \frac{b}{a} = \frac{y_{pp}}{\frac{b}{2}} \quad (\text{VIII.33})$$

Ciò significa che, indicando con  $L$  la distanza, lungo  $z$ , dello schermo dal centro delle placchette, lo spostamento  $d$  lungo  $y$  sullo schermo si può calcolare semplicemente come (vedi Fig.10):

$$d = L \tan \theta = \frac{Lb}{2V_{acc}a} V_{pv} \quad (\text{VIII.34})$$

In maniera del tutto simile operano le placchette deflettrici orizzontali, che il fascetto incontra successivamente.

Per una coppia di placchette la cosiddetta *sensibilità di deflessione* è data da:

$$\frac{d}{V_{pv}} = \frac{Lb}{2V_{acc}a} \quad (\text{VIII.35})$$

e perciò a parità di  $b$ ,  $a$  e  $V_{acc}$  è maggiore per la coppia di placchette più lontane dallo schermo (quasi sempre quelle di deflessione verticale). Facciamo un caso numerico: se  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 2 \text{ cm}$ ,  $V_{acc} = 2000 \text{ V}$ ,  $L = 40 \text{ cm}$ , otteniamo  $\frac{d}{V_{pv}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm/V}$ , cioè per avere una deflessione  $d = 1 \text{ cm}$  sullo schermo occorre applicare una ddp di  $50 \text{ V}$ . Si vede così che se vogliamo mettere in evidenza differenze di potenziale, presenti all'ingresso dell'oscillografo, molto inferiori al *Volt* occorre interporre un amplificatore di tensione fra l'ingresso e le placchette. Torneremo su questo punto nel prossimo paragrafo.

Dalla (34) si potrebbe arguire che convenisse diminuire la tensione di accelerazione  $V_{acc}$  per migliorare la sensibilità verticale. Il sistema sarebbe senz'altro efficace, ma comporterebbe un aumento del tempo di transito degli elettroni fra le placchette con la contropartita di una riduzione della banda passante dell'oscillografo, ovvero della capacità di riprodurre fedelmente di differenze di potenziale rapidamente variabili. Infatti, come è stato precedentemente osservato, affinché lo spostamento del punto di impatto del fascetto sullo schermo riproduca il valore *istantaneo* della tensione, occorre che  $t_{pp}$  sia il più piccolo possibile rispetto ai tempi in cui la ddp varia, per esempio rispetto al periodo della forma d'onda sinusoidale che deve essere riprodotta.

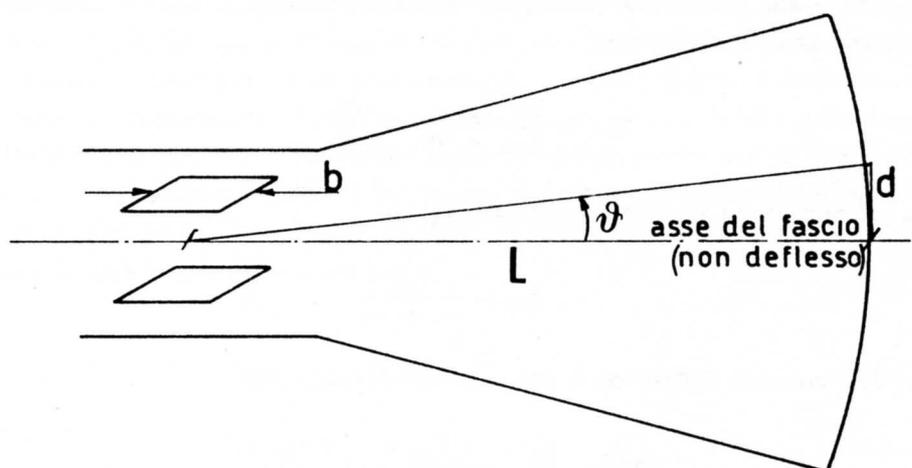


Fig.VIII.10

Calcolando questo tempo  $t_{pp}$  (vedi (29)), con i nostri dati numerici, risulta:

$$t_{pp} \approx 0.74 \cdot 10^{-9} s$$

cioè dell'ordine del  $ns$ , il che vuol dire, ad esempio, che ddp sinusoidali con periodo  $T = 100ns$  ( $f = 10MHz$ ) non possono essere riprodotte con una accuratezza molto migliore del percento. Oscillografi con bande passanti di questo ordine devono ricorrere a tensioni di accelerazione superiori (ma non eccessivamente superiori per mantenere una buona sensibilità di deflessione) e guadagnare nella geometria delle placchette, ad esempio avvicinandole. Per avere poi delle bande passanti particolarmente elevate, si ricorre a sistemi di deflessione in cui vi sono più coppie di placchette in successione e la ddp non viene applicata a tutte le coppie contemporaneamente, ma viene applicata in modo che essa "insegua" l'elettrone durante il suo tragitto attraverso di esse (sistema ad *onda viaggiante*).

Dopo aver attraversato entrambe le coppie di placchette di deflessione verticale e orizzontale, il fascetto, dopo un tragitto di 30-40  $cm$  va a colpire la parte interna dello schermo; esso, come d'altronde tutto l'involucro, è di vetro ed è ricoperto all'interno di particolari sostanze che hanno la proprietà di emettere luce quando sono colpite da elettroni energetici. La zona di impatto appare all'esterno come un puntino luminoso, se il fascio è fermo, oppure una traccia continua se esso si muove rapidamente rispetto ai tempi di persistenza dell'immagine sulla retina. Le sostanze che emettono luce sono detti *fosfori* (ma hanno poco o nulla a che vedere con il Fosforo elemento chimico, in genere si tratta di ortosilicati di zinco con alcune appropriate impurezze). Queste sostanze emettono luce non solo in tempi brevissimi dopo l'urto degli elettroni (*fluorescenza*) ma anche mostrano un contributo di luce lento, con decadimento esponenziale (*fosforescenza*). A seconda dei fosfori usati si possono avere persistenze sullo schermo che durano da pochi microsecondi a alcuni secondi (che si vanno a sommare ai tempi di persistenza dell'immagine sulla retina).

L'intensità della luce aumenta, oltre che con la intensità della corrente del fascetto, anche con l'energia degli elettroni. Durante la rappresentazione di una ddp rapidamente variabile il fascetto percorre i relativi spostamenti in tempi corrispondentemente brevi e pertanto insiste brevemente sul fosforo; la capacità di dare, ciò nonostante, una immagine percepibile all'occhio umano (o in

grado di impressionare una pellicola fotografica) è data dalla cosiddetta *velocità di scrittura*, misurata in  $cm/s$  (in genere  $cm/ns$ ); essa dice cioè quanto lungo è il tratto “sufficientemente” illuminato che l'oscillografo può tracciare in una certa unità di tempo, col controllo di intensità al massimo. Ovviamente la velocità di scrittura deve essere tanto più grande quanto più ampia è la banda passante dell'oscillografo. Alte velocità di scrittura potrebbero ottenersi aumentando la energia degli elettroni tramite la tensione di accelerazione, ma abbiamo già visto che questo comprometterebbe la sensibilità di deflessione. Si usa allora il sistema della post-accelerazione che in qualche caso è realizzato ponendo ad un potenziale dell'ordine della decina di migliaia di *Volt* un sistema di elettrodi disposti sulla superficie interna del tubo nella zona compresa fra le placchette deflettrici e lo schermo; al medesimo potenziale è posto anche un elettrodo sottilissimo di alluminio evaporato sulla superficie interna del fosforo. Gli elettroni del fascio sono sufficientemente energetici da passare attraverso questo sottile strato di alluminio senza perdere molta velocità. Oltre a quello ora detto, lo strato di alluminio ha altri due importanti scopi: esso impedisce l'accumulo della carica negativa sul fosforo depositata dal fascetto di elettroni e inoltre riflette verso l'esterno la luce che viene emessa all'indietro, guadagnando così un fattore circa 2 nella intensità luminosa della traccia.

Infine, affinché gli elettroni durante il loro moto dal catodo verso lo schermo seguano esattamente la traiettoria definita dai campi elettrici degli elettrodi, essi devono essere schermati dai campi magnetici esterni, fra i quali anche quello terrestre. Ciò è particolarmente necessario nel tratto entro il cannone elettronico, dove gli elettroni sono più lenti; pertanto intorno al “collo” del CRT, là dove c'è il cannone elettronico, è posto un schermo magnetico, costituito da un cilindro cavo di materiale ad alta permeabilità (vedi Appendice D per il calcolo dell'efficacia di tale tipo di schermi).

### **3.— *Gli stadi di ingresso e gli amplificatori delle placchette deflettrici***

In questo paragrafo vengono accennati argomenti e usati concetti (*impedenza*, ad esempio) che sono svolti o introdotti nei capitoli successivi. Consigliamo pertanto il lettore a riconsiderare con maggiore attenzione questi argomenti una volta che abbia acquistato familiarità col seguito del corso.

Abbiamo visto che per avere deflessioni dell'ordine dei centimetri (che sono poi quelle normalmente utilizzate, essendo in genere lo schermo delle dimensioni di  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ ) occorre applicare alle placchette delle ddp dell'ordine di varie decine di *Volt*. Affinché l'oscillografo sia utilizzabile per presentare sullo schermo sia differenze di potenziale di alcune decine di *Volt* che di pochi *milliVolt*, fra l'ingresso vero e proprio dell'oscillografo (consideriamo l'ingresso Y) e le placchette è interposto il dispositivo che consente il cambio di portata, cioè dei  $V/cm$  riferiti all'ingresso; tale sistema consiste generalmente in una rete puramente passiva (*attenuatore*) seguita da un sistema di *preamplificazione e amplificazione finale* (Fig.11). Il commutatore DC-AC serve a disinserire o inserire in serie all'ingresso un condensatore di valore attorno a qualche centesimo di  $\mu F$  (abbastanza grosso cioè, da costituire una impedenza piccola rispetto alla resistenza del partitore seguente); generalmente è preferibile usare la posizione DC (accoppiamento in continua), mentre la posizione AC va usata tutte le volte che si vuole eliminare dal segnale che vogliamo osservare all'oscillografo un piedistallo di tensione continua. La rete che segue è un partitore compensato (descritto ampiamente nel Cap.XII,§4) di resistenza complessiva pari a  $1\text{ M}\Omega$  e capacità dell'ordine di 1-2 decine di  $pF$ ; in genere l'attenuatore divide per fattori 10, 1-10-100 tipicamente.

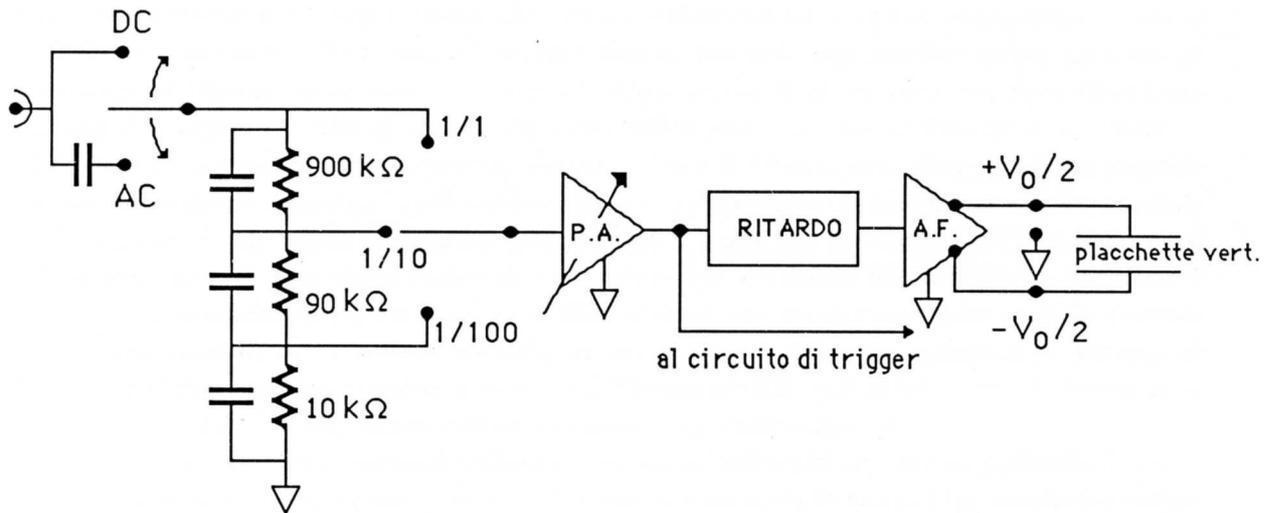


Fig.VIII.11

La manopola che seleziona la sensibilità del canale, commuta il deviatore su 1 o 1/10 o 1/100 a seconda che si scelga una sensibilità compresa fra  $5 \text{ mV/cm}$  e  $20 \text{ mV/cm}$ , oppure fra  $50 \text{ mV/cm}$  e  $200 \text{ mV/cm}$  oppure, infine, fra  $100 \text{ mV/cm}$  e  $2 \text{ V/cm}$ . Questo viene fatto per limitare al massimo gli ulteriori controlli di guadagno all'interno del preamplificatore P.A.. Lo stadio attivo di preamplificazione e amplificazione lavora presso a poco sempre allo stesso modo, cioè con ddp in ingresso ricondotte tutte a un medesimo campo di valori (da 0 a  $\pm 100 \text{ mV}$  circa). Brevemente descriviamo la funzione degli stadi di amplificazione: gli amplificatori di tensione sono dei dispositivi elettronici (basati cioè su transistori bipolari, transistori a effetto di campo, valvole termoioniche) che hanno la caratteristica di avere due terminali di ingresso e due terminali di uscita e di presentare fra i terminali di uscita una ddp  $V_0 = A_v V_i$  dove  $A_v$  è una costante caratteristica del dispositivo detta *guadagno o fattore di amplificazione*, e  $V_i$  è la ddp presente fra i terminali in ingresso; molto spesso uno dei terminali di ingresso e uno di uscita sono collegati insieme e costituiscono l'elettrodo comune di riferimento per le tensioni degli altri due; un'altra caratteristica di un amplificatore ideale di tensione è che l'impedenza fra i terminali di ingresso tende all'infinito, mentre quella di uscita, cioè l'impedenza interna di Thévenin fra i terminali di uscita, tende a zero. Il dispositivo rappresentato con un triangolo "P.A." in Fig.11 rappresenta uno di questi amplificatori, nel quale il guadagno  $A_v$  può essere variato, agendo sulla manopola che seleziona la sensibilità; più propriamente si tratta di un preamplificatore in quanto esso fornisce un primo contributo alla amplificazione complessiva e tratta quindi differenze di potenziale di valore ancora moderatamente basso rispetto ai valori finali che è necessario ottenere. L'impedenza di ingresso del preamplificatore, grande rispetto a  $1 \text{ M}\Omega$ , fa sì che, indipendentemente dalla posizione del partitore, l'impedenza di ingresso del canale Y sia sempre la stessa, vale a dire  $1 \text{ M}\Omega$ .

La funzione del "ritardo" (Fig.11) è proprio quella di ritardare la trasmissione del segnale; la necessità di questa funzione sarà chiara nel prossimo paragrafo, così come quella della derivazione verso il circuito di trigger. Il preamplificatore P.A. è seguito dallo stadio finale di amplificazione che moltiplica per un ulteriore fattore la tensione, fino a portarla ai valori necessari per la deflessione. Una particolarità di questo stadio finale è che la ddp  $V_0$  è fornita alle placchette come  $\frac{V_0}{2}$  e  $-\frac{V_0}{2}$  rispetto al comune in modo tale che il potenziale medio delle placchette rimanga a zero (si veda il paragrafo precedente, Fig.9).

Torniamo brevemente sul problema delle bande passanti: le placchette deflettrici, essendo due

conduttori estesi e affacciati, costituiscono un carico capacitivo per l'amplificatore finale, dell'ordine della decina di  $pF$ ; tale carico è senz'altro trascurabile a frequenze basse, ma a frequenze alte può essere non indifferente: per  $f = 100MHz$ ,  $|\frac{1}{j\omega c}| = \frac{1}{2\pi \cdot 10^8 \cdot 10^{-11}} \approx 150\Omega$ . Pertanto l'amplificatore finale oltre a dover trattare ddp elevate deve anche avere una impedenza di uscita sufficientemente bassa, così da contenere l'effetto del carico capacitivo che tende a provocare una attenuazione del segnale ed anche un suo slittamento di fase; tutto ciò andrebbe a compromettere la fedeltà della riproduzione dei segnali alle alte frequenze.

In genere un oscillografo possiede almeno due canali di ingresso; nel funzionamento X-Y, un canale comanda le placchette verticali (Y) e un altro comanda quelle orizzontali (X). Nell'impiego più frequente, il segnale di interesse è inviato al canale Y, mentre sul canale X è l'oscillografo medesimo a inviare una ddp opportuna in modo da riprodurre l'andamento della ddp sul canale Y in funzione del tempo. Guardiamo come questo è realizzato.

#### 4.— *La base dei tempi e il circuito di trigger*

Nella Fig.12 sono rappresentate, con lo stesso asse dei tempi, due forme d'onda di cui la prima rappresenta la ddp applicata dagli amplificatori alle placchette verticali, proporzionale quindi alla ddp all'ingresso, e l'altra è invece la ddp applicata alle placchette di deflessione orizzontale. Supponiamo che l'ampiezza della ddp inviata alle placchette orizzontali sia quella corrispondente a uno spostamento di tutta la dimensione x dello schermo (generalmente 10 cm). Consideriamo per ora l'intervallo di tempo fra  $T_1$  e  $T_2$ ; poiché la ddp applicata alle placchette orizzontali cresce linearmente col tempo, il fascetto si sposta nella direzione x con la stessa legge, mentre lungo l'asse y esso compie gli spostamenti dovuti alla sinusoide presente all'ingresso Y. Pertanto la porzione di sinusoide compresa fra  $T_1$  e  $T_2$  comparirà sullo schermo, esattamente così come è disegnata in figura se le placchette orizzontali sono collegate in modo che una ddp  $V_x$  positiva produca una deflessione verso destra guardando lo schermo (l'ampiezza lungo y dipenderà ovviamente anche dalla selezione effettuata sulla manopola della portata Y, oltre che dall'ampiezza del segnale). Al tempo  $T_2$  il fascetto, giunto al bordo destro dello schermo, tornerà rapidamente all'estremo sinistro. Al tempo  $T_3$  l'operazione si ripete, iniziando come si vede dallo stesso valore che la forma d'onda sull'asse y aveva assunto in  $T_1$ , cioè quando la ddp ha lo stesso valore e anche la stessa pendenza. Pertanto da  $T_3$  a  $T_4$  avviene una seconda *spazzolata* dello schermo che traccia una immagine esattamente identica alla precedente. Si ottiene così, ripetendo continuamente l'operazione, una immagine persistente sullo schermo. La forma d'onda rappresentata nella parte inferiore della Fig.12 è la ddp che un circuito dell'oscillografo, detto *base dei tempi*, applica alle placchette orizzontali per avere la rappresentazione della ddp all'ingresso Y in funzione del tempo; essa è detta, a causa della sua forma, *dente di sega* (*saw-tooth*). Si osservi intanto che con una forma d'onda periodica si può avere un'immagine ben visibile sullo schermo anche con una modesta velocità di scrittura, perché lo spazzolamento della stessa porzione di segnale viene continuamente ripetuto; velocità di scrittura elevate servono soprattutto quando si vogliono vedere impulsi di breve durata che siano o singoli o a cadenza molto lenta.

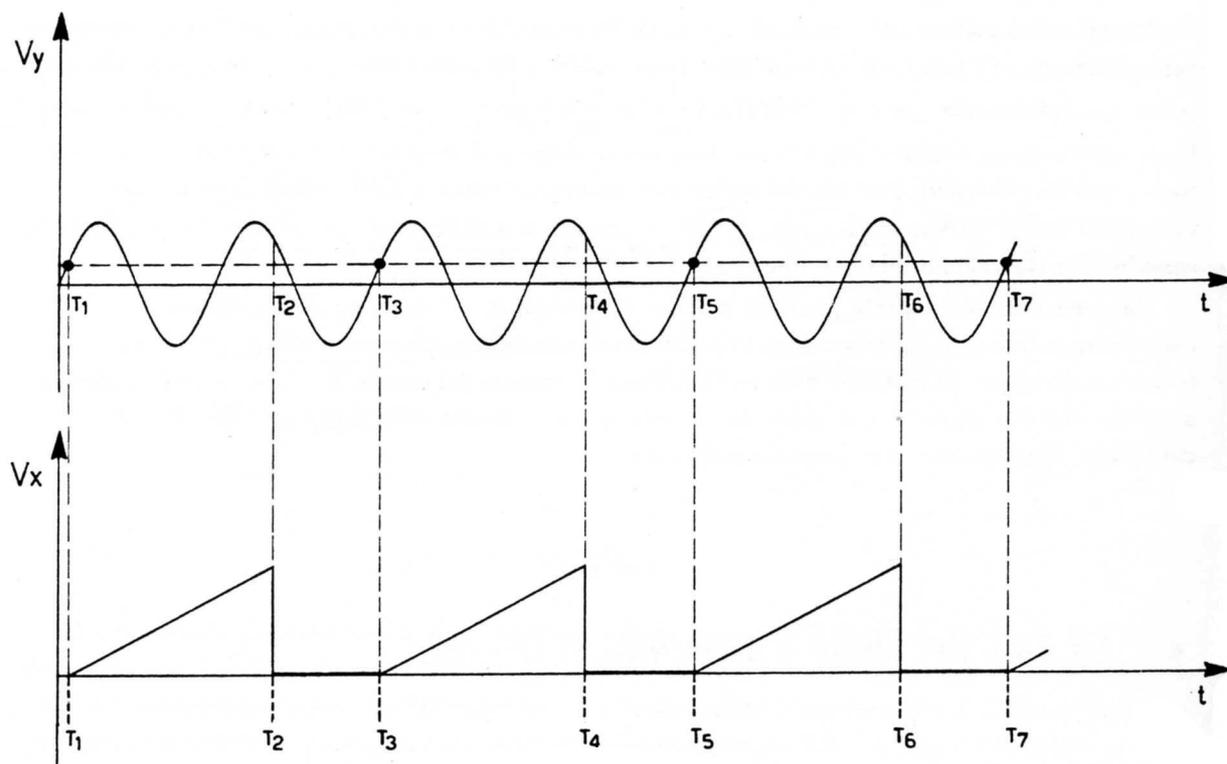


Fig.VIII.12

E' opportuno avere la possibilità di variare la velocità di scansione sull'asse x, a seconda della frequenza del segnale sull'asse y; per far ciò il circuito della base dei tempi varia la pendenza del dente di sega, lasciando l'ampiezza inalterata; è così possibile avere una spazzolata completa dell'asse delle x in tempi diversi. La manopola che controlla questa funzione (comando della base dei tempi) reca appunto indicati i "s/cm" che corrispondono alle varie posizioni. Tipicamente si va da circa 1 s/cm fino a un valore che corrisponde in genere alla massima velocità di scrittura dell'oscillografo (ad esempio 20 ns/cm per un oscillografo da 50 MHz è un valore tipico). Per realizzare la forma d'onda a dente di sega, un metodo è quello di usare un integratore di Miller al cui ingresso sia inviata una corrente costante; cambiare il tempo di scansione significa in questo caso variare o il condensatore di reazione o la corrente che lo carica. La frazione del dente di sega a pendenza costante è detta *rampa* (*ramp* in inglese); poiché solo durante la rampa viene prodotta l'immagine di interesse, un circuito apposito (circuito di *blanking*) fa in modo che, durante tutte le fasi del dente di sega diverse dalla rampa, l'intensità del fascio sia ridotta a zero; ciò viene fatto polarizzando negativamente, in maniera pressoché istantanea, la griglia controllo del cannone elettronico; si evitano così indesiderati illuminamenti durante il ritorno del fascetto all'origine e una sgradevole intensità nel punto dell'origine stessa. La frequenza del dente di sega non può essere fissa; abbiamo già visto che essa deve essere "agganciata" alla frequenza di ripetizione del segnale presente all'ingresso Y; infatti, qualora la rampa, in presenza di un segnale periodico, non partisse sempre in coincidenza con lo stesso valore e la stessa pendenza del segnale sull'ingresso Y, sullo schermo, anziché un'immagine persistente (somma di tante immagini ognuna identica all'altra), avremmo una presentazione di immagini più o meno incoerenti. Il cosiddetto *circuito di trigger* (grilletto) dell'oscillografo ha proprio questa funzione: esso riconosce quando il segnale Y supera una certa soglia (*level*) ed ha una determinata pendenza (*slope*) e, se non è già in atto una scansione, fa partire la rampa. Sul circuito di trigger si può agire dall'esterno scegliendo la pendenza (+ o -) e il livello; il

circuito di trigger opera su un segnale derivato da una uscita dal primo stadio di amplificazione prima del ritardo sul canale Y (vedi Fig.11). La funzione del ritardo (circa  $100 \text{ ns}^*$ ) è proprio quella di fare in modo che almeno ai tempi di scansione più brevi la immagine contenga anche la porzione di segnale che ha dato luogo alla partenza della rampa; infatti, dall'istante di riconoscimento delle condizioni di trigger valido alla partenza della rampa, intercorre necessariamente un certo lasso di tempo e la presentazione dell'immagine sullo schermo risulterebbe troncata all'inizio della scansione. Il ritorno a zero della tensione massima della rampa è in genere molto breve, principalmente per ridurre i tempi morti nella presentazione; il ritorno a zero nel caso che la base dei tempi sia realizzata con un integratore di Miller, corrisponde alla scarica veloce del condensatore caricato a corrente costante durante la salita della rampa medesima.

## 5.— I comandi dell'oscillografo

In questo paragrafo descriveremo alcuni controlli essenziali o almeno molto utili per un intelligente utilizzo dell'oscillografo. Tralasciamo la descrizione di molti altri o perché di scarso utilizzo nelle applicazioni più correnti o perché particolari di certi strumenti e non diffusi universalmente.

Abbiamo già visto che fra i vari controlli riguardo all'immagine, vi sono la intensità (che regola il potenziale della griglia controllo), il fuoco (che regola il potenziale del primo anodo). Abbiamo anche già descritto i controlli di sensibilità sull'ingresso Y; analogo comando, ma talvolta più limitato come gamma, si trova sull'ingresso X, attivo quando è esclusa la base dei tempi interna. Della base dei tempi è già stato detto, così come della possibilità di regolare la soglia e la pendenza per l'intervento del trigger. Quanto al comando di trigger, esso ha almeno altre tre posizioni che sono assai utili: la posizione "LINE", ovvero la sincronizzazione della base dei tempi con l'alimentazione della rete (cioè la tensione a  $50 \text{ Hz}$   $220 \text{ V}$ , in inglese *line*), la posizione "AUTO" e la posizione "EXT". Nel primo caso la rampa parte quando la tensione alternata di alimentazione dell'oscillografo, ovvero la rete, assume, ad esempio, il valore di zero *Volt*; una ddp sinusoidale qualsiasi avrà una relazione di fase completamente a caso e non stabile con la ddp di rete; la sincronizzazione con la rete darà luogo a scansioni scorrelate col segnale all'ingresso Y, a meno che non esista nel segnale almeno una componente che sia direttamente dovuta alla rete; questo ad esempio può accadere se il circuito fra due terminali del quale è prelevata la tensione applicata all'ingresso Y, presenta un accoppiamento induttivo o capacitivo con il circuito di distribuzione della rete; in questo caso il segnale, o almeno una sua componente, risulterà in fase con il trigger e darà luogo ad una immagine persistente sullo schermo; poiché questi effetti spuri dovuti agli accoppiamenti con la rete sono indesiderati e vanno eliminati, la sincronizzazione con la frequenza di rete aiuta enormemente la diagnosi e quindi anche la cura del problema. Nella posizione di trigger AUTO, se all'ingresso dell'oscillografo è presente una ddp che dà luogo a segnali di trigger, un circuito opportuno forza il livello della soglia a zero, cosicché la scansione parte non appena la ddp supera il valore di zero *Volt*, indipendentemente dal valore del livello impostato dall'utente; in assenza di segnali di trigger, oppure quando la loro frequenza è inferiore a qualche decina di *Hz*, il trigger AUTO fa partire la rampa a cadenza fissa. Questa posizione del trigger è particolarmente utile quando con l'oscillografo si vogliono osservare livelli di tensione continua, che non sono in grado di far scattare il circuito di trigger, sensibile solo alle variazioni della ddp di ingresso. Quando il comando del trigger è nella posizione "EXT", il

---

\* ritardi di valore molto maggiore comportano distorsioni del segnale e non sono quindi utilizzati.

trigger non interviene sulla ddp all'ingresso Y, ma su un ulteriore segnale applicato dall'utente a due terminali contrassegnati da una analoga sigla (EXT). Vedremo nel seguito del corso l'utilità di questo comando.

La posizione dell'origine degli assi x e y, che in assenza di segnale è nel centro dello schermo, può essere controllata tramite due comandi che agiscono indipendentemente sulle due coppie di placchette applicando delle tensioni di "polarizzazione" continue, alle quali poi si vanno a sommare i segnali veri e propri (controlli di *Posizione X* e *Posizione Y*). Ad esempio il dente di sega vero e proprio non è esattamente come mostrato nella Fig.12, ma in realtà è la somma di due tensioni, una negativa che sposta tutto a sinistra il fascetto e un'altra, il dente di sega come noi abbiamo disegnato, con la rampa che inizia dal livello zero di tensione. I controlli di posizione sono utilissimi, in quanto consentono di disporre la forma d'onda dove l'utente ritiene più opportuno, per esempio allo scopo di ridurre gli errori di lettura delle tensioni: la lettura delle ampiezze lungo x e y si fa infatti confrontando l'immagine che si forma sullo schermo con un reticolo inciso sul medesimo; il controllo dello spostamento dell'immagine consente di sfruttare meglio le divisioni del reticolo.

Talvolta accade che, proprio a causa di questi gradi di libertà, il segnale sia fuori del campo visivo; riottenere l'immagine, lavorando alla cieca, potrebbe non essere banale; esiste però un pulsante ("*beam finder*") che, premuto, riporta il segnale entro il campo visivo, mantenendolo pur sempre fuori centro e mostrando così in quale verso occorre muovere i controlli di posizione X e Y; l'effetto è ottenuto diminuendo di un fattore costante tutte le tensioni applicate alle placchette.

Tutti i moderni oscillografi di un livello anche solo discreto hanno almeno due ingressi  $Y_1$  e  $Y_2$ , cioè, come si dice, sono oscillografi a doppia traccia; il cannone continua ad essere singolo, ma l'oscillografo può presentare sullo schermo due tracce, con lo stesso asse dei tempi, ognuna riferita a uno dei due canali  $Y_1$  e  $Y_2$ . Ciò può essere ottenuto in due maniere diverse: in un modo di funzionamento (*ALTERNATO*) l'oscillografo in una spazzolata lungo x riproduce sull'asse y la ddp applicata al canale  $Y_1$ , nella successiva quella del canale  $Y_2$  e poi nuovamente  $Y_1$  e così via. In questo tipo di funzionamento, quando viene presentato  $Y_1$ , all'amplificatore verticale viene applicata, tramite un commutatore elettronico, la ddp presente all'ingresso  $Y_1$  e viceversa per  $Y_2$ . I due canali hanno il partitore di ingresso e il preamplificatore ognuno indipendente dall'altro. Se il tempo di una spazzolata è breve rispetto al tempo di persistenza dell'immagine sulla retina (o sul fosforo), si ottengono due tracce apparentemente contemporanee ed entrambe chiaramente visibili. Per tempi di scansione così lenti che percepiremmo questa alternanza della scansione e la contemporaneità della presentazione non sarebbe neppure apparente, conviene usare il modo (*CHOPped*) durante il quale, all'interno di una singola spazzolata l'oscillografo commuta sull'asse y i segnali  $Y_1$  e  $Y_2$  in rapida successione, spegnendo il fascio durante le commutazioni; se la cadenza con cui l'oscillografo commuta fra un canale e l'altro è molto alta rispetto all'inverso del tempo di scansione prescelto, i segnali appaiono continui; solo per tempi di scansione molto brevi, dove è da preferire il funzionamento "alternato", si osserva la seghettatura dei segnali.

## 6.— *L'oscillografo digitalizzatore*

Descriviamo ora un apparecchio di progettazione assai recente, che ha funzioni estremamente simili all'oscillografo e che potrebbe in un futuro prossimo anche soppiantarlo come strumento di utilizzo generale nei laboratori: l'*oscillografo digitalizzatore*. In breve, si tratta di un rapidissimo convertitore analogico-digitale (*fast digitizer*), in genere a pochi bit (6-8), che campiona la tensione

di ingresso in continuazione e a intervalli di tempo molto ravvicinati (in alcuni modelli fino a  $10^9$  campionamenti al secondo) e immagazzina il risultato degli ultimi  $N$  campionamenti precedenti a quello in corso in una memoria aggiornabile in maniera molto rapida;  $N$  può essere fino a qualche migliaio, tipicamente 512 o 1024. L'informazione numerica così immagazzinata è poi presentata, dietro comando di un opportuno circuito di trigger, su uno schermo televisivo o oscillografico. La presentazione, soprattutto se i bit di conversione sono 6 ( $\frac{1}{64}$  di risoluzione) può soffrire di qualche problema di quantizzazione, ma a parte questo il segnale viene presentato come in un oscillografo tradizionale. Fra i vantaggi rispetto a un oscillografo tradizionale, c'è il fatto che il raggiungimento della banda passante voluta è ottenuto quasi esclusivamente agendo sulla parte elettronica (fast digitizer e memoria veloce) e non richiede tubi catodici di caratteristiche altrettanto spinte; progressi in termini di banda passante non sono quindi inattesi, perché l'evoluzione della tecnica negli ultimi anni lascia pensare che gli sviluppi dell'elettronica consentiranno ulteriori progressi e riduzione dei costi, mentre nel campo dei tubi oscillografici le prospettive non sembrano oramai più promettenti. Inoltre, nell'oscillografo digitalizzatore l'informazione immagazzinata in forma numerica, anche se con precisione per ora limitata dai pochi bit del convertitore, può essere successivamente acquisita e trattata quantitativamente da altri sistemi di elaborazione, e non solo presentata sullo schermo; infine, il fatto che il convertitore lavori in continuazione e aggiorni solo parte della memoria ad ogni campionamento, consente, una volta dato l'assenso alla presentazione con un circuito analogo a quello di trigger dell'oscillografo convenzionale, di presentare sullo schermo non solo i campionamenti successivi al trigger, ma anche numerosi campionamenti ad esso precedenti (fino a qualche centinaio, comunque limitato solo dalle prestazioni della memoria del dispositivo). Quest'ultima operazione, detta di *pre-trigger*, è di fatto praticamente irrealizzabile negli oscillografi tradizionali, almeno su tutta la gamma della base dei tempi; in essi infatti il ritardo introdotto prima dell'amplificatore finale (vedi §4) è efficace solo per scansioni molto rapide e di fatto inessenziale per la presentazione con scansioni lente.

#### NOTA BIBLIOGRAFICA

Buone trattazioni dell'argomento si possono trovare su **TE 57** e **LA 57**. Un approccio particolarmente curato dal punto di vista didattico si trova su "La Fisica di Berkeley" – Laboratorio 2 – Zanichelli (1977). Orientate più che altro per gli studenti di ingegneria, ma non per questo non consigliabili, sono le trattazioni di **MA 78**, **BE 82**; particolarmente curato sull'argomento è il Cap. 2 di **CO 83**. Una ottima descrizione del funzionamento dell'oscillografo si trova su **CO 85**. Un possibile campo di approfondimento può essere lo studio degli articoli originali sul meccanismo della carica spaziale:

- a) Child: "Discharge from hot CaO"  
Phys. Rev. XXXII (1911) **492**
- b) Langmuir: "The effect of space charge and residual gas  
on thermionic currents in high vacuum"  
Phys. Rev. II serie, vol II (1913) **450**

Per sapere qualcosa di più sulle lenti elettrostatiche si può consultare **TE 50** (sect. 4.15).