

IX

LE CORRENTI ALTERNATE

1. – Definizioni

Fino ad ora abbiamo studiato approfonditamente le reti lineari solo nel caso in cui erano presenti generatori di tensione (o corrente) continua; tutt'al più abbiamo considerato i casi in cui i generatori venivano accesi o spenti e abbiamo studiato il comportamento del sistema nel cosiddetto *transitorio*. In questo capitolo vedremo che disponendo di una rete lineare, nella quale cioè siano presenti solo resistori, induttanze, mutue induttanze e condensatori e eccitando il sistema con un generatore di fem del tipo $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$ posto in un ramo qualsiasi (v_0 , ω e α costanti), si ottiene una soluzione a regime per la corrente nel ramo generico r del tipo $i_r = i_{r0} \cos(\omega t + \alpha + \varphi_r)$ con i_{r0} e φ_r costanti e esprimibili in funzione di v_0 e delle varie resistenze, induttanze, mutue induttanze e capacità presenti nella rete.

Le correnti e le fem che variano sinusoidalmente in funzione del tempo sono anche dette *correnti e fem alternate*; più in generale una grandezza si dice *alternata* quando gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} g(t+T) = g(t) \\ \bar{g} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(t') dt' = 0 \end{cases} \quad (\text{IX.1})$$

cioè è una funzione periodica del tempo (con periodo T) e a media nulla. Tornando al caso in cui $v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$, diamo qualche definizione: v_0 è detta *ampiezza* o *valore di picco*, ω è detta *pulsazione* e vale $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (*rad/s*), $f = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ è detta *frequenza* (*oscillazioni al secondo* o *Hertz*, simbolo *Hz*), α è detta *fase iniziale* o *angolo di fase* o *sfasamento*, $\omega t + \alpha$ è la *fase*. In argomento di definizioni, il *valore quadratico medio* o *valore efficace* di v , v_{eff} (in inglese v_{rms} , *root mean square*) è dato dalla seguente relazione:

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v^2(t') dt' = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_0^2 \cos^2(\omega t' + \alpha) dt' = \frac{v_0^2}{2} \quad (\text{IX.2})$$

Si noti che le medie fatte su un periodo coincidono con le medie fatte su un tempo $\theta \gg T$; infatti il contributo alla media derivante dalla frazione incompleta del periodo dà un contributo che tende a zero come $\frac{T}{\theta}$. L'importanza di studiare in dettaglio il comportamento delle reti in presenza di eccitazioni sinusoidali (nel seguito dove non ci sia ambiguità diremo anche noi "alternate") deriva principalmente da due fatti, uno di ordine pratico e un altro di carattere fondamentale. Il fatto pratico è che non è possibile procedere in qualunque campo dell'elettrotecnica e dell'elettronica senza conoscere approfonditamente questo argomento, poiché la tensione alternata, principalmente a causa della sua facile *trasformabilità* e relativa semplicità di produzione, è quella che viene quasi

universalmente adottata per la distribuzione di energia elettrica per uso industriale e domestico. Il motivo di carattere più fondamentale è che qualunque grandezza periodica $f(t)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ purché soddisfi a certi requisiti di continuità, che nei casi di nostro interesse supporremo soddisfatti, può essere messa sotto forma (sviluppo in serie di Fourier):

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \operatorname{sen}(n\omega t) + b_n \operatorname{cos}(n\omega t)] \\ a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \operatorname{sen}(n\omega t') dt' & n = 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \operatorname{cos}(n\omega t') dt' & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (\text{IX.3})$$

cioè $f(t)$ può sempre esprimersi come somma di contributi ognuno puramente sinusoidale, con frequenza pari a multipli della frequenza fondamentale ω (*armoniche*)*. Ciò in particolare vale se $f(t)$ è una fem applicata in un ramo di una certa rete lineare; vedremo che questo fatto, insieme alla *linearità* delle equazioni che regolano l'andamento delle correnti, fa sì che, per avere la soluzione per la corrente nei vari rami della rete, è sufficiente conoscere lo sviluppo di Fourier della $f(t)$ e risolvere il circuito separatamente per le varie armoniche. La corrente complessiva in un ramo qualunque sarà data dalla somma delle varie correnti in quel ramo, ognuna associata alle rispettive armoniche. La semplicità del metodo risiede nel fatto che la soluzione per ognuna delle armoniche si basa su metodi standard (che impareremo nei prossimi paragrafi), sostanzialmente identici per ognuna di esse. Concludendo possiamo quindi dire che conoscere la risposta di una rete lineare ad una eccitazione sinusoidale di fatto corrisponde a conoscere la risposta della rete a qualunque eccitazione periodica.

2.— Le leggi di Kirchhoff e le correnti alternate

Supponiamo di disporre di una rete *lineare*, che contenga cioè solo resistori, induttanze, mutue induttanze e condensatori; ammettiamo anche che le costanti siano concentrate, ovvero che nelle bobine non ci sia flusso di campo magnetico disperso e fra le armature dei condensatori l'induzione sia completa; infine le dimensioni della rete siano piccole rispetto a cT dove c è la velocità della luce e $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il periodo della tensione alternata $v(t) = v_0 \operatorname{cos}(\omega t + \alpha)$ applicata da un generatore di fem in un ramo della rete. In queste ipotesi si può far vedere che vale ancora la prima legge di Kirchhoff o dei nodi, cioè siamo in un caso quasi-stazionario ($\operatorname{div} \vec{j} = 0$) e che la circuitazione del campo elettrico lungo una qualunque linea chiusa che passi all'esterno del circuito è nulla, ed è quindi possibile trovare una estensione della seconda legge di Kirchhoff o delle maglie.

Senza entrare in dettagli, possiamo notare che la condizione sulle dimensioni della rete è collegata al fatto che, se così non fosse, non si potrebbe più ammettere come istantanea la propagazione del campo elettrico e magnetico; non si potrebbe, in particolare, trattare il nostro sistema di conduttori in maniera quasi statica e non potremmo considerare il campo elettrico fuori dei conduttori come elettrostatico e quindi irrotazionale. Il fatto che le costanti siano concentrate significa, per quanto riguarda le capacità, che $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$ si può verificare solo in un volume finito di un ramo di una rete (fra le armature di un condensatore) mentre all'esterno di questi volumi "singolari" \vec{j} è solenoidale,

* lo sviluppo (3) se la $f(t)$ è alternata non contiene il termine con $n = 0$ che è invece presente se la $f(t)$ è a media non nulla.

in particolare nei nodi; per le induttanze la presenza di costanti concentrate implica che il campo di induzione magnetica è confinato nell'induttanza e così il campo elettrico rotazionale dovuto alla variazione del flusso di \vec{B} .

Un'altra condizione per poter trattare in maniera quasi statica il problema, è che i tempi di redistribuzione delle cariche superficiali, quelle che assicurano i campi elettrici nel nostro sistema di conduttori, siano trascurabili rispetto ai tempi ($\approx \frac{1}{\omega}$) in cui le correnti e le tensioni macroscopiche cambiano apprezzabilmente. Si tenga presente che i tempi caratteristici per l'adeguamento delle cariche in un conduttore sono dell'ordine di $10^{-18}s$ e quindi la condizione di cui sopra è molto facilmente soddisfatta anche per pulsazioni elevate.

In un qualunque nodo, in cui confluiscono n correnti, della rete lineare che stiamo considerando dovrà allora essere, come nel caso delle correnti continue:

$$\sum_k i_k = 0 \quad (\text{IX.4})$$

con la solita convenzione di prendere con un segno le correnti entranti nel nodo e con l'altro quelle uscenti. Come abbiamo già anticipato e come dimostreremo un po' più avanti, la soluzione per le varie correnti nei rami è del tipo:

$$i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$$

Quindi, supponendo di avere un nodo in cui confluiscono 3 rami (Fig.1), avremo:

$$\begin{cases} i_1 = i_{10} \cos(\omega t) \\ i_2 = i_{20} \cos(\omega t + \varphi) \\ i_3 = i_{30} \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \quad (\text{IX.5})$$

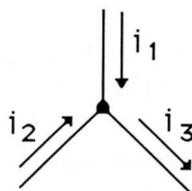


Fig.IX.1

Senza perdere in generalità, l'origine dei tempi è stata scelta in modo da avere la fase iniziale di i_1 uguale a zero. Supponiamo di conoscere i_1 e i_2 (cioè i_{10} , i_{20} , φ) e di voler determinare i_3 (cioè i_{30} e ψ). La legge dei nodi (4) è in grado di risolvere il problema; infatti la relazione $i_1(t) + i_2(t) = i_3(t)$ deve valere per ogni t e considerando allora $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$, otteniamo:

$$\begin{cases} i_{10} + i_{20} \cos \varphi = i_{30} \cos \psi \\ i_{20} \sin \varphi = i_{30} \sin \psi \end{cases} \quad (\text{IX.6})$$

Da queste si ricava la soluzione cercata:

$$\begin{cases} i_{30}^2 = i_{10}^2 + i_{20}^2 + 2i_{10}i_{20} \cos \varphi \\ \tan \psi = \frac{i_{20} \sin \varphi}{i_{10} + i_{20} \cos \varphi} \end{cases} \quad (\text{IX.7})$$

3.— Rappresentazione delle grandezze alternate tramite vettori rotanti e numeri complessi

Poiché le grandezze alternate, per esempio le correnti dell'ultimo esempio, sono definite da due numeri (ampiezza e fase) è possibile associare ad ognuna di esse un vettore che, opportunamente definito, ci consente notevoli semplificazioni nelle operazioni fra queste grandezze.

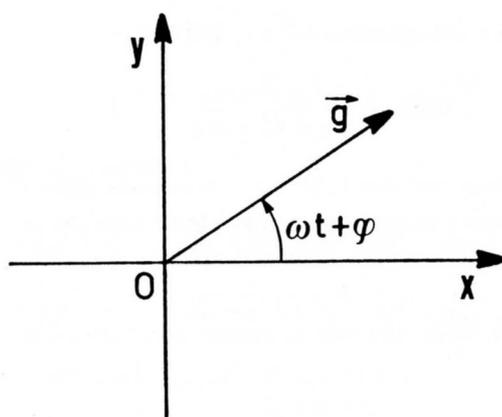


Fig.IX.2

Ciò viene fatto ricorrendo ai cosiddetti vettori rotanti: ad ogni grandezza alternata nella forma $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ si associa un vettore \vec{g}_0 di modulo uguale a g_0 e applicato nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y e formante un angolo (crescente antiorario) con l'asse delle x pari a $(\omega t + \varphi)$, cioè alla fase (Fig.2). La proiezione di \vec{g}_0 sull'asse delle x dà, istante per istante, il valore di $g(t)$.

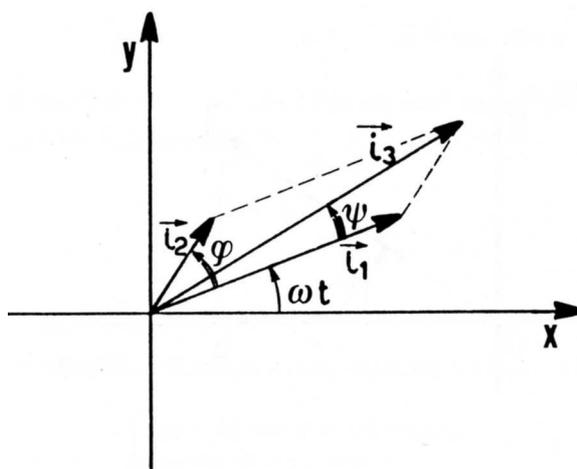


Fig.IX.3

L'utilità del metodo dei vettori rotanti si comprende quando si vogliono sommare o sottrarre

grandezze alternate omogenee, come ad esempio accade applicando la legge dei nodi. Con riferimento all'esempio del paragrafo precedente, determiniamo i_3 con questo metodo. Costruendo \vec{i}_1 e \vec{i}_2 secondo le regole dette prima, abbiamo la situazione in Fig.3. Si vede che i_3 si ottiene facendo proprio la somma dei due vettori \vec{i}_1 e \vec{i}_2 e poi proiettando \vec{i}_3 così ottenuto sull'asse x, ovvero come se la legge dei nodi si applicasse direttamente ai vettori associati alle correnti (vedi Fig.1); infatti dal teorema di Carnot discende:

$$i_{30}^2 = i_{10}^2 + i_{20}^2 - 2i_{10}i_{20} \cos(\pi - \varphi) = i_{10}^2 + i_{20}^2 + 2i_{10}i_{20} \cos \varphi \quad (\text{IX.8})$$

e proiettando i vettori su \vec{i}_1 prima e ortogonalmente a \vec{i}_1 poi si ha:

$$\tan \psi = \frac{i_{20} \sin \varphi}{i_{10} + i_{20} \cos \varphi} \quad (\text{IX.9})$$

La (8) e la (9) coincidono rispettivamente con la prima e la seconda delle (7).

Il metodo dei vettori rotanti trova vasto impiego nell'elettrotecnica; per lo studio delle correnti alternate che ci proponiamo di fare è però più adatto il metodo seguente che fa ricorso ai *numeri complessi*.

Richiamiamo intanto alcune nozioni riguardo ai numeri complessi. Un numero complesso nella sua *forma algebrica* si scrive come

$$z = a + jb \quad (\text{IX.10})$$

dove $j = \sqrt{-1}$, unità immaginaria, e a e b sono reali. a è detta parte reale e b parte immaginaria del numero complesso: $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad (\text{IX.11})$$

è detto *modulo*. Si definisce *coniugato* di z , $\bar{z} = a - jb$.

Al numero complesso z si può far corrispondere un vettore (P-O) applicato nell'origine di un sistema di assi cartesiani e avente componente a sull'asse delle x (detto *asse reale*) e componente b sull'asse y (detto *asse immaginario*); la stretta parentela con i vettori rotanti è evidente.

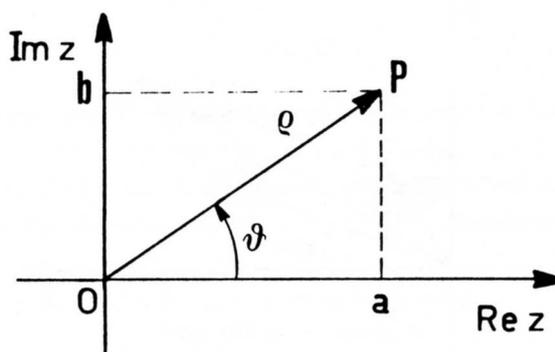


Fig.IX.4

Indicando (Fig.4) con θ l'angolo fra l'asse reale e il vettore così costruito, si può scrivere:

$$z = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (\text{IX.12})$$

Ricordando le formule di Eulero, il fattore fra parentesi può essere messo nella forma:

$$\exp j\theta = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (\text{IX.13})$$

e pertanto:

$$z = \rho \exp j\theta \quad \theta = \operatorname{atan} \frac{b}{a} \quad (\text{IX.14})$$

θ è detta *fase* del numero complesso z . Dati due numeri complessi $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2} & \rho_2 = \sqrt{c^2 + d^2} \\ \theta_1 = \operatorname{atan} \frac{b}{a} & \theta_2 = \operatorname{atan} \frac{d}{c} \end{cases} \quad (\text{IX.15})$$

si possono definire le seguenti operazioni

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d) = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \cdot \exp i\theta_s & \theta_s = \operatorname{atan} \frac{b + d}{a + c} \\ z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \cdot \exp i\theta_d & \theta_d = \operatorname{atan} \frac{b - d}{a - c} \\ z_1 \cdot z_2 = ac - bd + j(ad + bc) = \rho_1 \rho_2 \cdot \exp i(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{z_1}{z_2} = [ac + bd + j(bc - ad)] / (c^2 + d^2) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \exp i(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (\text{IX.16})$$

A una grandezza alternata $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \alpha)$ può essere associato il numero complesso $\mathcal{G} = g_0 \exp j(\omega t + \alpha)$ tale che la sua parte reale $\operatorname{Re}(\mathcal{G}) = g_0 \cos(\omega t + \alpha)$ sia proprio la grandezza di interesse. Nel seguito le grandezze complesse saranno sempre indicate con lettere maiuscole corsive. Sempre riferendosi all'esempio precedente si possono associare alle correnti i_1 , i_2 e i_3 le grandezze complesse

$$\mathcal{I}_1 = i_{10} \exp j\omega t \quad \mathcal{I}_2 = i_{20} \exp j(\omega t + \varphi) \quad \mathcal{I}_3 = i_{30} \exp j(\omega t + \psi) \quad (\text{IX.17})$$

che possono anche scriversi fattorizzando la dipendenza temporale:

$$\mathcal{I}_1 = i_{10} \exp j\omega t \quad \mathcal{I}_2 = i_{20} \exp j\varphi \cdot \exp j\omega t \quad \mathcal{I}_3 = i_{30} \exp j\psi \cdot \exp j\omega t \quad (\text{IX.18})$$

Vediamo ora che l'applicazione della legge dei nodi alle correnti complesse così definite, consente di ottenere direttamente il risultato (7); infatti:

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 \quad (\text{IX.19})$$

comporta

$$i_{10} + i_{20} \exp j\varphi = i_{30} \exp j\psi \quad (\text{IX.20})$$

Questa relazione fra numeri complessi dà luogo a due relazioni fra quantità reali:

$$\begin{cases} i_{10} + i_{20} \cos \varphi = i_{30} \cos \psi \\ i_{20} \operatorname{sen} \varphi = i_{30} \operatorname{sen} \psi \end{cases} \quad (\text{IX.21})$$

che coincidono con la (7).

Per la verità, non è tanto in esempi come questo che si vede l'utilità di introdurre le correnti e le differenze di potenziale complesse, quanto piuttosto nelle semplificazioni che si ottengono nella risoluzioni delle reti in alternata. Questo è quanto verrà mostrato nel paragrafo successivo.

4.— Le impedenze complesse

Guardiamo ora quali sono le relazioni che intercorrono fra le ddp alternate ai capi di una resistenza, una induttanza, un condensatore e la corrente che circola in questi elementi. Col simbolo di Fig.5

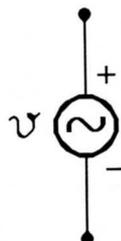


Fig.IX.5

si indica un *generatore ideale di fem alternata* del tipo $v = v_0 \cos \omega t$ (la fase iniziale del generatore si assume generalmente uguale a zero), cioè un dispositivo in grado di mantenere ai suoi capi (morsetti) una ddp pari appunto a $v_0 \cos \omega t$, indipendentemente dal circuito su cui esso è chiuso (il *carico*). I simboli “+” e “-”, che specificano quale dei due terminali è positivo rispetto all’altro quando v è positiva, in genere sono omessi, almeno quando non sorgono problemi di ambiguità. Un modo molto semplice, almeno concettualmente, di realizzare un generatore del genere, almeno per piccoli valori della corrente erogata, è quello di far ruotare a velocità angolare costante $\vec{\omega}$ una o più spire piane di sezione complessiva S , costituite di filo di resistenza trascurabile, in una regione dove è presente un campo magnetico \vec{B} omogeneo. Se \vec{B} è diretto come l’asse z e si sceglie la normale positiva alla spira e l’origine degli angoli come nelle Figg.6 a e b, in serie alle spire compare, secondo la legge di Faraday, una forza elettromotrice:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt} BS \sin \omega t = BS\omega \cos \omega t \quad (\text{IX.22})$$

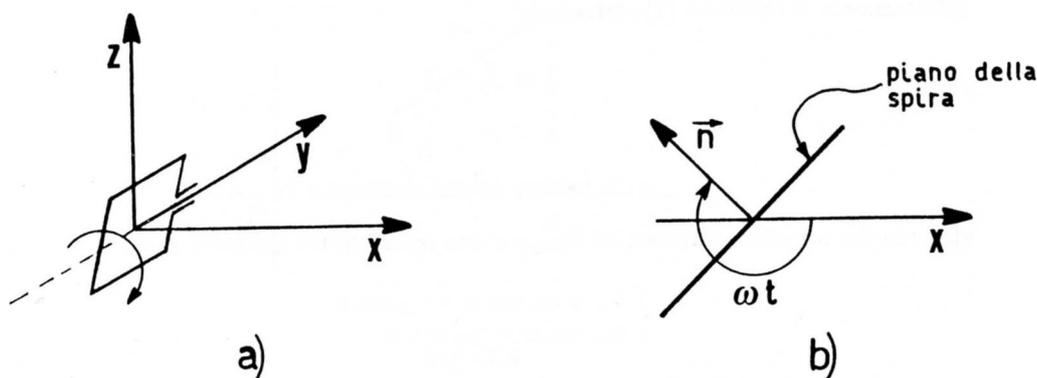


Fig.IX.6

In pratica un generatore di fem alternata da laboratorio non è mai fatto così; i generatori

a turbina nelle centrali elettriche si basano invece su questo principio e qualche dettaglio in più sull'argomento verrà dato nel Cap.XX,§5.

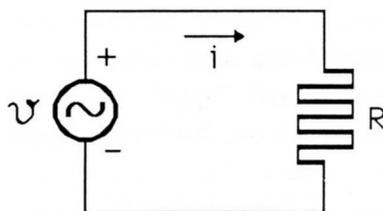


Fig.IX.7

Costruiamo con questo generatore la maglia di Fig.7. Il simbolo per R usato nella figura è quello più corretto per indicare una resistenza pura (per esempio esente da componenti induttive). Quando non ci sia ambiguità useremo il simbolo usuale a *zig-zag*. Poiché abbiamo supposto di poter trattare il nostro sistema di conduttori in maniera quasi-statica, varrà la seconda legge di Kirchhoff. Dovrà cioè essere:

$$v = iR \quad (\text{IX.23})$$

dove $v = v_0 \cos \omega t$ e R è il numero reale positivo che caratterizza la resistenza. Da questa equazione algebrica si ottiene:

$$i = \frac{v_0}{R} \cos \omega t \quad (\text{IX.24})$$

ovvero i è una corrente alternata di ampiezza pari al rapporto fra l'ampiezza di v e R e avente fase uguale a quella di v .

Avremmo anche potuto usare il formalismo dei numeri complessi, introducendo la fem complessa $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$, la cui parte reale è la fem effettivamente applicata e avremmo ottenuto:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{v_0}{R} \exp j\omega t \quad (\text{IX.25})$$

con

$$i = \text{Re}(\mathcal{J}) = \frac{v_0}{R} \cos \omega t \quad (\text{IX.26})$$

esattamente come la (24). Si vede così che anche usando il formalismo dei numeri complessi, continua a valere per le resistenze la legge di Ohm nella sua forma usuale (23).

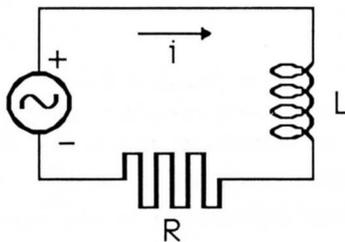


Fig.IX.8

Consideriamo ora il caso in cui in serie ad R sia posta anche una induttanza L (Fig.8). Questa volta la seconda legge di Kirchhoff non ci fornisce una equazione algebrica, ma piuttosto una

equazione differenziale, lineare a coefficienti costanti:

$$v_0 \cos \omega t - L \frac{di}{dt} = iR \quad (\text{IX.27})$$

A noi interessa la soluzione di regime, in quanto la soluzione dell'equazione omogenea associata, il *transitorio*, dopo un tempo più o meno breve successivo all'accensione del generatore, va a zero a causa del termine esponenziale $\exp(-\frac{R}{L}t)$ (vedi Cap.VII, §3). L'integrale particolare, corrispondente al termine forzante sinusoidale con pulsazione ω , lo ricerchiamo nella forma

$$i = i_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IX.28})$$

Sostituendo la (28) nella (27) si ottiene:

$$v_0 \cos \omega t = Ri_0 \cos(\omega t + \varphi) - i_0 L \omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IX.29})$$

Consideriamo i tempi $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$; otteniamo allora due equazioni:

$$\begin{cases} v_0 = Ri_0 \cos \varphi - i_0 L \omega \sin \varphi \\ 0 = -Ri_0 \sin \varphi - i_0 L \omega \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{IX.30})$$

che danno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \\ \tan \varphi = -\frac{\omega L}{R} \end{cases} \quad (\text{IX.31})$$

Per giungere al risultato (31), potevamo procedere anche in un altro modo, usando le grandezze complesse $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$ e $\mathcal{I} = i_0 \exp j(\omega t + \varphi) = \mathcal{I}_0 \exp j\omega t$ ($\mathcal{I}_0 = i_0 \exp j\varphi$) e risolvere l'equazione differenziale che lega fra loro queste grandezze. Possiamo seguire questo metodo poiché, essendo l'equazione differenziale *lineare*, il contributo aggiuntivo rispetto al termine forzante effettivo, cioè la parte immaginaria di $\mathcal{V} = jv_0 \sin \omega t$ resterà associato alla parte immaginaria della soluzione \mathcal{I} , mentre la parte reale di \mathcal{I} continuerà a coincidere con la nostra soluzione; la linearità dell'equazione differenziale comporta infatti che se il termine forzante è del tipo $F(t) = a \cdot F_1(t) + b \cdot F_2(t)$, la soluzione dell'equazione è data da $i(t) = a \cdot i_1(t) + b \cdot i_2(t)$ con i_1 soluzione dell'equazione con il solo termine forzante F_1 e i_2 soluzione con il solo F_2 .

Guardiamo i vantaggi che derivano da questo formalismo; l'equazione differenziale diventa ($\frac{d}{dt} \exp j\omega t = j\omega \exp j\omega t$):

$$\mathcal{V} = j\omega L \mathcal{I} + R \mathcal{I} = (j\omega L + R) \mathcal{I} \quad (\text{IX.32})$$

che può anche semplificarsi per dare

$$v_0 = j\omega L \mathcal{I}_0 + R \mathcal{I}_0 \quad (\text{IX.33})$$

cioè un'equazione algebrica nel campo complesso, vale a dire due equazioni nel campo reale che, come è immediato verificare, coincidono con le (30).

L'aver trasformato una equazione differenziale in una equazione algebrica è sicuramente un vantaggio; ma c'è di più: la relazione (32) è infatti passibile di una interpretazione dalla quale conseguono notevoli semplificazioni. La (32) può essere considerata infatti l'estensione alle correnti alternate della legge di Ohm, nel caso in cui, oltre ad una resistenza, sia presente in serie ad essa una induttanza L ; la "resistenza" da associare all'induttanza è $j\omega L$, cioè una grandezza puramente immaginaria che dipende anche da ω . Dovrebbe essere chiara la diversa prospettiva con cui la

relazione (32) interpreta la funzione dell'induttanza: mentre nella seconda legge di Kirchhoff come da noi scritta (27), la ddp ai capi di L era interpretata come una fem, qui essa assume il ruolo di una caduta dovuta alla corrente, ad essa proporzionale. Rimarchiamo che questa proporzionalità fra \mathcal{J} e \mathcal{V} vale solo per le grandezze complesse (per convincersene si provi a trovare la relazione fra i e la ddp "vera" ai capi di L).

Nel caso che si abbiano due circuiti accoppiati induttivamente accade qualcosa di simile, cioè nel circuito 2 si ha una caduta complessa $\mathcal{V}_{M2} = j\omega M \mathcal{J}_1$ dovuta alla corrente complessa $\mathcal{J}_1 = i_{10} \exp j(\omega t + \varphi_1)$ sul circuito 1 e reciprocamente una caduta nel circuito 1 $\mathcal{V}_{M1} = j\omega M \mathcal{J}_2$ dovuta alla corrente $\mathcal{J}_2 = i_{20} \exp j(\omega t + \varphi_2)$ che circola nel circuito 2; vale a dire si mantiene una relazione di proporzionalità fra una corrente e una ddp (entrambe complesse). Rimandiamo ancora di poco l'illustrazione degli altri vantaggi inerenti all'adozione di questo formalismo e piuttosto, per completare il quadro, consideriamo cosa accade quando un condensatore sia inserito in serie nel nostro circuito (Fig.9):

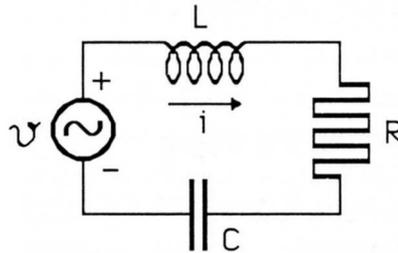


Fig.IX.9

L'equazione differenziale che si ottiene applicando la seconda legge di Kirchhoff, è:

$$v_0 \cos \omega t - L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = iR \quad (\text{IX.34})$$

che derivata una volta dà:

$$-v_0 \omega \sin \omega t = \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} \quad (\text{IX.35})$$

Anche in questo caso interessa la soluzione a regime, cioè l'integrale particolare, che ricerchiamo nella solita forma $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Sostituendo questa espressione nella (35) si ottiene

$$-v_0 \omega \sin \omega t = \frac{i_0}{C} \cos(\omega t + \varphi) - R i_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) - L i_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IX.36})$$

Considerando i tempi $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$ si ha:

$$\begin{cases} 0 = \frac{i_0}{\omega C} \cos \varphi - R i_0 \omega \sin \varphi - L i_0 \omega^2 \cos \varphi \\ -v_0 = -\frac{i_0}{\omega C} \sin \varphi - R i_0 \omega \cos \varphi + L i_0 \omega^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{IX.37})$$

che danno per i_0 e φ :

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \end{cases} \quad (\text{IX.38})$$

Guardiamo ora che forma assume la (34) quando si sostituisce $v = v_0 \cos \omega t$ con $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$ e $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ con $\mathcal{J} = i_0 \exp j\varphi \cdot \exp j\omega t = \mathcal{J}_0 \exp j\omega t$. Abbiamo allora:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{J}}{j\omega C} + j\omega L\mathcal{J} + R\mathcal{J} \quad (\text{IX.39})$$

Si noti che l'integrazione di $\mathcal{J}_0 \exp j\omega t$ dà $\mathcal{J}_0 \cdot \frac{\exp j\omega t}{j\omega}$. È facile vedere, portando avanti il conto algebrico e prendendo alla fine la parte reale di \mathcal{J} , che si ritrovano le (38).

La (39) ci dice che anche per un condensatore, nel caso di corrente sinusoidale, la ddp ai suoi estremi può essere espressa come la parte reale di una ddp complessa \mathcal{V}_C proporzionale ad \mathcal{J} ; il fattore di proporzionalità è immaginario puro e dipende inversamente da ω .

A questo punto il quadro è completo e possiamo definitivamente illustrare le conseguenze dell'introduzione delle grandezze complesse per trattare il regime sinusoidale delle correnti. La (39) intanto può essere scritta nella forma di una *Legge di Ohm estesa alle correnti alternate*, trattate con i numeri complessi, o come si dice, col *Metodo simbolico*:

$$\mathcal{V} = \mathcal{J}\mathcal{Z} \quad (\text{IX.40})$$

$$\mathcal{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (\text{IX.41})$$

La quantità complessa \mathcal{Z} prende il nome di *impedenza*. Nel caso di una induttanza, l'impedenza vale $\mathcal{Z}_L = j\omega L$, nel caso di un condensatore $\mathcal{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$, mentre nel caso di una resistenza si ha, ovviamente, $\mathcal{Z}_R = R$. Data l'identità formale fra l'espressione $\mathcal{V} = \mathcal{J}\mathcal{Z}$ e la legge di Ohm, nel campo delle correnti alternate, trattate col formalismo dei numeri complessi, varranno tutte le conseguenze che dalla legge di Ohm discendevano nel campo delle reti lineari in continua. In particolare le impedenze in serie si sommano e per le impedenze in parallelo si sommano gli inversi $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}^{-1}$ detti *ammettenze*. Data una combinazione qualunque di resistenze, condensatori e induttanze, è sempre possibile definire l'impedenza complessiva \mathcal{Z} rispetto a due terminali ed essa può mettersi in ogni caso nella forma generale $\mathcal{Z} = R + jX$ cioè come somma di una parte reale (*resistenza*) e una parte immaginaria detta *reattanza*.

Ora possiamo anche dare una semplice dimostrazione del fatto che, posto un generatore di fem sinusoidale $v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$ in un ramo qualunque in una rete lineare, che contenga cioè resistenze, induttanze, induttanze mutue e condensatori, la corrente in un qualunque ramo k della rete avrà un andamento del tipo $i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$. Infatti la relazione fra la corrente complessa \mathcal{J}_k nel ramo in studio e la fem complessa del generatore \mathcal{V} sarà del tipo $\mathcal{J}_k = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}_k}$ poiché una analoga relazione sussiste nelle reti resistive in continua alle quali si applicava un identico formalismo nel campo reale. La relazione sopra scritta comporta, esattamente come la (40), che la dipendenza dal tempo di \mathcal{J}_k è la stessa di \mathcal{V} , a meno di uno sfasamento, che è appunto ciò che dovevamo dimostrare.

Ricorrendo all'analogia con le reti in continua è stato banale dimostrare l'assunto; tuttavia non ci si faccia sfuggire la "vera" ragione di questo risultato, che va ricercata nel fatto che gli operatori che collegano le differenze di potenziale ai capi delle resistenze, induttanze e condensatori con le correnti che li attraversano sono *operatori lineari* (prodotto, derivata, integrale) e che pertanto la conoscenza delle correnti nei vari rami della rete comporta la soluzione di un sistema di *equazioni differenziali lineari e a coefficienti costanti*; da ciò consegue che l'equazione differenziale che collega i_k con v dovrà essere lineare e a coefficienti costanti; la soluzione a regime infine, cioè l'integrale particolare, avrà la forma $i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$ che sappiamo soddisfare l'equazione differenziale in studio, quando il termine forzante è sinusoidale con pulsazione ω .

Tornando all'analogia con i risultati che valevano in corrente continua, ricordiamo che fra le conseguenze della legge di Ohm e delle leggi di Kirchhoff ci sono tutti i teoremi sulle reti lineari che abbiamo ampiamente adoperato nel caso delle correnti continue; pertanto, considerando le correnti e le fem alternate come le parti reali di grandezze complesse definite come visto sopra, potremo trasferire tutto questo bagaglio di tecniche di calcolo e di risultati nel campo delle reti lineari eccitate da generatori di tensione o di corrente sinusoidali. *Mutatis mutandis*, in particolare sostituendo al concetto di resistenza quello di impedenza e associando alle grandezze alternate quelle complesse corrispondenti, varranno teoremi quali quello di Thévenin, di Norton, il Principio di Sovrapposizione, di Reciprocità e così via. Tutti i calcoli si potranno fare come nel caso delle correnti continue e solo alla fine, quando, ad esempio, vorremo sapere il valore effettivo di una corrente in un certo ramo k prenderemo la parte reale della corrente complessa \mathcal{J}_k calcolata per quel ramo. In particolare il Principio di Sovrapposizione assicura che in una rete lineare, contenente cioè solo resistenze, condensatori, induttanze e mutue induttanze e nella quale agiscano più generatori di tensione o sinusoidale o continua (di cui quelli sinusoidali non necessariamente tutti con la stessa pulsazione ω), la soluzione per le correnti nel generico ramo k potrà trovarsi come somma delle correnti associate ad ogni generatore singolo (con gli altri cortocircuitati). Ricordando lo sviluppo in serie di Fourier (3), che cioè ogni fem periodica, con periodo T , può sempre scriversi come la somma di una fem continua e di (in genere infinite) fem sinusoidali con pulsazione pari alle armoniche superiori della pulsazione base $\omega = \frac{2\pi}{T}$, possiamo dire di essere in grado di calcolare la risposta di una generica rete lineare all'eccitazione di un *qualsiasi generatore di fem periodica*.

Applichiamo su qualche esempio il formalismo delle impedenze e delle tensioni e correnti complesse. Tornando alla (40) con $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$ e $\mathcal{J} = i_0 \exp j\varphi \cdot \exp j\omega t$ e \mathcal{Z} generica:

$$\mathcal{Z} = R + jX \quad (\text{IX.42})$$

troviamo la relazione fra le ampiezze di \mathcal{V} e \mathcal{J} . Essendo il modulo di $\exp j\alpha = 1$ con α qualsiasi e valendo per i moduli: $|\mathcal{V}| = |\mathcal{Z}||\mathcal{J}|$, si ha:

$$v_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot i_0 \quad (\text{IX.43})$$

La (43) ci mostra in particolare che se una determinata impedenza \mathcal{Z} è costituita, ad una certa pulsazione ω , da una resistenza e una reattanza in valore assoluto uguali $R = |X|$, allora la ampiezza della corrente nell'impedenza \mathcal{Z} è $\sqrt{2}$ volte più piccola di quella che si avrebbe se, a parità di ddp, l'impedenza fosse costituita dalla sola R o dalla sola jX . Quanto allo sfasamento φ della corrente rispetto alla tensione, esso è ricavabile dalla (40) scritta come:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}} \quad (\text{IX.44})$$

La fase di \mathcal{J} è quindi uguale alla fase del numeratore meno la fase del denominatore. \mathcal{Z} può porsi nella forma:

$$\mathcal{Z} = |\mathcal{Z}| \exp j\varphi_z \quad (\text{IX.45})$$

e quindi

$$i_0 \exp j\varphi = \frac{v_0}{|\mathcal{Z}|} \exp(-j\varphi_z) \quad (\text{IX.46})$$

da cui:

$$\varphi = -\varphi_z = -\text{atan} \frac{X}{R} \quad (\text{IX.47})$$

vale a dire lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione è pari alla fase dell'impedenza cambiata di segno. Nel caso visto prima che $R = |X|$, allora lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione sarà pari a $\pm \frac{\pi}{4}$, a seconda del segno di X . Consideriamo i seguenti casi particolari delle (43) e (47):

a) una induttanza pura:

$$\mathcal{J}_L = \frac{\mathcal{V}}{j\omega L} \quad (\text{IX.48})$$

per cui

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\omega L} \\ \varphi = -\text{atan } \infty = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{IX.49})$$

cioè

$$\text{Re}(\mathcal{J}) = i = \frac{v_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega L} \text{sen } \omega t \quad (\text{IX.50})$$

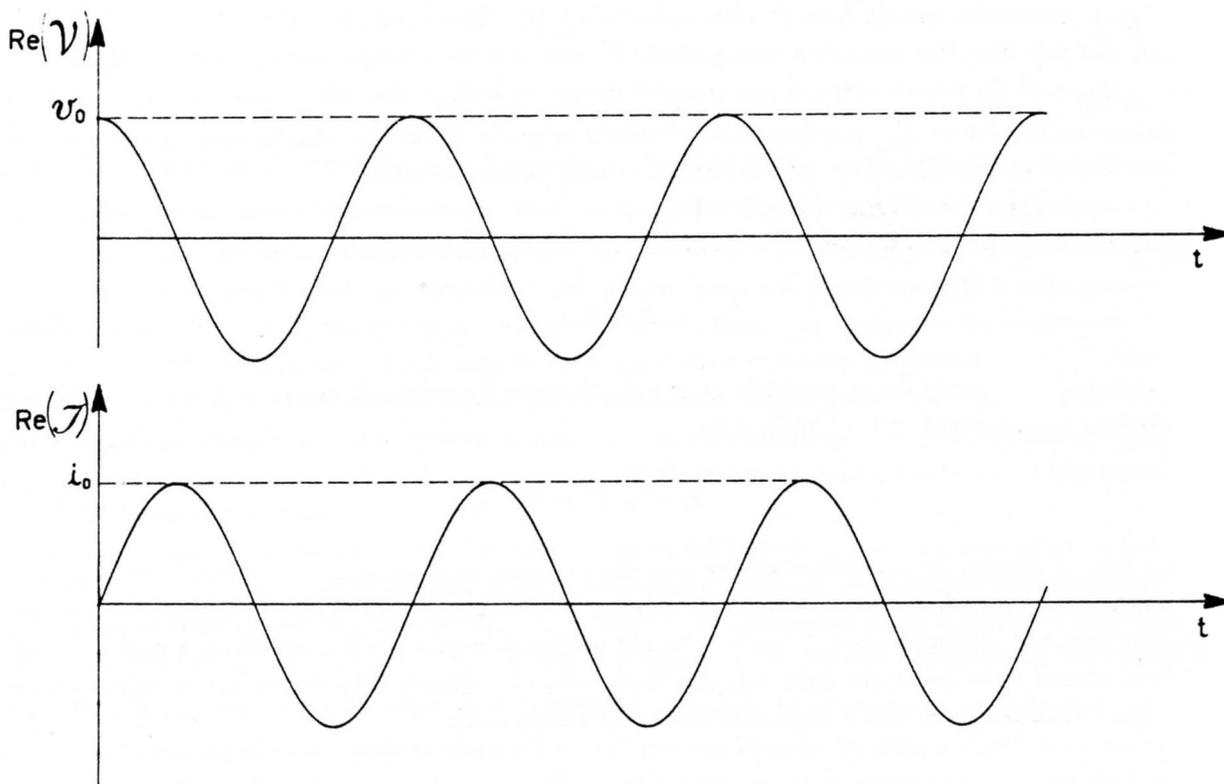


Fig.IX.10

Nella Fig.10 sono riportati gli andamenti di $\text{Re}(\mathcal{V})$ e di $\text{Re}(\mathcal{J})$. Si noti che la corrente “ritarda” di un quarto di periodo ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) rispetto alla tensione.

b) un condensatore puro:

$$\mathcal{J}_C = \mathcal{V}j\omega C \quad (\text{IX.51})$$

per cui

$$\begin{cases} i_0 = v_0\omega C \\ \varphi = -\text{atan } (-\infty) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{IX.52})$$

cioè

$$Re(\mathcal{J}) = i = v_0 \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -v_0 \omega C \sin \omega t \quad (\text{IX.53})$$

e si dice che la corrente “anticipa” la tensione di un quarto di periodo ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Nella Fig.11 sono riportati gli andamenti di $Re(\mathcal{V})$ e $Re(\mathcal{J})$ in funzione del tempo.

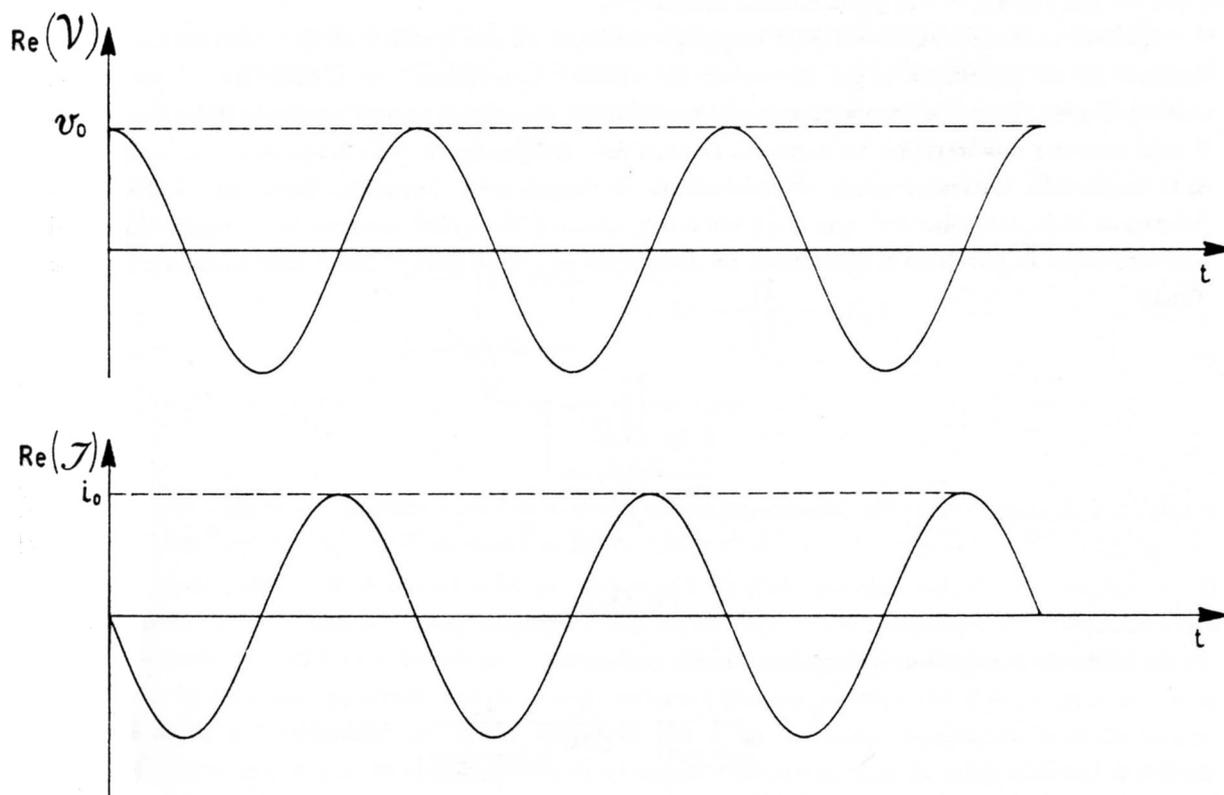


Fig.IX.11

Le espressioni viste sopra mostrano, fra l'altro, che una induttanza presenta una impedenza che cresce all'aumentare della frequenza della tensione applicata, mentre un condensatore all'aumentare della frequenza aumenta la propria ammettenza. Ma su questi aspetti avremo modo di tornare ampiamente nel seguito.

5.— *I componenti fisici reali: resistori, induttori, condensatori*

I componenti fino ad ora descritti rappresentano sostanzialmente dei casi ideali; in pratica, quando si ha un componente fisico reale, cioè un resistore, un induttore, un condensatore esso non è mai puro, cioè non può essere completamente caratterizzato dal solo valore della resistenza,

induttanza e capacità rispettivamente (indipendente da ω) *. Ad esempio un resistore presenta sempre delle piccole componenti induttive che possono tranquillamente essere trascurate in bassa frequenza, ma non devono viceversa essere dimenticate per alti valori di ω . Se ad esempio l'induttanza spuria ammonta a $1 \mu H$ e il resistore è da 100Ω , per $f = \frac{\omega}{2\pi} = 16 MHz$ l'induttanza contribuisce con una reattanza pari alla resistenza. Se poi il resistore è costituito da uno spessore massiccio di materiale conduttore, la resistenza ad alte frequenze aumenta a causa dell'*effetto pelle* che riduce la sezione efficace del conduttore. L'effetto è tanto più elevato quanto più piccola è la resistività del materiale e quanto più elevata la sua permeabilità magnetica.

Quanto ai condensatori essi sono in genere costituiti da due sottili fogli di materiale conduttore separati da un dielettrico e poi arrotolati per ridurre l'ingombro. Se il dielettrico fosse ideale, cioè un perfetto isolante caratterizzato da un costante dielettrica ϵ_r indipendente dalla frequenza, il condensatore mostrerebbe un capacità C anch'essa indipendente dalla frequenza e la conoscenza di C basterebbe a caratterizzare completamente il componente. Sappiamo invece che il dielettrico (in genere materiale plastico) non è un isolante perfetto e che quindi occorre tener conto almeno di una resistenza in parallelo al condensatore. Il componente deve quindi essere schematizzato come in Fig.12

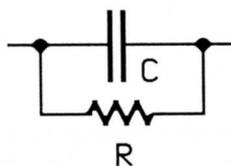


Fig.IX.12

e pertanto presenta una impedenza complessiva:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \quad (\text{IX.54})$$

Il costruttore non indica quasi mai il valore di R soprattutto perché esso non è mai indipendente dalla frequenza (il fenomeno fisico che dà luogo ad R non è quindi di carattere ohmico). La quantità che viene viceversa indicata è il cosiddetto *fattore di dissipazione* (*dissipation factor*) D che nel caso sopra esposto è pari a $\frac{1}{\omega RC}$; si trova che questa grandezza (per condensatori commerciali dell'ordine di $10^{-2} \div 10^{-3}$) è abbastanza indipendente dal valore della capacità, dalla tensione applicata e della frequenza (da qualche centinaio di Hz in su) e dipende esclusivamente dalle caratteristiche del dielettrico e dalla temperatura; ciò vuol dire che il valore di R non è costante, ma diminuisce pressappoco inversamente a ω (la fisica del fenomeno è assai complicata ed è legata intimamente alla dipendenza della costante dielettrica dalla frequenza). Ad esempio mentre in continua ($\omega = 0$) un condensatore da $1 \mu F$ può presentare una resistenza di fuga dell'ordine di $10^{10} \div 10^{11} \Omega$; a $1 kHz$ con un D tipico di $5 \cdot 10^{-3}$ $R(1kHz) \approx 32 k\Omega$. Talvolta invece di D si usa il suo inverso, che è indicato col simbolo Q detto *Q del condensatore*.

Il fattore di dissipazione può essere definito e interpretato in vari modi: ad esempio come il rapporto fra reattanza e resistenza del parallelo $C \parallel R$; oppure può essere interpretato come il

* questo è poi particolarmente vero quando, come qui, si parla di componenti commerciali che vengono usati nei circuiti elettrici e elettronici, non di componenti campione, cui sono dedicati i primi paragrafi del capitolo successivo.

rapporto fra l'energia dissipata per effetto Joule dalla resistenza in un ciclo e l'energia massima immagazzinata dal condensatore (su questo punto torneremo più diffusamente nel Cap.XIII, §1).

Riprendiamo l'espressione (54) che, una volta razionalizzata, può essere scritta come:

$$\mathcal{Z} = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + \frac{\omega^2 C^2 R^2}{j\omega C(1 + \omega^2 C^2 R^2)} = \frac{R}{\frac{D^2 + 1}{D^2}} + \frac{1}{j\omega C(D^2 + 1)} \quad (\text{IX.55})$$

La (55) ci dice che il nostro condensatore reale può essere sì schematizzato come una capacità C in parallelo a una resistenza R , ma equivalentemente (dal punto di vista circuitale) può essere anche interpretato come una resistenza $r = \frac{R}{\frac{D^2 + 1}{D^2}}$ in serie a una capacità $\xi = C(D^2 + 1)$ (vedi Fig.13).

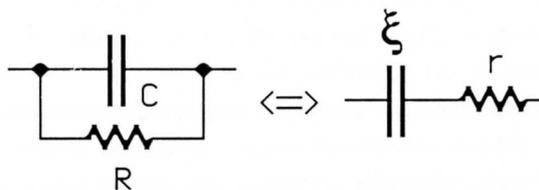


Fig.IX.13

E' facile vedere che se viene scelta la seconda schematizzazione, allora $D = r\omega\xi$. Si noti che se $R \gg \omega C$, cioè se $D \ll 1$, $\xi \approx C$ mentre $r \approx RD^2$, cioè $r \ll R$.

La schematizzazione del condensatore reale come un elemento con fattore di dissipazione D circa costante, vale quando il condensatore è adoperato in corrente alternata e a frequenze non troppo elevate ($< 1MHz$) e non troppo basse; in continua come abbiamo già notato nel Cap.VI, si osserva talvolta un apparente aumento della capacità dovuto al fatto che il dielettrico tende in qualche modo a "trattenere" la carica; dielettrici che si comportano abbastanza bene da questo punto di vista, cioè hanno moderati effetti di ritenzione di carica, sono la mica e alcuni materiali plastici. A frequenze ancor più elevate di $1 MHz$ entrano in gioco altri effetti, il principale dei quali è l'effetto pelle che porta a dover considerare in serie al condensatore una resistenza che aumenta con la radice della frequenza. Inoltre l'induttanza in serie non può più essere trascurata; ad alte frequenze il condensatore è quindi schematizzabile nel modo della Fig.14.

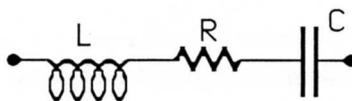


Fig.IX.14

La presenza di una piccola induttanza in serie a un condensatore reale deriva dalle sue dimensioni finite per cui un flusso finito di \vec{B} si concatena comunque ad esso; inoltre i reofori, tanto più sono sottili tanto più contribuiscono all'induttanza. Vedremo, quando parleremo dei campioni di capacità, che una induttanza in serie tende ad aumentare il valore apparente della capacità.

Veniamo ora alle induttanze: abbiamo già visto che una resistenza in serie si osserva anche in continua ed è dovuta alla resistività del materiale dell'avvolgimento; pertanto una resistenza in serie dovrà essere sempre tenuta in conto schematizzando il componente come in Fig.15.

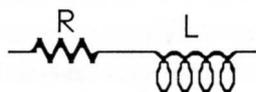


Fig.IX.15

Analogamente al caso di un condensatore si introduce una quantità adimensionale che in qualche modo misura la *purezza* dell'induttanza; essa si indica con Q e si chiama Q della *induttanza* o *Fattore di merito* o *Parametro di qualità*; esso vale

$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad (\text{IX.56})$$

e rappresenta il rapporto fra la reattanza e la resistenza dell'induttanza. Similmente al caso del condensatore vedremo che il Q dell'induttanza è pari al rapporto fra l'energia massima immagazzinata nell'induttanza e quella media spesa per effetto Joule sulla resistenza. Se R al variare della frequenza rimanesse costante, Q dipenderebbe linearmente dalla frequenza. Viceversa nei casi reali il valore di Q è relativamente stazionario anche per ampie variazioni della frequenza; ciò significa che R cresce con la frequenza. Il fatto che R cresca con la frequenza è dovuto a vari fattori: ad esempio l'isteresi (se il supporto della bobina è di materiale magnetico) porta ad un aumento delle perdite proporzionale a ω , le correnti parassite nel supporto, se conduttore, danno perdite proporzionali a ω^2 , l'effetto pelle dà perdite proporzionali a $\sqrt{\omega}$; tutti questi effetti, dando luogo a dissipazione di energia, corrispondono ad un aumento della parte reale R dell'impedenza. Al momento quest'ultima considerazione può non sembrare così ovvia; sarà molto più evidente quando studieremo (Cap.XI) la dissipazione di energia nei circuiti in alternata. Un altro contributo, per niente trascurabile, alle perdite deriva anche dal fatto che della carica si accumula nelle capacità parassite fra spira e spira e fra strato e strato; ciò porta a dover schematizzare il nostro induttore come in Fig.16

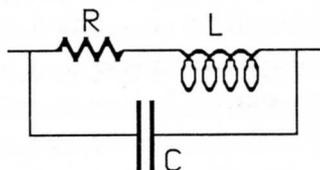


Fig.IX.16

con C che tiene appunto conto, almeno in buona parte, di queste capacità distribuite; abbiamo visto sopra che un condensatore reale ha perdite nel dielettrico e questo è quello che puntualmente avviene anche alle capacità spurie dell'induttore. In esso oltretutto il dielettrico (lo smalto dei fili) non è particolarmente di alta qualità, (cioè il fattore di dissipazione D di questo condensatore spurio è relativamente grande) per cui all'aumentare della frequenza questo contributo alle perdite diviene addirittura dominante, specialmente se la bobina è avvolta in aria, perché altri sensibili contributi alle perdite sono in questo caso assenti. Se la bobina è avvolta su un supporto ferromagnetico, ci potremmo aspettare che all'aumentare della frequenza l'induttanza L diminuisse, a causa di un ipotizzabile incapacità dei domini magnetici a seguire le rapide variazioni della forza magnetizzante. L'effetto esiste ma interviene a frequenze estremamente elevate ($10^8 \div 10^9 \text{ Hz}$), quando cioè il periodo della corrente alternata è dell'ordine del tempo di rilassamento dei domini nel materiale. Per alcune ferriti il problema insorge addirittura a frequenze di 2 o 3 ordini di grandezza superiori.

Forti non linearità nel comportamento delle induttanze avvolte su nuclei ferromagnetici possono verificarsi per ampiezze grandi della corrente che li attraversa, quando intervengono saturazioni della magnetizzazione. Su questo punto capiterà di soffermarsi nuovamente. I valori del fattore di merito Q dipendono molto dal tipo di bobina, in particolare i valori più elevati si hanno per bobine con il nucleo ferromagnetico (anche $Q > 100$); valori inferiori sono da aspettarsi nel caso in cui l'avvolgimento sia fatto in aria. Ritornando alla schematizzazione della Fig.16, il costruttore talvolta fornisce il valore della frequenza per la quale l'ammittenza del condensatore uguaglia in valore assoluto quella dell'induttanza ($\omega^2 = \frac{1}{LC}$); tale frequenza è detta, per motivi che saranno poi ampiamente discussi, di *risonanza* e denota in pratica l'estremo superiore del campo di frequenze in cui la induttanza può essere utilizzata come tale.

6.— Il trasformatore

Il trasformatore è un dispositivo che consente, disponendo di una tensione alternata di una certa ampiezza, di ottenerne un'altra di ampiezza diversa. Il trasformatore è costituito (vedi Cap.VII, §2 per alcuni dettagli costruttivi) da un circuito magnetico di materiale ad alta permeabilità (tipicamente ferro) su cui sono avvolti due rami di due circuiti indipendenti che presentano conseguentemente un alto coefficiente di mutua induzione (Fig.17).

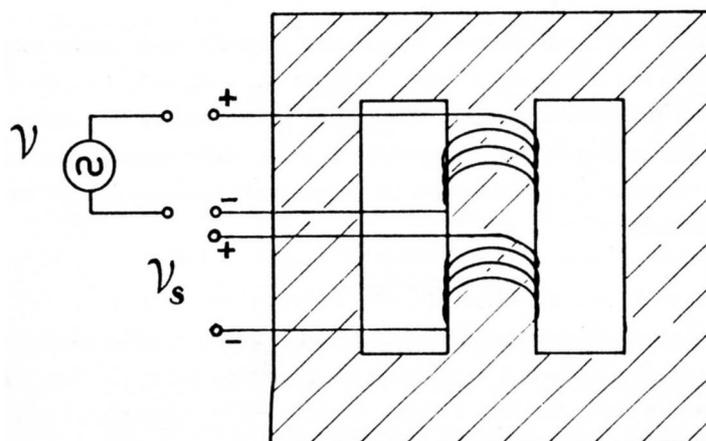


Fig.IX.17

Per semplicità supponiamo che i flussi di induzione magnetica dei due circuiti si concatenino completamente, di avere cioè fra i due circuiti un accoppiamento *stretto*. Allora varrà (Cap.VII,§2):

$$M^2 = L_p L_s \quad (\text{IX.57})$$

Gli indici p e s si riferiscono agli aggettivi *primario* e *secondario* con cui si denominano gli avvolgimenti, intendendo che al circuito primario si applica la tensione alternata da trasformare e dal circuito secondario si preleva la tensione trasformata.

Detti N_p e N_s il numero delle spire degli avvolgimenti si avrà con buona approssimazione (α costante, vedi Cap.VII,§2):

$$L_p = \alpha N_p^2 \quad L_s = \alpha N_s^2 \quad M = \alpha N_s N_p \quad (\text{IX.58})$$

Consideriamo la rete equivalente al nostro sistema (Fig.18) ammettendo che il secondario sia chiuso su un carico, caratterizzato da una impedenza complessa Z . I puntini segnati agli estremi delle bobine determinano convenzionalmente il segno di M : esso è positivo quando i sensi positivi delle correnti nelle due maglie entrano nelle bobine dalla parte del puntino. La scelta di Fig.18 è consistente con il sistema disegnato in Fig.17.

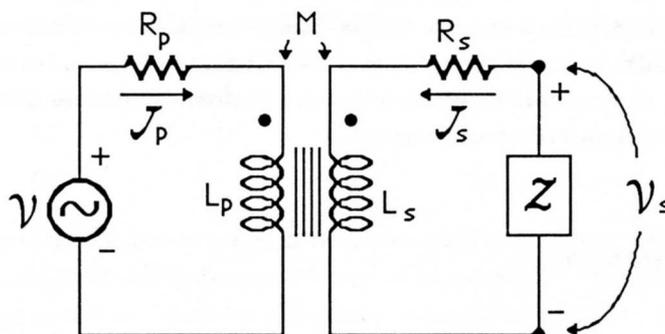


Fig.IX.18

R_p rappresenta la resistenza del circuito primario dovuta all'avvolgimento (in un trasformatore ideale $R_p = 0$, in uno reale dovrà essere $R_p \ll \omega L_p$, dove ω è la pulsazione della tensione alternata da trasformare \mathcal{V}). Anche la resistenza dell'avvolgimento secondario R_s in un trasformatore ideale sarà nulla.

Prima di vedere in formule il comportamento del sistema, guardiamo di capire cosa succede nel nostro trasformatore, supposto per il momento ideale, cioè con $R_p = R_s = 0$; quando il secondario è aperto (ovvero chiuso su una impedenza Z molto elevata) la corrente \mathcal{J}_s del secondario potrà considerarsi nulla e pertanto il flusso di induzione magnetica Φ nel circuito magnetico sarà unicamente dato dalla presenza di una corrente \mathcal{J}_{p0} (detta *corrente di magnetizzazione*) nel primario. La forza contro elettromotrice nel primario

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -j\omega L_p \mathcal{J}_{p0} \quad (\text{IX.59})$$

dovrà bilanciare la ddp applicata \mathcal{V} , istante per istante, secondo quanto stabilito dalla seconda legge di Kirchhoff. Supponiamo ora di chiudere il secondario su un carico caratterizzato da un modulo di Z piccolo; \mathcal{J}_s è ora diversa da zero, cosicché il flusso Φ nel circuito magnetico è ora prodotto sia dalla corrente \mathcal{J}_p che dalla corrente \mathcal{J}_s ; tuttavia dovrà continuare ad essere uguale a Φ poiché anche in queste condizioni la forza contro elettromotrice nel primario:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -j\omega L_p \mathcal{J}_p - j\omega M \mathcal{J}_s \quad (\text{IX.60})$$

deve *controbilanciare* la *medesima* fem \mathcal{V} di prima. Vediamo così che in un trasformatore ideale l'ampiezza del flusso di induzione magnetica attraverso il circuito magnetico (anch'esso è una grandezza alternata) resta la stessa, indipendentemente dal valore del carico sul secondario. Vedremo nel seguito, ma si può fin d'ora intuire, che $\mathcal{J}_p \gg \mathcal{J}_{p0}$ e pertanto in un trasformatore ideale anche quando la corrente nel primario aumenta molto, non si hanno problemi di saturazione della magnetizzazione poiché $|\Phi|$ e quindi $|\vec{B}|$ all'interno del circuito magnetico resta costante (in un' induttanza l'aumento di i comporta invece un aumento proporzionale di $|\vec{B}|$ nel nucleo).

Guardiamo ora di quantificare in formule quello che accade: la seconda legge di Kirchhoff dà

per il primario e il secondario:

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{J}_p(R_p + j\omega L_p) + \mathcal{J}_s j\omega M \\ 0 = \mathcal{J}_p j\omega M + \mathcal{J}_s(\mathcal{Z} + j\omega L_s + R_s) \end{cases} \quad (\text{IX.61})$$

Dalla seconda delle (61) si ottiene

$$\mathcal{J}_s = -\mathcal{J}_p \frac{j\omega M}{\mathcal{Z} + j\omega L_s + R_s} \quad (\text{IX.62})$$

che sostituita nella prima delle (61) dà:

$$\mathcal{V} = \mathcal{J}_p \left(R_p + j\omega L_p + \frac{\omega^2 M^2}{\mathcal{Z} + j\omega L_s + R_s} \right) \quad (\text{IX.63})$$

Ricavando \mathcal{J}_p da quest'ultima e sostituendo nella (62) si ottiene:

$$\mathcal{Z}\mathcal{J}_s = -\mathcal{V}_s = -\mathcal{V} \frac{j\omega M \mathcal{Z}}{(R_p + j\omega L_p)(R_s + j\omega L_s + \mathcal{Z}) + \omega^2 M^2} \quad (\text{IX.64})$$

Da quest'ultima, tenendo conto della (57) abbiamo:

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{V} \frac{j\omega M \mathcal{Z}}{(R_p + j\omega L_p)(R_s + \mathcal{Z}) + j\omega L_s R_p} \quad (\text{IX.65})$$

La ddp \mathcal{V}_s a circuito aperto (c.a.) si può calcolare facendo il limite della (65) per $\mathcal{Z} \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{V}_{s.c.a.} = \mathcal{V} \frac{j\omega M}{R_p + j\omega L_p} = \mathcal{V} \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_p}{j\omega L_p}\right)} \approx \mathcal{V} \frac{N_s}{N_p} \quad (\text{IX.66})$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $R_p \ll \omega L_p$.

Si vede così che la ddp ai capi del secondario aperto è in fase con quella del primario e la sua ampiezza è proporzionale a quella del primario, tramite il rapporto $\frac{N_s}{N_p}$, detto *rapporto di trasformazione*. Così, ad esempio, se si vuole ridurre l'ampiezza della tensione applicata al primario di un fattore 10 occorrerà che $\frac{N_p}{N_s} = 10$; il valore poi di N_s (e quindi di N_p) sarà dettato dalla sezione del circuito magnetico e dalla resistenza massima che possiamo tollerare negli avvolgimenti. Più esplicitamente, in trasformatori *di potenza*, cioè adatti ad assorbire grosse correnti nel primario, è richiesta una resistenza degli avvolgimenti assai bassa; conseguentemente le spire dovranno essere poche e di filo grosso; ciò porta ad aumentare la sezione S del circuito magnetico poiché il flusso di induzione magnetica nel primario deve rimanere tale che la ampiezza della sua derivata temporale $\omega N_p S B$ sia pari all'ampiezza della tensione applicata (vedi (59) e (60)) e B non può crescere oltre il valore B_M critico per il ferro ($1 \div 1.5 T$), pena la saturazione. Facciamo un esempio numerico: $B_M = 1T$, $\omega = 314 \text{ rad/s}$, $N_p = 20$; allora per avere $\omega N_p S B_M = 310 V$ (la tensione di rete, 220 V efficaci) otteniamo $S = 50 \text{ cm}^2$. In trasformatori di piccola potenza, le spire saranno viceversa assai numerose e la sezione del circuito magnetico assai più contenuta.

Troviamo ora la corrente di corto circuito (c.c.) nel secondario $\mathcal{J}_{s.c.c.}$, dopo di che potremo determinare il circuito equivalente del secondario secondo Thévenin in quanto:

$$\mathcal{Z}_{sTh} = -\frac{\mathcal{V}_{s.c.a.}}{\mathcal{J}_{s.c.c.}} \quad (\text{IX.67})$$

$\mathcal{J}_{s.c.c.}$ si può calcolare dividendo i due membri della (65) per \mathcal{Z} e facendo poi il limite per $\mathcal{Z} \rightarrow 0$, tenendo conto della (64):

$$\mathcal{J}_{s.c.c.} = -\frac{\mathcal{V}j\omega M}{(R_p + j\omega L_p)R_s + j\omega L_s R_p} \quad (\text{IX.68})$$

Pertanto

$$\mathcal{Z}_{sTh} = R_s + R_p \frac{j\omega L_s}{R_p + j\omega L_p} \approx R_s + \frac{N_s^2}{N_p^2} R_p \quad (\text{IX.69})$$

Quindi, per quanto riguarda i terminali di uscita, cioè il secondario, il trasformatore si comporta come un generatore di tensione alternata di ampiezza $\mathcal{V} \frac{N_s}{N_p}$ con una resistenza interna pari a $R_s + \frac{N_s^2}{N_p^2} R_p$.

Guardiamo ora come si comporta il primario, troviamo cioè l'impedenza di ingresso che il primario presenta al generatore di tensione \mathcal{V} ; riprendendo la (63) e tenendo presente che, essendo $(R_s + \mathcal{Z} \ll \omega L_s)$, si ha:

$$\frac{1}{R_s + \mathcal{Z} + j\omega L_s} \approx \frac{1}{j\omega L_s} \left(1 - \frac{R_s + \mathcal{Z}}{j\omega L_s} \right)$$

otteniamo:

$$\mathcal{V} \approx \mathcal{J}_p \left[R_p + \frac{N_p^2}{N_s^2} (R_s + \mathcal{Z}) \right] \quad (\text{IX.70})$$

vale a dire l'impedenza di ingresso del primario (la cosiddetta *impedenza riflessa*) è, nel limite di R_p e R_s trascurabili e $\mathcal{Z} \ll \omega L_s$, pari all'impedenza del carico sul secondario moltiplicata per il quadrato del rapporto delle spire primario-secondario. Si noti che nel caso di trasformatore ideale l'impedenza vista dal primario ha esattamente la stessa fase di quella del secondario; ciò comporta che lo sfasamento fra corrente e tensione nel primario è lo stesso che nel secondario; inoltre, sempre nel caso di $R_s, R_p \rightarrow 0$ e $\mathcal{Z} \ll \omega L_s$:

$$\frac{\mathcal{J}_s}{\mathcal{J}_p} = -\frac{N_p}{N_s} \quad \frac{\mathcal{V}_s}{\mathcal{V}} = \frac{N_s}{N_p} \quad (\text{IX.71})$$

Tutto ciò comporta, come vedremo nel Cap.XI, che le potenze nel primario e nel secondario sono istante per istante uguali e questo non deve sorprendere in quanto, essendo le resistenze in gioco uguali a zero, la trasformazione di tensione avviene senza perdite.

Le (66), (67), (69), (70) e (71) ci dicono che, pur avendo separatamente primario e secondario dei coefficienti di autoinduzione molto maggiori di tutte le altre impedenze in serie ad essi, quando il secondario è chiuso su un carico \mathcal{Z} , con $|\mathcal{Z}| \ll \omega L_s$, allora ogni contributo induttivo, sia nel primario che sul secondario scompare. Questo fatto è direttamente collegato all'aver ammesso accoppiamento stretto fra i due circuiti, tant'è vero che se viceversa avessimo considerato un accoppiamento lasco, avremmo trovato un residuo di componente induttiva nelle impedenze. A questo proposito si veda l'Appendice B ove è trattato questo tipo di problema riguardo al regime transitorio.

Fino ad ora abbiamo considerato trasformatori ideali, al più con resistenze in serie agli avvolgimenti; in pratica un'altra fonte di perdite è costituita proprio dal ferro di cui è fatto il circuito magnetico: le perdite saranno principalmente quelle per isteresi e per correnti parassite. Abbiamo già detto che per ridurre quest'ultime il circuito magnetico è costituito da lamierini di ferro (Cap.VII, §2) che interrompono il flusso delle correnti indotte; le perdite per isteresi sono contenute scegliendo opportunamente i materiali e tenendosi sufficientemente lontani dalla saturazione. Quanto al comportamento del trasformatore alle varie frequenze c'è innanzitutto da osservare che per un certo trasformatore, a parità di ampiezza della tensione applicata, il limite inferiore di frequenza alla quale è utilizzabile è dato dal fatto che al diminuire di ω , per mantenere la stessa forza contro elettromotrice, deve crescere B all'interno del circuito magnetico e B non può mai superare il

valore di saturazione caratteristico del materiale, che nel caso del ferro non raggiunge i 2 T. Quindi per trasformatori che funzionino in bassa frequenza occorre costruire circuiti magnetici di sezione molto maggiore che per frequenze più elevate. Aumentare la frequenza non comporta teoricamente svantaggi: infatti, lavorando con la stessa ampiezza della tensione applicata, aumentare ω significa diminuire di altrettanto B ($|\frac{d\Phi}{dt}| = \omega BN_p S$) e poiché le perdite per isteresi vanno come il prodotto ωB e quelle per correnti parassite come $\omega^2 B^2$, l'efficienza del trasformatore non dovrebbe risentire dell'aumento di frequenza. Tuttavia disponendo di un trasformatore costruito per funzionare a 50 Hz, se si prova a studiarne il comportamento a frequenza più elevata, si trova che la resistenza del primario cresce con la frequenza e conseguentemente l'impedenza di uscita del secondario aumenta, fino a rendere il trasformatore inutilizzabile: ad esempio in un trasformatore 220-24 V da 30 W, costruito per lavorare a 50 Hz, l'impedenza di uscita R_s (vedi (69)) vale meno di 1 Ω a 50 Hz, mentre a 5000 Hz tale impedenza è circa 100 volte più alta. Il motivo di questo comportamento deriva dal fatto che, come abbiamo già visto, quando si costruisce un avvolgimento si creano delle capacità fra i vari strati il cui effetto si può schematizzare assumendo che in parallelo alla bobina ci sia un condensatore. Ciò avviene sia nel primario che nel secondario. Mentre in bassa frequenza l'impedenza di questo condensatore è molto elevata, all'aumentare di ω la corrente nell'induttanza va via via riducendosi a scapito di quella che passa attraverso il condensatore, il che ovviamente compromette l'efficienza dell'accoppiamento induttivo dei due circuiti.

A frequenze elevate, là dove cioè non è più necessario disporre di grossi valori di $\Phi(B)$, si preferisce ridurre la sezione del circuito magnetico e usare materiali (ferriti) con μ magari inferiori a quelli del ferro, ma con resistività molto più elevate in modo da ridurre le perdite per correnti parassite; riducendo le dimensioni e anche il numero di spire si possono inoltre contenere gli effetti di capacità distribuite e migliorare quindi la risposta in frequenza del trasformatore.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Le reti lineari nel caso di eccitazione sinusoidale sono studiate in dettaglio su **FR 59** e particolarmente su **DE 69**.

La risoluzione col metodo simbolico delle equazioni differenziali e il problema delle proprietà dei sistemi lineari sono trattati (come solito molto brillantemente) su **FE 63** (vol I, Capp.21,22,23,24 e 25). Su **FE 63** (vol II, Cap.22) si trova anche una descrizione dei circuiti in alternata con una dettagliata discussione sulle approssimazioni introdotte nella definizione degli elementi reali resistore, induttore e condensatore.

I limiti dell'approccio quasi stazionario si possono trovare ad esempio sul Cap.8 di **FA 60** e nel Cap.23 del secondo volume di **FE 63**.

Per ulteriori informazioni sulle caratteristiche dei componenti reali (resistori, induttori e condensatori) il Cap.2 di **TE 57** è di prezioso ausilio. Ancora più dettagliato e ponderoso è il Cap.2 di **TE 50**.

BE 82, **CO 83**, **CO 85**, **ZI 86** descrivono le caratteristiche dei componenti reali e dei campioni di resistenza, capacità e induttanza. Il Cap. 14 di **LA 57** è di ottimo riferimento per le proprietà e le caratteristiche dei trasformatori.

Per le perdite dielettriche nei condensatori si vedano le opere di Tareev, Zwikker e Anderson citate alla fine del Cap. VI.

X

I PONTI IN ALTERNATA

1.— Campioni di impedenza

I campioni di resistenze, capacità e induttanze per le misure in alternata devono essere inseriti nei circuiti di utilizzo seguendo opportuni accorgimenti per sfruttarne a pieno le caratteristiche. Infatti, poiché non di rado questi campioni sono raggruppati in decadi e hanno quindi delle estensioni fisiche non piccole, essi presentano capacità finite verso i conduttori circostanti e fra questi senz'altro verso la terra; se non vengono prese opportune precauzioni, le correnti che fluiscono attraverso queste capacità parassite alterano il rapporto ddp-corrente dell'impedenza campione e rendono praticamente illusoria la precisione nominale del campione medesimo. Questo è particolarmente vero perché le capacità parassite non hanno un valore costante e riproducibile, bensì un valore che dipende dalla disposizione dei conduttori circostanti (e si ricordi che fra questi va annoverato anche lo sperimentatore); è chiaro viceversa che affinché una impedenza campione possa effettivamente essere usata come tale, deve essere possibile definirne il valore indipendentemente dalla configurazione elettrostatica dei conduttori circostanti. Per ottenere questo risultato nonostante la presenza delle capacità parassite, tale impedenza è sempre un elemento non a due, ma a *tre terminali*. Nella Fig.1 è disegnata schematicamente la configurazione elettromeccanica che si adotta nella costruzione di impedenze campione; il caso si riferisce in particolare a una resistenza campione per misure in alternata.

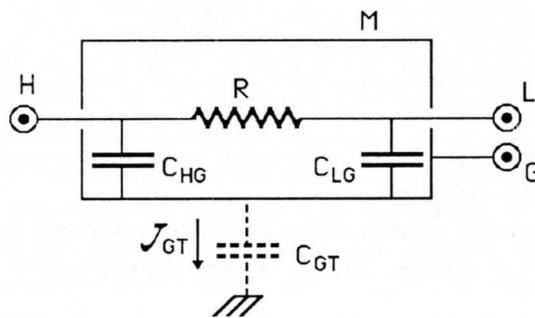


Fig.X.1

La resistenza è racchiusa in una scatola metallica M provvista di un morsetto (in genere indicato con la lettera G, *guardia* o *schermo*, *guard*). I due estremi della resistenza corrispondono a due morsetti (H-*high*, L-*low*) i quali presentano capacità non nulle verso la scatola (C_{HG} , C_{LG}). Questi condensatori disegnati come localizzati in realtà sono schematizzazioni degli effetti dovuti alle capacità distribuite fra i vari conduttori presenti. Nella Fig.1 è anche riportata la capacità (C_{GT}) fra la scatola e il potenziale di terra; è questo infatti il potenziale a cui si trova la maggior parte dei

conduttori che circondano la scatola. E' facile rendersi conto che se il morsetto G non è collegato né ad H né ad L, allora l'impedenza fra i morsetti H e L non è univocamente definita, bensì risente in modo non facilmente controllabile della presenza dei condensatori C_{LG} e C_{HG} ; infatti, anche supponendo di conoscere tali capacità con precisione, l'entità delle correnti attraverso di esse dipenderebbe dalla differenza di potenziale fra G e i terminali H e L, che dipende a sua volta dal valore di C_{GT} e quindi dalla geometria dei conduttori circostanti; per rendere effettivamente utilizzabile la resistenza, e rimuovere gli inconvenienti di cui sopra, essa si usa nella cosiddetta configurazione a due terminali che si ottiene cortocircuitando L e G. In tal modo il potenziale della scatola è lo stesso del terminale L ed è pertanto univocamente definita la ddp fra L e il terminale H (Fig.2): risultano così univocamente definiti anche i rapporti $Z_H = \frac{V_{HL}}{J_H}$ e $Z_L = \frac{V_{HL}}{J_L}$ (che saranno però diversi fra di loro a causa della corrente nel condensatore C_{HG}). Il motivo per cui non è indifferente la scelta del terminale da mettere al potenziale dello schermo dipende dalle particolari caratteristiche costruttive: il terminale H è quello che presenta verso la scatola la capacità più bassa (cioè $C_{HG} < C_{LG}$) e pertanto è bene che sia esso a trovarsi a un potenziale più elevato (High) rispetto allo schermo G anziché il terminale L (Low), perché a parità di corrente nell'impedenza, la corrente spuria sarà inferiore. Nelle misure a due terminali l'impedenza dell'elemento è definita come il rapporto fra la ddp V_{HL} fra H e L (L cortocircuitato con G) divisa per la corrente entrante in H e a questa quantità, a meno che non sia detto esplicitamente il contrario, si riferiscono i valori nominali dell'impedenza dati dal costruttore:

$$Z = \frac{V_{HL}}{J_H} \quad (\text{X.1})$$

Ovviamente, nel nostro caso Z sarà tanto più simile a R quanto più piccolo sarà C_{HG} . Quando, come nel caso di impedenze campione, il costruttore fornisce lo schema equivalente dell'impedenza, ivi comprese la capacità fra i terminali e lo schermo, l'impedenza definita dalla (1) è riconducibile ad una espressione in cui compaiono grandezze note e in particolare quella campione: nel caso di Fig.2 $Z = \left(\frac{1}{R} + j\omega C_{HG}\right)^{-1}$. Poiché il secondo termine è pur sempre una correzione del primo, il campione può essere utilizzato in una relativamente larga gamma di frequenze anche se C_{GH} non è noto con la precisione di R .

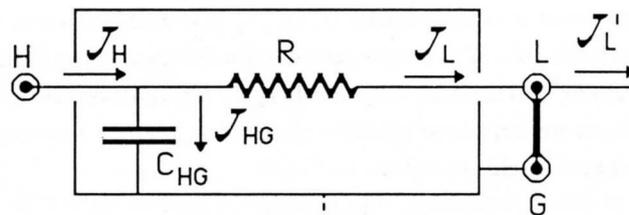


Fig.X.2

Con riferimento alla Fig.2 si noti che non solo $J_L \neq J_H$, ma anche $J_H \neq J'_L$ a causa della corrente J_{GT} che dallo schermo fluisce verso la terra cui lo schermo è comunque accoppiato capacitivamente o verso altri conduttori a potenziali diversi che presentano capacità non nulle verso lo schermo.

Il motivo principale per cui il terminale L non viene definitivamente cortocircuitato con lo schermo dal costruttore è che se non fosse possibile intervenire indipendentemente sugli schermi, la impedenza di una serie di due impedenze siffatte dipenderebbe anche dalla capacità $C_{GG'}$ fra le due scatole (Fig.3a), grandezza non univocamente definita, ma dipendente dalla posizione mutua delle

scatole.

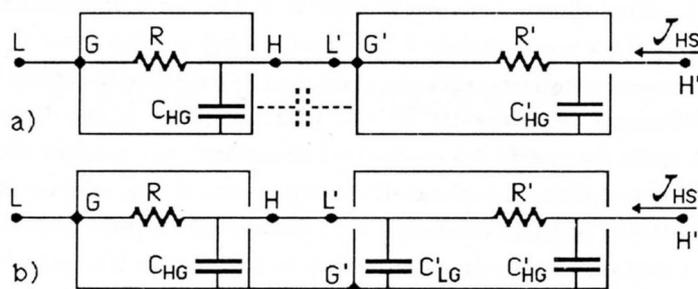


Fig.X.3

La Fig.3b mostra una configurazione di collegamenti che consente di definire l'impedenza della serie in maniera univoca come $Z_S = \frac{V_{H'L}}{J_{HS}}$. La impedenza Z_S così definita vale $C'_{HG} \parallel (R' + C'_{LG} \parallel C_{HG} \parallel R)$ ovvero:

$$Z_S = \frac{1}{j\omega C'_{HG} + \left(R' + \frac{1}{j\omega(C'_{LG} + C_{HG}) + \frac{1}{R}} \right)^{-1}} \quad (X.2)$$

Consideriamo ora i vari campioni di impedenza ed esaminiamo quantitativamente il contributo degli effetti spuri presenti in queste impedenze e il loro influsso sulla precisione dei campioni.

2.— Campioni di resistenze

Per quanto riguarda le resistenze campione a decadi, delle caratteristiche di stabilità e precisione in continua si è già detto a tempo debito (Cap.IV, §1): stabilità circa $20 \text{ ppm}/^{\circ}\text{C}$, precisione dell'ordine di qualche parte su 10^4 . L'avvolgimento del filo che costituisce la resistenza è realizzato in modo cosiddetto *antiinduttivo*, ottenuto avvolgendo le spire alternativamente in un senso e nell'altro, oppure avvolgendo il filo su un supporto piatto e quindi con piccola sezione; il circuito equivalente di ogni decade di resistenze è quello riportato in Fig.4:

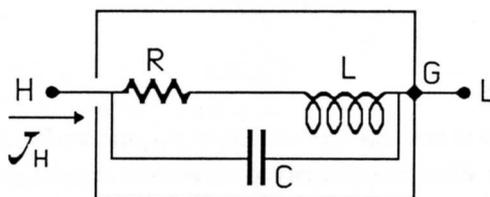


Fig.X.4

L deriva dalla somma dell'induttanza dei reofori e di quella residua degli avvolgimenti, mentre C è principalmente dovuta alla capacità fra i terminali H e G (cortocircuitato con L). Valori tipici

possono essere $C \approx 20 - 30 \text{ pF}$, L da qualche centesimo a una decina di μH a seconda che la resistenza totale della decade vada da 0.1Ω a $10^5\Omega$. L'impedenza \mathcal{Z} del circuito è data da

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C} = \frac{R + j\omega \left[L\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - R^2C \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (\omega RC)^2} \quad (\text{X.3})$$

dove $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (valori tipici per $\omega_0/2\pi$: $10^8 \div 10^9 \text{ Hz}$); noti R , L e C è possibile ricavare il valore di \mathcal{Z} a qualunque pulsazione ω . In pratica non si procede così, soprattutto perché in questa schematizzazione vengono completamente trascurati gli effetti resistivi, dipendenti dalla frequenza, nel condensatore e nell'induttanza, nonché l'effetto pelle; il costruttore suggerisce piuttosto di schematizzare l'impedenza come

$$\mathcal{Z} = R_S + jX_S \quad (\text{X.4})$$

con R_S e X_S debolmente dipendenti dalla frequenza e fornisce il valore di $\Delta R_S/R_S$ in funzione della frequenza. Il valore di R_S a 1 kHz è in genere quello nominale della resistenza. Tipicamente nelle resistenze di basso valore ($< 100\Omega$) si assiste a un moderato aumento di R_S in funzione della frequenza dovuto all'effetto pelle, mentre per resistenze più elevate si ha una decisa diminuzione di R_S dovuta alle perdite dielettriche della capacità in parallelo alla resistenza. Valori tipici: una resistenza campione da 10Ω (a 1 kHz), a 5 MHz è aumentata di meno dell'1%, mentre una da $100\text{k}\Omega$ a 100 kHz è già diminuita di poco meno del 10% rispetto al valore a 1 kHz . Corrispondentemente la parte immaginaria X_S si comporterà in modo diverso nei due casi: precisamente, e questo si può anche vedere esaminando la (3) per $\omega \ll \omega_0$, resistenze di piccolo valore tendono ad avere $X_S > 0$, cioè ad essere induttive, mentre resistenze di alto valore hanno $X_S < 0$, cioè sono capacitive. La precisione con cui è nota X_S non è quasi mai critica per la misura in cui il campione viene adoperato; vedremo infatti, quando parleremo dei ponti in alternata, che con questi metodi di misura si può rendere la determinazione del valore della resistenza incognita quasi indipendente dal valore del coefficiente immaginario della resistenza campione usata per confronto e che la presenza di X_S al più peggiora la sensibilità della misura.

3.— Campioni di capacità

Veniamo ora ai campioni di capacità. Quanto alla precisione e alla stabilità, fino a capacità dell'ordine di 1000 pF si riescono ad ottenere condensatori di eccezionale qualità dal punto di vista della precisione (anche meglio di 1 su 10^5), della stabilità (dell'ordine di 2 parti su 10^5) e del fattore di dissipazione D (minori di 10^{-5}); queste caratteristiche sono ottenute usando come dielettrico l'aria, o un gas. Per valori più grandi della capacità, che oltretutto sono quelli più utili nella maggior parte delle misure di laboratorio, occorre ricorrere a dielettrici solidi poiché caratterizzati da una maggiore costante dielettrica relativa; ciò comporta un peggioramento netto nella qualità del condensatore a motivo sia della dipendenza dalla costante dielettrica dalla temperatura, che delle perdite dielettriche le quali, praticamente nulle nell'aria, sono viceversa decisamente apprezzabili nei dielettrici solidi. I dielettrici che vengono generalmente usati per condensatori campione fino a $C \approx 1\mu\text{F}$ sono la mica e il polistirene. La mica è migliore dal punto di vista della stabilità ($+(3 \div 4) \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ per la mica, $-1.4 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$ per il polistirene), ma è inferiore dal punto di vista della dipendenza dalla frequenza, in particolare verso i valori bassi: un condensatore da $1\mu\text{F}$ con il dielettrico in polistirene

ha, in continua, una capacità che differisce per meno dello 0.1% dal valore a 1 kHz, mentre uno di mica può anche aumentare di qualche per cento; infatti, mentre il polistirene è caratterizzato da un fattore di dissipazione praticamente indipendente dalla frequenza e molto basso ($< 2 \cdot 10^{-4}$), la mica soffre del problema della *ritenzione di carica* (dovuta alla cosiddetta *polarizzazione interfacciale*) che provoca un aumento del fattore di dissipazione D in bassa frequenza (fino a 10^{-3} a 10 Hz).

Le precisioni di questi condensatori possono arrivare a qualche 10^{-4} (a una definita temperatura e frequenza, generalmente 20 °C e 1 kHz).

Guardiamo ora (Fig.5) il circuito equivalente di una cassetta di condensatori, nella configurazione a due terminali:

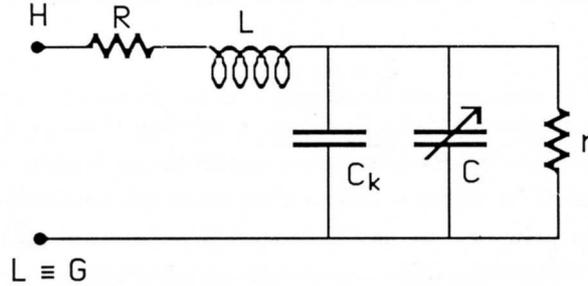


Fig.X.5

Il condensatore variabile rappresenta quello campione vero e proprio (la variabilità del condensatore è ottenuta ponendo o rimuovendo vari condensatori in parallelo), R e L rappresentano resistenza e induttanza dei reofori e delle armature, C_k la capacità fra i due terminali con L cortocircuitato con G (cioè la capacità fra H e la carcassa) r rappresenta le perdite, sia quelle dielettriche degli isolanti dipendenti dalla frequenza che quelle associate alla resistenza di fuga in continua. Come nel caso del resistore campione, i valori di questi componenti variano con la frequenza, per cui lo schema equivalente serve più che altro a mettere in evidenza l'origine fisica delle dipendenze in funzione della frequenza, mentre in pratica i termini correttivi si ottengono schematizzando l'impedenza complessiva come il parallelo di un condensatore e una resistenza :

$$Z_C = \left(j\omega C_p + \frac{1}{R_p} \right)^{-1} \quad (\text{X.5})$$

e ricavando le variazioni di C_p in funzione della frequenza dalle curve fornite dal costruttore. Coerentemente con quanto detto sopra l'andamento di massima in funzione di ω è ricavabile dallo schema equivalente di Fig.5, trascurando i termini resistivi e notando che la serie di un condensatore e una induttanza si può scrivere:

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = \frac{1}{j\omega C} (1 - \omega^2 LC) = \frac{1}{j\omega C'} \quad (\text{X.6})$$

cioè per $\omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$:

$$\frac{C' - C}{C} = \frac{\Delta C}{C} \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (\text{X.7})$$

cioè il valore del condensatore aumenta col quadrato della frequenza. Eccezion fatta per i condensatori a mica che, come abbiamo detto, presentano una accentuata risalita della capacità verso la frequenza zero, è questo l'andamento che effettivamente si osserva per la capacità dei condensatori campione. L'induttanza L , e quindi ω_0 , dipendono dal valore impostato sul condensatore variabile e

per esempio per $C = 1\mu F$ (a 1 kHz) e $\omega_0/2\pi = 400\text{ kHz}$, a 40 kHz otteniamo $\frac{\Delta C}{C} \approx 1\%$. La variazione di R (per effetto pelle) e di r (aumento delle perdite dielettriche all'aumentare della frequenza) contribuiscono principalmente alle variazioni del valore di R_p definito nella (5).

Per quanto riguarda la configurazione meccanica delle schermature e della scatola, con un condensatore è possibile adottare un montaggio che riduce la capacità spuria C_k indicata nella Fig.5 a valori molto bassi (vedi Fig.6).

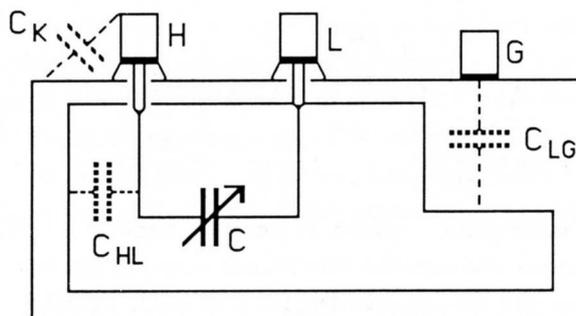


Fig.X.6

Il terminale L, oltre ad essere collegato ad una armatura del condensatore, scherma tutti i componenti campione. In questo modo la capacità C_{HL} (vedi figura) fra H e L risulta abbastanza grossa ma costante e essendo essa in parallelo a quella fra le armature è possibile inglobarla nel valore effettivo della capacità complessiva fra H e L, che quindi avrà un valore minimo maggiore di zero. Con questo accorgimento la capacità residua fra il terminale H e G risulta essere molto piccola ($C_{HG} \approx 1\text{ pF}$).

4.— Campioni di induttanza

Quanto agli induttori, essi sono le impedenze di cui più difficilmente si riescono a costruire campioni di alta qualità. Infatti campioni ottenuti con avvolgimenti in aria hanno $Q = \frac{\omega L}{R}$ non molto elevati; questo è da evitarsi, poiché una grossa resistenza in serie alla induttanza peggiora, come vedremo, la sensibilità delle misure dove si impiega il campione. Alti valori di Q si possono ottenere solo con l'uso di supporti ferromagnetici; questi ultimi sono in genere a forma toroidale, per concentrare il campo magnetico nell'induttore e per ridurre l'influenza dei campi esterni e gli accoppiamenti induttivi con il resto del circuito. Mediante l'uso di questi supporti l'induttanza acquista una sensibile dipendenza dalla corrente, poiché il μ del materiale (e quindi l'induttanza) prima cresce all'aumentare della corrente e poi, raggiunta la saturazione del materiale, diminuisce rapidamente. Un altro grosso contributo alla variazione dell'induttanza effettiva fra i terminali dipende dalla capacità in parallelo alla bobina, dovuta sia a quella distribuita di cui abbiamo già parlato nei capitoli precedenti, sia a quella fra il terminale H e lo schermo nella configurazione a due terminali. L'effetto della capacità in parallelo è quello di aumentare il valore effettivo di L con le frequenza (Fig.7):

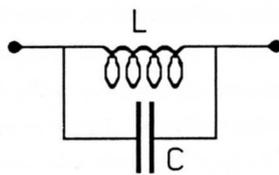


Fig.X.7

$$Z = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = j\omega L \left(\frac{1}{1 - \omega^2 LC} \right) = j\omega L' \quad (\text{X.8})$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \frac{L' - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (\text{X.9})$$

Il termine correttivo (9) è dominante, a parità di corrente, rispetto a tutti gli altri e i valori di C in gioco (dovuti principalmente alle capacità distribuite) sono tali che una induttanza campione da 100 mH da 1 a 10 kHz aumenta tipicamente dell'1% (cioè $\omega_0/2\pi \approx 100kHz$). Quanto al parametro di qualità Q esso aumenta con la frequenza e poi, raggiunto un massimo ($Q \approx 200$) fra 2 e 20 kHz , diminuisce a causa dell'aumento delle perdite dielettriche e del supporto ferromagnetico.

5.- Ponti in alternata

Supponiamo di disporre di un circuito come quello in Fig.8 cioè un ponte dove tutte le impedenze sono del tipo complesso.

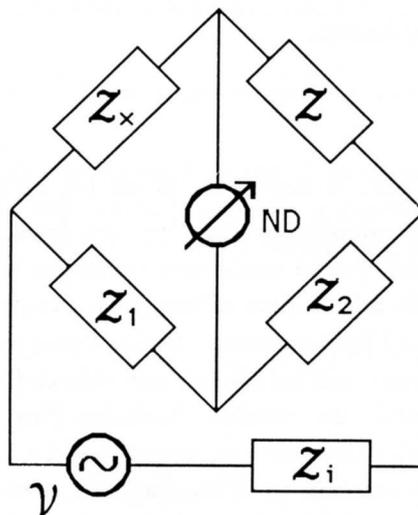


Fig.X.8

ND è un rivelatore di zero, in pratica un sensibilissimo *voltmetro in alternata* di cui più avanti descriveremo le caratteristiche e il principio di funzionamento. Quando il voltmetro rivela una ddp nulla (entro la sua sensibilità) è possibile, seguendo esattamente lo schema di ragionamento del

Ponte di Wheatstone, verificare l'esistenza di una precisa relazione fra le impedenze del ponte; tale condizione è ovviamente *identica* a quella del Ponte di Wheatstone, eccezion fatta per le grandezze che in questo caso sono complesse:

$$Z Z_1 = Z_2 Z_x \quad \text{ovvero} \quad Z_x = Z \frac{Z_1}{Z_2} \quad (\text{X.10})$$

Trattandosi di grandezze complesse, in realtà le relazioni sono due, una per la parte reale e una per la parte immaginaria. Corrispondentemente, per compiere le misure, occorre disporre di campioni variabili sia per quanto riguarda la parte reale che la parte immaginaria di Z , Z_1 e Z_2 ; inoltre, mentre nel caso del Ponte di Wheatstone, a patto di disporre di campioni o sufficientemente piccoli o sufficientemente grandi, l'equilibrio è sempre possibile, nel caso delle impedenze ciò non è più vero; infatti, a causa del fatto che il coefficiente dell'immaginario può essere sia positivo che negativo, si possono verificare condizioni in cui il sistema di due equazioni nel campo reale associato alla (10) non ammette soluzioni.

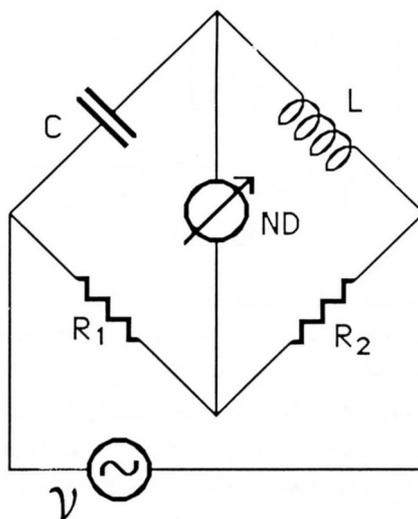


Fig.X.9

In Fig.9 è rappresentato un caso di ponte non equilibrabile.

Esiste per contro una numerosissima schiera di ponti in alternata, almeno in linea di principio, equilibrabili; essi sono classificati a seconda della natura (resistiva, capacitiva, induttiva o mista) delle impedenze usate per il confronto (Z , Z_1 e Z_2). Ci limitiamo a dare alcuni esempi.

Ponte di De Sauty serie (Fig.10)

Qui, come nel caso illustrato precedentemente, è adottata una soluzione molto diffusa per la scelta di Z_1 e Z_2 , ovvero due resistenze R_1 e R_2 . R_1 e R_2 non sono quasi mai due resistenze fisse, bensì si tratta di un'unica resistenza a filo (partitore a filo) con un cursore che la può dividere in due resistenze (R_1 e R_2 appunto) secondo un rapporto variabile con continuità. Inoltre il movimento meccanico, in genere rotatorio, che provoca lo scorrimento del cursore reca un indice con scala che fornisce una misura del rapporto $\frac{R_1}{R_2}$, la grandezza di primario interesse. Infatti, posto $Z_1 = R_1$ e

$Z_2 = R_2$ nella (10), si ottiene:

$$\begin{cases} R_x = \frac{R_1}{R_2} R \\ C_x = \frac{R_2}{R_1} C \end{cases} \quad (\text{X.11})$$

Posto $R_x C_x = \tau_x$ e $RC = \tau$, le (11) possono sinteticamente scriversi $\tau_x = \tau$.

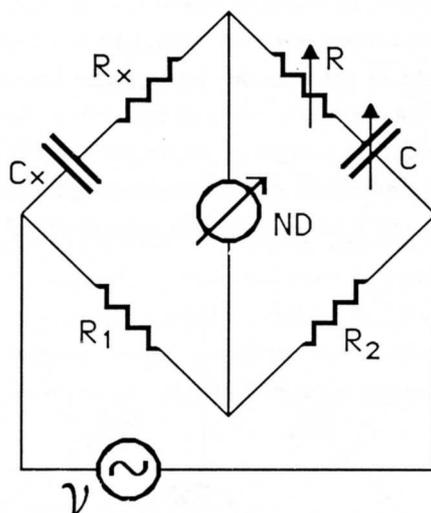


Fig.X.10

Le (11) ci dicono che nel caso del Ponte di De Sauty serie, le condizioni di equilibrio non dipendono dalla frequenza. Pertanto, nell'ipotesi che il generatore non sia un generatore sinusoidale perfetto, ma abbia piuttosto contributi di armoniche superiori alla fondamentale, l'equilibrio sarà comunque lo stesso per tutte le armoniche, cioè corrisponderà agli stessi valori di R , C , R_1 e R_2 .

In pratica questa affermazione è più teorica che reale; infatti la ipotesi sottaciuta è che R_x , C_x , R , C , nonché R_1 e R_2 , siano costanti in funzione della frequenza; in pratica, limitandoci anche solo alle resistenze R_1 e R_2 , questo è solo vero per campi abbastanza ristretti di ω , là dove effetti capacitivi e induttivi del filo non si fanno ancora sentire (vedi §§1,2).

Quanto alla accuratezza con cui R_x e C_x sono determinate, tralasciando per il momento il problema della sensibilità, avremo per gli errori massimi:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta \frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2}} + \frac{\Delta R}{R} \quad (\text{X.12})$$

ed analoga per $\frac{\Delta C_x}{C_x}$; $\frac{\Delta R}{R}$ è l'errore relativo dichiarato dal costruttore su R , resistenza campione, in genere a decadi. Se si lavora ad una frequenza diversa da 1 kHz sarà bene conoscere la correzione da apportare ad R che probabilmente influenzerà anche la precisione di R (vedi §2). Il primo termine a secondo membro è stato lasciato indicato in questa forma poiché il suo valore dipende da come esso viene determinato: se R_1 e R_2 vengono misurati indipendentemente esso sarà dato da $\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}$; se viceversa si usa l'indicazione della manopola che comanda il partitore a filo, occorrerà conoscere la linearità del comando, stimare l'errore di lettura della scala e quindi, facendo attenzione al fatto che l'errore su R_1 non è indipendente da quello su R_2 , calcolarsi la corretta espressione per $\Delta(\frac{R_1}{R_2})$.

Ponte di De Sauty parallelo (Fig.11)

Si trova, esattamente come prima:

$$\begin{cases} R_x = \frac{R_1}{R_2} R \\ C_x = \frac{R_2}{R_1} C \end{cases}$$

e continuano a valere così tutte le osservazioni fatte a proposito del De Sauty serie.

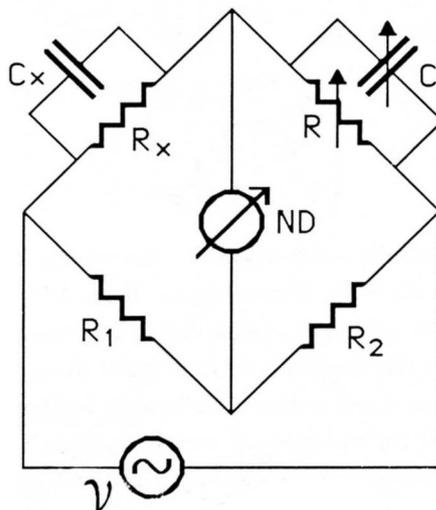


Fig.X.11

Ponte di Wien

Abbiamo visto nel Cap IX,§5 che disponendo di un condensatore C_s in serie ad una resistenza R_s è sempre possibile disegnare un circuito equivalente dal punto di vista elettrico costituito da un condensatore C_p e da una resistenza R_p in parallelo con C_p e R_p diversi da C_s e R_s , ma legati ad essi da una relazione che contiene anche la frequenza. Deve perciò essere possibile ottenere l'equilibrio per il cosiddetto ponte di Wien:

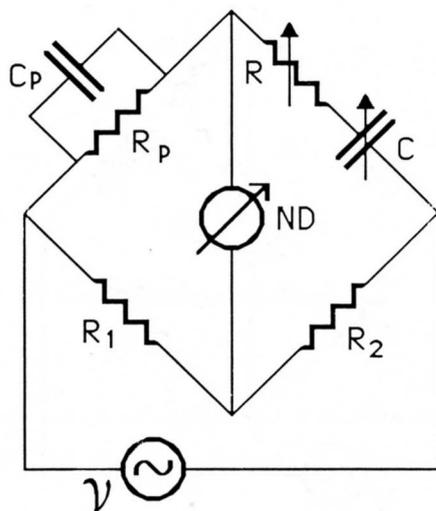


Fig.X.12

Infatti (Fig.12) possiamo sempre pensare di sostituire C_p, R_p con l'equivalente serie R_s, C_s la quale, con R e C , costituisce un De Sauty serie per il quale è sempre possibile trovare l'equilibrio. Le condizioni di equilibrio per C_p e R_p sono:

$$\left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right)^{-1} = \frac{R_1}{R_2} \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \quad (\text{X.13})$$

Da cui segue

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \quad (\text{X.14})$$

e pertanto:

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = \frac{R}{R_p} + \frac{C_p}{C} \\ \omega^2 = \frac{1}{R_p C_p R C} \end{cases} \quad (\text{X.15})$$

Non sorprende che questa volta le condizioni di equilibrio *dipendano* dalla frequenza; infatti sappiamo che la trasformazione $C_p \parallel R_p \Leftrightarrow C_s + R_s$ *dipende* da ω . Il ponte di Wien, proprio per questa sua proprietà, può essere adoperato per misurare ω , una volta che siano noti R_p, C_p, R, C ; anzi, in linea di principio, allo scopo basterebbe che fossero note le costanti di tempo $\tau_p = R_p C_p$ e $\tau = RC$.

Nel caso del ponte di Wien, se il generatore non è puro, ma contiene contributi di diverse armoniche, si otterranno vari minimi sul rivelatore di zero (e nessuno zero), ognuno in corrispondenza delle varie armoniche e tanto più pronunciato quanto più grossa è l'ampiezza di segnale del generatore per quella armonica.

Ponte di Maxwell LL

Si trova (Fig.13):

$$\begin{cases} L_x = L \frac{R_1}{R_2} \\ R_x = R \frac{R_1}{R_2} \end{cases} \quad (\text{X.16})$$

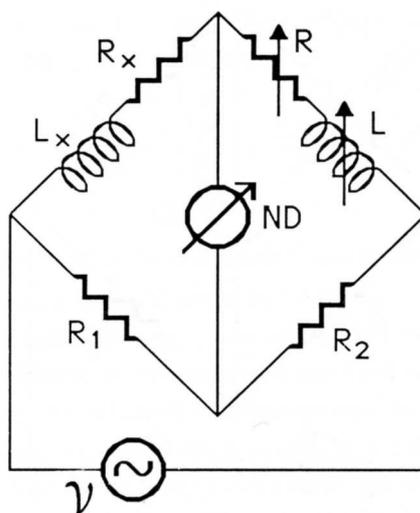


Fig.X.13

In un ponte di questo genere, cioè dove compaiono due induttanze, occorre fare in modo di ridurre il più possibile l'accoppiamento induttivo fra di esse: per esempio allontanandole e, se avvolte su supporti cilindrici, ponendo gli assi dei supporti ortogonali l'uno all'altro. Esente da questo tipo di problema è il

Ponte di Maxwell LC o Ponte di Maxwell-Wien (Fig.14)

La condizione (10) si riduce a:

$$(R_x + j\omega L_x)\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = R_1 R_3 \quad (\text{X.17})$$

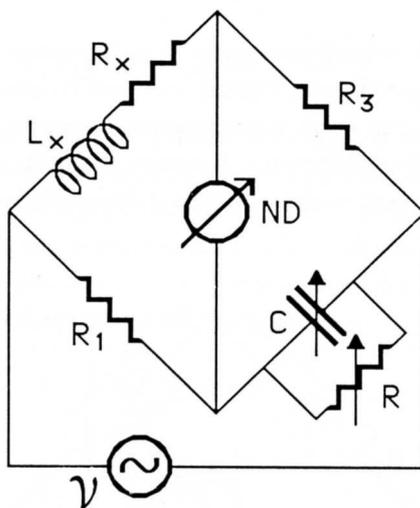


Fig.X.14

Si trovano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} R_x = R_3 \frac{R_1}{R} \\ L_x = R_1 R_3 C \end{cases} \quad (\text{X.18})$$

Anche la configurazione duale del Ponte di Maxwell-Wien, il

il Ponte di Hay(Fig.15) può essere adoperata per determinare il valore di una induttanza: si ottengono ancora le condizioni (18) che, introducendo le costanti di tempo $\tau_x = \frac{L_x}{R_x}$ e $\tau = RC$, danno $\tau_x = \tau$.

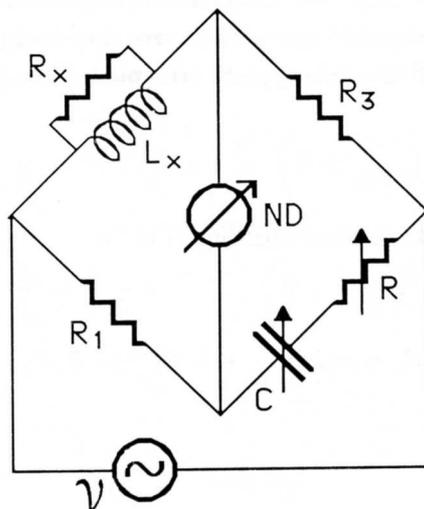


Fig.X.15

Le varie configurazioni studiate andranno scelte principalmente in base a criteri di massimizzazione della sensibilità nella misura della grandezza a cui siamo interessati. Notiamo intanto che, negli esempi fatti, le impedenze campione (reali e immaginarie) variando le quali si arriva all'equilibrio finale sono entrambe montate sullo stesso ramo. Il motivo di questa scelta dipende dal fatto che con questa configurazione la procedura di raggiungimento dell'equilibrio può essere assai più rapida che con altre.

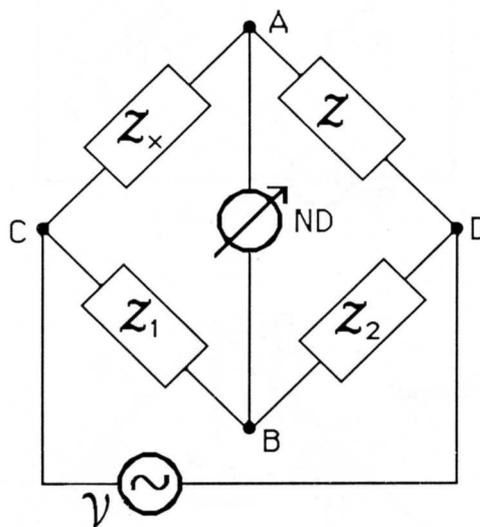


Fig.X.16

Infatti, con riferimento alla Fig.16, supponendo che l'impedenza di ingresso del rivelatore sia molto maggiore di *tutte* le altre del ponte, abbiamo:

$$V_{AB} = V_{CD} \left(\frac{Z}{Z_x + Z} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = V_{CD} \frac{Z Z_1 - Z_x Z_2}{(Z_x + Z)(Z_1 + Z_2)} \quad (\text{X.19})$$

Da questa espressione, detto Z^* il valore di Z all'equilibrio, si ricavano le condizioni (10):

$$Z^* Z_1 - Z_x Z_2 = 0$$

che comportano:

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}^*} = \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} \quad (\text{X.20})$$

Ovvero, all'equilibrio, i rapporti delle impedenze che confluiscono nei due terminali del rivelatore devono essere uguali. In una condizione generica in cui il ponte si trova fuori dall'equilibrio avremo:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^* + z \quad \text{con} \quad z = r + jx \quad (\text{X.21})$$

e pertanto dalla (19), (20) e (21) otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{AB} &= \mathcal{V}_{CD} \frac{z\mathcal{Z}_1}{(\mathcal{Z}_x + \mathcal{Z}^*)(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2) + z(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)} = \\ &= \mathcal{V}_{CD} \frac{\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} \cdot \frac{z}{\mathcal{Z}^*}}{\left(1 + \frac{\mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}^*}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}\right) + \frac{z}{\mathcal{Z}^*}\left(1 + \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}\right)} = \mathcal{V}_{CD} \frac{\mathcal{F} \cdot \frac{z}{\mathcal{Z}^*}}{(1 + \mathcal{F})\left[1 + \mathcal{F} + \frac{z}{\mathcal{Z}^*}\right]} \end{aligned} \quad (\text{X.22})$$

Il rivelatore di zero, come tutti i voltmetri in alternata, dà una indicazione proporzionale al modulo di \mathcal{V}_{AB} :

$$|\mathcal{V}_{AB}| = |\mathcal{V}_{CD}| \frac{|\mathcal{F}| \left| \frac{z}{\mathcal{Z}^*} \right|}{\left| 1 + \mathcal{F} \right| \left| 1 + \mathcal{F} + \frac{z}{\mathcal{Z}^*} \right|} \quad (\text{X.23})$$

L'azzeramento del ponte, ovvero la minimizzazione di $|\mathcal{V}_{AB}|$, si ricerca operando sulle due impedenze variabili R e X poste sul *ramo di confronto* ($\mathcal{Z} = R + jX$) e sarebbe altamente desiderabile l'assenza di interazione fra le operazioni di aggiustamento della R e quelle della X ; che cioè, trovato il minimo di $|\mathcal{V}_{AB}|$ in funzione di R , questo corrispondesse a R^* e che la successiva azione su X portasse a X^* ; se così è, in due mosse si può equilibrare il ponte, almeno trascurando i problemi di sensibilità finita del rivelatore. Matematicamente questo comporta che:

$$\begin{cases} \frac{\partial |\mathcal{V}_{AB}|}{\partial r} = 0 & \text{per } r = 0 \\ \frac{\partial |\mathcal{V}_{AB}|}{\partial x} = 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (\text{X.24})$$

Poiché, avendo supposto l'impedenza di uscita del generatore trascurabile, $\mathcal{V}_{CD} = \mathcal{V}$ non dipende né da r né da x e altrettanto si può dire di \mathcal{F} e di \mathcal{Z}^* , cercare il minimo di $|\mathcal{V}_{AB}|$ rispetto a r e a x equivale a cercare il minimo di una espressione del tipo (vedi (23)):

$$\frac{r^2 + x^2}{(A + r)^2 + (B + x)^2} \quad (\text{X.25})$$

con

$$\begin{cases} A = \text{Re} [(1 + \mathcal{F})\mathcal{Z}^*] \\ B = \text{Im} [(1 + \mathcal{F})\mathcal{Z}^*] \end{cases} \quad (\text{X.26})$$

Da questa espressione si vede che se siamo abbastanza vicini alle condizioni di equilibrio, cosicché $r \ll A$ e $x \ll B$ e possiamo trascurare r e x nel denominatore della (25), allora effettivamente si verificano le (24) e la ricerca dello zero procede senza interazioni fra R e X ; si badi bene che l'assenza di interazione è particolarmente importante in prossimità dell'equilibrio perché l'aggiustamento finale è quello più delicato a causa della ridotta intensità del segnale.

Risultato analogo avremmo ottenuto se il ramo da variare fosse stato quello di \mathcal{Z}_2 , come nel ponte di Maxwell LC e in quello di Hay. Se avessimo messo però la resistenza variabile su un ramo e la reattanza su un altro, non avremmo trovato queste condizioni di "ortogonalità" nelle operazioni, neppure nell'intorno del minimo.

6.— Sensibilità nei ponti in alternata

Affrontiamo ora il problema della sensibilità del ponte; non sviscereremo il problema come nel caso del Ponte di Wheatstone, sia per le ulteriori complicazioni risultanti dai gradi di libertà aggiuntivi (impedenze complesse), sia perché in pratica si riesce a disporre di rivelatori di zero estremamente sensibili, sia perché la discussione sul Ponte di Wheatstone ha insegnato che la sensibilità è una grandezza in genere lentamente variabile e una ricerca esasperata del massimo assoluto non è quindi necessaria e infine perché in pratica lo sperimentatore si trova a dover rispettare altri tipi di vincoli (massima corrente sopportabile dai componenti, disposizione dei medesimi, schermatura) che finiscono per determinare la configurazione del ponte indipendentemente dal massimo della sensibilità.

Mantenendo comunque, l'ipotesi assai realistica di impedenza elevata del rivelatore di zero e di impedenza del generatore trascurabile, nell'intorno del punto di equilibrio (cioè per $\mathcal{Z} = R^* + \Delta R + j(X^* + \Delta X)$ con $\frac{\Delta R}{R^*} \ll 1$ e $\frac{\Delta X}{X^*} \ll 1$), in base alla (22) si ricava, facendo il limite per $\Delta R, \Delta X \rightarrow 0$ (Fig.16):

$$\Delta \mathcal{V}_{AB} = \mathcal{V} \cdot \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \frac{\Delta R + j\Delta X}{\mathcal{Z}^*} \quad (\text{X.27})$$

Il rivelatore misura il modulo (o l'ampiezza) di $\Delta \mathcal{V}_{AB}$ e pertanto una indicazione della sensibilità del metodo si ottiene considerando:

$$S_T = \frac{|\Delta \mathcal{V}_{AB}|}{\left| \frac{\Delta \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}^*} \right|} = |\mathcal{V}| \cdot \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right| \quad (\text{X.28})$$

Abbiamo, come nel caso del Ponte di Wheatstone, usato la variazione relativa $\frac{\Delta \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}^*}$ anziché $\frac{\Delta \mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}_x}$ e questo perché esse, a parità di \mathcal{Z}_1 e \mathcal{Z}_2 coincidono. La (28) ci dice intanto che la sensibilità cresce con $|\mathcal{V}|$. Prima di procedere oltre, osserviamo che in genere non si è interessati a misurare il modulo di una impedenza, bensì la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Pertanto ha interesse conoscere separatamente la sensibilità per la stima delle due grandezze. Supponendo che $\mathcal{Z} = R_s + jX_s$ (cioè una serie; l'estensione al parallelo si può fare molto semplicemente):

$$S_{R_s} = \frac{|\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{X_s=X_s^*}}{\frac{\Delta R_s}{R_s}} \quad (\text{X.29})$$

e

$$S_{X_s} = \frac{|\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{R_s=R_s^*}}{\frac{\Delta X_s}{X_s}} \quad (\text{X.30})$$

Dalla (27) si ottiene:

$$\begin{cases} |\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{X_s=X_s^*} = |\mathcal{V}| \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right| \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + X_s^2}} \frac{\Delta R_s}{R_s} \\ |\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{R_s=R_s^*} = |\mathcal{V}| \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right| \frac{X_s}{\sqrt{R_s^2 + X_s^2}} \frac{\Delta X_s}{X_s} \end{cases} \quad (\text{X.31})$$

e pertanto per i rapporti delle due sensibilità abbiamo:

$$\frac{S_{R_s}}{S_{X_s}} = \frac{R_s}{X_s} \quad (\text{X.32})$$

che ci dice qualcosa di estremamente intuitivo: la sensibilità è migliore per il coefficiente che domina il modulo dell'impedenza. Se avessimo considerato un parallelo, $Z^{-1} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}$, avremmo trovato il risultato duale, che cioè $\frac{S_{R_p}}{S_{X_p}} = \frac{X_p}{R_p}$.

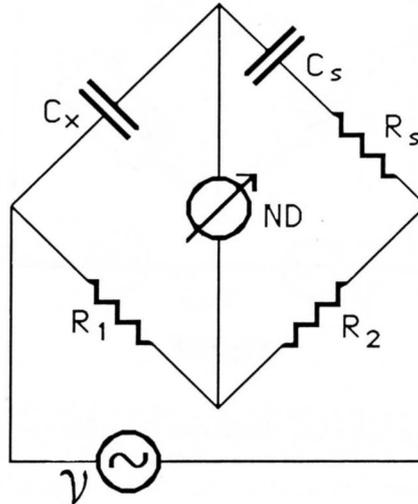


Fig.X.17

Questi ultimi risultati suggeriscono un altro fatto importante che potrebbe essere sfuggito: supponiamo di avere un ponte nominalmente *impossibile*, per esempio del tipo in Fig.17. La *impossibilità* significa che non si può raggiungere lo zero, ma non esclude che si possa trovare un minimo della differenza di potenziale ΔV_{AB} ; anzi il più delle volte il minimo esisterà e potrà anche essere assai pronunciato, se il coefficiente che rende il ponte impossibile (R_s) è molto minore dell'altro coefficiente (X_s); infatti le (31) ci dicono che la stessa variazione relativa su R_s e X_s dà dei contributi alla variazione del modulo di ΔV_{AB} , e quindi in definitiva al segnale sul rivelatore di zero, pesati con un fattore direttamente proporzionale al coefficiente che stiamo variando. Da ciò possiamo anche arguire che nel montare un ponte non è strettamente necessario tener conto, nel ramo di confronto, di tutte le componenti di impedenza del componente da misurare: avremo infatti un minimo nel segnale ΔV_{AB} meno pronunciato che nel caso in cui avessimo tenuto conto di tutti i contributi e il minimo sarà tanto meno profondo quanto più grosso sarà il contributo all'impedenza che avremo trascurato.

Torniamo ora a valutare il fattore $K = \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right|$ contenuto nelle (31) e cerchiamo di massimizzarlo. Tenendo conto che $\mathcal{F} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_x}{Z^*}$ e considerando i casi in cui Z_1 e Z_2 sono reali abbiamo $\mathcal{F} = \text{Re}(\mathcal{F}) = F$. Pertanto

$$K = \frac{F}{(1 + F)^2} \quad (\text{X.33})$$

Dalla (33) si ottiene che il massimo di K corrisponde a $F = 1$. Pertanto il massimo di sensibilità nella determinazione della resistenza e della reattanza di Z_x è ottenuto quando $R_1 = R_2$. Se consideriamo ponti quali quello di Maxwell LC o di Hay la situazione circuitale è differente da quella schematizzata nella Fig.16; essa è piuttosto del tipo di Fig.18.

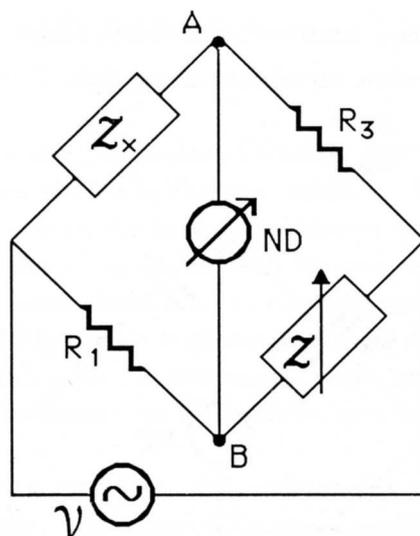


Fig.X.18

Si può vedere che anche in questo caso otteniamo l'espressione (27), ovvero

$$\Delta V_{AB} = v \cdot \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \frac{\Delta R + j\Delta X}{Z^*}$$

con $\mathcal{F} = \frac{R_1}{Z^*} = \frac{Z_x}{R_3}$. Questa volta però \mathcal{F} è complesso e possiamo porre $\mathcal{F} = |\mathcal{F}| \exp j\psi = F \exp j\psi$. Per trovare il massimo di sensibilità per variazioni di ΔR e ΔX si tratta di trovare il massimo del modulo di

$$K = \frac{|\mathcal{F}|}{|1 + \mathcal{F}|^2} = \frac{F}{1 + F^2 + 2F \cos \psi} \quad (\text{X.34})$$

Il massimo di K , fissato ψ , è trovato ancora per $F = 1$, ovvero quando $|Z^*| = R_1$ e $|Z_x| = R_3$. La (34) ci dice poi che la sensibilità è migliore per quelle misure in cui la differenza di fase ψ fra Z^* e R_1 e fra R_3 e Z_x è massima. Infatti si noti che nella (34) il denominatore diminuisce all'aumentare di ψ da 0 a π . Nei casi considerati ora in cui Z_1 e Z_3 sono reali, al più ψ può essere $\pm \frac{\pi}{2}$, ma se avessimo considerato un ponte come quello in Fig.19 la prescrizione data dalla (34) suggerisce di adoperare per Z_1 una induttanza pura e per Z_3 un condensatore puro con la condizione:

$$\begin{cases} \omega L_x = \frac{1}{\omega C_3} \\ \omega L_1 = \frac{1}{\omega C} \end{cases} \quad (\text{X.35})$$

e avremmo ottenuto una sensibilità nominalmente infinita.

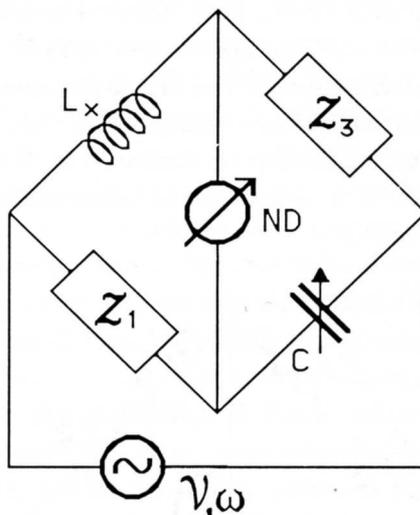


Fig.X.19

La condizione (35) corrisponde ad avere una impedenza complessiva fra i morsetti del generatore uguale a zero, ovvero una corrente infinita sui due rami del ponte; più avanti studieremo in dettaglio configurazioni di impedenze di questo genere che sono dette *risonanti*. In pratica le condizioni (35) non si potranno mai soddisfare a causa di contributi reali alle impedenze che sappiamo essere inevitabili; un ponte come quello ora descritto avrebbe anche il problema della presenza di due induttanze, proprio per evitare le quali è stato introdotto il ponte *LC*.

Tornando ai ponti di effettivo utilizzo (De Sauty, Maxwell *LC*, Hay), notiamo che la prescrizione $|\mathcal{F}| = 1$ niente dice sul valore che devono avere le impedenze, purché quelle confluenti nei rami di rivelazione siano uguali in modulo; questo risultato è conseguenza del fatto di aver ammesso, abbastanza realisticamente per la verità, l'impedenza del generatore molto piccola e l'impedenza del rivelatore molto grande. Sul valore che le impedenze dei rami devono assumere, torneremo nel §8, quando parleremo dei *disturbi* che possono influenzare la misura; infatti sulla base della loro minimizzazione sarà possibile avere prescrizioni in proposito.

7.— Il rivelatore di zero

Veniamo ora al rivelatore di zero. Non può trattarsi di un galvanometro di quelli con periodo attorno al secondo, poiché esso, sollecitato da un termine forzante a media nulla con un periodo estremamente breve ($10^{-3}s$ a $1 kHz$) non mostrerebbe alcuna deflessione (vedi Cap.XI, §2). A frequenze attorno al centinaio di cicli al secondo, possono andare bene *galvanometri a vibrazione*, cioè strumenti che si basano ancora sull'interazione del campo magnetico prodotto dalla corrente da misurare con un campo magnetico statico, ma fatti in modo da avere un periodo uguale o molto vicino a quello della tensione alternata del generatore; essi entrano in risonanza quando sono eccitati e l'ampiezza delle oscillazioni che l'equipaggio compie è proporzionale all'ampiezza del termine forzante. Nel campo delle frequenze audio ($< 20kHz$), la *cuffia telefonica* è stata per lungo tempo il rivelatore di zero di gran lunga più utilizzato. L'ampiezza del segnale sonoro udibile nella cuffia è proporzionale alla corrente che vi circola; non si tratta di un rivelatore con impedenza di

ingresso particolarmente elevata e nella ricerca della massima sensibilità intervengono i problemi di ottimizzazione dell'impedenza che abbiamo già discusso quando abbiamo studiato il Ponte di Wheatstone con il galvanometro a rivelare lo zero. Non ci addentreremo in questi problemi; piuttosto, allo scopo di evidenziare alcuni problemi di carattere generale che si incontrano nell'azzeramento dei ponti in alternata, descriviamo la procedura di azzeramento di un ponte che utilizzi la cuffia come rivelatore di zero. Supponiamo di aver montato un ponte di De Sauty e di cercare il minimo (idealmente lo zero) del segnale (Fig.20).

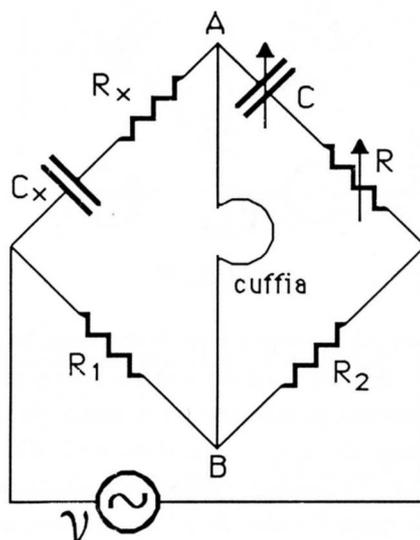


Fig.X.20

Il generatore abbia un controllo di *volume*, si possa cioè variare l'ampiezza di \mathcal{V} praticamente da 0 a un massimo V_0 . Supponiamo che il generatore oscilli a 1 kHz ; l'orecchio percepirà allora un fischio non particolarmente acuto. Inizialmente il ponte sia fuori dall'equilibrio: udiremo un fischio abbastanza intenso, anche tenendo il controllo di volume a un livello non particolarmente alto. Cominciando, per esempio, ad agire su R , ammettiamo di trovare un minimo del segnale; aumenteremo allora il volume e quindi agiremo su C fino a trovare nuovamente un minimo; aumenteremo di nuovo l'ampiezza e ritoccheremo R (quasi certamente faremo una variazione assai più piccola delle precedenti, cioè su decadi della cassetta meno significative). Aumenteremo ancora l'ampiezza di \mathcal{V} e ritoccheremo C e così via, facendo sempre variazioni più piccole, aumentando in continuazione l'ampiezza di \mathcal{V} . Da un certo punto in poi della procedura, quando non saremo ancora giunti al minimo assoluto, molto probabilmente cominceremo a udire un *ronzio di bassa frequenza* che ci disturberà non poco nel nostro sforzo di percepire la minima ampiezza possibile del fischio a 1 kHz . Noteremo anche che l'ampiezza di questo ronzio non manifesta variazioni strettamente correlate con la procedura di azzeramento. Proseguendo la nostra ricerca della minima intensità del fischio a 1 kHz , dovremo ad un certo punto desistere, quando il ronzio sovrasta il tenue segnale. Il motivo di questo ronzio va ricercato nel fatto che il circuito montato presenta inevitabilmente accoppiamenti di tipo induttivo con la rete di alimentazione dell'oscillatore (cioè la tensione di 220 V , 50 Hz fornita dall'ENEL). La corrente a 50 Hz viene rivelata dalla cuffia e disturba la procedura di azzeramento principalmente perché, essendo l'accoppiamento definito dalla geometria relativa dei circuiti e quindi di fatto casuale, la situazione non corrisponde in genere ad un generatore a 50 Hz in serie all'oscillatore a 1 kHz e quindi non avremo un minimo del ronzio quando il ponte è equilibrato per il fischio corrispondente al segnale.

Poiché accoppiamenti di questo genere sono difficilmente eliminabili, grande vantaggio si avrebbe se il rivelatore fosse *selettivo in frequenza*. Il galvanometro a vibrazione da questo punto di vista andrebbe estremamente bene, mentre la cuffia telefonica non è quasi per niente selettiva e domanda all'orecchio dello sperimentatore l'operazione di discriminazione fra una frequenza e l'altra. Un moderno e ottimo rivelatore di zero è un *microVoltmetro in alternata* accordabile in frequenza. Esso consiste in un amplificatore molto sensibile la cui uscita, opportunamente trattata* in modo da dare una ddp proporzionale al valore efficace della tensione misurata, comanda uno strumento in continua, tipicamente un galvanometro. Nel caso dello strumento disponibile in laboratorio la sensibilità è tale che possono essere rivelate ddp sinusoidali con ampiezze inferiori ad $1 \mu V$. Il *guadagno* dell'amplificatore (cioè di fatto la sensibilità) può essere regolato con continuità e questo rende praticamente inutile il controllo di volume dell'oscillatore. La caratteristica forse più preziosa dello strumento è la sua sintonizzabilità: è cioè possibile, tramite una regolazione esterna, massimizzare la risposta dell'amplificatore in corrispondenza di una certa frequenza, per esempio quella dell'oscillatore a $1 kHz$; per far ciò occorre, prima di procedere all'azzeramento del ponte, cioè quando il segnale V_{AB} è ancora decisamente diverso da zero, massimizzare la indicazione dello strumento, agendo sulla manopola di *sintonia* (*tuning*). Successivamente questo controllo non va più toccato, poiché la sintonizzazione è indipendente dal guadagno. Il guadagno decresce, allontanandosi dal massimo, abbastanza rapidamente: nel caso dello strumento in laboratorio, il guadagno alla seconda armonica è ridotto al 2% e alla terza all'1%; a $50 Hz$ il guadagno è circa lo 0.2% di quello a $1 kHz$, se quest'ultimo è il valore di sintonia. Si ottiene così il risultato voluto di selezionare abbastanza decisamente la frequenza di interesse e di rimuovere eventuali altri disturbi a frequenze diverse.

La resistenza di ingresso dipende dalla posizione del controllo di guadagno, ma si mantiene comunque molto alta, sempre $> 50k\Omega$. La procedura di ricerca dell'equilibrio del ponte, cioè del minimo del segnale, è analoga a quella descritta precedentemente, salvo che il mantenimento della giusta sensibilità di misura (il mantenimento dell'ago verso la metà scala) viene fatto col controllo di guadagno del rivelatore e non tanto aumentando l'ampiezza del segnale dell'oscillatore.

8.— *Accorgimenti per migliorare la qualità delle misure*

Difficilmente in una misura di laboratorio si giungerà a sfruttare a pieno le caratteristiche di sensibilità del rivelatore di zero e questo almeno per due motivi. Il primo motivo ha a che vedere con la precisione dei campioni; essi possono variare entro un campo di 5 o 6 decadi, diciamo da 0 a $1.1111 \mu F$ nominali e da 0 a 11111Ω nominali per capacità e resistenza rispettivamente; se ad esempio montiamo un Ponte di De Sauty con $R_1 \approx R_2$ e C_x dell'ordine del μF e R_x dei $k\Omega$, possiamo sfruttare tutte o quasi le decadi cosicché saranno possibili variazioni relative estremamente fini dei valori assunti dalle cassette campione. Tuttavia, data la precisione di taratura dei campioni ($\frac{\Delta C}{C} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, $\frac{\Delta R}{R} \approx 4 \cdot 10^{-4}$), è praticamente inutile ogni variazione inferiore ad $1 nF$ e 0.5Ω ; si trova allora che per rivelare queste variazioni non occorre senz'altro mettere al massimo il controllo del guadagno del rivelatore di zero. In altre parole, l'errore dovuto alla sensibilità è, in queste condizioni di misura, trascurabile rispetto a quello di taratura dei campioni. Il secondo motivo è che, se anche decidessimo di andare oltre, disinteressandoci del problema della taratura dei campioni, per esempio

* l'operazione in questione è detta di *raddrizzamento* e verrà discussa con qualche dettaglio nel seguito del corso.

se volessimo verificare l'uguaglianza di due impedenze, prima di raggiungere il massimo del guadagno osserveremmo dei comportamenti anomali dell'apparato sperimentale: ad esempio lo spostamento di un cavetto di connessione o di una scatola di impedenza provoca lo spostamento dell'ago del rivelatore di zero; oppure il semplice movimento dello sperimentatore fa cambiare l'equilibrio del sistema. Siamo cioè in presenza di quegli effetti su cui ci siamo soffermati nel §1; capacità parassite che risentono della posizioni mutue dei conduttori. Inoltre, se un ramo presenta una impedenza particolarmente bassa e quindi in esso circola una corrente non piccola, possono far sentire il loro effetto anche accoppiamenti di tipo induttivo. E' questo il problema che si incontra nel caso che la resistenza a filo $R_1 - R_2$ sia di valore molto piccolo, diciamo dell'ordine di pochi Ohm: a questo riguardo, l'uso di resistenze più elevate riduce gli effetti induttivi ma facilita l'insorgenza degli effetti capacitivi parassiti che viceversa richiedono, per essere contenuti, l'uso di basse impedenze nei rami; infatti le capacità parassite verso gli altri conduttori o fra vari punti del circuito sono tanto più efficaci ad alterare il regime di correnti della rete, quanto più sono grosse le impedenze a cui tali capacità sono in parallelo. Un criterio generale vero e proprio non esiste per la scelta dei migliori valori delle impedenze: in linea di principio comunque possiamo dire che, dominando in alta frequenza gli effetti di capacità, in questi casi conviene ridurre quanto possibile tutte le impedenze, ovvero di fatto R_1 e R_2 .

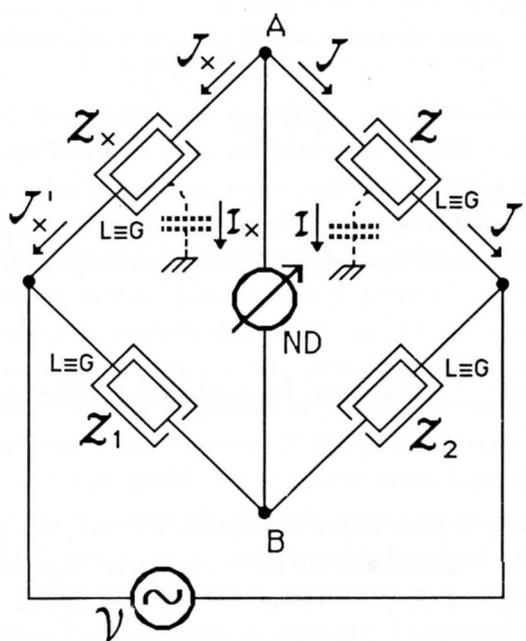


Fig.X.21

Se i montaggi sono ragionevolmente curati, nelle situazioni che si presentano durante le misure effettuate a $1kHz$ di impedenze con modulo da qualche decina a qualche centinaio di Ohm, gli effetti spuri sopra accennati sono evidenti solo quando il guadagno del rivelatore è impostato su valori notevolmente elevati; le variazioni indotte dagli spostamenti dei cavetti corrispondono a ritocchi dei valori impostati sui campioni, più piccoli dell'errore con cui gli stessi campioni sono noti. In queste condizioni il metodo di misura non richiede ulteriori miglioramenti, perché la precisione risulta limitata dalla accuratezza dei campioni e non dagli effetti spuri che sono tutt'al più insoddi-

sfacenti dal punto di vista estetico. Per frequenze più elevate, i disturbi possono invece influenzare la riproducibilità della misura in maniera più sostanziale e allora sono richiesti accorgimenti particolari nell'allestimento sperimentale; guardiamo, a questo riguardo, come è possibile allora usare al meglio i componenti campioni (e non) dotati di terminale di guardia G.

Supponiamo di avere un generico ponte e di montare i componenti con il terminale L (cortocircuitato con G) collegato al vertice di alimentazione (Fig.21). Poiché gli schermi presentano delle capacità verso massa che permettono il passaggio delle correnti \mathcal{I}_x e \mathcal{I} , all'equilibrio è $\mathcal{J}_x = -\mathcal{J}$, ma in genere $\mathcal{J}'_x \neq -\mathcal{J}'$. Lo stesso tipo di considerazione può essere fatta per Z_1 e Z_2 qualora siano dotate di schermo. Comunque, in accordo con la definizione (1) di $Z = \frac{V_{HL}}{\mathcal{J}}$ all'equilibrio si può scrivere (se $Z_1 = R_1$ e $Z_2 = R_2$):

$$V_{AB} = V \frac{Z}{Z + Z_x} - V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 \tag{X.36}$$

da cui discende la solita condizione $Z_x Z_2 = Z_1 Z$. Se avessimo montato gli schermi diversamente questo non sarebbe stato possibile. Si noti che le capacità parassite fra gli schermi e la terra sono rifornite di corrente direttamente dal generatore e proprio per questo non influenzano le condizioni di equilibrio. A parte il problema dei cavi di collegamento non schermati su cui torneremo tra poco, esiste un altro problema che è stato sottaciuto, ovvero che anche il rivelatore di zero presenta capacità verso terra; anch'esso è per questo motivo montato in una scatola conduttrice che può fungere da schermo.

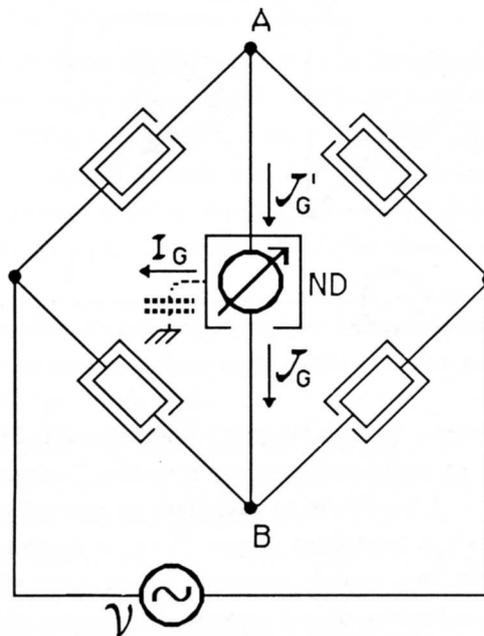


Fig.X.22

Guardiamo (Fig.22) come è opportuno collegare il rivelatore al ponte: a causa della capacità verso terra dello schermo, quando $\mathcal{J}_G = 0$ (deflessioni nominalmente nulle), non è necessariamente detto che anche $\mathcal{J}'_G = 0$ perché \mathcal{I}_G può essere $\neq 0$ e quindi il ponte in realtà non si trova all'equilibrio. Per far in modo che $\mathcal{J}_G = \mathcal{J}'_G = 0$ possiamo cortocircuitare A a terra. Facendo in questo modo, essendo lo schermo a potenziale di terra (occorre ovviamente che l'oscillatore sia *svincolato* da terra,

cioè con i morsetti isolati da terra*, pena cortocircuiti) \mathcal{I}_G non potrà che essere nulla e $\mathcal{J}_G = \mathcal{J}'_G$. Purtroppo con queste operazioni introduciamo un effetto che può seriamente compromettere tutto il nostro sforzo di migliorare l'accuratezza della misura: infatti, procedendo come detto sopra, le capacità fra gli schermi dei componenti e la terra finiscono in parallelo ognuna alla propria impedenza alterando il valore della impedenza stessa. Il sistema che si può adottare è allora quello della cosiddetta *terra di Wagner* che si realizza portando sì lo schermo del rivelatore al potenziale di terra, ma senza che esso vi sia effettivamente collegato; in questo modo si mantiene a zero \mathcal{I}_G , ma le capacità verso terra degli schermi delle impedenze non sono più in parallelo ad esse.

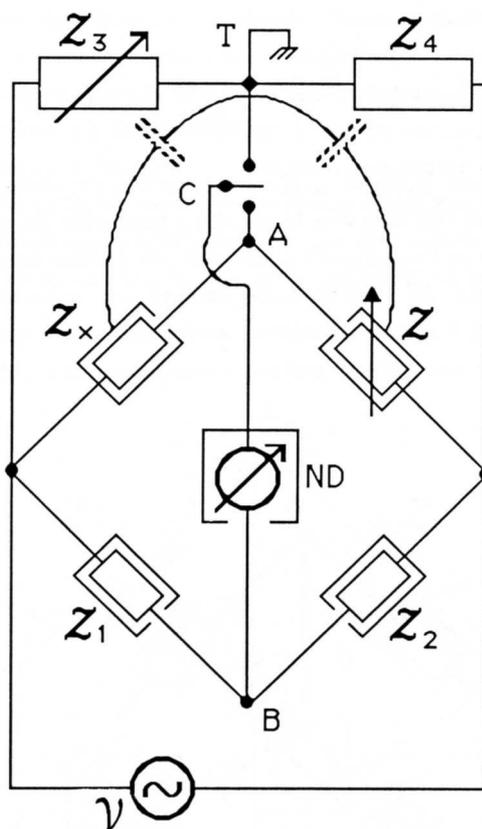


Fig.X.23

Il circuito per realizzare la messa a terra di Wagner è riportato nella Fig.23. Esso consiste sostanzialmente di un ponte usuale più un ramo ausiliario con il vertice T messo a terra; l'oscillatore deve essere del tipo svincolato da terra. L'equilibrio va raggiunto su entrambi i ponti passando dall'uno all'altro tramite il commutatore C; la procedura di zero di uno influenza, dato l'accoppiamento capacitivo, anche l'altro ponte. Alla fine, quando entrambi i ponti sono all'equilibrio, A si troverà a potenziale di terra senza esservi collegato, quindi avremo dispersione nulla da parte dello schermo del rivelatore; d'altra parte essendo A non cortocircuitato con la terra, ma a potenziale di terra, non passerà alcuna corrente fra A e T e pertanto le capacità parassite degli schermi non sono in parallelo fra i vertici dell'alimentazione ed A e quindi non alterano il valore delle impedenze.

Tutti gli argomenti sopra detti per essere effettivamente utili richiedono che anche i cavi di collegamento abbiano uno schermo a terra: ciò in genere è ottenuto tramite cavi coassiali, cioè un conduttore interno rivestito da una guaina isolante e sopra ad essa una calza di rame messa a

* questo requisito è in genere soddisfatto usando nell'oscillatore un trasformatore di uscita.

terra. In questo modo si crea una capacità fra conduttore interno e terra che dipende dalla sezione del cavo e dalla costante dielettrica dell'isolante nonché dalla lunghezza del cavo; questa capacità può essere anche grossa, ma ha il vantaggio, rispetto a quelle spurie che si creano con i cavi non schermati, di essere costante e misurabile, cosicché se ne può tenere esplicitamente conto nell'analisi delle condizioni di equilibrio del ponte.

Ricordiamo ancora che queste precauzioni non sono quasi mai indispensabili lavorando alla frequenza di 1 kHz , con campioni aventi precisioni di poco inferiore allo 0.1%. Si ricordi piuttosto di fare dei montaggi accurati: morsetti serrati bene e superfici di contatto pulite riducono le resistenze spurie dei collegamenti fra i vari conduttori e un po' di accuratezza nella disposizione relativa dei vari componenti, evitando eccessivi grovigli dei cavetti, aiuta molto nel contenimento degli accoppiamenti spuri di tipo induttivo e capacitivo.

Quanto agli errori di misura si è già detto che essi generalmente sono dati dall'errore dei campioni e dalla precisione con cui è noto il rapporto R_1/R_2 , almeno nelle misure in cui si usa il partitore resistivo. Anche qui, in linea di principio se $R_1 \approx R_2$ e vogliamo non dipendere dall'errore di R_1/R_2 potremmo invertire, senza toccare altro, il partitore e ripetere la misura, prendendo poi per Z la media geometrica dei due valori. Nel caso del Ponte di Wheatstone è già stato rimarcato il fatto che l'operazione è tanto più efficace quanto più si è sicuri di non introdurre resistenze aggiuntive sui contatti, diverse nelle due configurazioni. Nel caso dei ponti in alternata oltre a queste precauzioni occorre anche verificare che la disposizione dei cavi di collegamento non influenzi sensibilmente l'equilibrio. Si tratta cioè di verificare che lo scambio di posizione di R_1 con R_2 , non alteri *di per sé* il risultato della misura, che deve rimanere lo stesso a meno di variazioni decisamente inferiori rispetto all'errore di taratura dei campioni. Qualora ciò non si verificasse, vanno rimosse le cause seguendo gli accorgimenti descritti precedentemente.

Quanto alla sensibilità abbiamo già detto che occorre fare in modo che essa sia sufficientemente grande da rendere il relativo errore trascurabile. Abbiamo visto che questo è senz'altro possibile per entrambi i coefficienti reale e immaginario dell'impedenza Z_x da misurare quando essi sono almeno approssimativamente uguali; quando uno dei due coefficienti è molto maggiore dell'altro, quello dominante avrà un piccolo e quasi sempre trascurabile errore di sensibilità, mentre l'altro sarà generalmente affetto da un errore di sensibilità preponderante rispetto ad altri contributi (vedi (31)).

Si ricordi infine che qualora l'elemento campione (di resistenza o reattanza) non disponga di variazioni sufficientemente fini sarà in genere impossibile ottenere un buono zero senza agire su altri lati del ponte, ad esempio sul partitore a filo.

Prima di concludere il capitolo, mostriamo un esempio di ponte in cui è possibile misurare il valore dell'impedenza fra i terminali H e L, eliminando l'influenza delle capacità verso gli schermi; in questa misura i componenti con elettrodo di guardia G sono adoperati nella configurazione a tre terminali (Fig.24). Si tratta di un cosiddetto ponte con *ramo di rapporto a trasformatore*: il ramo di rapporto è il secondario di un trasformatore di precisione (con presa intermedia): il numero delle spire N_A e N_B è noto con grande precisione e così il rapporto delle tensioni $\mathcal{V}_{L_x T}$ e \mathcal{V}_{TL} . La presa intermedia T è messa a terra e ad essa sono collegati gli schermi delle due impedenze, nonché quello del rivelatore di zero. In questo modo le capacità fra i terminali L e L_x e lo schermo vanno in parallelo al secondario del trasformatore; esso ha una bassa impedenza interna (Cap.IX,§6) e quindi tali capacità sono di fatto ininfluenti; le capacità fra H e H_x e lo schermo vanno in parallelo al rivelatore e anch'esse non influenzano l'equilibrio, poiché all'equilibrio gli estremi del rivelatore sono equipotenziali. In questo modo è possibile misurare esattamente Z_x confrontandola con Z , dimenticandosi di tutte le capacità verso gli schermi.

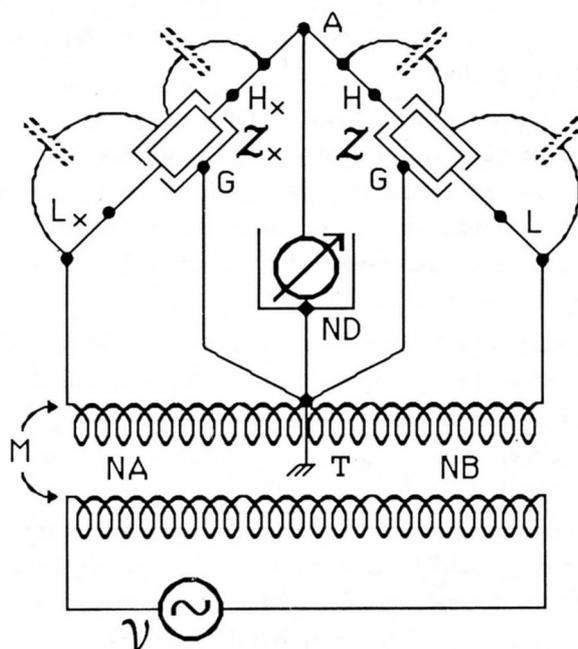


Fig.X.24

NOTA BIBLIOGRAFICA

Sui campioni di impedenze, i cataloghi delle ditte specializzate (per esempio la General Radio) forniscono le informazioni principali e più interessanti. Per una rapida rassegna delle caratteristiche dei campioni si può vedere **ZI 86**(Cap.II), **BE 82** (Capp.I,II,III)e **CO 85** (Cap.III).

Quanto ai ponti in alternata, al problema delle schermature e della messa a terra degli schermi, si può fare riferimento a **FR 59**, **DA 75** e **ZI 86**. **LA 38** e **CO 85** sono densi di informazioni sui vari tipi di ponti in alternata.

XI

MISURE DI POTENZA IN ALTERNATA E MISURA DI VALORI EFFICACI

1.— Definizioni

Sappiamo che in un ramo di un circuito elettrico percorso da una corrente i e ai capi del quale sia presente una differenza di potenziale v , è possibile definire una *potenza istantanea* $W = v \cdot i$ che corrisponde al lavoro per unità di tempo fatto dal campo elettrico sulle cariche che attraversano tale ddp. Questa definizione è completamente esente da limitazioni di validità rispetto al tipo di conduttore cui è applicata la ddp; essa infatti si basa su pure considerazioni elettrostatiche. Nel caso in cui sia nota la curva caratteristica $i = i(v)$ del conduttore presente nel ramo, è possibile trovare espressioni della potenza istantanea che contengono o solo i o solo v . Ad esempio se ammettiamo che il ramo preso in esame sia puramente resistivo ($v = iR$) e che la temperatura sia costante, cosicché anche R sia costante, allora vale:

$$W = i^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (\text{XI.1})$$

Anche nel caso delle correnti alternate, purché le costanti siano concentrate e si considerino frequenze e dimensioni del circuito per cui valga il regime quasi stazionario, è possibile continuare ad adottare questa definizione di potenza istantanea. Ovviamente, per calcolare la potenza istantanea non potremo adoperare il formalismo dei numeri complessi, almeno non con quella disinvoltura a cui finora eravamo abituati; ad esempio, per calcolare la potenza istantanea non potremo usare al posto di i e v le grandezze complesse associate, farne il prodotto e prendere poi la parte reale, perché $Re(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \neq Re(\mathcal{A}) \cdot Re(\mathcal{B})$.

Quanto alla valutazione della *potenza media*, che è la quantità di interesse primario nella determinazione dei bilanci energetici, notiamo che mentre in corrente continua la potenza istantanea coincide con la potenza media, in alternata la situazione è completamente diversa. Consideriamo infatti una impedenza $\mathcal{Z} = R + jX$ ai capi della quale sia applicata una ddp $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$; avremo pertanto una corrente $\mathcal{I} = i_0 \exp j(\omega t + \varphi)$, $\varphi = -\text{atan} \frac{X}{R}$, $i_0 = \frac{v_0}{|\mathcal{Z}|}$. La potenza istantanea sarà pertanto:

$$W = v_0 i_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{XI.2})$$

E' questa una quantità variabile nel tempo e che può assumere entro un periodo sia valori positivi che negativi a seconda che tensione e corrente abbiano o no lo stesso segno (vedi Fig.1): ciò significa che negli intervalli di tempo in cui la potenza è positiva, il circuito esterno che applica la ddp v compie lavoro sulle cariche elettriche e cede energia all'impedenza \mathcal{Z} , quando la potenza è negativa il circuito esterno riceve energia dall'impedenza. Se la media della potenza in un periodo è nulla significa che dell'energia viene ceduta dal resto del circuito all'impedenza in una fase e poi completamente restituita in un'altra; il fenomeno diventa perfettamente reversibile e *in media* non si ha dissipazione di potenza, ovvero cessione di calore ai termostati che mantengono il circuito a temperatura costante.

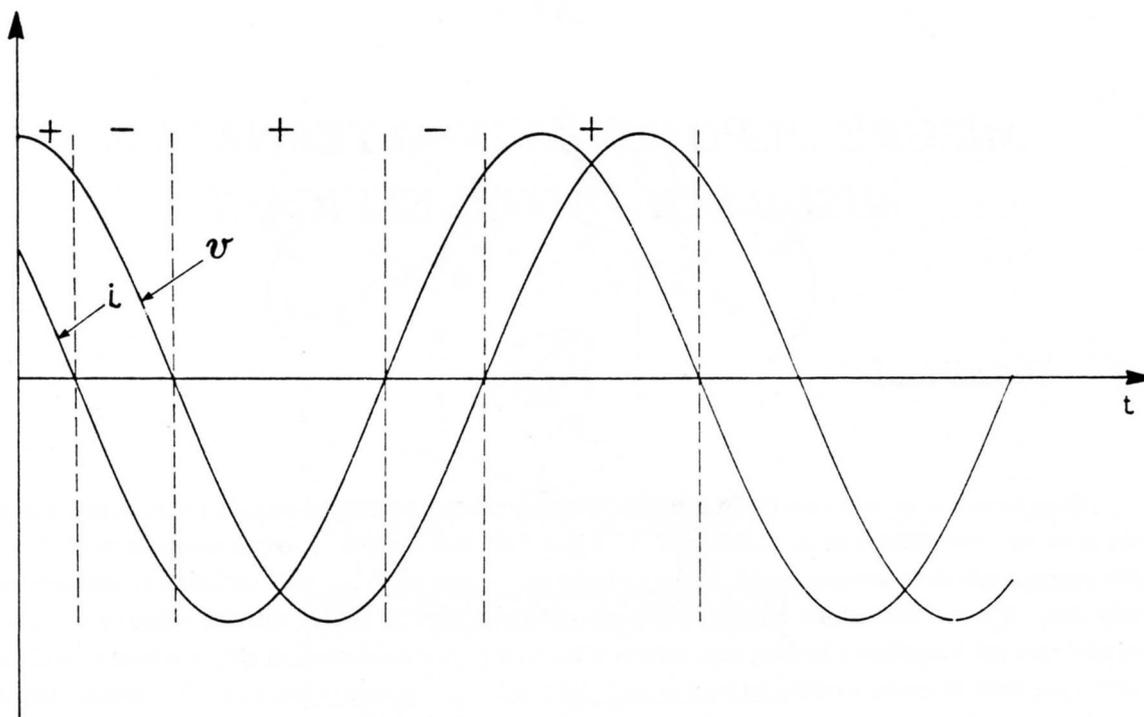


Fig.XI.1

Se ci calcoliamo la potenza media definita su un periodo (che coincide con quella fatta su un tempo molto maggiore di un periodo) troviamo:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} W dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v_0 i_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) dt = \\ &= \frac{v_0 i_0}{2} \cos \varphi = v_{eff} i_{eff} \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{XI.3})$$

dove abbiamo sfruttato la definizione di valore efficace (IX.2). Si vede che per avere potenza media nulla occorre che $\cos \varphi$, detto *fattore di potenza*, sia nullo, cioè $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ che comporta $\frac{X}{R} = \pm \infty$ e pertanto $R = 0$. Il risultato non è sorprendente poiché la perfetta reversibilità del comportamento del circuito comporta l'assenza di lavoro da parte di forze dissipative, quali quelle di attrito all'interno della resistenza. La (3) può anche mettersi in una forma che in modo ancora più trasparente illustra il contributo della resistenza:

$$\langle W \rangle = \frac{v_0 i_0}{2} \cos \varphi = |Z| \frac{i_0^2}{2} \cos \varphi = i_{eff}^2 R \quad (\text{XI.4})$$

Ovvero la potenza media coincide con quella di una corrente continua di intensità pari al valore efficace della corrente alternata che scorresse nella sola resistenza R .

E' interessante vedere in dettaglio quello che accade all'energia trasferita dal circuito esterno all'impedenza e viceversa, calcolando esplicitamente il lavoro nelle varie fasi del periodo. Consideriamo ad esempio un condensatore di capacità C con un generatore di fem alternata collegato alle armature:

$$v = v_0 \cos \omega t \quad (\text{XI.5})$$

e conseguentemente:

$$\begin{cases} i = -v_0 \omega C \sin \omega t \\ i_0 = v_0 \omega C \end{cases} \quad (\text{XI.6})$$

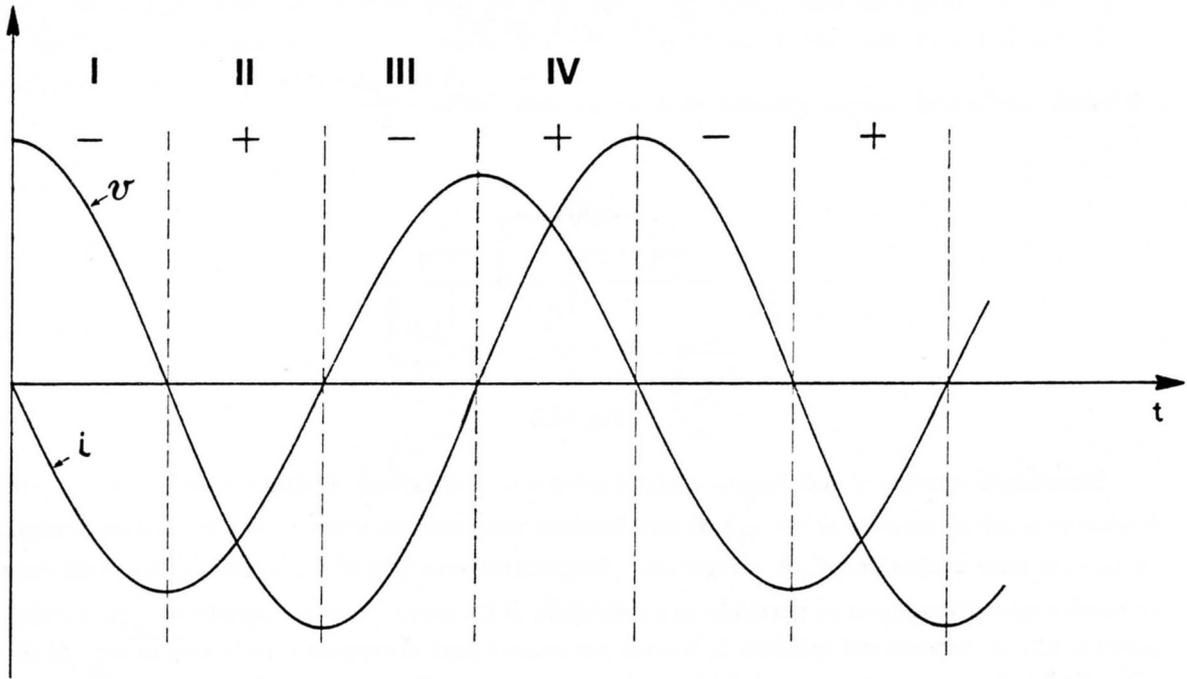


Fig.XI.2

Calcoliamo il lavoro \mathcal{L} nelle varie fasi (Fig.2), notando che all'inizio delle fasi II e IV il condensatore è scarico ($v = 0$ implica $Q=0$), mentre all'inizio delle fasi I e III esso è carico al massimo valore.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_I = \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = -\frac{v_0^2 C}{2} = -\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{II} = \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{v_0^2 C}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{III} = \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} = -\frac{v_0^2 C}{2} = -\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{IV} = \int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^0 v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_{\frac{3\pi}{2\omega}}^0 = \frac{v_0^2 C}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \end{array} \right. \quad (\text{XI.7})$$

dove Q_0 rappresenta il massimo valore assoluto che la carica accumulata sulle armature del condensatore assume entro un periodo. Si vede così che il condensatore si carica dietro l'azione del generatore, fino ad immagazzinare un'energia elettrostatica massima pari a $\frac{Q_0^2}{2C} = \frac{i_{eff}^2}{\omega^2 C} = v_{eff}^2 C$ che viene poi restituita dal condensatore nel quarto di periodo immediatamente successivo. Istante per istante l'energia immagazzinata W_E vale:

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} = v_{eff}^2 C \cos^2 \omega t \quad (\text{XI.8})$$

Procedendo analogamente nel caso in cui $Z = j\omega L$, si trova che istante per istante l'energia accu-

mulata nella bobina, questa volta sotto forma di campo magnetico *, vale:

$$W_M = i_{eff}^2 L \sin^2 \omega t \quad (XI.9)$$

e il valore medio dell'energia accumulata in un periodo risulta $\frac{i_{eff}^2 L}{2}$.

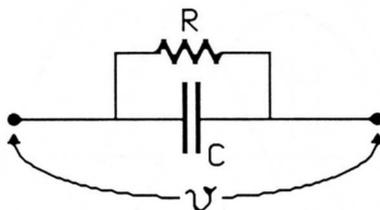


Fig.XI.3

Ricordando quanto a suo tempo detto a proposito del fattore di dissipazione D di un condensatore e del parametro Q ($= \frac{1}{D}$) di una bobina, vediamo ora come queste grandezze possano definirsi in base a considerazioni energetiche. Schematizziamo (Fig.3) un condensatore reale come un condensatore ideale con in parallelo una resistenza R (in genere grande rispetto a $\frac{1}{\omega C}$): tenendo presente che la corrente nel resistore è, istante per istante pari al rapporto fra la ddp ai capi di esso e il valore della resistenza, in un ciclo l'energia dissipata per effetto Joule vale:

$$E_D = \frac{v_{eff}^2}{R} T = \frac{v_{eff}^2}{R} \frac{2\pi}{\omega} \quad (XI.10)$$

Il fattore di dissipazione D può definirsi come:

$$D = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Energia dissipata per effetto Joule in un ciclo}}{\text{Energia massima accumulata nel condensatore}} = \frac{v_{eff}^2}{2\pi} \frac{2\pi}{R\omega v_{eff}^2 C} = \frac{1}{\omega RC} \quad (XI.11)$$

Nell'ultimo passaggio si sono sfruttate la (8) e la (10).

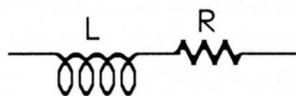


Fig.XI.4

Quanto all'induttore (Fig.4), seguendo la stessa definizione, troviamo:

$$Q = \frac{1}{D} = \frac{2\pi i_{eff}^2 L}{i_{eff}^2 R \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega L}{R} \quad (XI.12)$$

* si rimanda al corso di Fisica Generale per la derivazione dell'espressione dell'energia accumulata nel campo elettrico e magnetico (8,9). Nel Cap.XX torneremo comunque sull'argomento e lo tratteremo con un certo dettaglio.

Queste definizioni si possono applicare anche alle configurazioni duali di quelle considerate e, come vedremo nel seguito, a qualunque circuito.

Affrontiamo ora brevemente il problema del trasferimento di potenza (Cap.I,§9) estendendo il risultato allora ottenuto al caso delle correnti alternate; chiediamoci cioè qual è il carico Z per il quale si ha il massimo di trasferimento di potenza media dal generatore, caratterizzato da una impedenza interna Z_i , al carico (Fig.5).

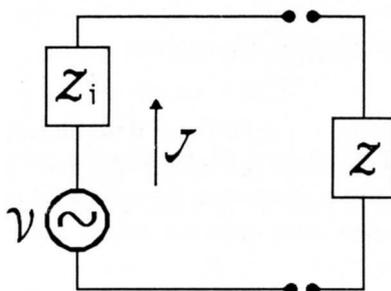


Fig.XI.5

Siano:

$$\begin{cases} Z_i = R_i + jX_i \\ Z = R + jX \end{cases} \quad (\text{XI.13})$$

Scriviamo la potenza dissipata sul carico nella forma (4):

$$\langle W_t \rangle = i_{eff}^2 R = \frac{v_{eff}^2}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} R \quad (\text{XI.14})$$

Si vede immediatamente che, a parità di R , la potenza è massima per $X_i = -X$; soddisfatta questa condizione si trova poi, come in continua, che il massimo assoluto si trova per $R_i = R$.

2.— Misure di potenza in alternata con strumenti elettrodinamici

In questo paragrafo descriveremo il principio di funzionamento del *Wattmetro elettrodinamico* e in particolare descriveremo un modello di wattmetro che, pur essendo oramai scarsamente adoperato nelle applicazioni più moderne, ha tuttavia il pregio di essere di facile comprensione in tutti i suoi particolari costruttivi e di presentare alcune caratteristiche che lo rendono particolarmente indicato dal punto di vista didattico.

Prima di entrare nei dettagli di funzionamento degli *strumenti elettrodinamici* è opportuno considerare il comportamento di un sistema meccanico oscillante avente frequenza propria ω_M eccitato da un termine forzante periodico con frequenza $\omega \gg \omega_M$, ad esempio un galvanometro eccitato con una corrente alternata. Si tratta di trovare le soluzioni di regime dell'equazione differenziale:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + D\dot{\varphi} + E\varphi = F(t) \quad (\text{XI.15})$$

con $F(t)$ periodica con pulsazione ω . \mathcal{J} , D ed E sono costanti positive arbitrarie; il loro significato fisico è quello di un coefficiente di inerzia, di smorzamento e di richiamo elastico rispettivamente

(vedi teoria del galvanometro, Cap. II). Il fatto che $F(t)$ sia periodica consente di svilupparla in serie di Fourier e di esprimerla quindi nella forma

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen} n\omega t + b_n \operatorname{cos} n\omega t) \quad (\text{XI.16})$$

dove F_0 rappresenta il valor medio nel tempo $\langle F(t) \rangle$ di $F(t)$ poiché tutti gli altri termini hanno media nulla. La (16) può mettersi anche nella forma equivalente

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{cos} (n\omega t + \psi_n) \quad (\text{XI.17})$$

Essendo l'equazione differenziale (15) lineare, per risolvere il problema, cioè trovare l'espressione per la soluzione di regime di $\varphi(t)$, basterà sommare le risposte alle varie eccitazioni, ognuna corrispondente a ciascun termine dello sviluppo in serie di Fourier. Quanto al termine F_0 è ben noto che la soluzione particolare vale:

$$\varphi_0 = \frac{F_0}{E} \quad (\text{XI.18})$$

Gli altri dovranno risolversi soddisfacendo l'equazione differenziale

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi}_n + D\dot{\varphi}_n + E\varphi_n = C_n \operatorname{cos} (\Omega t + \psi_n) \quad (\text{XI.19})$$

con Ω corrispondente alle varie armoniche. Sappiamo già che il formalismo dei numeri complessi è estremamente utile per risolvere questo tipo di equazioni; facciamo pertanto la trasformazione:

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow \varphi_{n0} \exp j(\Omega t + \alpha_n) \\ C_n \operatorname{cos} (\Omega t + \psi_n) \rightarrow C_n \exp j(\Omega t + \psi_n) \end{cases} \quad (\text{XI.20})$$

Sostituendo le (20) nella (19), otteniamo un'equazione algebrica:

$$-\Omega^2 \mathcal{J}\varphi_{n0} + j\Omega D\varphi_{n0} + E\varphi_{n0} = C_n \exp j(\psi_n - \alpha_n) \quad (\text{XI.21})$$

per cui l'ampiezza φ_{n0} è presto trovata come:

$$\varphi_{n0} = \frac{C_n}{\sqrt{(E - \Omega^2 \mathcal{J})^2 + \Omega^2 D^2}} = \frac{C_n}{\frac{E\Omega^2}{\omega_M^2} \sqrt{\left(\frac{\omega_M^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + \frac{D^2 \omega_M^2}{E\mathcal{J}\Omega^2}}} \quad (\text{XI.22})$$

con $\omega_M^2 = \frac{E}{\mathcal{J}}$ pulsazione del sistema. Dalla (22) si vede che se $\omega_M \ll \Omega$ l'ampiezza φ_{n0} delle varie soluzioni associate alle armoniche dello sviluppo di Fourier vanno a zero come $\frac{\omega_M^2}{\Omega^2}$. Questo significa che se $\omega_M \ll \Omega$ la soluzione della (22) si può trovare semplicemente sostituendo a $F(t)$ il suo valor medio sul periodo. Nel caso particolare di un termine forzante alternato, avendo esso media nulla, la soluzione sarà $\varphi_0 = 0$ cioè il sistema meccanico non si sposta dall'origine, se le condizioni iniziali sono $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$.

Il risultato è anche fisicamente ben comprensibile: infatti un sistema dotato di inerzia \mathcal{J} e sollecitato da un termine forzante sinusoidale di ampiezza A e pulsazione Ω , sarà caratterizzato da accelerazioni in modulo dell'ordine di $\frac{A}{\mathcal{J}}$ che su tempi dell'ordine di $\frac{1}{\Omega}$ provocheranno spostamenti dell'ordine di $\frac{A}{\Omega^2 \mathcal{J}}$, ovvero decrescenti all'aumentare di Ω come $\frac{1}{\Omega^2}$, nonché velocità dell'ordine di $\frac{A}{\Omega \mathcal{J}}$; il ragionamento è tanto più esatto tanto più Ω è grande, in quanto risulta tanto migliore l'approssimazione

di aver trascurato nella (15) i termini di accelerazione proporzionali alla velocità e allo spostamento, tant'è che l'andamento così dedotto per l'ampiezza degli spostamenti coincide con quello della (22) per $\Omega \gg \frac{E^2}{\mathcal{J}}$.

Con riferimento alla (22) si osservi che mentre per $\Omega \gg \omega_M$ un galvanometro non si sposta di fatto dalla posizione di equilibrio, per $\Omega \approx \omega_M$ si ha un massimo dell'ampiezza, tanto più ampio quanto più D è piccolo; è questo il principio secondo cui funziona un galvanometro a vibrazione.

Per completare il quadro delle soluzioni trovate per φ_{n0} , possiamo notare che per $\Omega \ll \omega_M$, $\varphi_{n0} = \frac{C_n}{E}$; questo risultato corrisponde al fatto che per $\Omega \rightarrow 0$ la velocità e l'accelerazione tendono a zero come lo spostamento moltiplicato per Ω e per Ω^2 rispettivamente e l'equazione differenziale (19) si riduce di fatto alla relazione: $\varphi_n \approx \frac{C_n}{E} \cos(\Omega t + \psi_n)$.

Veniamo ora al wattmetro e alle misure che con esso si possono compiere. Supponiamo quindi di avere una certa impedenza $Z = R + jX$ percorsa da una certa corrente alternata \mathcal{J} ; sappiamo che ciò corrisponde a una potenza media dissipata sulla nostra impedenza pari a:

$$W_Z = i_{eff}^2 R = v_{eff} \cdot i_{eff} \cos \varphi \quad (\text{XI.23})$$

con $\varphi = -\text{atan} \frac{X}{R}$, v_{eff} valore efficace della tensione ai capi di Z e i_{eff} valore efficace della corrente \mathcal{J} . I wattmetri sono strumenti a quattro terminali che opportunamente collegati a Z consentono di misurare proprio la potenza W_Z .

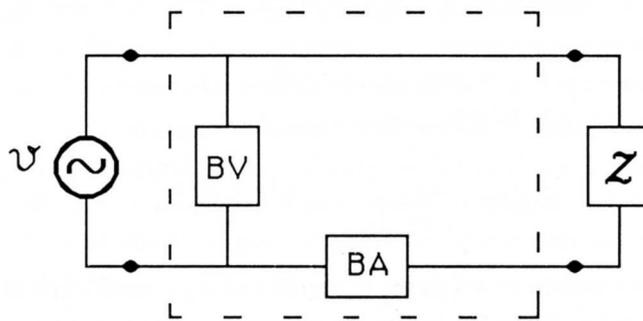


Fig.XI.6

Un tipico collegamento di un wattmetro per compiere questo tipo di misure è quello di Fig.6. Il wattmetro è il circuito racchiuso nella linea tratteggiata. B.V. rappresenta la cosiddetta *Bobina Voltmetrica* e B.A. la cosiddetta *Bobina Amperometrica*. Sull'interazione elettromagnetica di queste due bobine, montate meccanicamente nel modo che vedremo fra poco, si basa il principio di funzionamento dei wattmetri. La Bobina Amperometrica, costituita da un avvolgimento di relativamente poche spire di filo di grossa sezione, è fissa, mentre la Bobina Voltmetrica, costituita da numerose spire di filo abbastanza sottile è libera di ruotare attorno a un suo asse principale di inerzia baricentrico (Fig.7).

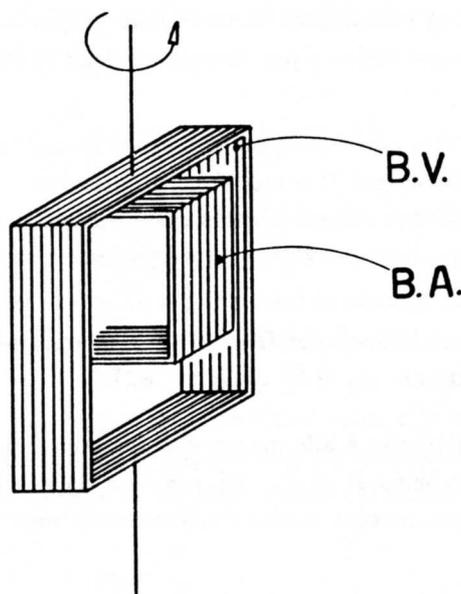


Fig.XI.7

Entrambe le bobine, almeno in prima approssimazione, possono schematizzarsi come due circuiti piani. Il complesso costituisce una coppia di circuiti che presentano un coefficiente di mutua induzione variabile a seconda della loro posizione relativa, per esempio dell'angolo di rotazione della Bobina Voltmetrica rispetto al piano della Bobina Amperometrica. Il coefficiente di mutua induzione è massimo (in valore assoluto) quando le bobine sono complanari ed è viceversa zero quando esse sono ortogonali.

Supponendo che le due bobine siano percorse da correnti $i_A(t)$ e $i_V(t)$, l'interazione fra di esse non dà solo luogo a effetti elettromagnetici, ma anche meccanici. Infatti, considerando il campo di induzione magnetica \vec{B}_A in un punto P dello spazio, dovuto alla corrente i_A che percorre la Bobina Amperometrica, troviamo, secondo la prima legge di Laplace:

$$\vec{B}_A(P) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \oint_{B.A.} i_A \frac{\vec{dl}_A \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} \quad (\text{XI.24})$$

dove \vec{r} rappresenta il vettore posizione del punto P rispetto al \vec{dl}_A considerato. Stiamo considerando ovviamente il caso in cui le bobine si trovino in un mezzo omogeneo, isotropo e lineare (l'aria per esempio). La seconda legge di Laplace ci dice poi qual è la forza che questo campo di induzione esercita su un tratto infinitesimo \vec{dl}_V della Bobina Voltmetrica:

$$d\vec{F}_V = i_V \vec{dl}_V \wedge \vec{B}_A(P) = i_V i_A \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \vec{dl}_V \wedge \left(\oint_{B.A.} \frac{\vec{dl}_A \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} \right) \quad (\text{XI.25})$$

Detto \vec{u} il versore dell'asse di rotazione della Bobina Voltmetrica, supposto fisso, il momento assiale infinitesimo sarà dato da:

$$d\tau_V^{(a)} = (P - O) \wedge d\vec{F}_V \cdot \vec{u} \quad (\text{XI.26})$$

dove $(P - O)$ è il vettore che congiunge un punto O qualunque dell'asse con il punto P corrispondente al segmento orientato infinitesimo \vec{dl}_V sulla Bobina Voltmetrica, ove è applicata la forza $d\vec{F}_V$. Il

momento assiale totale agente sulla bobina sarà pertanto:

$$\tau_V^{(a)} = \frac{i_V i_A}{4\pi} \mu_r \mu_0 \oint_{BV} (P - O) \wedge \left(\vec{dl}_V \wedge \oint_{BA} \frac{\vec{dl}_A \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} \right) \cdot \vec{u} \quad (\text{XI.27})$$

Si sarà notato che le correnti $i_A(t)$ e $i_V(t)$ sono sempre state tratte fuori dal segno di integrazione in quanto esse non dipendono dalla geometria, sono cioè le stesse in ogni istante e in ogni punto del circuito ($\text{div } \vec{j} = 0$). La coppia agente sulla Bobina Voltmetrica può allora mettersi in una forma del tipo:

$$\tau_V^{(a)} = i_A i_V \cdot C(\alpha) \quad (\text{XI.28})$$

dove $C(\alpha)$ dipende, magari in modo anche assai complicato, dalla sola geometria delle due bobine; poiché abbiamo ammesso le bobine indeformabili, l'unico parametro variabile da cui C dipende è l'angolo α che determina la loro posizione mutua, per esempio fra la normale della Bobina Voltmetrica e il piano di quella amperometrica. Non è difficile rendersi conto in base alla (27) che per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il momento è nullo mentre per $\alpha = 0$ esso è massimo in modulo. Nel Cap. XX, §3 impareremo a trattare problemi come questo dell'interazione elettromagnetica fra due bobine, senza dover esplicitamente calcolare le forze partendo dalle interazioni elementari, ma facendo ricorso ad una formula che consente di scrivere direttamente la coppia τ che agisce fra due circuiti che possono variare la loro posizione angolare relativa α :

$$\tau = i_1 i_2 \frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} \quad (\text{XI.29})$$

con i_1 e i_2 correnti nei due circuiti e $M(\alpha)$ coefficiente di mutua induzione fra di essi. Confrontando la (29) con la (28), evidentemente

$$\frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} = C(\alpha) \quad (\text{XI.30})$$

e in corrispondenza della stazionarietà di M attorno a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ abbiamo una coppia nulla, mentre là dove M cambia di segno ($\alpha = 0$), la coppia è massima. Essendo il coefficiente di mutua induzione delle due bobine approssimativamente esprimibile come $M = K \sin \alpha$, avremo che la dipendenza di $C(\alpha)$ da α sarà circa del tipo

$$C(\alpha) \approx C(0) \cos \alpha$$

Se vogliamo ora risolvere l'equazione del moto per la Bobina Voltmetrica dobbiamo semplicemente applicare ad essa la seconda equazione della dinamica. Detto \mathcal{J} il momento di inerzia della Bobina Voltmetrica attorno all'asse di rotazione, E la costante di torsione del filo al quale è sospesa e D il coefficiente del termine di attrito viscoso, l'equazione differenziale cui $\alpha_R(t)$, soluzione a regime, deve soddisfare è la seguente:

$$\mathcal{J} \ddot{\alpha}_R + D \dot{\alpha}_R + E \alpha_R = i_A i_V C(\alpha_R) \quad (\text{XI.31})$$

Il termine forzante non solo è funzione esplicitamente dipendente del tempo e periodica (con periodo $\frac{\pi}{\omega}$ se $i_A = i_{A0} \cos(\omega t + \psi_A)$, $i_V = i_{V0} \cos(\omega t + \psi_V)$), a media generalmente non nulla, ma contiene anche una dipendenza esplicita dall'angolo medesimo. L'equazione differenziale è pertanto non lineare e non tutte le considerazioni svolte all'inizio del paragrafo possono applicarsi *sic et simpliciter* a questo caso. Si può tuttavia dimostrare che anche in questo caso la soluzione a regime è data da:

$$\alpha_R = \langle i_A \cdot i_V \rangle \frac{C(\alpha_R)}{E} \quad (\text{XI.32})$$

dove $\langle i_A \cdot i_V \rangle$ rappresenta la media del prodotto delle due correnti, vale a dire che anche in questo caso l'inerzia del sistema impedisce alla Bobina Voltmetrica di seguire con sufficiente prontezza le

variazioni rapide ($\omega \gg \omega_0$) del termine forzante e la sollecitazione effettiva si riduce al solo valore medio. Nell'Appendice C è dimostrata rigorosamente la validità di queste conclusioni anche nel caso attuale di equazione non lineare.

Anticipando un risultato che mostreremo fra poco, ammettiamo ora che $\langle i_A \cdot i_V \rangle$ sia proporzionale alla potenza media $\langle W_Z \rangle$ dissipata sul carico Z . In questa ipotesi la deflessione angolare dello strumento (32) risulta, a regime, legata alla potenza media $\langle W_Z \rangle$ tramite una relazione non lineare, cosa che in genere non è particolarmente desiderabile. Si noti fra l'altro che tenendo conto della dipendenza di C da α_R , abbiamo:

$$\alpha_R \approx k \cos(\alpha_R) \cdot \langle W_Z \rangle \quad (\text{XI.33})$$

e ciò significa che solo meno di un quarto di angolo giro è in pratica sfruttabile per l'elongazione α_R , a partire da $\alpha_R = 0$, perché poi la coppia si annulla. Per rendere la risposta dello strumento lineare si sfrutta il seguente accorgimento: l'estremo del filo (in genere si tratta di una molla a elica o a spirale) opposto a quello a cui è fissata la Bobina Voltmetrica, anziché essere fisso è collegato a un supporto che può ruotare attorno ad un asse che passa per il filo medesimo, ovvero per l'asse di rotazione della Bobina Voltmetrica.

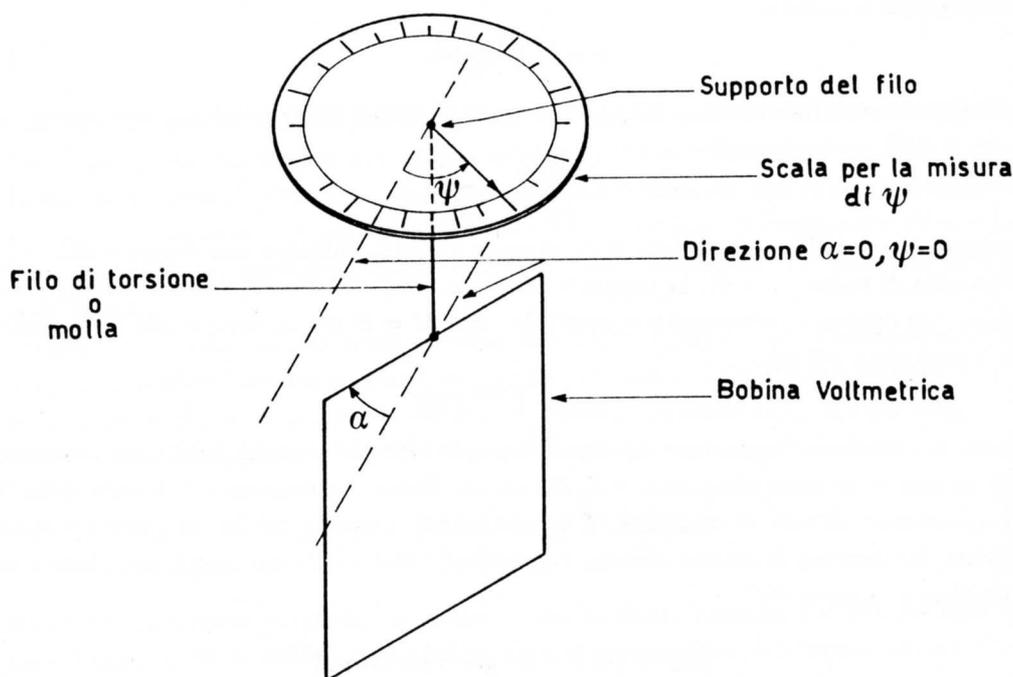


Fig.XI.8

In questo modo la coppia esercitata dal filo sulla bobina (Fig.8) non è più $E \cdot \alpha_R$, bensì $E \cdot (\psi + \alpha_R)$ se ψ indica l'angolo di torsione applicato all'estremo del filo (cioè al supporto cui tale estremo è fissato) in direzione opposta ad α , misurato rispetto alla posizione di riposo. Ovvero ψ e α sono entrambi nulli nella condizione di riposo, in assenza di eccitazione e con i piani delle bobine a 90° . In presenza di eccitazione, cioè quando α tende a crescere, si ruota il supporto del filo di torsione modificando ψ in modo da riportare il sistema nella condizione $\alpha_R = 0$; in questa configurazione

$$E \cdot \psi = \langle i_A \cdot i_V \rangle C(0) \quad (\text{XI.34})$$

Procedendo in questo modo si ottiene la desiderata relazione lineare fra l'angolo (ψ ovviamente) e il valor medio di $i_A \cdot i_V$; inoltre si massimizza la sensibilità di misura poiché la coppia elettrodinamica $C(\alpha_R)$ è massima per $\alpha_R = 0$. Lo strumento pertanto presenta una scala su cui si legge l'angolo ψ tramite un indice solidale con il supporto a cui l'estremo del filo è assicurato; un secondo indice solidale con la Bobina Voltmetrica ci dice quando essa è ritornata nella condizione di riposo iniziale ($\alpha_R = 0$). La misura si effettua ruotando il supporto fino a che, in presenza di eccitazione, l'angolo α non è tornato a zero, attendendo che, entro qualche secondo, si esaurisca il transitorio. Lo strumento è provvisto di un limitatore meccanico che impedisce alla Bobina Voltmetrica una rotazione α superiore a pochi gradi attorno a $\alpha_R = 0$; questo accorgimento riduce notevolmente i tempi morti di misura dovuti al transitorio, tutte le volte che si cambia la corrente nell'impedenza. Eventuali spostamenti della posizione iniziale di riposo devono essere corretti: ovvero ψ , anche in condizioni di eccitazione nulla, in genere non sarà esattamente a zero, ma avrà un certo valore ψ_0 da sottrarre a ψ in tutte le misure successive.

Facciamo ora vedere che $\langle i_A \cdot i_V \rangle$ rappresenta risulta proporzionale a $\langle W_Z \rangle$, potenza media dissipata sul carico, purché siano soddisfatte alcune condizioni riguardanti le impedenze delle due bobine Z_{BV} e Z_{BA} . Supponiamo (Fig.6) che l'impedenza Z_{BA} abbia modulo molto minore del modulo di Z ; in questa ipotesi possiamo dire che la ddp applicata alla Bobina Voltmetrica è circa uguale alla ddp sul carico Z , v_Z . Se inoltre l'impedenza Z_{BV} è tale che $Re(Z_{BV}) \gg Im(Z_{BV})$, in pratica se la resistenza è molto maggiore dell'induttanza moltiplicata per ω , allora $i_V \approx \frac{v_Z}{R_{BV}}$ e $\psi_V \approx 0$. In queste ipotesi:

$$\langle i_A \cdot i_V \rangle = \frac{1}{R_{BV}} \langle i_Z \cdot v_Z \rangle = \frac{\langle W_Z \rangle}{R} \quad (\text{XI.35})$$

Per realizzare le condizioni sopradette la Bobina Amperometrica è fatta di filo di grossa sezione, mentre in serie alla Bobina Voltmetrica viene aggiunta una resistenza. Quanto alle componenti autoinduttive di entrambe le bobine, esse, almeno alla frequenza di utilizzo (tipicamente quella di rete, $\nu = 50Hz$), sono sufficientemente piccole da poter essere effettivamente trascurate.

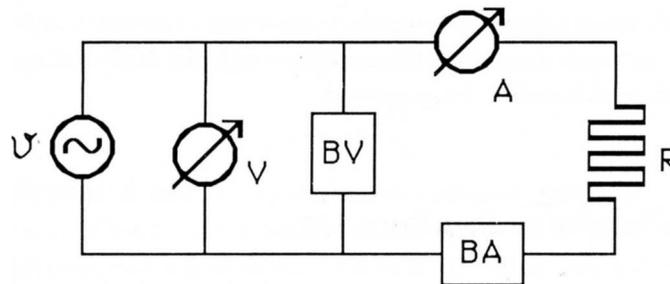


Fig.XI.9

La taratura dello strumento può essere fatta con un carico puramente resistivo, misurando v_{eff} e i_{eff} (Fig.9).

Il voltmetro e l'amperometro in figura sono strumenti che danno il valore efficace della tensione e della corrente e che descriveremo nel prossimo paragrafo. Essendo il carico resistivo

$$\langle W_R \rangle = (v_{eff} \cdot i_{eff})_R \quad (\text{XI.36})$$

e pertanto si può trovare la costante k semplicemente come

$$k = \frac{(v_{eff} \cdot i_{eff})_R}{(\psi - \psi_0)} \quad (XI.37)$$

La taratura può essere fatta anche in corrente continua e in questo caso la potenza sarà semplicemente data da $V_R I_R$.

Una volta che si inserisca il carico $Z = R_Z + jX_Z$ la potenza sarà data da

$$\langle W_Z \rangle = v_{eff} \cdot i_{eff} \cos \varphi \quad (XI.38)$$

Essendo nota k tramite la (37), misurando v_{eff} e i_{eff} , potremo ricavare il fattore di potenza del carico e risalire anche alla parte reale R_Z e alla parte immaginaria X_Z del carico medesimo.

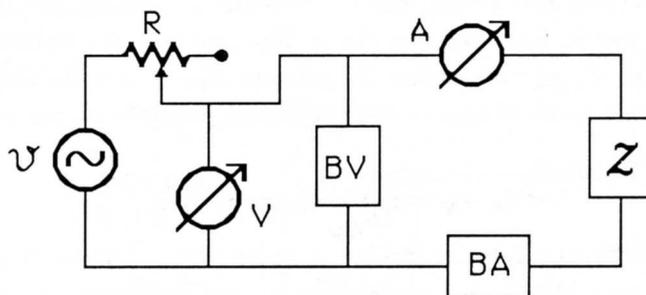


Fig.XI.10

Montando un circuito come in Fig.10 e variando R potremo misurare il fattore di potenza e quindi R_Z e X_Z in funzione della corrente che passa nel carico; se il carico è costituito da una bobina avvolta su ferro, eventuali effetti di saturazione si manifestano con un aumento del fattore di potenza. La qualità delle misure che si possono fare con questo metodo non è elevatissima a causa dei contributi di errore derivanti sia dalle letture degli angoli, sia degli strumenti che danno v_{eff} e i_{eff} (tipicamente precisioni dell'ordine del percento).

3.— Strumenti di misura in alternata

Il principio di funzionamento del wattmetro descritto nel paragrafo precedente, cioè l'interazione di due bobine percorse da corrente, è alla base di tutti gli strumenti elettrodinamici. In un voltmetro e in un amperometro elettrodinamico (rispettivamente Fig.11 a e b) le due bobine sono percorse dalla stessa corrente; nel caso del voltmetro le due bobine devono costituire il più piccolo carico possibile, mentre le bobine dell'amperometro devono essere caratterizzate da una impedenza la più piccola possibile.

Si noti che la risposta di questi strumenti dipende dal valore medio di i^2 , cioè dal valore efficace della corrente (al quadrato). Negli strumenti portatili, un indice solidale con la bobina mobile permette

la lettura della grandezza misurata. La scala è pertanto non lineare, vuoi perché la coppia non è in relazione lineare col valore della grandezza da misurare, vuoi perché essa dipende dalla geometria relativa delle bobine.

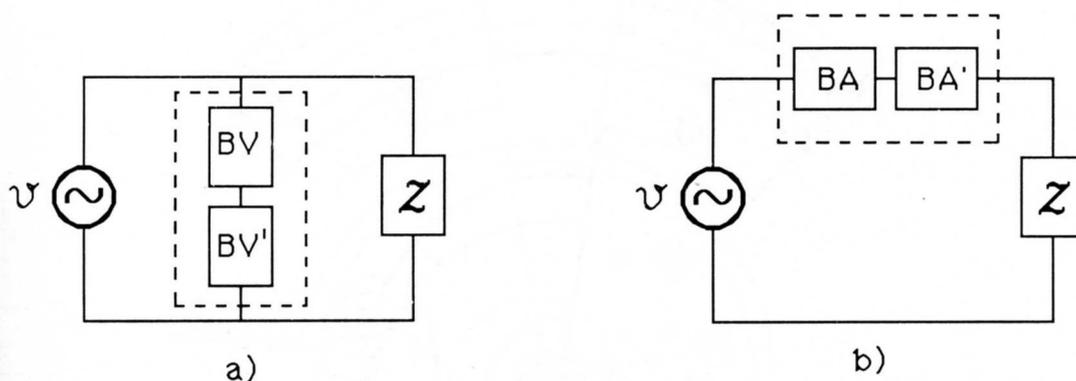


Fig.XI.11

Come tutti gli strumenti che misurano il valore efficace, gli strumenti elettrodinamici danno risposte corrette anche in continua; tali strumenti non danno viceversa risposte corrette per correnti alternate o in bassa frequenza (diciamo inferiori a circa $10\omega_0$, con ω_0 pulsazione propria del sistema meccanico) perché in questo caso non viene più fatta correttamente l'operazione di media temporale, o per frequenze molto alte quando si cominciano a far sentire gli effetti capacitivi sulle bobine che introducono sfasamenti spuri. Un altro problema che si incontra con questi strumenti è la loro limitata sensibilità. Esiste un'altra vasta categoria di strumenti che misurano il valore efficace di una grandezza alternata, che possono quindi essere adoperati anche in continua, basati (Fig.12) sul *succhiamento*, da parte di una bobina (L) percorsa dalla corrente da misurare, di un pezzo di ferro dolce (F) rigidamente collegato con l'ago dello strumento.

Con riferimento alla figura, detto θ l'angolo di cui ruota l'equipaggio rispetto alla posizione di riposo ($i = 0$), si trova (Cap.XX,§3) per la coppia dovuta alla dipendenza della induttanza L da θ :

$$\tau = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{XI.39})$$

Una molla antagonista produce una coppia elastica di richiamo $-k\theta$; se il sistema meccanico costituito dall'equipaggio e dalla molla ha un periodo molto maggiore di quello della corrente alternata da misurare, avremo, similmente a quanto visto nel caso del wattmetro, una condizione di equilibrio definita da un angolo θ_R per il quale

$$k\theta_R = \frac{1}{2} \langle i^2 \rangle \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_R \quad (\text{XI.40})$$

Pertanto

$$i_{eff}^2 \propto \frac{\theta_R}{\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_R} \quad (\text{XI.41})$$

Non è difficile fare in modo che $L \propto \theta_R$ e pertanto, in questo caso, è

$$i_{eff}^2 = k\theta \quad (\text{XI.42})$$

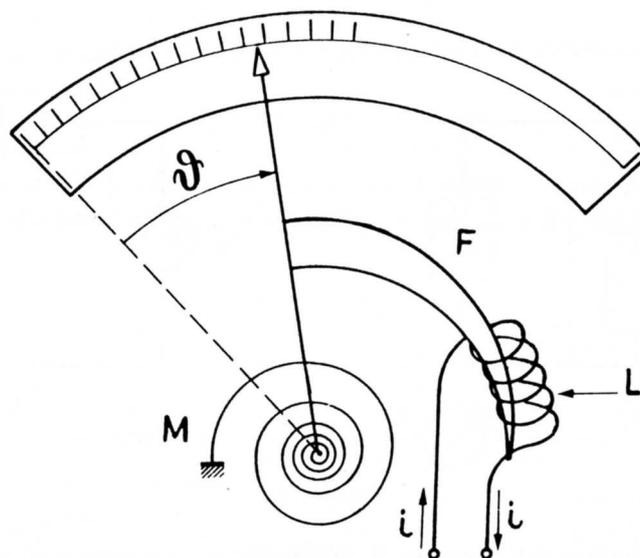


Fig.XI.12

Rispetto agli strumenti elettrodinamici, questi strumenti presentano il vantaggio di una maggiore semplicità di costruzione e robustezza. Precisioni elevate sono però ancor più difficilmente ottenibili, soprattutto su vasti campi di frequenza, a causa dell'isteresi del ferro (problemi principalmente in continua) e della dipendenza dell'induttanza dal valore della corrente tramite μ_r . Inoltre, all'aumentare della frequenza, l'induttanza L introduce un ulteriore contributo alla impedenza interna che, se lo strumento è usato come voltmetro, ne può alterare sensibilmente la taratura. Rimedi a questo effetto si possono ottenere ponendo un condensatore in parallelo alla resistenza della bobina e cercando così di rendere abbastanza più costante l'impedenza complessiva, almeno in un campo limitato di frequenze. Strumenti a valore efficace ancora più semplici costruttivamente e robusti fanno ricorso al principio di funzionamento illustrato in Fig.13: F e F' sono due pezzetti di ferro dolce, uno fisso (F) e l'altro (F') solidale con l'equipaggio mobile. La corrente che circola nella bobina avvolta attorno al sistema costituito dai due pezzetti di ferro, li magnetizza; essi tendono a respingersi con una forza che varia come i^2 . D'altronde la forza diminuisce all'aumentare della distanza fra i due pezzetti di ferro e sfruttando questa dipendenza si riescono a fare strumenti pressoché lineari. Strumenti di questo genere sono al più di classe 1 e presentano praticamente gli stessi problemi di quelli a succhiamento, in particolare l'isteresi del ferro. Abbiamo visto che all'aumentare della frequenza tutti gli strumenti a valore efficace incontrano problemi, principalmente a causa o delle capacità distribuite degli avvolgimenti o delle perdite per correnti parassite. Per questo motivo a frequenze molto elevate gli strumenti a valore efficace sono in genere basati sulla misura diretta della potenza dissipata dalla corrente da misurare su una resistenza di valore noto. In pratica si misura l'innalzamento di temperatura dell'elemento resistivo e si confronta questo con l'innalzamento di temperatura di un uguale resistore, posto in condizioni fisiche le più simili possibile, e sul quale si

dissipa contemporaneamente una potenza continua, nota con precisione.

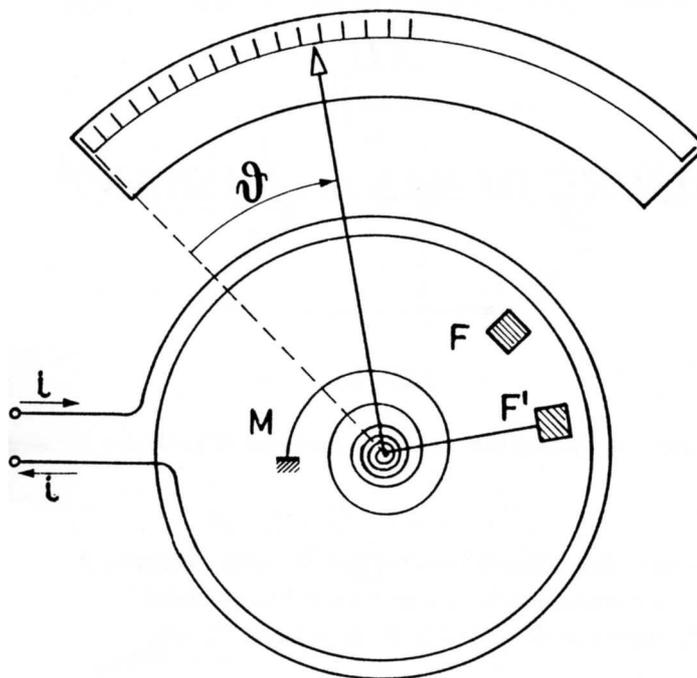


Fig.XI.13

NOTA BIBLIOGRAFICA

FR 59, LA 38, DA 75 e ZI 86 trattano abbastanza diffusamente l'argomento degli strumenti per la misura di valori efficaci.

Testi di elettrotecnica quali:

Modoni, Dorè: "Misure Elettriche-Strumenti e metodi di misura" (PATRON) (1955)

Olivieri, Ravelli: "Elettrotecnica" CEDAM (1966) sono densi di notizie a riguardo di tutto questo tipo di strumentazione.

L'Appendice C, di taglio esclusivamente matematico, precisa formalmente un risultato intuitivo, ma non ovvio, sulla risposta degli strumenti elettrodinamici.

XII

MISURE DI BANDA PASSANTE

1.— Il decibel

Supponiamo di misurare due potenze, non necessariamente elettriche, P_1 e P_2 . Il loro rapporto viene spesso misurato in una scala logaritmica (in base 10) la cui unità è detta *decibel*: precisamente si dice che la potenza P_1 supera di N *decibel* (*dB*) la potenza P_2 , con N dato da:

$$N = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \quad (\text{XII.1})$$

La definizione dello zero della scala comporta fissare una certa potenza P_0 come riferimento; ovvero, esprimere una determinata potenza P in *dB* non ha alcun significato se non è definita una potenza di riferimento P_0 , con la quale viene costruito il rapporto $\frac{P}{P_0}$. Se si ha a che fare con una potenza elettrica dissipata su una resistenza R , è possibile esprimerla come $P = \frac{V^2}{R}$ dove V è la tensione ai capi di R . Qualora due potenze siano dissipate su due resistenze uguali, potremo scrivere:

$$N = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 20 \log \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{XII.2})$$

Se le resistenze su cui sono dissipate le potenze non sono uguali occorrerebbe tener conto di un termine aggiuntivo $10 \log \frac{R_2}{R_1}$. In elettronica, quando si definisce il rapporto di due tensioni V_1 e V_2 , lo si misura spesso in *decibel*, come se si trattasse di un rapporto di potenze:

$$20 \log \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{XII.3})$$

indipendentemente dal valore delle resistenze ai capi delle quali queste tensioni sono misurate. Così facendo si modifica la definizione originaria di *decibel* e la si usa per misurare, anziché rapporti di potenze, rapporti di tensioni.

L'adozione del *decibel* porta con sé tutti i vantaggi delle scale logaritmiche; in particolare, dato un sistema di amplificatori uno di seguito all'altro, l'amplificazione complessiva (in *dB*) sarà pari alla somma delle amplificazioni dei singoli stadi (anch'essa in *dB*).

2.— Filtri passa alto, passa basso, passa banda

Consideriamo il circuito di Fig.1 e ricaviamo il valore di \mathcal{V}_0 in funzione di \mathcal{V} .

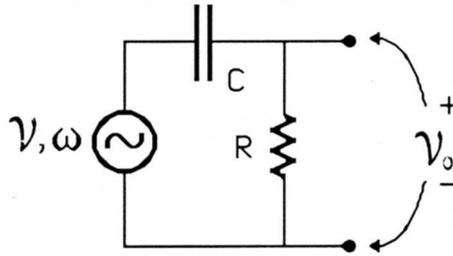


Fig. XII.1

Usando la regola del partitore di tensione applicata alle impedenze complesse, otteniamo:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}} = \mathcal{V} \frac{1}{1 - j \frac{f_L}{f}} \quad (\text{XII.4})$$

con $f_L = \frac{1}{2\pi RC}$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Definendo:

$$\mathcal{A}_L = \frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}} = |\mathcal{A}_L| \cdot \exp j\theta_L \quad (\text{XII.5})$$

abbiamo

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_L| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_L}{f}\right)^2}} \\ \theta_L = \text{atan} \frac{f_L}{f} \end{cases} \quad (\text{XII.6})$$

Esprimendo in *decibel* $|\mathcal{A}_L|$ si ha:

$$|\mathcal{A}_L|_{dB} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{f_L}{f} \right)^2 \right) \quad (\text{XII.7})$$

Per $f_L \gg f$ la (7) può approssimarsi come:

$$|\mathcal{A}_L|_{dB} \approx -20 \log \frac{f_L}{f} \quad (\text{XII.8})$$

e ogni aumento di un fattore 2 in frequenza (cioè ogni *ottava*) $|\mathcal{A}_L|$ cresce di 6 *dB*. Se si riporta in grafico $|\mathcal{A}_L|_{dB}$ in funzione di f (anch'esso in una scala logaritmica) si ottiene il grafico di Fig.2 (*diagramma di ampiezza*). La pendenza nel primo tratto corrisponde a 6 *dB/ottava* (uguale a 20 *dB/decade*). Per frequenze f maggiori di f_L la curva è pressoché costante e corrisponde a una ampiezza $|\mathcal{V}_0| = |\mathcal{V}|$, cioè la tensione \mathcal{V} è trasmessa sostanzialmente inalterata dal circuito; a tali frequenze l'impedenza del condensatore è infatti trascurabile rispetto a quella della resistenza.

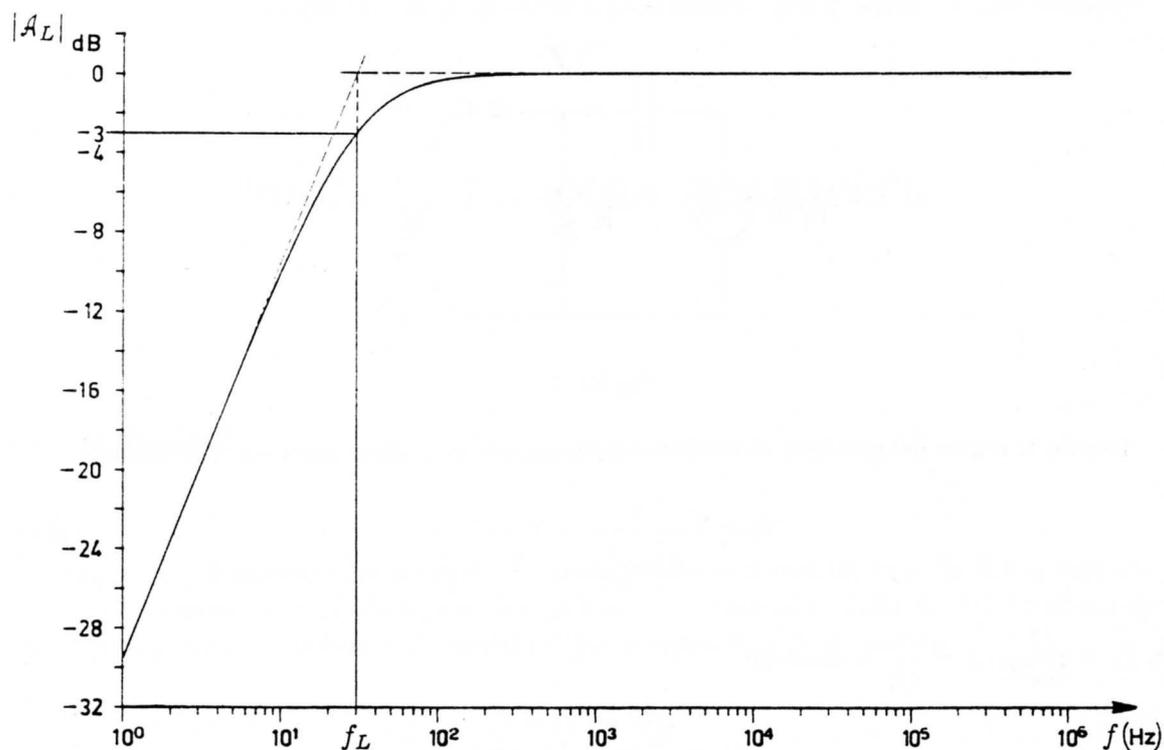


Fig.XII.2

Per $f = f_L$, quando cioè l'impedenza del condensatore uguaglia (in modulo) quella della resistenza, si ha:

$$|A_L| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{XII.9})$$

corrispondente a -3 dB . La frequenza $f_L = \frac{1}{2\pi RC}$ è detta *frequenza di taglio inferiore* e il circuito ora disegnato è detto *filtro passa alto*; esso infatti lascia praticamente inalterata l'ampiezza dei segnali sinusoidali con frequenza $f \gg f_L$, mentre deprime quei segnali che hanno frequenza $f < f_L$ e tanto più li riduce quanto più piccola è la loro frequenza. Quanto alla fase (vedi (6)) possiamo notare (Fig.3) che per frequenze $f \ll f_L$ la fase tende a $\frac{\pi}{2}$ cioè \mathcal{V}_0 è in anticipo di un quarto di periodo, per $f = f_L$ la fase θ vale $\frac{\pi}{4}$ e per $f \gg f_L$ la fase tende a zero (e pertanto in queste condizioni $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ sia in ampiezza che in fase).

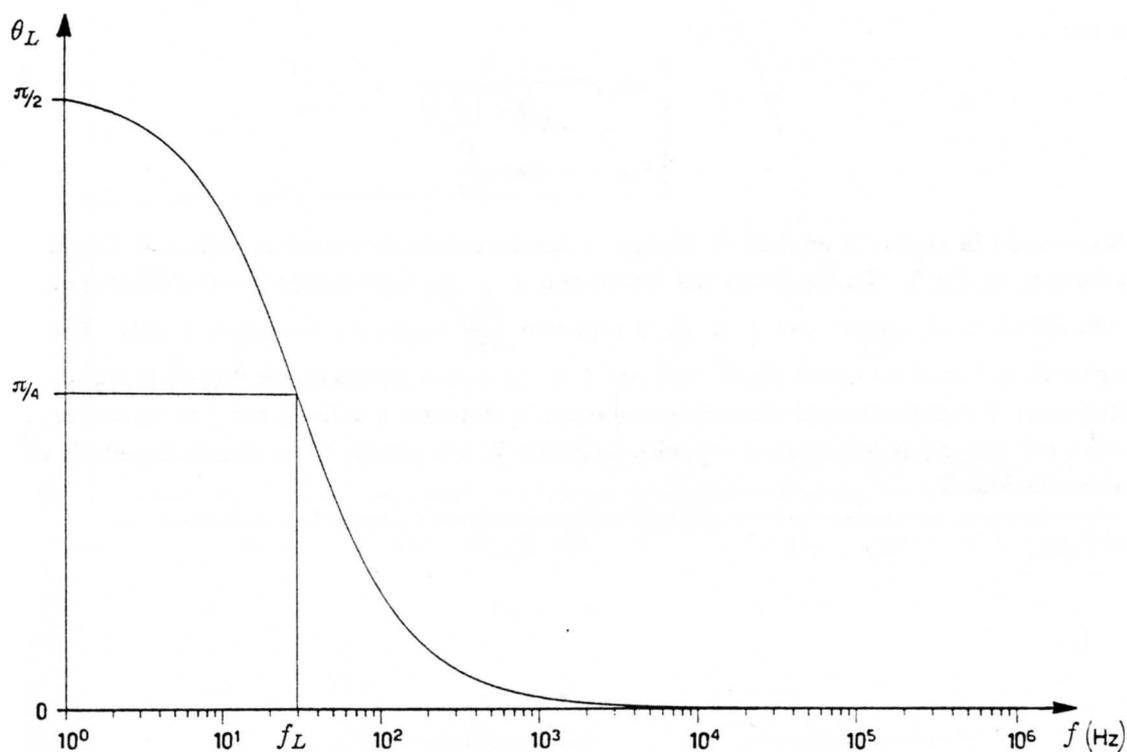


Fig.XII.3

Il grafico di Fig.3 è detto *diagramma di fase*.

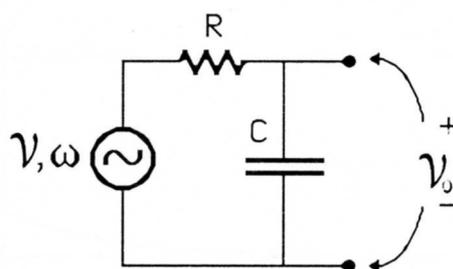


Fig.XII.4

Scambiamo ora, nel circuito di Fig.1, il condensatore col resistore; abbiamo ora il cosiddetto *filtro passa basso* (Fig.4). Procedendo come nel caso del circuito passa alto, abbiamo:

$$v_0 = v \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = v \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_H}} \quad (\text{XII.10})$$

con $f_H = \frac{1}{2\pi RC}$ detta *frequenza di taglio superiore*. Definendo

$$\mathcal{A}_H = \frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}} = |\mathcal{A}_H| \cdot \exp j\theta_H \quad (\text{XII.11})$$

si ha:

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_H})^2}} \\ \theta_H = -\text{atan} \frac{f}{f_H} \end{cases} \quad (\text{XII.6})$$

Riportando in grafico il modulo di $|\mathcal{A}_H|_{dB}$ in funzione della frequenza si ottiene il diagramma di ampiezza di Fig.5. La pendenza del tratto con $f > f_H$ corrisponde a -6 dB/ottava (oppure -20 dB/decade), mentre per $f \ll f_H$ il rapporto $\frac{|\mathcal{V}_0|}{|\mathcal{V}|}$ tende a 1 (ovvero a 0 dB). Per quanto riguarda la fase si ha - vedi Fig.6 - che per $f \ll f_H$ essa è praticamente 0 (cioè in tale campo di frequenza, il segnale resta praticamente inalterato in ampiezza e in fase), per $f = f_H$ la fase θ_H vale $-\frac{\pi}{4}$ e per $f \gg f_H$ la fase tende a $-\frac{\pi}{2}$, cioè il segnale \mathcal{V}_0 è in ritardo di un quarto di periodo rispetto all'eccitazione \mathcal{V} .

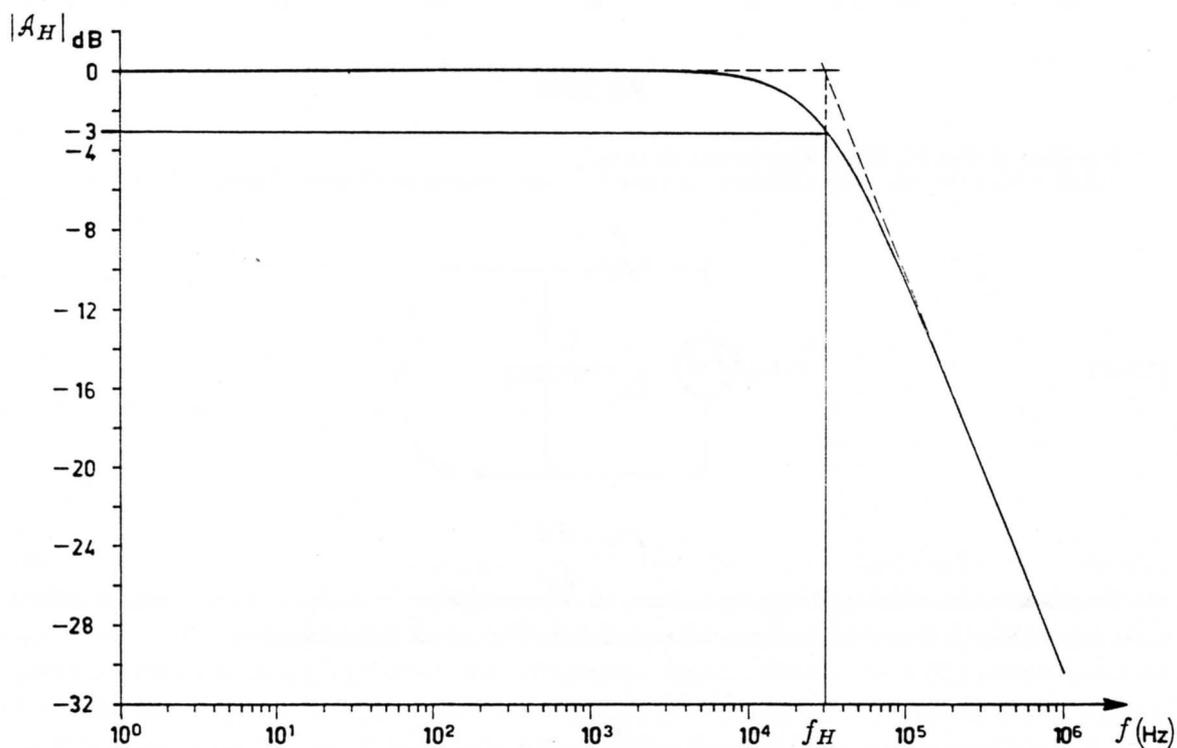


Fig.XII.5

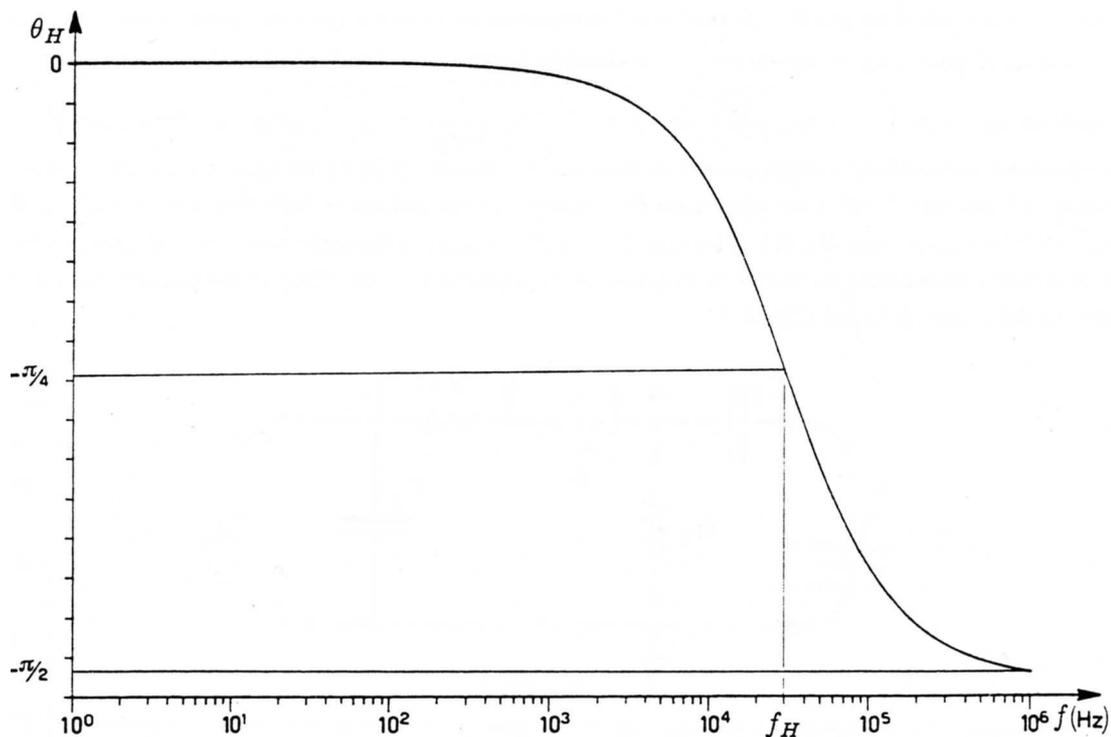


Fig. XII.6

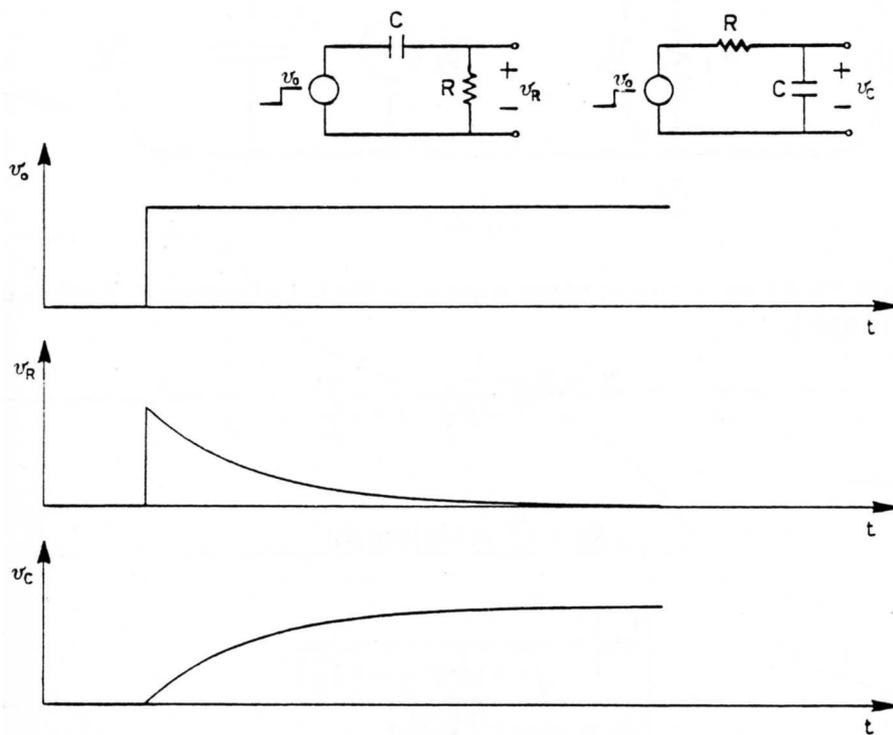


Fig. XII.7

Ricordiamo per inciso che, come fatto vedere nel Cap. VI, § 2, se il segnale del generatore anziché

essere sinusoidale è un gradino di tensione di ampiezza v_0 , allora il circuito passa alto dà una tensione ai capi di R pari a $v_R = v_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ e il circuito passa basso fornisce ai capi del condensatore una tensione $v_C = v_0 \left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right)$ con $\tau = RC = \frac{1}{2\pi f_H} = \frac{1}{2\pi f_L}$ (Fig.7). Torniamo al caso di eccitazione sinusoidale e supponiamo di disporre in *cascata* (Fig.8) un filtro passa alto e uno passa basso. L'elemento "+1" è un ripetitore (in inglese *voltage follower*) della tensione ai capi di R_1 che viene ripresentata identica fra il terminale B e il comune, indipendentemente dal carico seguente; vale a dire l'impedenza di uscita del ripetitore di tensione è nulla. Questo dispositivo sarà studiato con qualche dettaglio nel Cap.XV.

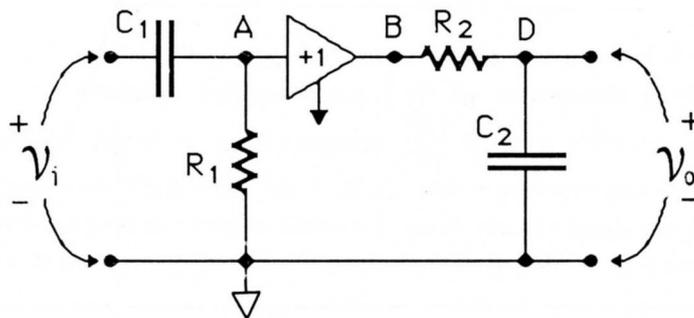


Fig.XII.8

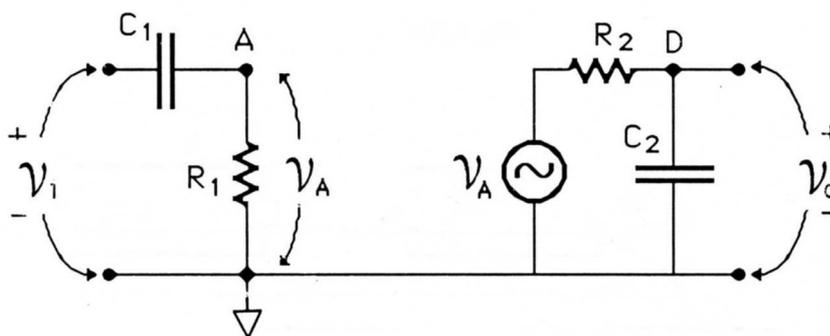


Fig.XII.9

Il circuito di Fig.8 è pertanto equivalente a quello di Fig.9. La tensione v_0 è quindi esprimibile come (vedi (4) e (10)):

$$v_0 = v_i \frac{1}{1 - j \frac{f_1}{f}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_2}} \quad (\text{XII.13})$$

e pertanto, posto:

$$\mathcal{A}_B = \frac{v_0}{v_i} = |\mathcal{A}_B| \exp j\theta_0 \quad (\text{XII.14})$$

avremo

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_B| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_1}{f})^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_2})^2}} \\ \theta_0 = \text{atan}(\frac{f_1}{f}) - \text{atan}(\frac{f}{f_2}) \end{cases} \quad (\text{XII.15})$$

Pertanto nell'ipotesi che $f_2 \gg f_1$ gli andamenti di $|\mathcal{A}_B|_{dB}$ e di θ_0 riportati in funzione di f (in scala logaritmica) sono quelli della Fig.10a e b rispettivamente.

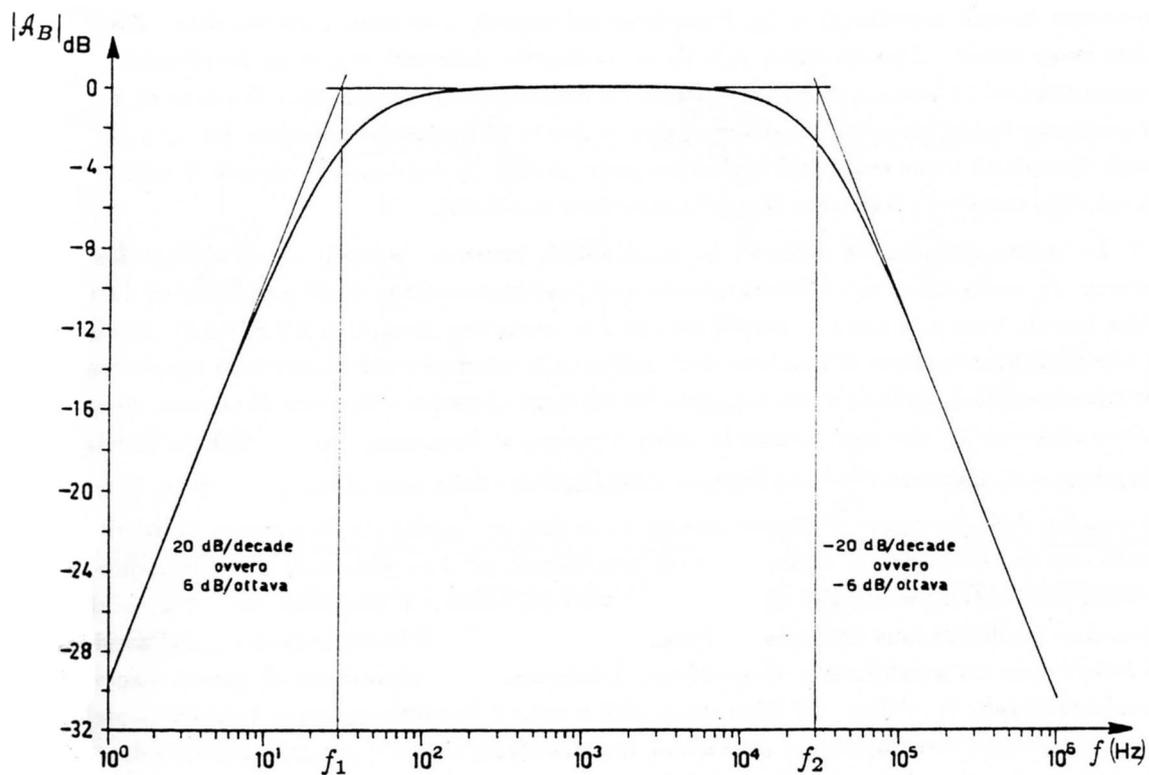


Fig.XII.10a

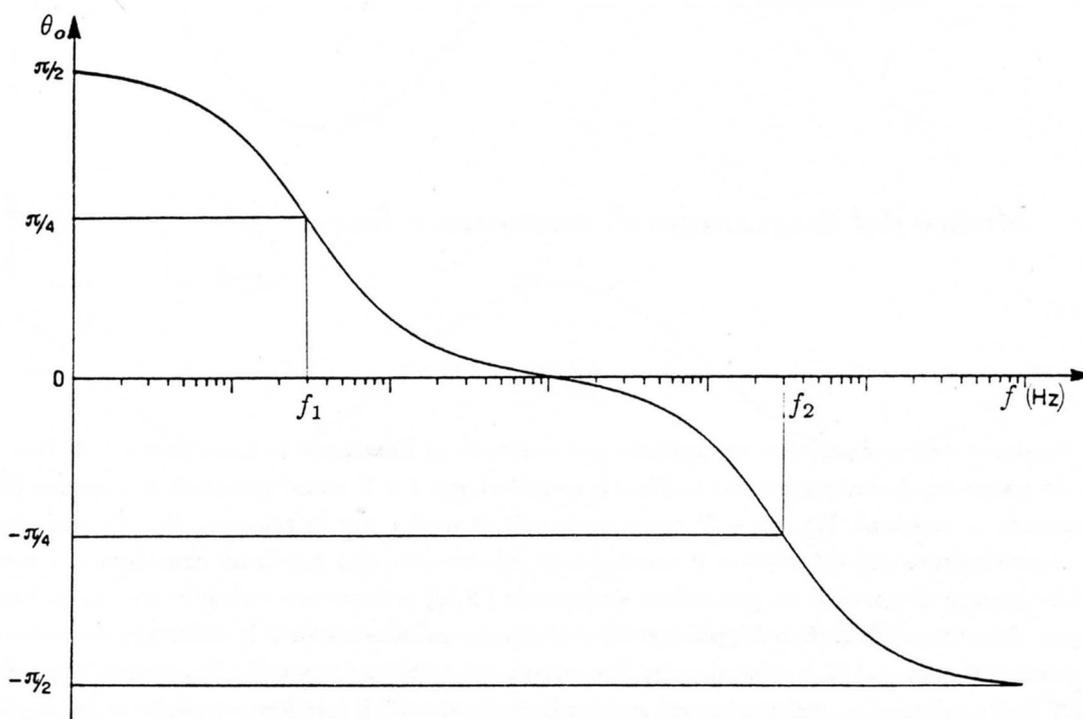


Fig.XII.10b

Il sistema trasmette inalterati i segnali sinusoidali con frequenza $f_1 \ll f \ll f_2$ mentre per

frequenze laterali rispetto f_1 e f_2 , l'ampiezza del segnale trasmesso è decrescente. Esso è detto *filtro passa banda*. Avendo scelto f_1 e f_2 notevolmente differenti non si ha interferenza fra i due comportamenti in bassa e in alta frequenza. Il diagramma di ampiezza in funzione di f definisce la cosiddetta *banda passante* del sistema, cioè la fascia di frequenze compresa fra f_1 e f_2 entro la quale l'ampiezza viene trasmessa inalterata (entro 3 dB); f_1 è detta la frequenza di taglio inferiore (a -3 dB), mentre f_2 frequenza di taglio superiore (a -3 dB).

Lo studio delle bande passanti ha un notevole interesse in molti campi della fisica e della tecnica; in particolare esso è fondamentale nella caratterizzazione degli amplificatori da montare come blocchi base di sistemi di amplificazione a reazione negativa (Cap XV, §§1,2,3). Precisamente si trova che l'andamento in funzione di f dell'amplificazione \mathcal{A}_f del blocco base (generalmente un circuito integrato), definita come rapporto fra tensione di uscita e tensione di ingresso diviso per il valore massimo \mathcal{A}_0 che essa assume in tutto il campo di frequenze, è descrivibile in termini di un diagramma di ampiezza $|\frac{\mathcal{A}_f}{\mathcal{A}_0}|$ che dipende dalle caratteristiche costruttive del circuito; in molti casi al crescere della frequenza il diagramma ha un andamento molto simile a quello di un filtro passa basso con una frequenza di taglio tanto più alta quanto più l'amplificatore è -come si dice- *veloce*; l'amplificatore non presenta in genere diminuzioni del fattore di amplificazione al diminuire della frequenza e il diagramma di ampiezza si mantiene costante fino a $f = 0$; in questo caso l'amplificatore è detto essere un *amplificatore in continua*. L'interesse della conoscenza di questo diagramma di ampiezza risiede, fra l'altro, nel fatto che se esso è noto, è possibile sapere se l'amplificatore è o non è stabile quando viene applicata la reazione negativa (vedi Cap.XV per la definizione di reazione). Comunque questi argomenti esulano dal programma del corso e sono accennati semplicemente per rimarcare l'importanza dello studio dei filtri passa basso, passa alto e passa banda, in particolare nella progettazione degli amplificatori.

3.- Misure del diagramma di ampiezza e fase

Passiamo ora a descrivere un metodo per costruire il diagramma di ampiezza e di fase nel circuito passa banda rappresentato in Fig.11; consideriamo 1 e 1' come terminali di ingresso (dove è applicata la tensione \mathcal{V}_i) e 2 e 2' come terminali di uscita per la tensione \mathcal{V}_0 . Si noti che 1' e 2' elettricamente coincidono con il terminale di riferimento, che possiamo considerare a massa. Occorre intanto disporre di un generatore sinusoidale (\mathcal{V}, ω) a frequenza variabile con cui eccitare il sistema. Con un oscillografo a doppia traccia si osservano sui due canali Y le differenze di potenziale fra il nodo 1 e massa (\mathcal{V}_i) e fra il nodo 2 e massa (\mathcal{V}_0) in funzione della frequenza. Quanto al trigger dell'oscillografo, esso è ottenuto mettendo in "esterno" il relativo commutatore e inviando sull'ingresso del trigger il segnale di *sincronismo* dell'oscillatore: è questo un segnale di ampiezza standard, indipendente cioè dall'ampiezza del segnale di uscita dell'oscillatore, ma avente la stessa fase di quest'ultimo.

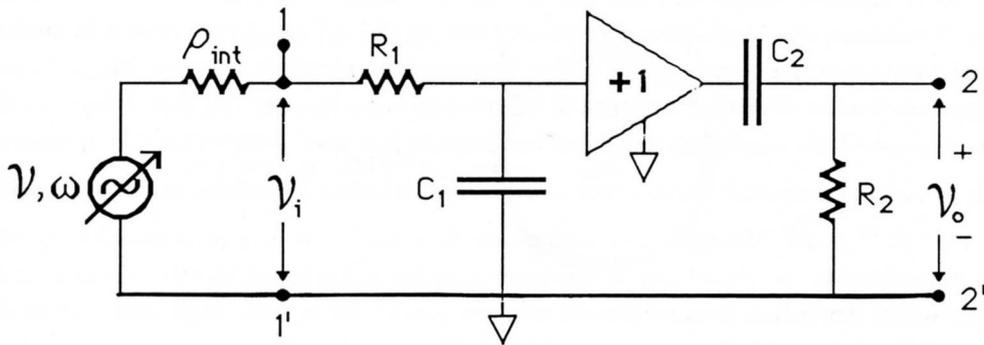


Fig.XII.11

I rapporti fra le ampiezze delle differenza di potenziale V_0 e V_i danno il diagramma di ampiezza $|A_B| = \left| \frac{V_0}{V_i} \right|$. Quanto al diagramma di fase $\theta_0 = \theta_0(f)$, esso si può ottenere tenendo presente che θ_0 è dato dalla differenza di fase fra V_0 e V_i .

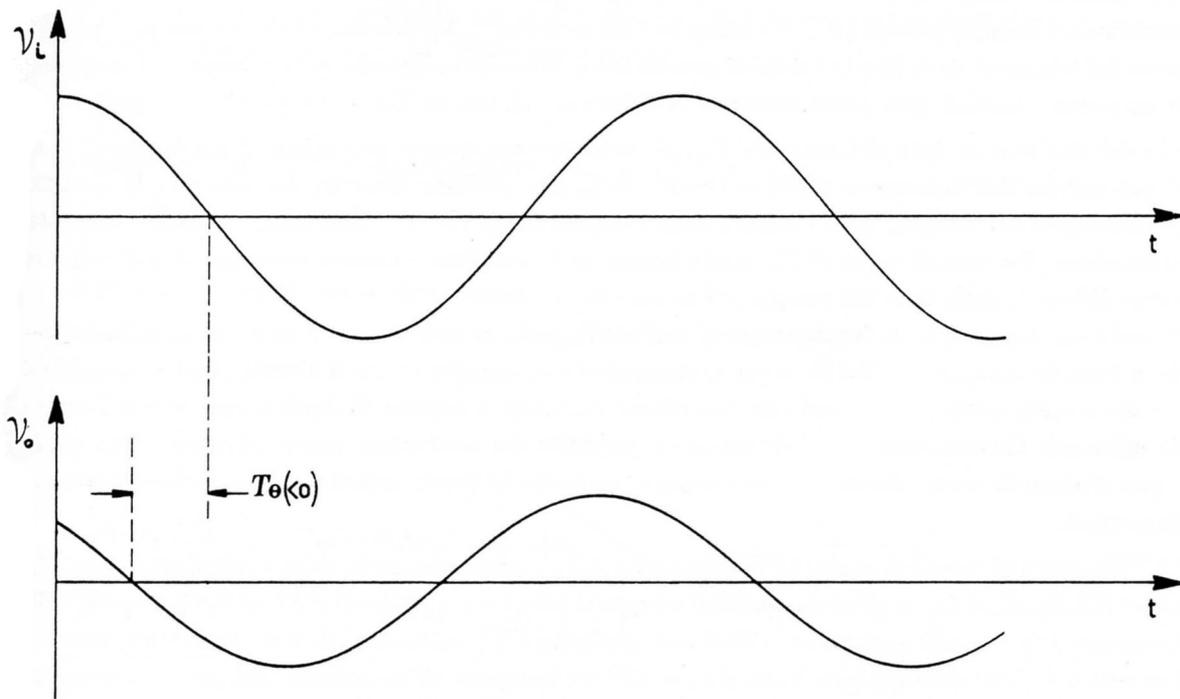


Fig.XII.12

Questa quantità si può determinare (vedi Fig.12) valutando con l'oscillografo T_θ , ovvero la differenza in tempo fra il passaggio dello zero di V_0 e di V_i (quando V_i e V_0 hanno la derivata dello stesso segno) e il periodo T della sinusoidale. Lo sfasamento in gradi risulta quindi dato da:

$$\theta_0 = \frac{T_\theta}{T} \cdot 360 \quad (\text{XII.16})$$

Per compiere misure ragionevolmente precise e che sfruttino al meglio le caratteristiche dell' oscil-

lografo occorre seguire alcuni accorgimenti. Per quanto riguarda le misure di ampiezza, conviene lavorare con la massima eccitazione possibile in ingresso, compatibilmente con le caratteristiche del ripetitore di tensione, che funziona correttamente solo se $|\mathcal{V}_i| < |\mathcal{V}_{max}|$ (dell'ordine di qualche Volt) e solo se la ampiezza della corrente di uscita non supera un valore massimo i_{0max} (tipicamente dell'ordine della decina di mA); l'esistenza di un estremo superiore per $|\mathcal{V}_i|$ dell'ordine dei Volt comporta che, a causa della sensibilità finita dell'oscillografo (nel caso dell'oscillografo di laboratorio: 5 mV/cm), si possano misurare direttamente, con errori inferiori a qualche per cento, rapporti $\frac{|\mathcal{V}_0|}{|\mathcal{V}_i|}$ fino a $3 \div 4 \cdot 10^{-2}$ ($-28, -30 \text{ dB}$). Per aumentare il campo di misura occorrerebbe introdurre un ulteriore amplificatore che riportasse la tensione di uscita a livelli più elevati. Quanto alla misura dello sfasamento, per prima cosa va identificata con precisione la linea degli *zero Volt* su entrambi i canali; ciò si può fare abbastanza agevolmente nel seguente modo: si mettono a massa (tramite l'apposito commutatore) gli ingressi dei due canali posti nella massima sensibilità e, tramite i controlli di posizionamento verticali, si fanno coincidere le due tracce orizzontali con una delle linee (preferibilmente quella centrale) del reticolo inciso sullo schermo; tale linea diventa così la nostra linea di *zero Volt*. Dopo aver posizionato nuovamente il commutatore di ingresso, per entrambi i canali, su DC, si aumenta la sensibilità verticale di circa un fattore 10 in più rispetto alla sensibilità che consente di presentare tutto il segnale sullo schermo: a causa della notevole pendenza ottenuta con l'aumento della sensibilità, l'intercetto dei due segnali con la linea di zero viene individuato con errore relativamente piccolo ($< \frac{1}{2}$ divisione fine del reticolo)*. Agendo sulla base dei tempi e la posizione del trigger si deve fare in modo di presentare contemporaneamente sullo schermo gli intercetti di entrambi i segnali (per poter misurare la differenza di tempo T_θ) e almeno un semi-periodo di uno dei due segnali (per determinare T). Se ottenuto con questa procedura, il rapporto $\frac{T_\theta}{T}$ può al più soffrire dell'indeterminazione derivante dalla non perfetta linearità del sistema: la qualità, generalmente non eccelsa, della taratura della base dei tempi ($2 \div 3\%$) non influisce infatti su questa valutazione. Per piccoli valori di T_θ , molto minori di T , conviene viceversa misurare T_θ e T con due valori differenti della base dei tempi.

Ricordando il principio di funzionamento dell'oscillografo, si osservi che la correttezza della procedura dipende criticamente dal fatto che lo strumento non introduca ritardi diversi, rispetto al trigger, sui due canali, perché altrimenti tale contributo andrebbe a sommarsi algebricamente con l'effetto da misurare. Generalmente tale sfasamento è garantito dal costruttore essere inferiore ad un grado e può d'altronde essere direttamente misurato, inviando lo stesso segnale contemporaneamente sui due canali.

Quanto alle possibili verifiche sperimentali della correttezza delle misure effettuate, noti che siano R_1, R_2, C_1 e C_2 , si possono confrontare questi valori con i prodotti R_1C_1 e R_2C_2 dedotti dalle frequenze f_1 e f_2 corrispondenti a -3 dB nell'ampiezza e $\pm \frac{\pi}{4}$ sulla fase. Occorre tuttavia notare che i cavetti coassiali (che sarà bene usare sia per portare il segnale all'oscillografo che per accoppiare fra loro i vari elementi del circuito), introducono capacità aggiuntive verso massa che vanno ad alterare il circuito così come è disegnato in Fig.11. Come ordine di grandezza, un cavo coassiale presenta circa 100 pF ogni metro di lunghezza; tale valore è comunque facilmente calcolabile con la formula del condensatore cilindrico una volta che si conoscano le caratteristiche geometriche del cavo interno, della calza esterna (la massa) e la costante dielettrica ϵ_r dell'isolante (Fig.13).

* aumenti superiori di un fattore 10 nella sensibilità possono portare a comportamenti anomali degli amplificatori di ingresso dell'oscillografo, in pratica a distorsioni del segnale e conseguenti erronee valutazioni dei passaggi di zero.

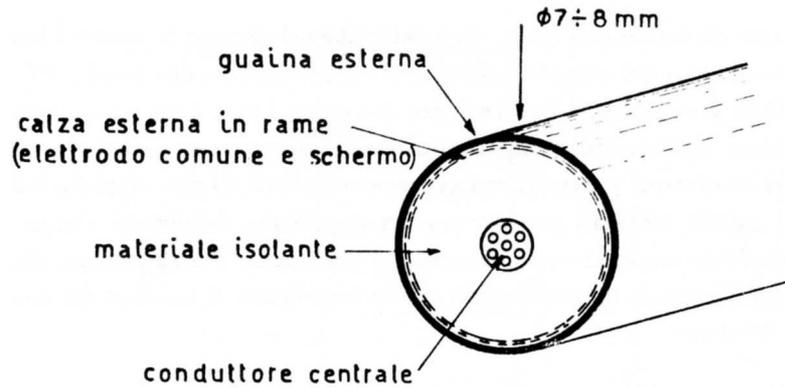


Fig.XII.13

Si ricordi comunque che schematizzare il cavo come un semplice condensatore è consentito solo se la frequenza f della tensione applicata dai generatori è molto minore del rapporto fra la velocità della luce e la lunghezza del cavo; solo in queste ipotesi infatti le costanti possono considerarsi ancora concentrate. Ad esempio, per una frequenza di 1 MHz e un cavo lungo un metro la disuguaglianza di sopra è ben soddisfatta; viceversa nel caso che la frequenza o la lunghezza del cavo o entrambe siano aumentate, cosicché le costanti non possano più considerarsi concentrate, lo studio della rete risulta molto più complicato poiché in questo caso il cavo è da considerarsi una *linea di trasmissione*, anziché un sistema di conduttori in regime quasi-statico.

4.- *Accorgimenti nell'utilizzo dell'oscillografo. Sonde e partitori compensati*

Il circuito che va effettivamente montato è del tipo in Fig.14.

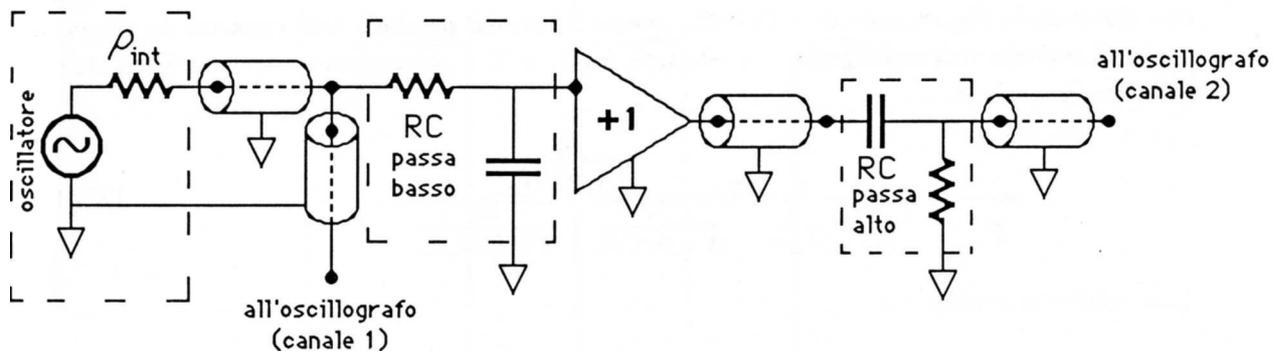


Fig.XII.14

Per un'analisi accurata del comportamento della rete in esame occorre tener conto anche dell'impedenza di ingresso dell'oscillografo verso massa (generalmente $1 \text{ M}\Omega$ con in parallelo una capacità dell'ordine di 20 pF). Tale impedenza può modificare i valori delle frequenze di taglio inferiore

e superiore e alterare gli andamenti attesi. Si è detto che nel circuito in esame è bene adoperare cavi coassiali per la trasmissione del segnale: infatti se si vuole esplorare una banda di frequenze sufficientemente elevata (fino a qualche MHz) l'utilizzo di cavetti liberi è da sconsigliare, principalmente perché una variazione nell'assetto geometrico di essi comporta una variazione nell'accoppiamento capacitivo dei vari conduttori presenti, con conseguenti effetti di non riproducibilità della misura; l'introduzione dei cavetti coassiali porta a una quasi perfetta definizione elettrica del sistema, al prezzo di aver introdotto capacità aggiuntive un po' più grosse. Per ridurre gli effetti delle capacità dei cavi che portano il segnale all'oscillografo e delle impedenze di ingresso del medesimo si può far uso di una *sonda attenuata*.

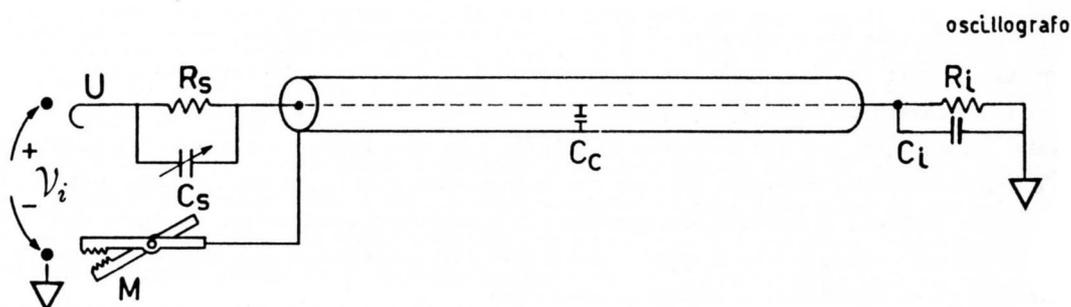


Fig.XII.15

Tali sonde, caratterizzate da una attenuazione 10, sono costituite da un cavetto coassiale (Fig.15) che da una parte si collega tramite un connettore all'ingresso dell'oscillografo e dall'altra termina con una resistenza da $9\text{ M}\Omega$ con in parallelo un condensatore il valore della cui capacità può essere variato tramite un apposito controllo meccanico; la sonda inoltre presenta a questa estremità un conduttore a forma di uncino (U in figura) che consente di ottenere un contatto elettrico e meccanico con il conduttore la cui tensione rispetto a massa è da misurare; un morsetto M -collegato al conduttore esterno del cavo (a massa)- consente di chiudere il circuito di misura. Si ha allora un circuito del tipo riportato in Fig.16, dove $C = C_i + C_c$, ovvero è dato dal parallelo delle capacità del cavo e di quella di ingresso dell'oscillografo. La relazione fra \mathcal{V}_0 e \mathcal{V}_i è presto trovata tramite la regola del partitore di tensione:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \frac{\frac{R_i}{1 + j\omega C R_i}}{\frac{R_i}{1 + j\omega C R_i} + \frac{R_s}{1 + j\omega C_s R_s}} \quad (\text{XII.17})$$

Se si verifica la condizione:

$$C R_i = C_s R_s \quad (\text{XII.18})$$

allora

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \frac{R_i}{R_i + R_s} = \mathcal{V} \frac{C_s}{C_s + C} \quad (\text{XII.19})$$

e il partitore è detto *partitore compensato*.

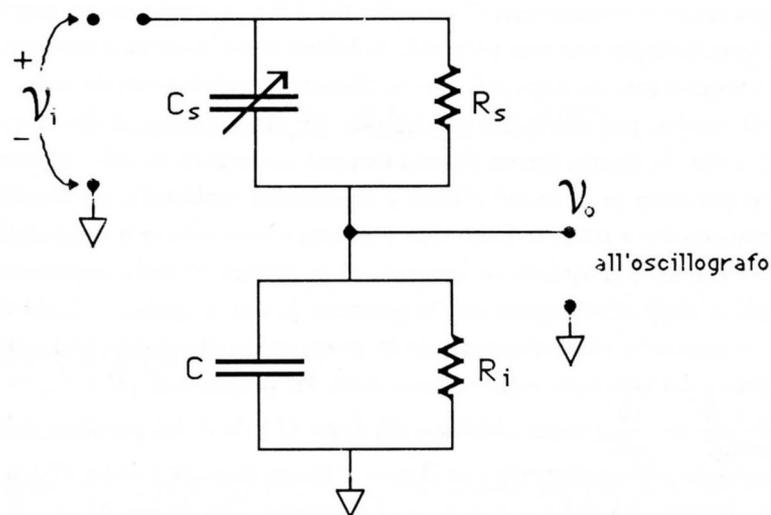


Fig.XII.16

Il partitore è “compensato” nel senso che il rapporto di partizione è costante, indipendente da ω . Nel caso ora esaminato in cui $R_i = 1M\Omega$ e $R_s = 9M\Omega$, $v_o = \frac{v}{10}$ e la sonda è detta “ $\div 10$ ”. Agendo sul condensatore variabile C_s si fa in modo che esso assuma il valore che soddisfa la condizione (18) di uguaglianza delle costanti di tempo $R_i C$ e $R_s C_s$. Il condensatore è variabile per fare in modo che la medesima sonda possa essere usata con vari oscilloscografi, aventi capacità di ingresso non identiche fra loro. Quanto al metodo impiegato per realizzare l’aggiustamento, per sapere cioè se la condizione (18) è soddisfatta, si sfrutta di solito un segnale periodico a onda quadra che l’oscillografo presenta ai capi di due terminali, uno dei quali a massa, sul suo pannello frontale.

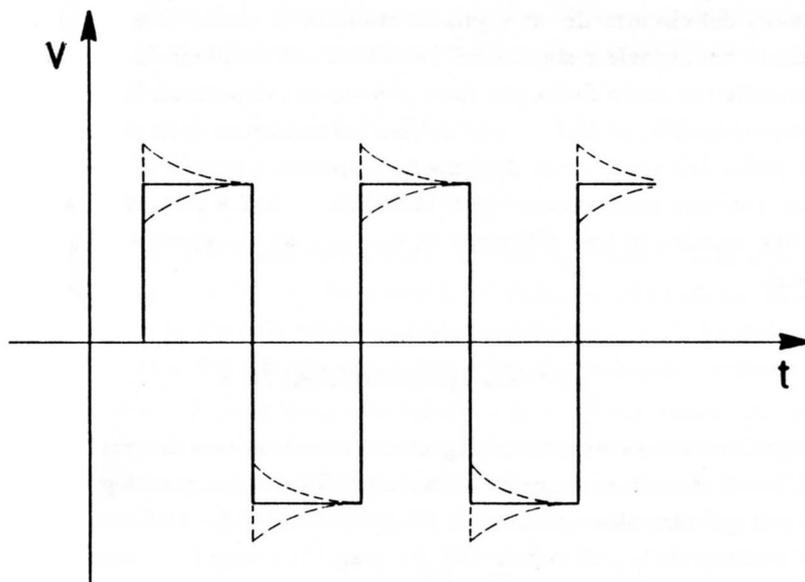


Fig.XII.17

Tale forma d’onda (Fig.17) corrisponde alla curva a tratto continuo in figura; la sonda è aggu-

stata, cioè il partitore è “compensato” quando, montata la sonda su un ingresso e misurando con essa il segnale in questione, esso compare sullo schermo come la curva a tratto continuo in figura; se il condensatore è troppo piccolo o troppo grande rispetto al valore corretto si hanno le figure disegnate a tratteggio. Il motivo per cui si usa un segnale ad onda quadra si comprende ricordando che in un’analisi di Fourier di questa forma d’onda compaiono infiniti termini di armoniche superiori alla fondamentale e pertanto se la forma d’onda è riprodotta inalterata, ciò significa che il partitore si comporta identicamente a tutte le frequenze e questo è vero solo se è soddisfatta la condizione (18). Con una sonda del genere si ottiene un aumento di un fattore 10 della impedenza di ingresso con conseguente riduzione degli effetti spuri che la presenza di una impedenza finita comporta. L’aumento di un fattore 10 riguarda effettivamente sia la parte reale che quella immaginaria dell’impedenza: infatti l’impedenza del partitore risulta essere data dal parallelo di $(R + R_s) = 10R$ con la serie di C e C_s pari a $\frac{C_s + C}{j\omega C_s C} = \frac{10}{j\omega C}$; come abbiamo già detto C è dato dal parallelo della capacità del cavo e di quella di ingresso dell’oscillografo e se il cavo è lungo circa un metro, C ammonta a un centinaio di pF e quindi la capacità della sonda si aggira attorno alla decina di pF . Il guadagno in termini di impedenza di ingresso si paga con una diminuzione, del medesimo fattore 10, dell’ampiezza del segnale che raggiunge l’ingresso dell’oscillografo; tale fattore, entro ampi limiti, può comunque essere recuperato aumentando la sensibilità dell’amplificatore verticale.

L’analisi fin qui svolta assume che l’oscillografo abbia una banda passante decisamente più ampia di quella da misurare, cosicché, almeno da questo punto di vista, l’oscillografo possa considerarsi ideale. D’altronde, avendo predisposto il collegamento agli ingressi in DC, ed essendo gli amplificatori verticali *in continua*, l’oscillografo, verso le basse frequenze, effettivamente non altera il segnale, né in ampiezza né in fase. Se viceversa avessimo collegato gli ingressi in AC avremmo introdotto un filtro passa alto con frequenza di taglio inferiore (a -3 dB) data da $f_L = \frac{1}{2\pi R_i C_{AC}}$ con R_i resistenza di ingresso ($1M\Omega$) e C_{AC} (dell’ordine di $0.05\mu F$) pari a quella che l’oscillografo presenta in serie all’ingresso quando è in AC. Per quanto riguarda il limite verso le alte frequenze sarà bene che il nostro oscillografo abbia una frequenza di taglio superiore f_H maggiore di almeno un fattore 10 rispetto a quella del circuito di cui vogliamo studiare la banda passante, cosicché non ci siano ulteriori depressioni nel segnale e sfasamenti introdotti dall’oscillografo. Per la verità va osservato che anche se la condizione sopra detta non fosse pienamente rispettata, la misura descritta in questo capitolo resterebbe possibile, in quanto essa si basa sul confronto delle risposte dei due canali; se la banda passante finita dell’oscillografo deprime in ampiezza e sposta in fase il segnale, ciò avviene nello stesso modo (almeno nominalmente) per entrambi i canali e pertanto i rapporti delle ampiezze dei segnali sui due canali e le loro differenze di fase non ne risentono e l’informazione di interesse risulta preservata.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Sulla relazione univoca esistente fra diagramma di ampiezza e diagramma di fase in una vasta gamma di filtri lineari si veda ad esempio il Cap.11 di **TE 57**; su questo problema e sui filtri passa basso, passa alto si può consultare anche **TE 50** (sect. 3.27–28). Per le sonde da oscillografo si può vedere **CO 83** (pag.121 e segg.).

XIII

I CIRCUITI RISONANTI

1.- Il circuito risonante serie

Supponiamo di avere il circuito di Fig.1, eccitato con un generatore sinusoidale $\mathcal{V} = V_0 \cdot \exp j\omega t$.

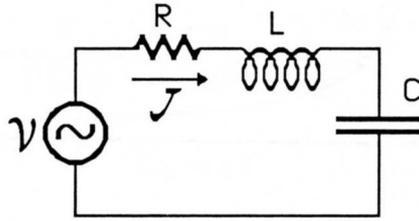


Fig.XIII.1

L'impedenza totale del circuito vale:

$$\mathcal{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (\text{XIII.1})$$

Per frequenze molto basse il modulo dell'impedenza tende a ∞ a causa del condensatore, mentre diverge per frequenze alte a causa della induttanza; corrispondentemente la fase vale $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow 0$ e $+\frac{\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow \infty$. In formule

$$\begin{cases} |\mathcal{Z}|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \\ \varphi_{\mathcal{Z}} = \text{atan} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \end{cases} \quad (\text{XIII.2})$$

Se riportiamo in grafico il modulo della corrente che circola nel circuito e la sua fase ($\theta = -\varphi_{\mathcal{Z}}$) otteniamo i grafici delle Figg.2a e 2b rispettivamente. Si vede che alla pulsazione $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'impedenza ha un minimo e che per tale valore essa è tutta reale e pari a R . La pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ è detta *pulsazione di risonanza* del circuito che, a sua volta, è denominato *circuito risonante serie*.

Per tale valore di ω la corrente \mathcal{J} ha un'ampiezza massima $I_0 = \frac{V_0}{R}$ e pertanto anche la differenza di potenziale ai capi dell'induttanza, del condensatore e della resistenza saranno, singolarmente prese, di ampiezza massima; d'altronde, poiché la caduta sulla sola resistenza vale $\mathcal{V} = \mathcal{J}R$, le due cadute su L e su C si devono annullare vicendevolmente. Di fatto le tensioni sull'induttanza e sul condensatore valgono:

$$\mathcal{V}_L = j\omega_0 L \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} \quad (\text{XIII.3})$$

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -\mathcal{V}_L \quad (\text{XIII.4})$$

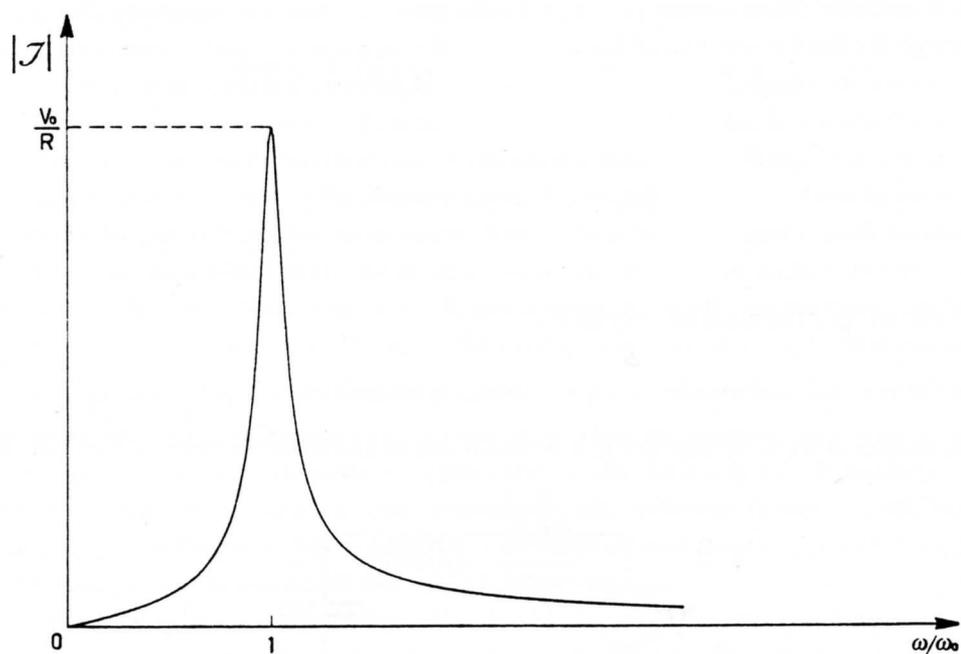


Fig.XIII.2a

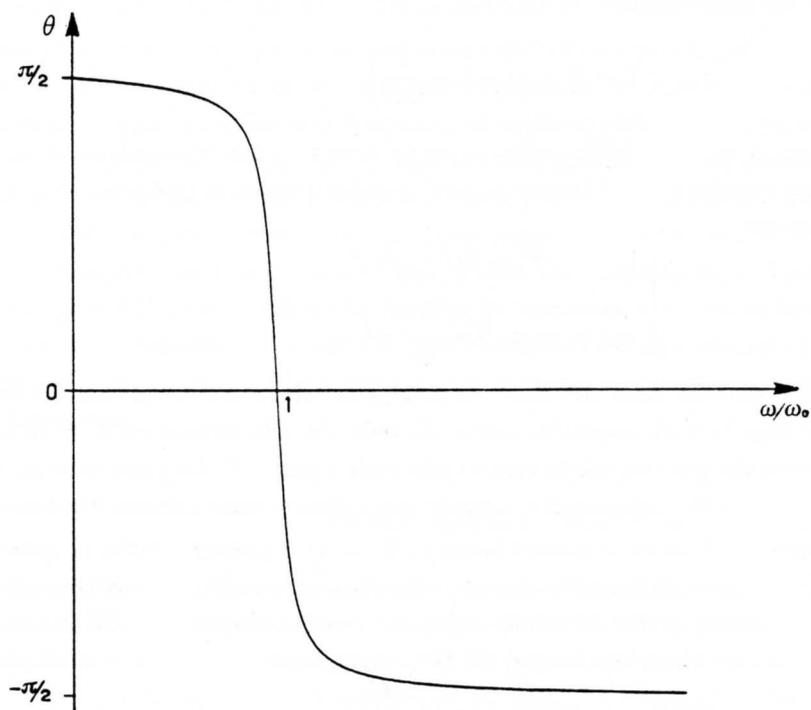


Fig.XIII.2b

Si vede così che le tensioni oltre a essere in *quadratura* con la tensione del generatore, sono in

opposizione fra di loro ed essendo di uguale ampiezza danno un contributo totale nullo. Il motivo del termine “risonanza” è che la frequenza ω_0 è quella di oscillazione propria del circuito e che pertanto la corrente “risuona” qualora il termine forzante oscilli proprio alla pulsazione ω_0 *. Studiamo esplicitamente l’analogia del nostro circuito con un sistema meccanico in risonanza; se non avessimo usato il metodo simbolico delle grandezze complesse, avremmo dovuto scrivere l’equazione differenziale:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (\text{XIII.5})$$

che, a parte il diverso significato dei simboli, coincide con l’equazione che regola il moto del sistema meccanico in Fig.3:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (\text{XIII.6})$$

dove k rappresenta la costante della molla, λ il coefficiente di attrito, supposto viscoso, ed m la massa del corpo.

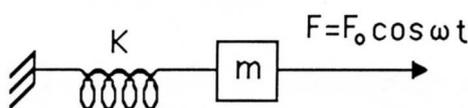


Fig.XIII.3

Quando il sistema meccanico è in risonanza, cioè $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l’ampiezza delle oscillazioni aumenta, tanto più quanto più piccolo è lo smorzamento λ ; la somma dell’energia cinetica e dell’energia potenziale della molla resta costante e il lavoro fatto dalla forza $F_0 \cos \omega_0 t$ compensa esattamente l’energia perduta per attrito (il che equivale a dire che istante per istante $F_0 \cos \omega_0 t = \lambda \frac{dx}{dt}$). In maniera assolutamente analoga, nel sistema elettrico l’energia rimbalza continuamente fra le due forme di energia elettrostatica (condensatore) e magnetica (induttanza), mentre istante per istante il generatore si preoccupa soltanto di vincere le perdite per effetto Joule sulla resistenza. Come nell’equivalente meccanico, l’ampiezza delle oscillazioni (di carica e quindi di corrente) è tanto più grande quanto minori sono gli effetti dissipativi, ovvero tanto più piccola è R . Il parametro che caratterizza il comportamento del circuito alla risonanza è il cosiddetto *parametro di qualità* o *fattore di merito* o semplicemente *Q del circuito*. Tale parametro è definito, indipendentemente dal particolare sistema oscillante in studio (sia cioè esso meccanico o elettrico), come:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia massima immagazzinata}}{\text{Energia dissipata nel sistema durante un ciclo}} = 2\pi \frac{E_{max}}{\langle E_D \rangle} \quad (\text{XIII.7})$$

Nonostante che il Q del circuito si possa definire per qualunque valore di ω , l’interesse della sua definizione è legato al comportamento del circuito alla risonanza e nel seguito - a meno che non sia altrimenti specificato - esso si riferirà sempre alla condizione di risonanza e indicato col simbolo Q_0 .

Calcoliamo il Q_0 del nostro circuito: in risonanza abbiamo visto che la corrente nel circuito è tutta reale e vale $i = I_0 \cos \omega_0 t = \frac{V_0}{R} \cos \omega_0 t$ e pertanto la carica q nel condensatore vale $\frac{V_0}{R\omega_0} \sin \omega_0 t$; l’energia immagazzinata all’istante t nel circuito vale ($\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$):

$$E_T(t) = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R^2 \omega_0^2 C} \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} \frac{L V_0^2}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R^2 \omega_0^2 C} \quad (\text{XIII.8})$$

* si faccia attenzione che qui e nel seguito per *pulsazione propria* del circuito si intende quella in assenza di smorzamento ($R = 0$) e non quella delle oscillazioni smorzate $\omega_S = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}$.

Come avevamo anticipato, in risonanza il valore dell'energia immagazzinata è costante (non dipende cioè da t) e quindi pari al valore massimo. Quanto all'energia dissipata in un ciclo essa varrà, essendo $\langle W \rangle$ la potenza media dissipata:

$$E_D = \langle W \rangle \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi i_{eff}^2 R}{\omega_0} = \frac{\pi I_0^2 R}{\omega_0} \quad (\text{XIII.9})$$

In risonanza:

$$E_D = \frac{\pi V_0^2}{\omega_0 R} \quad (\text{XIII.10})$$

Per Q_0 otteniamo così

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{XIII.11})$$

Si riconoscerà che il fattore Q_0 espresso come $\frac{\omega L}{R}$ coincide con il Q della bobina (vedi (IX.56)) se la resistenza R rappresenta la resistenza interna dell'induttore; se viceversa R è associata alla resistenza in serie al condensatore, si vede che Q_0 coincide con $\frac{1}{D}$ dove D è il fattore di dissipazione del condensatore (vedi (IX.55)).

Comunque al di là di quale sia l'origine fisica della resistenza, che sia essa cioè tutta dovuta all'induttore o tutta dovuta al condensatore o a una opportuna combinazione delle due situazioni o infine proprio a una resistenza esplicitamente aggiunta in serie, resta il fatto che il valore del fattore Q_0 determina (Fig.4a e b) il comportamento del circuito nell'intorno della frequenza di risonanza.

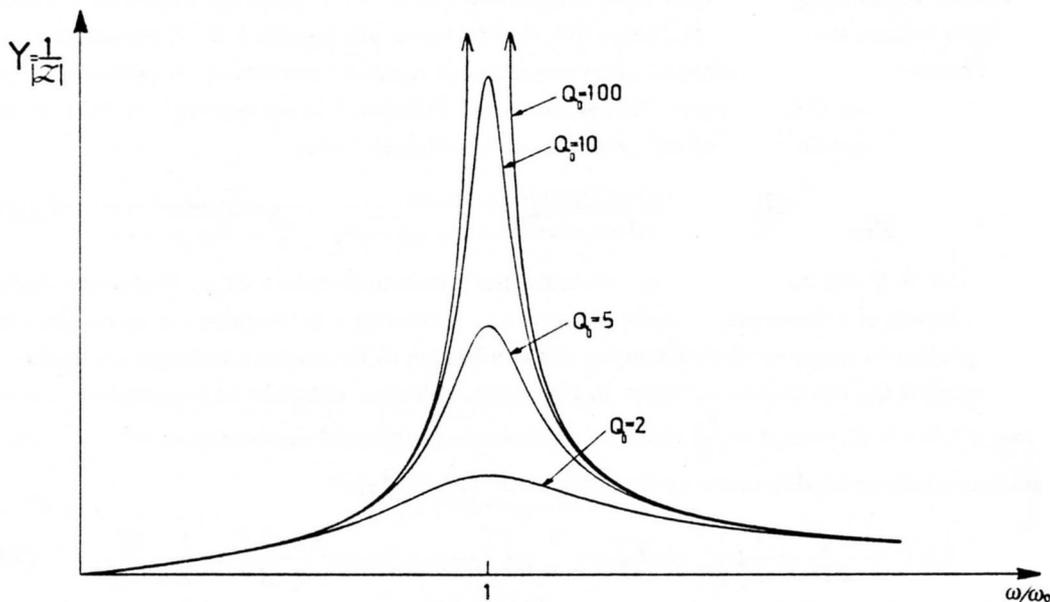


Fig.XIII.4a

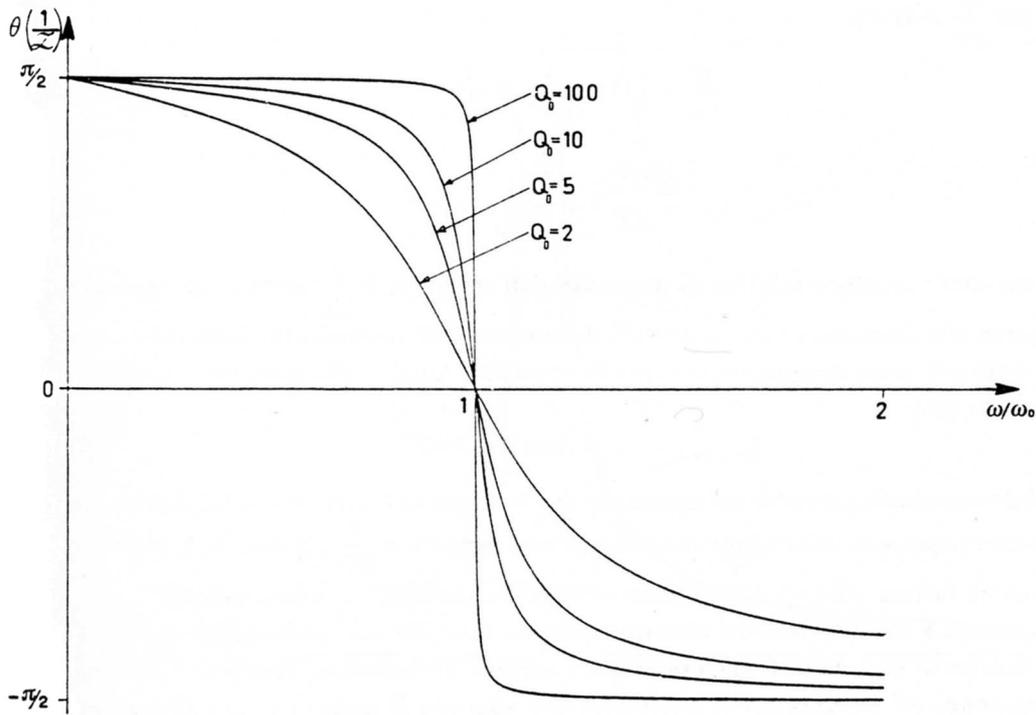


Fig.XIII.4b

All'aumentare del Q_0 , il circuito presenta gli andamenti caratteristici della risonanza sempre più marcati; per Q_0 molto grande, il modulo dell'ammettenza tende a divergere nell'intorno di $\omega = \omega_0$ e la fase dell'ammettenza compie una brusca transizione da $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$. Verifichiamo quantitativamente gli andamenti riportati nella Fig.4. Dall'espressione di Z :

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R \left[1 + j \frac{\omega L}{R} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] = R \left[1 + j \frac{\omega}{\omega_0} Q_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (\text{XIII.12})$$

si ottiene:

$$|\mathcal{Y}| = \frac{1}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2}} \quad (\text{XIII.13})$$

$$|\mathcal{Y}|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R} \quad (\text{XIII.14})$$

$$\theta(\mathcal{Y}) = - \operatorname{atan} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = - \operatorname{atan} \frac{\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}{R} \quad (\text{XIII.15})$$

e quindi:

$$\theta(\mathcal{Y})_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (\text{XIII.16})$$

Guardiamo ora per quali valori di $\omega = \omega'$ il modulo dell'ammettenza si riduce di un fattore $\sqrt{5} \approx 2.24$ rispetto al massimo e cosa fa corrispondentemente la fase. La condizione è data dalla:

$$R \sqrt{1 + \frac{\omega'^2 L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega'^2} \right)^2} = \sqrt{5} R \quad (\text{XIII.17})$$

Risolviendo per $\frac{\omega'}{\omega_0}$ si trova:

$$\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}} \pm \frac{1}{Q_0} \quad (\text{XIII.18})$$

e se $Q_0 \gg 1$:

$$\frac{\omega' - \omega_0}{\omega_0} = \pm \frac{1}{Q_0} \quad (\text{XIII.19})$$

vale a dire che una variazione relativa di frequenza dell'ordine di $\pm \frac{1}{Q_0}$ attorno alla pulsazione di risonanza, porta alla riduzione di un fattore $\sqrt{5}$ del modulo dell'ammettenza. Tanto più è grande il fattore Q_0 , tanto più acuta sarà quindi la curva di risonanza. Quanto alla fase si trova, direttamente dalla (17) e dalla (15):

$$\theta_{\omega'=\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{Q_0}} = \mp \text{atan } 2 \approx \mp 63^\circ \quad (\text{XIII.20})$$

In maniera del tutto simile si può far vedere che per $Q_0 \gg 1$, quando la frequenza del segnale differisce percentualmente rispetto al valore della risonanza per un termine $\pm \frac{1}{2Q_0}$, il modulo dell'ammettenza è diminuito di un fattore $\sqrt{2}$ (-3 dB) rispetto al valore in risonanza e la fase vale $\mp 45^\circ$.

La caratteristica ora descritta del circuito risonante fa sì che esso possa essere utilizzato come selettore di una certa gamma di frequenze attorno a quella di risonanza, cioè come un filtro passa banda: si supponga ad esempio che il generatore che alimenta il nostro circuito risonante sia caratterizzato da un ampio spettro di frequenze: la presenza del circuito risonante fa in modo che la corrente nel circuito sia dominata, se il Q_0 è sufficientemente elevato, dalle componenti con frequenza nell'intorno di ω_0 .

2.— Il circuito risonante parallelo

Consideriamo ora il circuito di Fig.5. Esso è detto circuito *risonante parallelo* o *antirisonante*;

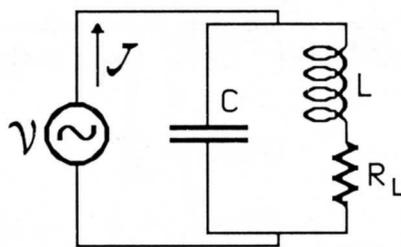


Fig.XIII.5

il motivo della seconda denominazione risiede nel fatto che il comportamento in funzione della frequenza di questo circuito è (circa) duale rispetto al risonante in serie. Infatti

$$Z = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L}} = \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C(R_L + j\omega L)} \quad (\text{XIII.21})$$

e se riportiamo in grafico $|Z|$ e la sua fase φ_Z otteniamo ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) le curve delle Figg.6a) e b).

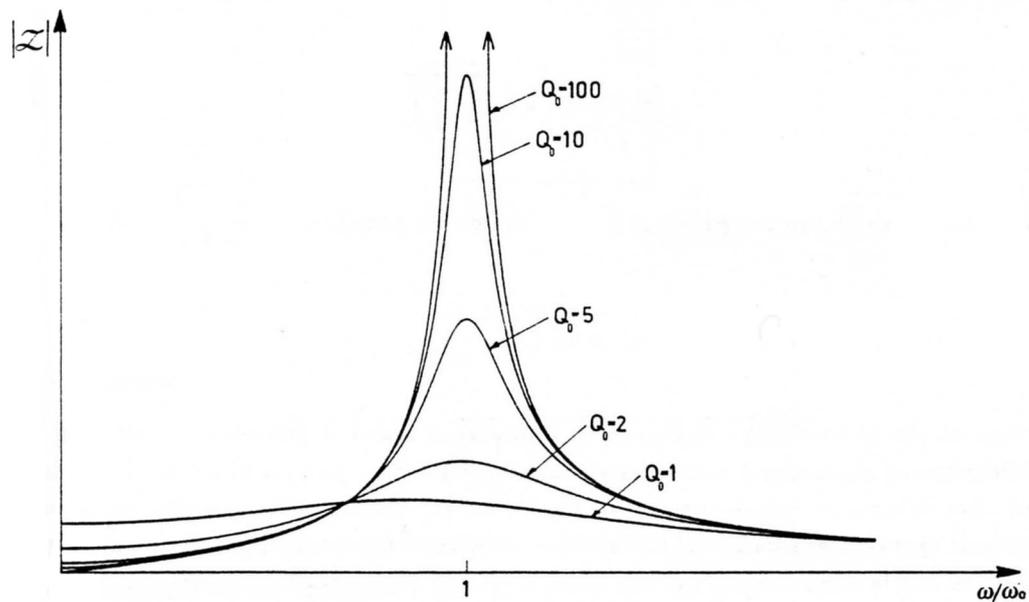


Fig.XIII.6a

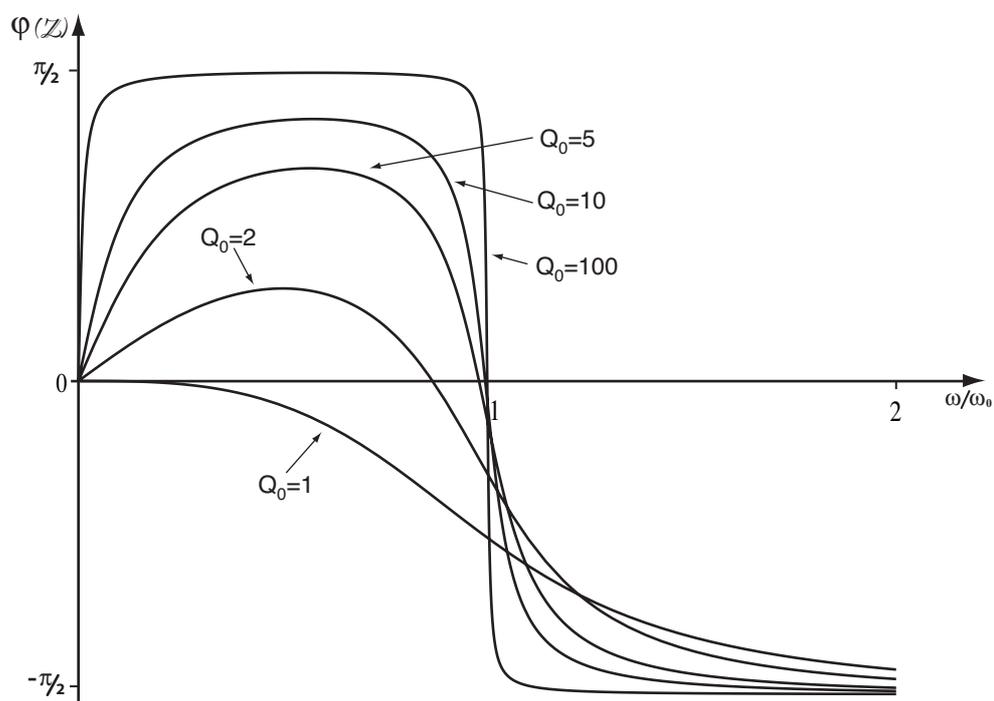


Fig.XIII.6b

A differenza del circuito risonante serie, per il quale è naturale definire pulsazione di risonanza

quella ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) corrispondente alla frequenza propria di oscillazione del sistema, nel circuito risonante parallelo la frequenza di risonanza è definita come quella frequenza per cui l'impedenza del parallelo diventa reale. In base a questa definizione si trova che la pulsazione di risonanza ω_R vale:

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 \left(1 - R_L^2 \frac{C}{L} \right) \quad (\text{XIII.22})$$

che, usando la notazione (un po' equivoca come vedremo fra poco) $Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$, può essere messa nella forma

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q_0^2} \right) \quad (\text{XIII.23})$$

Si vede intanto che la condizione di risonanza (impedenza reale) si può ottenere solo se $Q_0 > 1$ e che la pulsazione di risonanza è tanto più vicina alla pulsazione propria di oscillazione (che anche in questo caso vale $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) quanto più Q_0 è grande. Quanto all'ambiguità sopra accennata a proposito di Q_0 , essa si riferisce al fatto che se vogliamo definire il Q del circuito in questione, coerentemente con la definizione (7) prima data, troviamo dopo qualche calcolo:

$$Q_{0P} = \omega_R \frac{L}{R_L} \left(1 + R_L \sqrt{\frac{C}{L}} \right) = Q_0 \left(1 - \frac{1}{Q_0^2} \right) \left(1 + \frac{1}{Q_0} \right) \quad (\text{XIII.24})$$

La (24) dice che il fattore di merito del circuito in risonanza non coincide con il Q della bobina a quella frequenza, ma che ne differisce tanto meno quanto più è grande Q_0 . Questo è il motivo per cui nelle figure precedenti, seguendo una prassi ormai consolidata nei testi di elettronica, si sono riportate le curve corrispondenti al fattore di merito Q_0 e non Q_{0P} . Dopotutto, nelle applicazioni pratiche hanno interesse solo i circuiti risonanti parallelo con alti valori di Q_0 (> 10) e pertanto con buona approssimazione $Q_{0P} \approx Q_0$.

Tornando ad esaminare più da vicino il comportamento del circuito risonante parallelo si vede che *in prossimità* della frequenza di risonanza il modulo dell'impedenza è massimo (il massimo del modulo dell'impedenza non coincide con la condizione $Im(\mathcal{Z}) = 0$); per la precisione si trova che per $\omega = \omega_R$:

$$\mathcal{Z}_p = R_L \frac{1 + j \frac{\omega_R L}{R_L}}{1 - \omega_R^2 CL + j \omega_R C R_L} = \frac{R_L}{1 - \omega_R^2 CL} = R_L Q_0^2 = \frac{1}{R_L} \frac{L}{C} \quad (\text{XIII.25})$$

Il motivo per cui nel risonante parallelo l'impedenza nell'intorno della risonanza è massima, si comprende assai bene pensando di eccitare il nostro circuito con una corrente \mathcal{J} di ampiezza costante (al variare della frequenza) e andando a calcolare le correnti \mathcal{J}_L e \mathcal{J}_C che circolano nell'induttanza e nel condensatore (Fig.7):

$$\mathcal{J}_L = \mathcal{J} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_L + j\omega L} = \mathcal{J} \frac{1}{1 + (R_L + j\omega L)(j\omega C)} = \mathcal{J} \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega C R_L} \quad (\text{XIII.26})$$

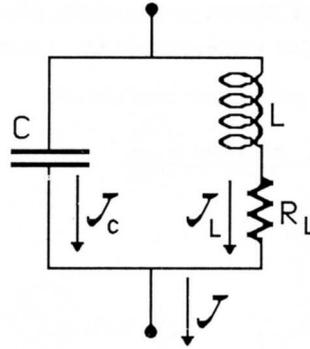


Fig.XIII.7

Alla risonanza

$$\mathcal{J}_{L0} = \mathcal{J} \frac{1}{\frac{1}{Q_0^2} + j \left(\frac{1}{Q_0} \right) \left(1 - \frac{1}{Q_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \approx -j\mathcal{J}Q_0 \quad (\text{XIII.27})$$

dove, nell'ultimo passaggio sono stati trascurati i termini in $\frac{1}{Q_0^2}$. Quanto a \mathcal{J}_{C0} essa risulta, sempre nella stessa approssimazione di $Q_0 \gg 1$, pari a:

$$\mathcal{J}_{C0} = \mathcal{J} - \mathcal{J}_{L0} = \mathcal{J} + j\mathcal{J}Q_0 \approx j\mathcal{J}Q_0 \quad (\text{XIII.28})$$

In risonanza pertanto, ad una corrente di eccitazione \mathcal{J} , corrispondono nei due rami del parallelo correnti Q_0 volte più grandi in modulo, sfasate quasi esattamente di $\pm \frac{\pi}{2}$; esse sono "responsabili" del continuo rimbalzare dell'energia immagazzinata nelle forme di campo elettrico e magnetico; ci troviamo cioè dinanzi a un circuito risonante serie (costituito dall'anello dei due rami in parallelo), solo che questa volta, le cadute (massime) su induttanza e capacità non si sommano per dare contributo nullo, ma danno viceversa luogo all'innalzamento *risonante* della tensione ai capi del parallelo.

Come accennato precedentemente, nei casi di interesse pratico $Q_0 \gg 1$ per cui $\omega_R \approx \omega_0$ a meno di termini in $\frac{1}{Q_0^2}$. In queste condizioni intervengono alcune importanti semplificazioni nell'espressione di \mathcal{Z} nell'intorno della risonanza: infatti per un valore ω generico, l'ammettenza del parallelo può essere scritta nella forma:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{RQ_0^2} \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{\omega}{\omega_0}Q_0 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{Q_0^2} \right]}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{Q_0^2}} \quad (\text{XIII.29})$$

che per valori di ω non lontani da ω_0 e per $Q_0 \gg 1$ può approssimarsi come:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \approx \frac{1}{RQ_0^2} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{\omega}{\omega_0}Q_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (\text{XIII.30})$$

Si osservi la stretta somiglianza di questa espressione con quella (12) dell'impedenza del circuito serie; ciò significa che per $Q_0 \gg 1$ l'andamento dell'ammettenza del circuito parallelo, nell'intorno di $\omega = \omega_0$, è equivalente a quello dell'impedenza del risonante serie e continueranno a valere, fatti i dovuti cambiamenti, le conclusioni tratte nel §1. Ad esempio per $\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q_0} \right)$ nel risonante parallelo il modulo dell'impedenza sarà ridotto di 3 dB rispetto al valore in risonanza e la fase

varrà $\pm 45^\circ$. Si noti che proprio quest'ultima osservazione giustifica a posteriori la correttezza della nostra approssimazione: che cioè tanto più è grande Q_0 , tanto più è stretta la curva di risonanza e nell'espressione di $\frac{1}{Z}$ il termine $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ può essere confuso con 1, essendo la sua differenza rispetto a 1, fino ad oltre metà del massimo di Z , inferiore a $\frac{2}{Q_0}$.

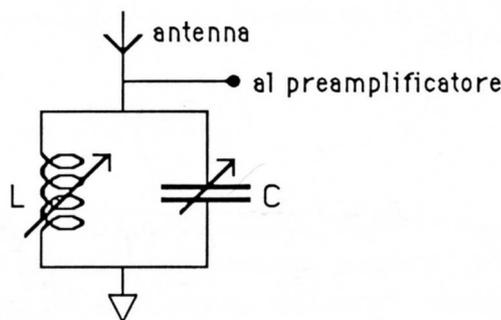


Fig.XIII.8

Quanto alle applicazioni dei circuiti risonanti parallelo valgono considerazioni simili a quelle dei circuiti serie, tenendo presente però che nel caso del parallelo il circuito è adatto a rivelare segnali caratterizzati da impedenze interne relativamente elevate; un tipico esempio (Fig.8) è il caso di una antenna per ricezione di onde radio in cui il segnale molto piccolo ricevuto dall' antenna provoca, alla frequenza di risonanza (definita variando o l'induttanza o la capacità tramite il comando di sintonia dell'apparecchio) una tensione rivelabile ai capi del circuito risonante parallelo e viene poi inviata agli stadi di amplificazione e demodulazione.

Un'altra applicazione dei circuiti risonanti riguarda la misura di induttanze e capacità tramite la rivelazione di condizioni di risonanza e costituisce l'argomento del prossimo paragrafo.

3.— Rivelazione della frequenza di risonanza mediante un oscillografo

Nel circuito disegnato in Fig.9, $Z(\omega)$ rappresenta un circuito risonante (serie o parallelo); \mathcal{V}, ω è un generatore di tensione con ampiezza e frequenza variabili, caratterizzato da una resistenza interna ρ_i ; R_0 è un resistore puro. Vediamo ora che se inviamo la ddp \mathcal{V}_x fra i terminali X e T e la ddp \mathcal{V}_y fra Y e T ai canali X e Y di un oscillografo, possiamo rivelare molto semplicemente la condizione di risonanza, quella per cui $Z(\omega)$ diventa reale. La relazione fra \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y è:

$$\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_x \frac{Z(\omega)}{R_0 + Z(\omega)} \quad (\text{XIII.31})$$

Per ω qualsiasi \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y non saranno in fase cosicché per gli spostamenti x e y del fascetto luminoso sullo schermo dell'oscillografo avremo:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ y = y_0 \cos (\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (\text{XIII.32})$$

con x_0 e y_0 proporzionali rispettivamente alle ampiezze di \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y e con φ pari alla fase di $\frac{\mathcal{Z}(\omega)}{R_0 + \mathcal{Z}(\omega)}$.

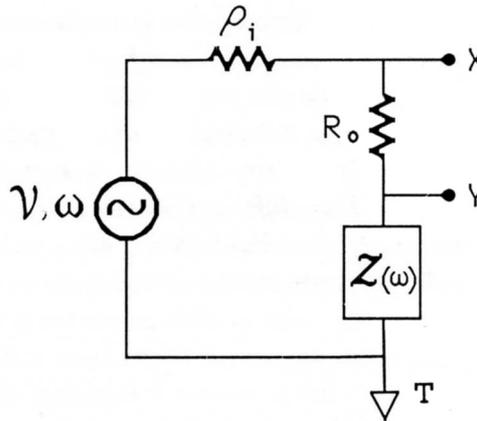


Fig.XIII.9

La curva corrispondente a questa scansione nelle due direzioni x e y , è una ellisse di equazione

$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} - \frac{2xy}{x_0y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (\text{XIII.33})$$

come si può facilmente ottenere eliminando il parametro t dal sistema (32). Qualora, al variare di ω , si ottenga la risonanza, allora $\varphi = 0$ e l'ellisse degenera in un segmento di retta di pendenza $\frac{y_0}{x_0}$; la (33) infatti si riduce in questo caso a:

$$\left(\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \right)^2 = 0 \quad (\text{XIII.34})$$

Ovviamente la pendenza del segmento dipende, oltre che dal valore delle ampiezze \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y , dalla selezione effettuata sulla sensibilità degli amplificatori dei canali X e Y. Agendo su questi comandi è anche possibile migliorare la sensibilità di rivelazione della condizione di risonanza (pendenza attorno a 45°).

Soffermiamoci ora sul problema della scelta di R_0 . E' facile rendersi conto che per vari ordini di motivi conviene rendere $R_0 \gg |\mathcal{Z}(\omega)|$ per ogni ω , il che equivale sostanzialmente a comandare l'impedenza $\mathcal{Z}(\omega)$ con un generatore di corrente. In questo caso infatti la misura dell'ampiezza di \mathcal{V}_y dà direttamente (a parte una costante moltiplicativa) il modulo di $\mathcal{Z}(\omega)$ ad ogni frequenza ed è così estremamente semplice costruire un grafico delle curve di risonanza ($|\mathcal{Z}(\omega)|$ per il parallelo, $|\mathcal{V}(\omega)|$ per il serie). Inoltre si può vedere che la valutazione della impedenza in risonanza (sia serie che parallelo) $\mathcal{Z}_p = |\mathcal{Z}(\omega)|_{\omega=\omega_R}$ è tanto più precisa quanto più $\frac{\mathcal{V}_y}{\mathcal{V}_x} < 1$, ovvero quanto più $R_0 > \mathcal{Z}_p$: infatti, in risonanza $\frac{\mathcal{V}_y}{\mathcal{V}_x} = A$ è reale e possiamo scrivere (vedi (31)):

$$\mathcal{Z}_p = \frac{R_0 A}{1 - A} \quad (\text{XIII.35})$$

e quindi

$$\frac{\Delta \mathcal{Z}_p}{\mathcal{Z}_p} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta A}{A(1 - A)} \quad (\text{XIII.36})$$

e supponendo che A possa essere misurato con un errore percentuale costante (cosa assai ragionevole a meno di non avere segnali \mathcal{V}_y troppo piccoli per i quali l'oscillografo non ha sensibilità verticale sufficiente), ci si guadagna ad avere $\mathcal{V}_x \gg \mathcal{V}_y$, ovvero $A \ll 1$; si badi però che da questo punto di vista un fattore 10 fra \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y è già sufficiente per avere un errore dovuto ad A solo del 10% superiore rispetto al minimo ottenibile.

La prescrizione $A \ll 1$ corrisponde al fatto che essendo Z_p direttamente collegato alla differenza dei due segnali \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y , tanto più essi sono differenti, tanto minore sarà l'errore associato a questa valutazione. Similmente si potrebbe far vedere che anche per quanto riguarda la sensibilità di rivelazione della risonanza, in pratica della *differenza di fase* fra \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y , ci si guadagna ad aver $\mathcal{V}_x \gg \mathcal{V}_y$; anche ciò è riconducibile al fatto che, fissato $Z(\omega)$ e quindi la sua fase, la fase di \mathcal{V}_x differisce tanto di più da quella di \mathcal{V}_y quanto minore sarà il contributo che $Z(\omega)$ dà all'impedenza complessiva del ramo $R_0 + Z(\omega)$.

4.— Misure con un circuito risonante serie

Nel circuito in Fig.10, la risonanza si avrà per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e si potrà rivelare come detto nel paragrafo precedente.

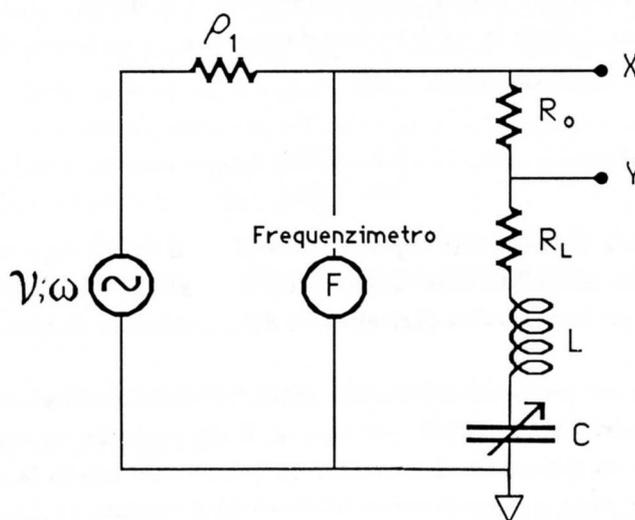


Fig.XIII.10

Possiamo allora misurare direttamente il valore dell'induttanza di una bobina, poiché esso dipende solo dal valore del condensatore (per esempio un condensatore campione a decadi) e dalla frequenza, che può essere misurata con un *frequenzimetro*. Il frequenzimetro è uno strumento digitale che conta le oscillazioni che il segnale compie nell'unità di tempo e presenta il risultato direttamente sotto forma di numero. Si tratta in genere di strumenti molto precisi, basandosi essi su un orologio a quarzo e un contatore digitale.

Se è di interesse conoscere anche il valore di R_L (la resistenza della bobina) dovremo valutare l'impedenza del circuito, che per $\omega = \omega_0$ vale proprio R_L . Il Q_0 del circuito si otterrà poi come $Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$ e potremo anche verificare la correttezza di tale valore andando a misurare la larghezza

della curva di risonanza, cioè del modulo dell'ammettenza in funzione della frequenza, a $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (o $\frac{1}{\sqrt{2}}$) volte del massimo. Come visto nel paragrafo precedente questo si farà tanto più semplicemente quanto più $R_0 > R_L$.

Se si vogliono studiare gli andamenti di R_L e L in funzione di ω , dovremo variare ω e trovare, tramite le variazioni su C , la corrispondente condizione di risonanza. In genere L presenta piccole variazioni con la frequenza, mentre R_L cresce sensibilmente con ω ; conseguentemente il fattore di merito del circuito non aumenta con la frequenza come nel caso in cui R_L rimanesse costante.

Con alcune bobine può capitare che in condizioni prossime a quelle di risonanza, l'ellisse, anziché degenerare in un segmento di retta "degeneri" davvero in una figura con qualche cappio; ciò è dovuto alla presenza di distorsioni nella ddp \mathcal{V}_y o dovute al generatore non perfettamente sinusoidale, oppure indotte dalla presenza di comportamenti non lineari in qualche componente utilizzato. Se ad esempio si hanno saturazioni nel nucleo della bobina, ovvero dipendenze di L dalla corrente che la attraversa, questi sono proprio tipici effetti non lineari che portano a distorsioni; il fatto che essi si notino solo nei paraggi della risonanza è dovuto al fatto che in queste condizioni si ha un forte effetto di *cancellazione* sulla parte *regolare* dell'impedenza (le cadute sull'induttanza e sulla capacità sono nominalmente uguali e sfasate di 180°) e quindi solo la resistenza R_L più una eventuale parte *irregolare* dell'impedenza contribuiscono alla ddp misurata. Analogamente si può ragionare per le distorsioni dovute al generatore, che si possono manifestare in queste condizioni perché la ddp associata all'armonica fondamentale è depressa a causa della risonanza. Quanto alla valutazione degli errori della misura di L e di R_L , ne verrà discusso insieme al caso del circuito risonante parallelo, data la stretta affinità fra le due procedure.

5.— Misure con un circuito risonante parallelo

Il circuito in questo caso è quello di Fig.11 e abbiamo visto che l'impedenza presenta un massimo nell'intorno della risonanza; la derivazione della dipendenza di L e di R_L (in genere tutta data dalla resistenza interna della bobina) in funzione delle grandezze direttamente misurabili, è in questo caso, un po' più complicata che nel caso del circuito serie.

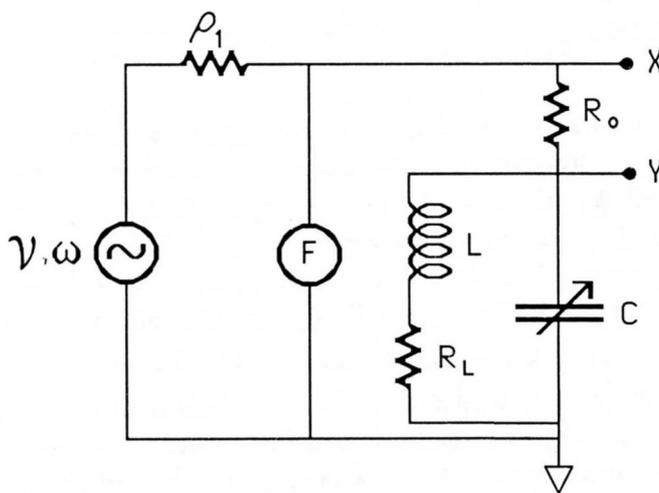


Fig.XIII.11

Infatti, detto Z_p il valore dell'impedenza per $\omega = \omega_R$ ottenuto tramite la misura di A e R_0 in risonanza (35), occorre, per ricavare L e R_L , risolvere il sistema (vedi (22) e (25)):

$$\begin{cases} \omega_R^2 = \frac{1}{LC} \left(1 - R_L^2 \frac{C}{L} \right) \\ Z_p = \frac{1}{R_L} \frac{L}{C} \end{cases} \quad (\text{XIII.37})$$

Da questo, dopo un po' di calcoli, si trova:

$$\begin{cases} R_L = \frac{Z_p}{1 + \omega_R^2 C^2 Z_p^2} \\ L = \frac{C Z_p^2}{1 + \omega_R^2 C^2 Z_p^2} \end{cases} \quad (\text{XIII.38})$$

Ricordiamo ancora una volta che se $Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$ è minore di 1 non si riesce a trovare la condizione di risonanza; se Q_0 è maggiore di 1, la condizione di risonanza viceversa è ottenibile, ma la valutazione di L - diversamente dal caso del risonante serie - *dipende* anche dalla valutazione di Z_p . Di conseguenza si ha un aumento nella indeterminazione di L rispetto al risonante serie. La determinazione di L dipende da Z_p in quanto la pulsazione di risonanza non coincide con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; nei casi in cui $Q_0 \gg 1$, tendendo ω_R a ω_0 , allora $L \approx \frac{1}{\omega_0^2 C}$ e l'induttanza torna di fatto a dipendere solo dalla capacità C e da ω_0 .

A differenza del circuito risonante serie, in quello parallelo non si notano gli effetti di non linearità dei componenti, perché questa volta, in risonanza, la caduta su Z_p contiene il contributo da entrambe le parti *regolare* e *irregolare* della induttanza e in genere la prima domina largamente sulla seconda. Se si vuole anche in questo caso tracciare la curva di risonanza ($|Z|$ in funzione di ω) è opportuno, come già detto, fare $R_0 \gg Z_p$ e questo ora può richiedere l'uso di resistenze R_0 in assoluto assai elevate, visto che Z_p alla risonanza è massima; ciò può comportare dei problemi aggiuntivi, che vedremo nel prossimo paragrafo, con riferimento agli errori di taratura, di sensibilità e di schematizzazione.

6.— Errori nella misura di L e C con un circuito risonante

La parte di errori di taratura dei campioni di capacità e resistenze e degli strumenti quali il frequenzimetro è banale da trattare; in genere i contributi di errore associati a queste voci sono tali che danno un contributo dell'ordine del per mille alla indeterminazione di L (soprattutto nel circuito risonante serie). Dove entra in gioco la valutazione di Z_p o di R_L bisogna tenere in conto anche la precisione di taratura dell'oscillografo e l'indeterminazione della lettura delle ampiezze sullo schermo: infatti la valutazione dell'impedenza Z_p si basa sulla misura del rapporto delle tensioni $\frac{V_y}{V_x}$ o meglio delle ampiezze V_{0y} e V_{0x} . L'errore di lettura, con qualche particolare accorgimento, per esempio facendo coincidere la traccia luminosa con le divisioni incise sullo schermo, si può ridurre fino all'ordine del percento o anche leggermente meno. Resta l'errore di taratura della scala; quest'ultimo può essere ridotto rispetto alla precisione garantita dal costruttore tramite una taratura preventiva dei due canali X e Y. Quanto alla rivelazione delle condizioni di risonanza, tralasciando

per il momento un effetto sistematico su cui torneremo nel seguito, un limite proviene dall'incertezza con cui determiniamo la frequenza per la quale i due archi di ellisse degenerano in segmenti di retta sovrapposti. Tanto più è elevato il Q_0 del circuito, tanto minore sarà questa incertezza in termini di $\Delta\omega$, se ammettiamo di ricercare le condizioni di risonanza variando la frequenza del generatore: infatti abbiamo visto che una variazione relativa $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ dell'ordine di $\frac{1}{2Q_0}$ corrisponde a uno sfasamento di circa 45° fra i segnali (cioè a una ellisse decisamente aperta). Pertanto l'indeterminazione nella pulsazione di risonanza, essendo una piccola frazione di questa variazione, sarà tanto minore quanto più grande è Q_0 . Questa indeterminazione nella percezione della condizione di risonanza, che è dovuta alla sensibilità del metodo, si ripercuote con un errore da aggiungere all'errore di taratura del condensatore, qualora si lavori a frequenza fissa e si vari il condensatore per ottenere la condizione di risonanza.

Veniamo ora agli errori associati alle schematizzazioni fatte e che in molti casi possono essere maggiori di tutti gli altri. Intanto l'oscillografo con i suoi ingressi introduce fra i punti X e massa e Y e massa una impedenza che non è sempre legittimo trascurare; sappiamo che un oscillografo possiede $1 M\Omega$ di resistenza verso massa con in parallelo qualche decina di pF . Mentre il contributo di questa impedenza fra X e massa è irrilevante, quella fra Y e massa può alterare il nostro circuito in maniera sostanziale: ad esempio in un risonante parallelo la capacità di ingresso dell'oscillografo va in parallelo a quella da noi esplicitamente montata, cosicché i due valori vanno sommati quando siano confrontabili. Poiché in genere la capacità di ingresso non è perfettamente nota, è sconsigliabile porsi in condizioni di misura in cui la sua influenza vada considerata; tali condizioni sono oltretutto sconsigliate perché ciò significa lavorare a frequenze elevate: infatti, fissata L (per esempio dell'ordine del mH), capacità sotto il nF comportano frequenze di risonanza dell'ordine di $10^5 Hz$, alle quali non è più possibile continuare a lavorare con i cavetti non schermati, senza introdurre severe non-riproducibilità delle misure (vedi Cap.XII,§4).

Un altro problema che si può incontrare riguarda proprio la schematizzazione che si fa del componente sotto misura, cioè l'induttore. A suo tempo (Cap.IX, §5) abbiamo visto che all'aumentare della frequenza la capacità distribuita C_d (in parallelo alla induttanza) contribuisce in maniera crescente all'impedenza della bobina: di fatto se si prende una bobina e la si eccita a frequenze sempre più elevate si trova la condizione di risonanza del circuito risonante parallelo costituito dalla induttanza L e dalla capacità C_d e questo è proprio il metodo che si impiega per misurare le capacità distribuite degli induttori. Spesso questa capacità parassita può dare contributi assai più importanti delle capacità dell'oscillografo (valori tipici per bobine di qualche decina di mH : $0.1 - 0.3nF$).

Torniamo ora su un punto sul quale è stato un po' sorvolato: quando si inviano due segnali all'oscillografo, uno sull'asse X l'altro sull'asse Y, abbiamo supposto che questi vengano applicati alle placchette deflettrici senza subire alcuno sfasamento, oppure che subiscano uno sfasamento identico: solo in queste ipotesi la nostra ellisse riproduce fedelmente la relazione di fase fra i due segnali in ingresso. Purtroppo questo non è il caso che si presenta in realtà, come è facile verificare, mandando uno stesso segnale sinusoidale contemporaneamente sui due assi: sullo schermo si ottiene una ellisse, magari schiacciata, ma chiaramente non un segmento di retta, almeno non su tutta la gamma di frequenze di interesse. Di fatto il costruttore garantisce che su una certa banda di frequenze (in genere abbastanza più limitata della banda passante dello strumento) lo sfasamento *spurio* introdotto dall'oscillografo è minore di pochi (2-3) gradi. Uno sfasamento di 3° fra i due segnali dà luogo ad una ellisse del tipo riportato in Fig.12: Un controllo preventivo della presenza dell'effetto è possibile, ma applicare poi la relativa correzione durante la determinazione della risonanza è relativamente scomodo. Questo errore oltretutto è quasi sempre dominante rispetto a quello della sensibilità, come ci si può facilmente rendere conto in base alla Fig.12, almeno nei casi in cui Q_0 è sufficientemente

elevato. Qualora si vogliono compiere misure di maggiore precisione, che quindi non dipendano dallo sfasamento fra i due canali, conviene procedere in maniera diversa.

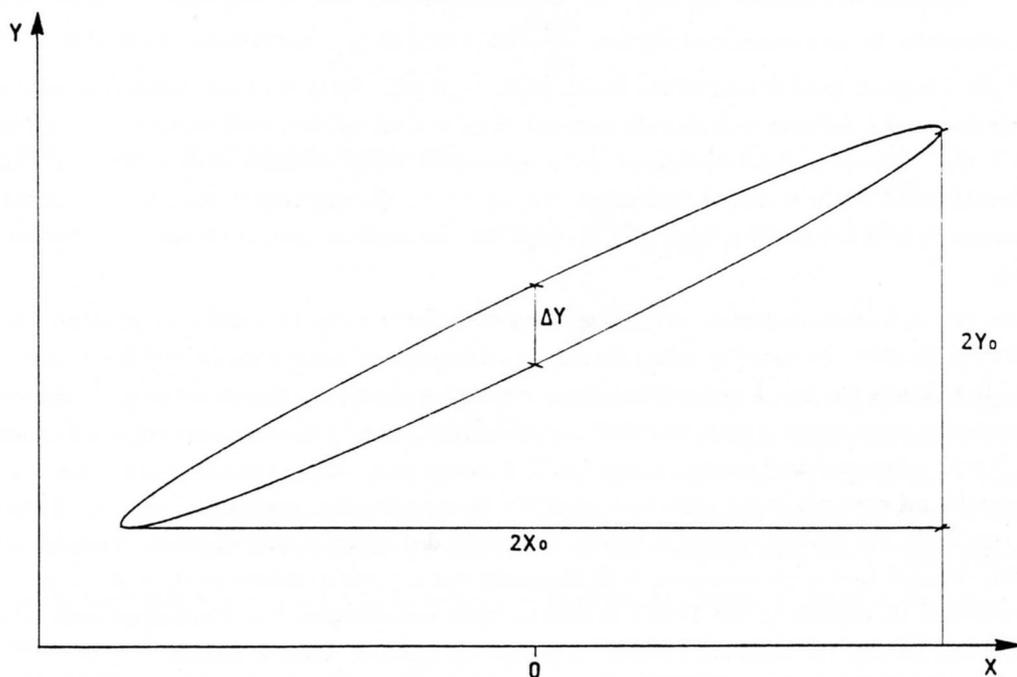


Fig.XIII.12

Un metodo possibile è mostrato nella Fig.13 ed esso ha anche il vantaggio di dare una valutazione diretta del valore dell'impedenza in risonanza:

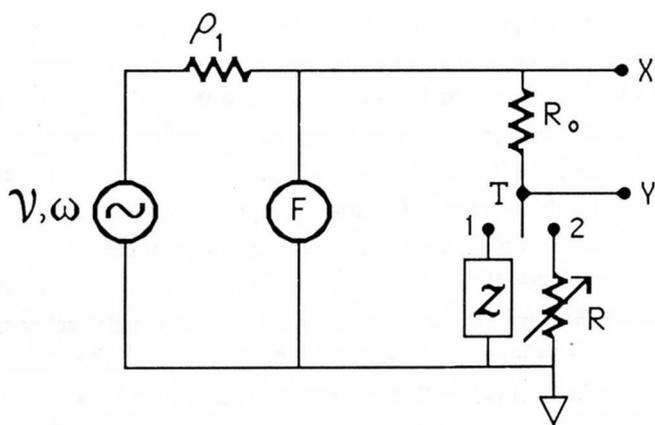


Fig.XIII.13

R è una resistenza campione a decadi che alle frequenze di interesse mantenga i valori nominali di resistenza dichiarati e non introduca nell'impedenza significative componenti immaginarie. T è un deviatore che può essere commutato fra le due posizioni 1 e 2. Una volta trovata, almeno approssimativamente, la condizione di risonanza con il tasto in posizione 1 usando l'oscillografo in

X-Y, si passa quindi ad esaminare il solito segnale sull'ingresso Y ma usando la base dei tempi interna e come trigger esterno il segnale precedentemente inviato sul canale X. Se R è impostata su un valore identico a quello dell'impedenza del circuito in condizioni di risonanza e se il generatore oscilla effettivamente alla frequenza di risonanza, la commutazione del tasto fra 1 e 2 non altera il segnale sull'asse Y né come ampiezza, né come fase. In pratica, per trovare questa condizione, si può prima ottimizzare la condizione di risonanza, variando o la frequenza o il condensatore variabile, commutando T fra le due posizioni e verificando che in entrambe il segnale mantenga la medesima fase (in pratica il passaggio di zero del segnale non trasli lungo l'asse x) e poi variare R fino ad ottenere uguali ampiezze. Questo metodo di misura, basandosi sulla rivelazione di *uguaglianza* di due segnali inviati sullo stesso canale è esente da tutti i problemi sopra esposti circa lo sfasamento fra i canali X e Y e la calibrazione degli amplificatori di ingresso dell'oscillografo. Occorre ovviamente mettere un po' di cura nella determinazione della stabilità del passaggio di zero e della costanza delle ampiezze rispetto alla commutazione del tasto T, poiché l'indeterminazione sui valori della frequenza e dell'impedenza dipende dalla incertezza con cui si dichiarano stabili i passaggi di zero e uguali le ampiezze dei due segnali. La precisione del frequenzimetro e della resistenza campione R danno contributi all'errore complessivo in genere trascurabili.

Il miglioramento della qualità della misura rispetto all'altra procedura è decisivo e tale da ridurre di quasi un ordine di grandezza la precisione dei risultati.

7.— *Un circuito oscillante eccitato con un gradino di tensione*

Studiamo ora brevemente il transitorio della corrente nel circuito risonante (consideriamo il risonante serie per semplicità); poiché sul sistema si possono, come ora vedremo, innescare oscillazioni di carica e quindi di corrente, il circuito viene anche chiamato *circuito oscillante*. Consideriamo quindi il circuito RLC serie disegnato in Fig.14. Supponiamo che il tasto T sia aperto con il condensatore inizialmente scarico. All'istante $t = 0$ chiudiamo il tasto T: per $t > 0$ l'equazione che regola l'andamento della carica sul condensatore in funzione del tempo sarà:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad (\text{XIII.39})$$

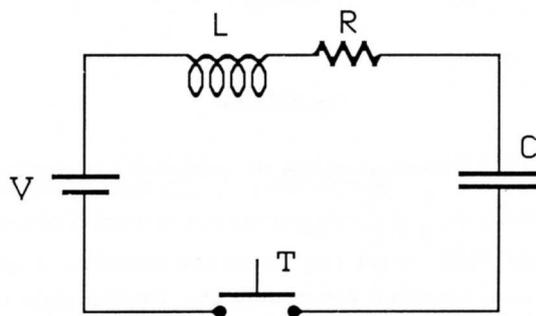


Fig.XIII.14

Non c'è bisogno di grandi calcoli per ricavare la soluzione, poiché l'equazione è identica, a parte il significato dei simboli, a quella trovata per il galvanometro (Cap. II) con condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$, corrispondenti alle nostre $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$. Abbiamo così le soluzioni:

$$a) Q_0^2 = \frac{L}{R^2 C} < \frac{1}{4}$$

$$q(t) = CV \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \cdot \left[\frac{1+\Gamma}{2\Gamma} \exp\left(\frac{R}{2L}\Gamma t\right) + \frac{\Gamma-1}{2\Gamma} \exp\left(-\frac{R}{2L}\Gamma t\right) \right] \right\} \quad (\text{XIII.40, a})$$

$$b) Q_0^2 = \frac{L}{R^2 C} = \frac{1}{4}$$

$$q(t) = CV \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cdot \left[1 + t \frac{R}{2L} \right] \right\} \quad (\text{XIII.40, b})$$

$$c) Q_0^2 = \frac{L}{R^2 C} > \frac{1}{4}$$

$$q(t) = CV \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{R}{2L}\Gamma t\right) + \frac{1}{\Gamma} \text{sen}\left(\frac{R}{2L}\Gamma t\right) \right] \right\} \quad (\text{XIII.40, c})$$

$$\text{con } \Gamma = \sqrt{\left| 1 - \frac{4L}{R^2 C} \right|}.$$

Le tre soluzioni sono riportate nel grafico di Fig.15.

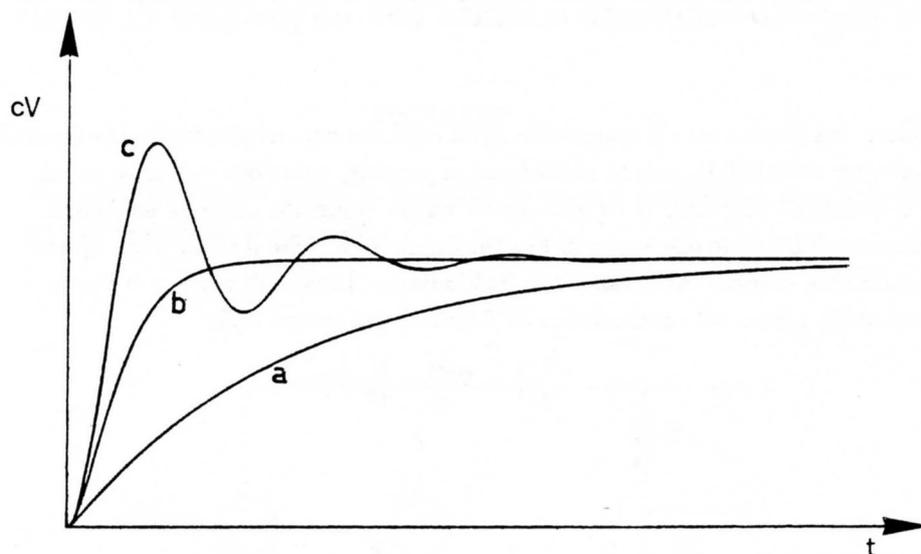


Fig.XIII.15

Si noti che il tipo di moto (oscillatorio, critico, sottocritico) è controllato dal valore di R tramite il fattore di merito del circuito $Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. In particolare si osservi che, qualora $Q_0 > \frac{1}{2}$, la brusca transizione innesca oscillazioni della carica con frequenza prossima a quella propria del sistema $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tanto più vicina a ω_0 quanto è più grande Q_0 . Aggiustando opportunamente il trigger di un oscillografo e collegando all'ingresso Y la ddp ai capi del condensatore, sarà possibile osservare l'andamento della differenza di potenziale $\frac{q(t)}{C}$ in funzione del tempo e verificare gli andamenti ora descritti.

Un metodo particolarmente comodo per osservare il fenomeno è quello di adoperare, anziché un generatore di fem continua e un tasto, un generatore di forma d'onda rettangolare con una durata molto maggiore del tempo che il circuito oscillante impiega per "recuperare" il valore asintotico. Avremo così gli andamenti ripetitivi (e quindi molto più facilmente osservabili all'oscillografo) riportati nella Fig.16

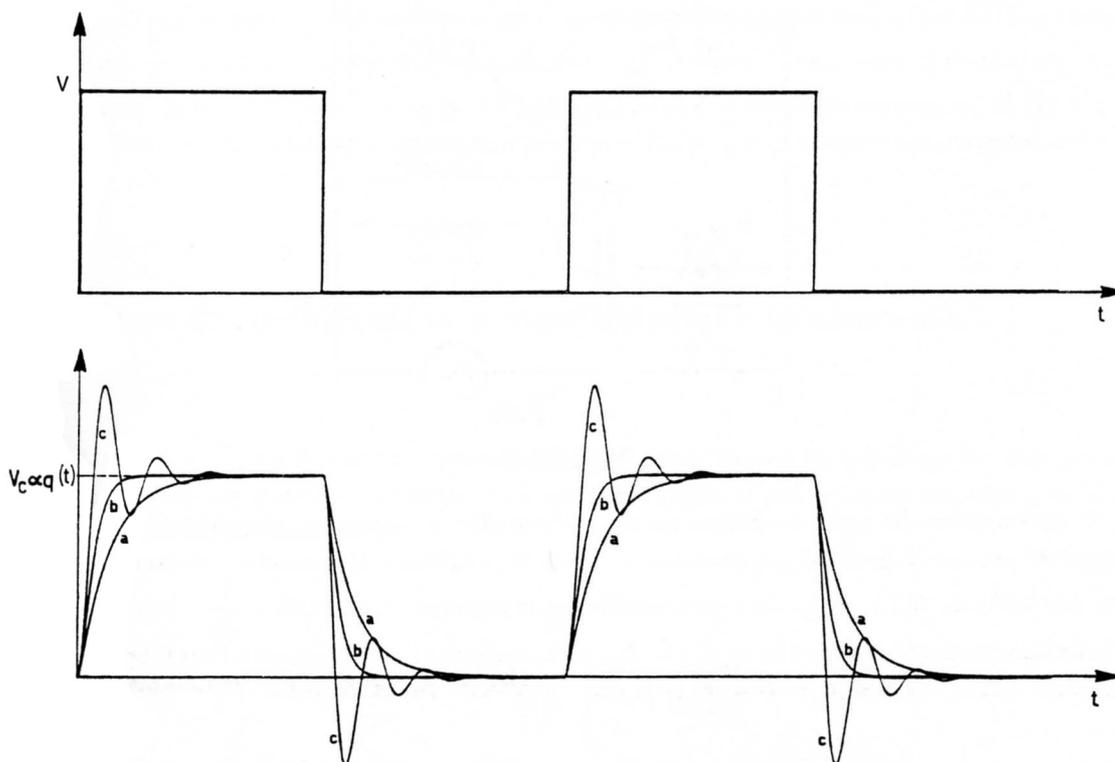


Fig.XIII.16

8.— *Misuratore vettoriale di impedenza*

Consideriamo il circuito di Fig.17: esso rappresenta un ponte con un ramo a rapporto di resistenze (R_1 , R_2); in serie al ramo di rivelazione è aggiunta una ddp provocata dall'accoppiamento mutuo di due bobine L_s e L_p , la seconda delle quali costituisce con C_p un circuito risonante serie.

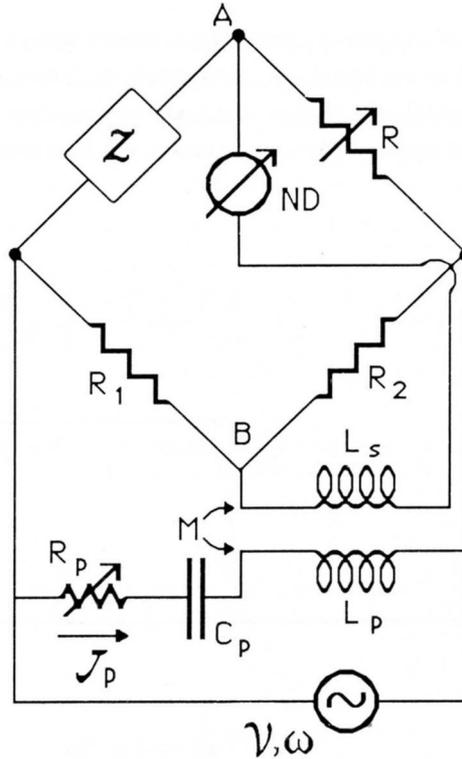


Fig.XIII.17

L'azzeramento del ponte si effettua nel seguente modo: innanzitutto, alla pulsazione di lavoro ω , si aggiusta preventivamente C_p in modo da ottenere la condizione di risonanza sul circuito risonante serie costituito da R_p, L_p e C_p . In queste condizioni la corrente \mathcal{J}_p è uguale a $\frac{\mathcal{V}}{R_p}$. Quindi si procede all'azzeramento del ponte agendo su R e su R_p . Supponiamo di aver raggiunto l'equilibrio. In queste condizioni, la ddp nulla ai capi del rivelatore di zero potrà esprimersi come:

$$0 = \mathcal{V} \left(\frac{R}{R + |\mathcal{Z}| \exp j\phi} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) + j\omega M \frac{\mathcal{V}}{R_p} \quad (\text{XIII.41})$$

dove ϕ rappresenta la fase di \mathcal{Z} . Supponiamo che $R_1 = R_2$ con una indeterminazione molto minore rispetto alle altre. La (41) dà pertanto luogo alla:

$$\frac{R(R + |\mathcal{Z}| \cos \phi - j|\mathcal{Z}| \sin \phi)}{(R + |\mathcal{Z}| \cos \phi)^2 + |\mathcal{Z}|^2 \sin^2 \phi} - \frac{1}{2} + j\omega \frac{M}{R_p} = 0 \quad (\text{XIII.42})$$

Otteniamo così il sistema:

$$\begin{cases} \frac{R^2 + R|\mathcal{Z}| \cos \phi}{R^2 + |\mathcal{Z}|^2 + 2R|\mathcal{Z}| \cos \phi} = \frac{1}{2} \\ \frac{|\mathcal{Z}|R \sin \phi}{R^2 + |\mathcal{Z}|^2 + 2R|\mathcal{Z}| \cos \phi} = \frac{\omega M}{R_p} \end{cases} \quad (\text{XIII.43})$$

Dalla prima delle (43) si ottiene direttamente:

$$|\mathcal{Z}| = R \quad (\text{XIII.44})$$

che sostituita nella seconda dà:

$$\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} = \frac{\omega M}{R_p} \quad (\text{XIII.45})$$

Ricordando che:

$$\frac{\text{sen } \phi}{1 + \cos \phi} = \tan \frac{\phi}{2} \quad (\text{XIII.46})$$

si ottiene:

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{2\omega M}{R_p} \quad (\text{XIII.47})$$

All'equilibrio, in base ai valori di R , R_p , ω e M , si determina pertanto ampiezza e fase dell'impedenza. Se non si ottiene l'azzeramento in una certa configurazione di L_p e L_s , significa che la fase è di segno sbagliato per cui occorre invertire una delle due bobine L_p o L_s . Il circuito è detto *misuratore vettoriale di impedenza*, in quanto consente di misurare, quasi direttamente, modulo e fase dell'impedenza; se il rapporto $\frac{R_1}{R_2}$ non è noto con precisione sufficientemente buona da considerarsi esatto, occorrerà svolgere i conti in funzione di R_1 e R_2 (o del loro rapporto) e ricercare le espressioni di $|\mathcal{Z}|$ e ϕ in funzione di tutte le grandezze determinate con precisione finita, per propagare poi correttamente gli errori.

9.— Misure di coefficienti di mutua induzione in alternata

Nel Cap.VII abbiamo imparato a misurare il coefficiente di mutua induzione fra due circuiti eccitando il sistema con impulsi di corrente. Ora mostriamo come si può misurare la stessa grandezza nel regime sinusoidale delle correnti.

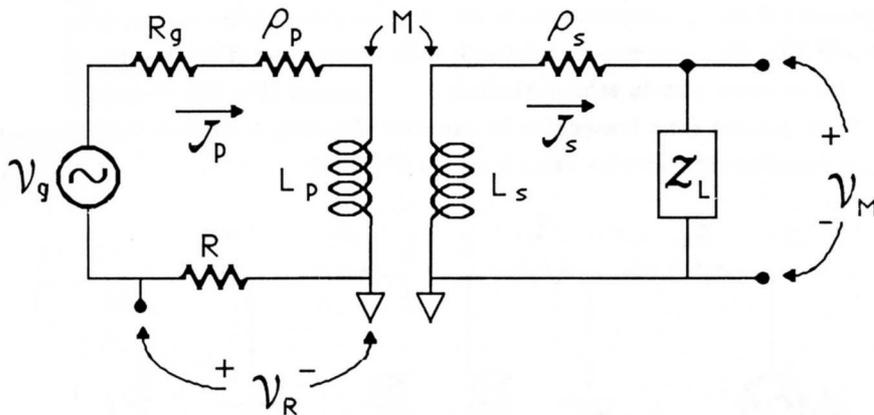


Fig.XIII.18

Nel circuito disegnato in Fig.18 le ddp \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R possono essere misurate con un oscillografo e se l'impedenza di ingresso dell' amplificatore verticale dell'oscillografo \mathcal{Z}_L è molto maggiore di $|\rho_s + j\omega L_s|$ e di R , allora possiamo scrivere con buona approssimazione:

$$\mathcal{V}_M = \mathcal{J}_s \mathcal{Z}_L = -j\omega M \mathcal{J}_p \quad (\text{XIII.48})$$

Inoltre

$$\mathcal{J}_p = \frac{\mathcal{V}_R}{R} \quad (\text{XIII.49})$$

e quindi

$$\mathcal{V}_M = -j\omega \frac{M}{R} \mathcal{V}_R \quad (\text{XIII.50})$$

Misurate le ampiezze di \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R , note R e ω , M è presto determinato come

$$|M| = \frac{V_{M0}}{V_{R0}} \frac{R}{\omega} \quad (\text{XIII.51})$$

dove V_{M0} e V_{R0} rappresentano le ampiezze delle ddp misurate. La formula (50) che lega \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R si presta ad essere verificata anche per quanto riguarda la fase: se ad esempio \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R sono inviati su due canali distinti di uno stesso oscillografo a doppia traccia, usando uno dei due segnali come trigger (o triggerando con \mathcal{V}_g) si dovrà verificare che i due segnali sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$. In linea di principio questo sistema si presta a misurare M a varie frequenze, sempre che \mathcal{V}_g sia un generatore a frequenza variabile.

Guardiamo ora un po' più da vicino le approssimazioni fatte: intanto abbiamo assunto che tutta la caduta sul secondario fosse data da $j\omega M \mathcal{J}_p$, trascurando la parte di autoinduttanza e resistiva $(j\omega L_s + \rho_s) \mathcal{J}_s$; se i valori di ρ_s , e ωL_s sono tali da non poter essere trascurati rispetto a Z_L (tipicamente $1 M\Omega$ in parallelo a circa $20 pF$) occorre scrivere:

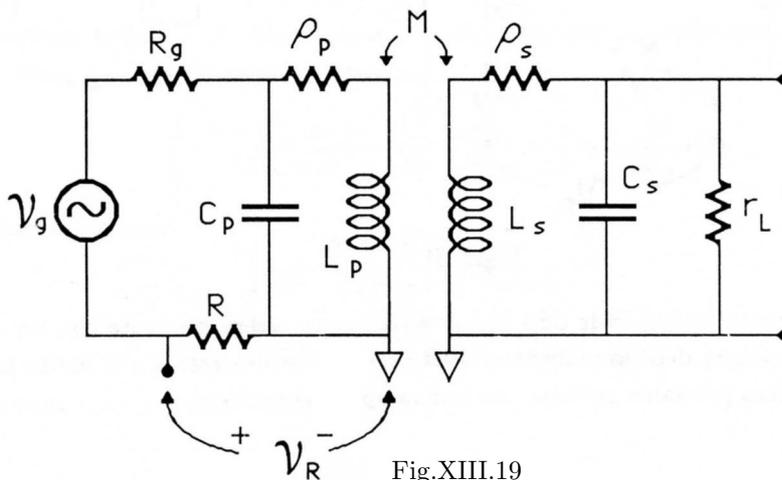
$$0 = \mathcal{J}_s(\rho_s + j\omega L_s + Z_L) + j\omega M \mathcal{J}_p \quad (\text{XIII.52})$$

Pertanto ($\mathcal{V}_M = \mathcal{J}_s Z_L$):

$$\mathcal{V}_M = -j\omega M \mathcal{J}_p \frac{Z_L}{\rho_s + j\omega L_s + Z_L} \approx -j\omega M \mathcal{J}_p \left(1 - \frac{\rho_s + j\omega L_s}{Z_L}\right) \quad (\text{XIII.53})$$

e in questo modo è almeno possibile dare una valutazione della correzione da apportare a \mathcal{V}_M per risalire a M tramite la (50).

Se poi in parallelo a Z_L si pone una resistenza r_L nota, questa volta piccola rispetto a Z_L , possiamo studiare il comportamento del nostro trasformatore sotto carico, magari a varie frequenze (si veda Cap.IX,§6). Non entriamo nei dettagli della misura, ma ci limitiamo a dire che all'aumentare della frequenza si trova che la schematizzazione adoperata (Fig.18) diventa via via sempre meno soddisfacente in quanto sono trascurate le capacità distribuite degli avvolgimenti; un circuito che molto meglio rappresenta la realtà fisica è quello di Fig.19.



Consideriamo il primario: i valori di C_p sono sufficientemente bassi che per frequenze non elevate (per esempio in un trasformatore di rete, a $50 Hz$) il condensatore può essere tranquillamente

trascurato. All'aumentare però di ω ci si avvicina sempre di più alla condizione in cui il primario si comporta come un circuito risonante parallelo: l'impedenza ad esso associata aumenta e conseguentemente diminuisce la potenza erogata dal generatore. Una analisi dettagliata del fenomeno sarebbe un po' complicata ed è omessa; tuttavia, qualitativamente, quando si supera la pulsazione di risonanza ω_p del primario (per un trasformatore da 50 Hz: $\omega_p \approx 10^4 - 10^5 \text{ rad/s}$), l'impedenza del primario è dominata dalla capacità; solo una piccola frazione della corrente erogata dal generatore percorre la bobina e poiché è solo questa quella che contribuisce alla ddp sul secondario tramite l'accoppiamento induttivo, l'efficienza del trasformatore risulta severamente compromessa.

NOTA BIBLIOGRAFICA

I primi due paragrafi del Cap.3 di **TE 57** trattano l'argomento dei circuiti risonanti serie e parallelo, con riferimento anche alla curva universale di risonanza.

Per i problemi generali della risonanza meccanica ed elettrica, una stimolante trattazione si può trovare su **FE 63** (Vol.I, Cap.23).

I MULTIMETRI ELETTRONICI

1.— Strumenti elettronici e presentazione digitale

La *strumentazione* (voltmetri, amperometri, ohmetri) *elettronica* presenta generalmente caratteristiche superiori rispetto alla strumentazione basata su galvanometri sia dal punto di vista della precisione raggiungibile, che della sensibilità. A causa delle elevate precisioni raggiungibili occorre adeguare le caratteristiche del sistema di lettura per evitare che l'errore associato ad una *presentazione analogica* (ad ago) comprometta la precisione intrinseca della misura; è questo il motivo principale per cui la strumentazione elettronica in genere è accompagnata ad una *presentazione digitale* o *numerica* del risultato della misura effettuata, oltre che per la maggior robustezza e durata di questa sistema di presentazione (in inglese: *display*) rispetto ad un movimento ad ago. Le cifre del display saranno in numero adeguato alla precisione dello strumento, nel senso che tanto più lo strumento è accurato, tanto maggiore sarà il numero delle cifre, proprio come la scala di uno strumento analogico di Classe 0.2 deve essere assai più grande e finemente divisa rispetto a quella di uno strumento di Classe 1.

Il fatto che la presentazione del risultato sia digitale, non vuol dire che essa non soffra di un errore ad essa intrinsecamente associato, simile a quello di lettura negli strumenti ad ago: questo errore è il cosiddetto *errore di quantizzazione* e dipende dal fatto che la cifra meno significativa presentata è necessariamente approssimata o per difetto o per eccesso. Pertanto un errore almeno pari a ± 0.5 sulla cifra meno significativa va sempre considerato. Questo errore è il corrispondente dell'errore di lettura, solo che in questo caso esso non dipende dall'operatore, ma dal tipo di presentazione digitale effettuata dallo strumento. Su questo torneremo quando parleremo degli errori di misura.

Spesso quando si parla di strumentazione digitale si dice: “un voltmetro da 4 cifre e mezzo”, o locuzioni simili. Queste espressioni, per la verità gergali, si riferiscono al tipo di presentazione numerica: nel caso di “4 cifre e mezzo” significa che il display può presentare numeri compresi fra +19999 e -19999 nelle opportune unità, cioè al massimo cinque cifre significative con la cifra più significativa sempre minore di 2. In uno strumento progettato razionalmente, il numero di cifre del display è adeguato alla precisione di base dello strumento, ad esempio uno strumento da $4\frac{1}{2}$ cifre avrà presumibilmente una precisione intrinseca decisamente migliore del per mille e uno strumento di $3\frac{1}{2}$ cifre avrà una precisione nettamente superiore al percento.

Esistono nuove generazioni di strumenti digitali che stanno imponendo un nuovo standard di presentazione secondo il quale “4 cifre e mezzo” significa 29999 anziché 19999.

I prossimi paragrafi saranno dedicati ai multimetri o strumenti universali elettronici; essi hanno -per quanto detto sopra- sempre una presentazione digitale e quindi nel seguito li indicheremo indifferentemente con il termine “multimetri elettronici” o “multimetri digitali”.

2.— Schema a blocchi di un multimetro digitale

Così come un multimetro analogico del tipo descritto nel §9 del Cap.III riconduce tutte le misure (tensione, corrente, resistenza) a misure di corrente effettuate dal galvanometro interno, un multimetro elettronico fa sì che la misura di correnti e resistenze (e ovviamente di tensioni) sia comunque ricondotta alla misura di una differenza di potenziale; il cuore del multimetro è quindi un *voltmetro*. Non si tratta ovviamente di un voltmetro convenzionale, di quelli cioè incontrati fino ad ora, ma piuttosto di uno strumento che, per quanto riguarda i terminali di ingresso, è praticamente un voltmetro ideale (resistenza di ingresso $> 10^{10} \div 10^{11} \Omega$) e per quanto riguarda l'uscita dà direttamente un codice numerico che rappresenta in un'opportuna base (generalmente *binaria*, ovvero *base 2*), il valore della differenza di potenziale all'ingresso (Fig.1). Esso è cioè quello che si chiama un *Convertitore Analogico Digitale* (CAD o ADC), in quanto converte la ddp in ingresso in un numero (*digit*).

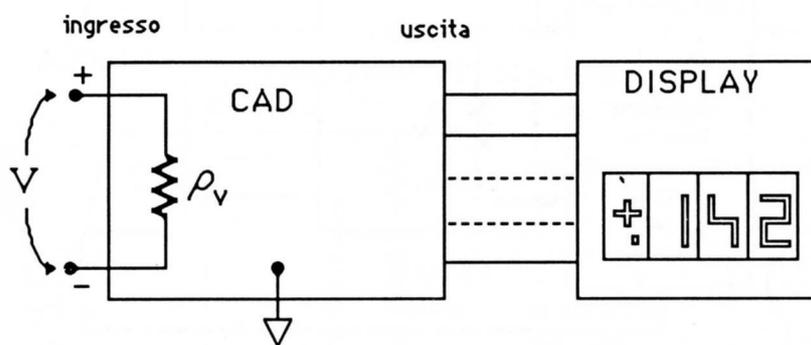


Fig.XIV.1

Abbiamo detto che l'uscita è un *codice numerico*. In realtà l'uscita è costituita da un numero N di terminali ad ognuno dei quali è associato un *bit* (supponiamo il codice binario) che simbolicamente assume valore 0 o 1 a seconda che la ddp di quel terminale rispetto ad un terminale di riferimento () sia minore o maggiore di due livelli prefissati. Per essere ancora più espliciti, in una vasta gamma di convertitori la convenzione è la seguente (logica TTL): se la ddp è maggiore di $2 V$, il corrispondente bit è considerato 1, se la ddp è minore di $0.8 V$, il bit vale 0. Ad esempio se il convertitore è a 12 bit potrà presentare in uscita qualunque numero binario compreso fra 0 e 111111111111 ($4095 = 2^{12} - 1$), trascurando il problema del segno. Per far questo necessiterà di 12 terminali di uscita, uno per ogni bit: il numero 0 è rappresentato dalla configurazione in cui tutti i bit sono 0, cioè ognuno dei 12 terminali è a tensione minore di $0.8 V$, il numero 4095 corrisponderà invece ad avere tutti e 12 i terminali a tensione maggiore di $2 V$; i terminali di uscita sono collegati elettricamente agli ingressi della *unità di display* vera e propria, la quale è a sua volta uno strumento elettronico che converte i numeri binari in ingresso in un altro codice interno, che alla fine dà luogo all'intensificazione delle cifre del visore corrispondenti alla rappresentazione decimale del numero binario in ingresso. Sui principi di funzionamento del display non entreremo minimamente, così come non esamineremo neppure il problema del tipo di presentazione (a LED, a cristalli liquidi, a cifre fluorescenti...); viceversa esamineremo assai più da vicino qualche caso di convertitore analogico digitale, ma lo faremo più avanti (Cap.XVI) dopo aver studiato il principio di funzionamento degli amplificatori operazionali (Cap.XV).

Ritornando al CAD abbiamo detto che esso è in pratica un voltmetro ideale in quanto la sua resistenza di ingresso è estremamente elevata; inoltre il CAD misura in valore e segno la ddp fra l'ingresso “+” e l'ingresso “-”, ovvero la ddp è considerata positiva se $V_+ - V_- > 0$. La ddp, per un corretto funzionamento del CAD, deve essere compresa fra due valori ben definiti, generalmente $\pm 200 \text{ mV}$. Il CAD è tarato su questa ddp di fondo scala, nel senso che il suo codice numerico di uscita, supposto il sistema esente da errori, rappresenterà in *binario* il numero 1999 quando la ddp è uguale a 199.9 mV (il numero dei nove dipende dal numero dei bit del convertitore e del display associato).

Tutta la circuiteria compresa fra i terminali di ingresso del multimetro e il CAD vero e proprio ha quindi la funzione di trasformare le cadute sulle resistenze, le correnti in ingresso e le differenze di potenziale in una ddp all'ingresso del convertitore compresa fra -200 mV e $+200 \text{ mV}$. La funzione complessiva svolta da questa parte dello strumento è detta di *Condizionatore di segnale* (in inglese: *Signal Conditioner*). Lo schema a blocchi di un multimetro elettronico tipico è riportato nella Fig.2:

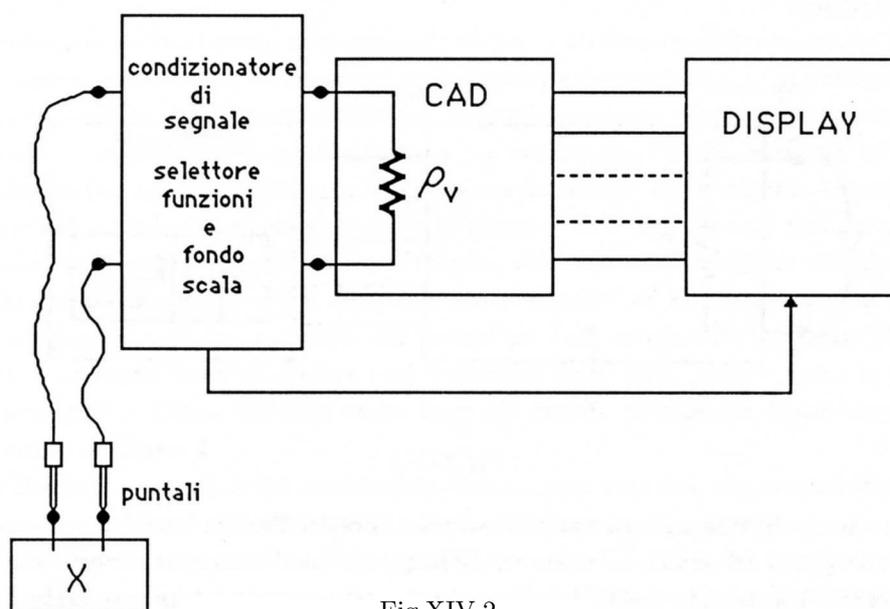


Fig.XIV.2

Il Condizionatore di segnale contiene la selezione della funzione e del fondo scala: cioè deve ricevere dall'utente l'informazione sulla grandezza che egli vuole misurare (V , A , Ω) e sul valore da assegnare al fondo scala; nella figura il collegamento fra il condizionatore di segnale e il display rappresenta simbolicamente il fatto che la selezione della funzione e del fondo scala attiva nel display la corretta posizione del punto decimale ed eventualmente, in alcuni modelli, anche la comparsa della unità della grandezza che si misura.

Andiamo a descrivere un tipico esempio di Condizionatore di segnale, tenendo comunque presente che in alcuni modelli di multimetri sono adottate soluzioni diverse da quelle qui presentate.

3.— *Il condizionatore di segnale*

Lo strumento possiede tre morsetti di ingresso (Fig.3), uno essendo il cosiddetto *comune* (*Com-*

mon) che viene impiegato in tutte le configurazioni; degli altri due uno è impiegato per le misure di ddp e di resistenze, mentre l'altro per le misure di corrente.

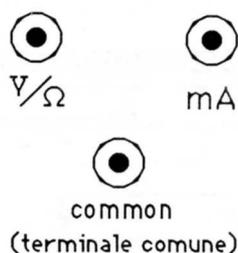


Fig.XIV.3

Consideriamo le misure di ddp (continue) (Fig.4): il *selettore della funzione V DC* (ddp continua), tramite un commutatore sul pannello frontale, collega all'ingresso del CAD l'uscita del partitore di tensione;

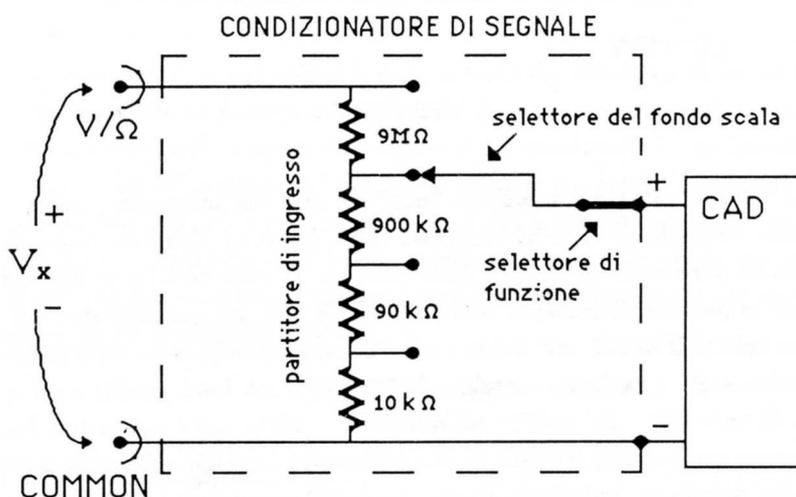


Fig.XIV.4

esso è costituito da una serie di resistenze del valore totale di $10 M\Omega$ e divise come in figura: il *selettore di fondo scala* inserisce l'ingresso del CAD all'opportuno contatto intermedio del partitore; in figura i rapporti di divisione sono 1, 1/10, 1/100, 1/1000 che corrispondono ai fondo scala di $200 mV$, $2 V$, $20 V$, $200 V$ rispettivamente. Poiché l'ingresso del CAD presenta una resistenza superiore a $10^{10}\Omega$, i rapporti sono determinati unicamente dal partitore. Si vede così che, indipendentemente dal fondo scala selezionato per la tensione, la resistenza presentata verso il circuito di misura è sempre pari a $10 M\Omega$. Quindi nel caso di un multimetro elettronico perde di significato il concetto di Ω/V che è utile soltanto quando la misura di ddp è ricondotta ad una misura di corrente, come nel caso del voltmetro basato su un galvanometro.

Al giorno d'oggi i multimetri di più alta qualità sono realizzati in modo diverso da quello appena descritto e tali che per le portate (fondo scala) inferiori in valore assoluto a $2 V$ la resistenza di ingresso è quella del CAD, cioè $\approx 10^{11} \Omega$ e il partitore da $10 M\Omega$ in ingresso entra in funzione solo per fondo scala più elevati; ciò implica che il CAD deve poter accettare in ingresso differenze di

potenziale ampie, in valore assoluto, fino a 2 V.

La configurazione che si presenta quando si voglia misurare una corrente è quella riportata in Fig.5.

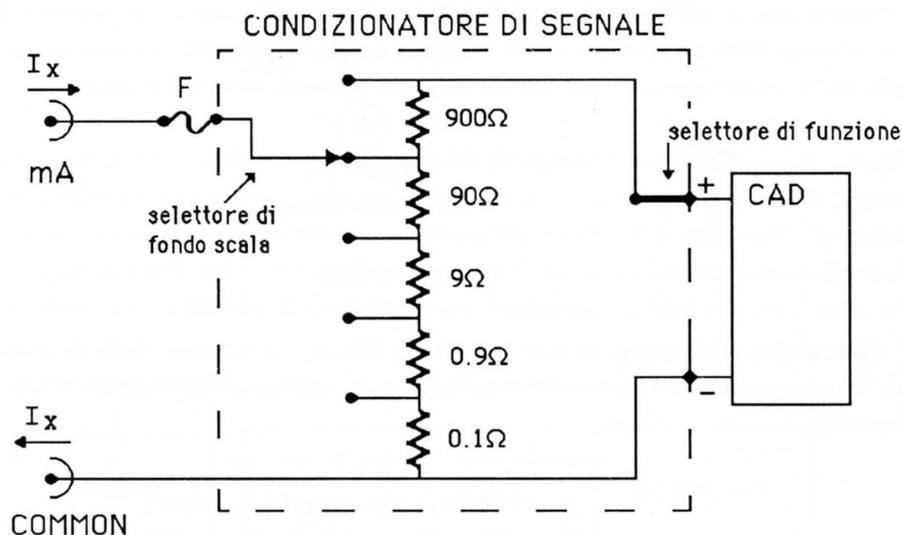


Fig.XIV.5

La corrente I_x che entra nel morsetto “mA” (e esce dal morsetto “Common”) provoca una caduta di tensione sullo shunt. Poiché l’ingresso del CAD è ad altissima resistenza, il convertitore misura la caduta di potenziale provocata dalla corrente I_x sulle resistenze dello shunt: procedendo dall’alto in basso le portate di corrente sono $200 \mu A$, $2 mA$, $20 mA$, $200 mA$ e $2 A$ corrispondenti tutte alla caduta sul CAD di $200 mV$ fondo scala. La resistenza in serie all’ingresso pertanto cambia a seconda del fondo scala e va da un massimo di $1 k\Omega$ ($200 \mu A$ fondo scala) a un minimo di 0.1Ω ($2 A$ fondo scala). Si vede così che, mentre un multimetro usato come voltmetro, ha una resistenza di ingresso molto superiore rispetto a quella di uno strumento analogico con uguale fondo scala e quindi approssima molto meglio un voltmetro ideale, un milliamperometro realizzato come ora descritto non è molto superiore ad un galvanometro, cioè non ha resistenza interna particolarmente piccola. Questo tuttavia non è un limite intrinseco degli strumenti elettronici: infatti esistono (Cap.XV,§5) dei misuratori elettronici di corrente pressoché ideali, cioè con resistenza interna estremamente piccola; essi presentano però alcuni problemi aggiuntivi rispetto alla soluzione ora descritta che è quella quasi universalmente adottata nei multimetri portatili alimentati con batterie.

Dall’osservazione del circuito di Fig.5 potremmo ragionevolmente ritenere che la resistenza interna dello strumento impiegato come amperometro fosse perfettamente definita; in realtà la presenza del fusibile F complica un po’ questo aspetto. Il fusibile nient’altro è che un conduttore particolarmente sottile e dimensionato in modo tale che se la corrente in ingresso supera il valore di corrente per cui il fusibile è stato costruito, esso si scalda al punto di fondere e interrompe il circuito: questa sicurezza, fondamentale per proteggere il CAD, comporta che la resistenza in ingresso non è determinata solo dalle resistenze di shunt che sono di alta precisione, ma anche dalla resistenza del fusibile nonché dalla resistenza di contatto fra il circuito e il fusibile. Il costruttore pertanto non indica la resistenza interna complessiva fra i terminali, bensì dice quale è la massima ddp (*burden voltage*) che possiamo trovare ai capi dei morsetti “mA” e “Common”; tipicamente essa è inferiore a $300 mV$ per il valore di corrente di fondo scala. E’ chiaro che una informazione di questo tipo è spesso insufficiente;

in quei casi ove occorre conoscere con precisione la resistenza interna del multimetro usato come amperometro, occorrerà misurare la ddp ai suoi capi con un altro strumento.

Descriviamo ora come viene comunemente realizzata la misura di resistenze (Fig.6).

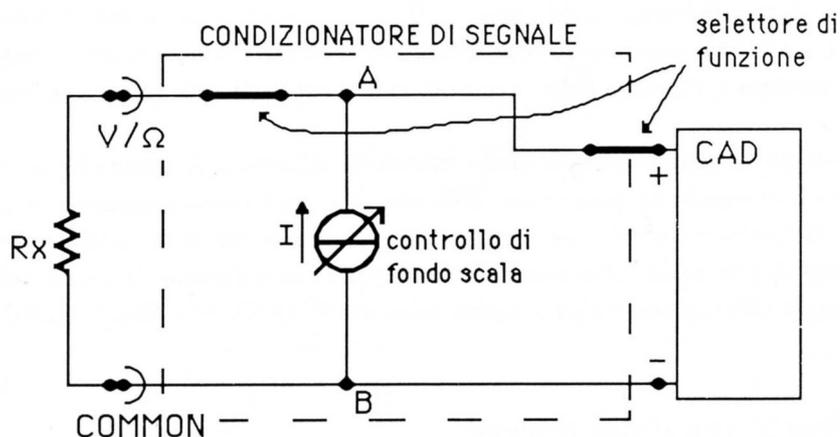


Fig.XIV.6

Un generatore di corrente I , il cui valore è determinato dal selettore di fondo scala, provoca sulla resistenza R_x da misurare la caduta di potenziale $R_x \cdot I$ e questa è misurata dal CAD. La selezione del fondo scala modifica il valore della corrente I del generatore, in modo tale da assicurare una ddp massima di 200 mV all'ingresso del CAD; ciò impone un grosso campo di variabilità per il generatore di corrente (da $100\text{ }\mu\text{A}$ per il fondo scala $2\text{ k}\Omega$ a 10 nA per il fondo scala $20\text{ M}\Omega$); ciò non è sempre fattibile, soprattutto se si vuole mantenere elevata la precisione nella misura di grosse resistenze. Il metodo ora descritto è pertanto applicato principalmente nei casi in cui il CAD accetta ddp in ingresso anche superiori a 200 mV .

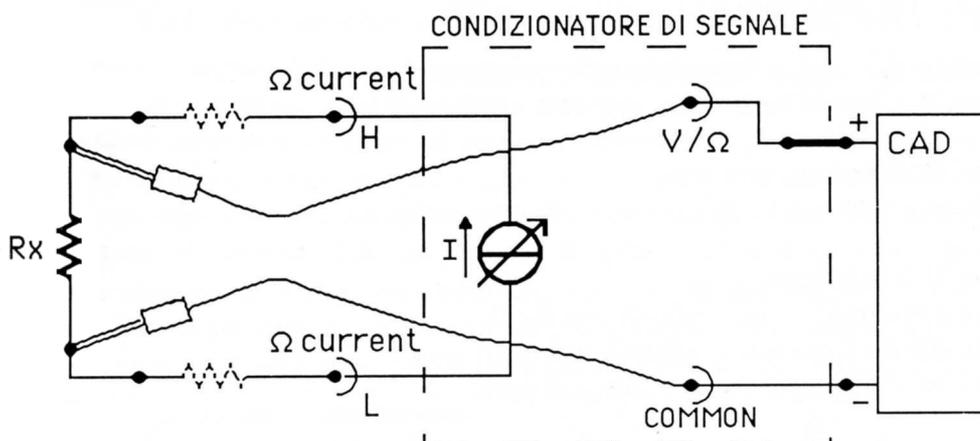


Fig.XIV.7

Vedremo più avanti (Cap.XV,§5) un altro sistema di misura di resistenze, anche più diffuso di quello ora descritto. Tornando a quest'ultimo, ma l'osservazione vale in generale, notiamo che in realtà la grandezza misurata non è la caduta di I sulla sola R_x , ma anche sulla resistenza dei collegamenti. Questo errore sistematico è particolarmente importante quando la resistenza da misurare è di piccolo valore. Per ovviare a questo problema alcuni multimetri prevedono la *misura a 4*

terminali: lo schema con cui si realizza è simile a quello ora descritto, salvo una differenza sostanziale (Fig.7): il generatore di corrente questa volta utilizza due morsetti indipendenti (*morsetti di corrente*) per addurre la corrente sulla resistenza R_x e la ddp ai capi di R_x è misurata con altri due puntali (*puntali di tensione*) collegati direttamente al misuratore di ddp. Questa volta con i puntali di tensione si va a misurare la ddp proprio là dove interessa e la caduta aggiuntiva provocata dalla corrente I sui collegamenti viene completamente ignorata. Si noti la sostanziale identità di questo tipo di procedura e di quella della misura di resistenze di piccolo valore con terminali di corrente e di tensione.

Un multimetro in genere prevede anche misure di differenza di potenziale e di correnti alternate. Rimandiamo al seguito la descrizione -che comunque sarà molto sommaria- di questi metodi di misura; qui ci limitiamo a dire che tramite una operazione detta di *raddrizzamento o rettificazione* le differenze di potenziale alternate sono trasformate in differenze di potenziale continue di valore proporzionale all'ampiezza e così vengono misurate (Cap.XV,§8 e Cap.XVII,§8).

4.- Precisione delle misure

La precisione di un multimetro elettronico digitale è sempre data dal costruttore come somma di due termini, uno *costante su tutta la scala* e uno proporzionale alla grandezza misurata, cioè un *errore relativo costante*. Quest'ultimo contributo è associato agli errori di taratura del divisore di tensione in ingresso, dello shunt di corrente o del generatore di corrente. Gli errori relativi su queste grandezze si ripercuotono inalterati sulle grandezze da misurare, tensione, corrente e resistenza.

Il contributo costante di errore è comunemente espresso in unità dell'ultima cifra significativa: per esempio "2 *digit*" significa due unità della cifra meno significativa.

Per un multimetro a $4\frac{1}{2}$ cifre di buona qualità (Fluke 8050A) gli errori, a seconda delle varie funzioni, valgono (per T compresa entro $\pm 10^\circ C$ attorno a $20^\circ C$):

Misure di differenza di potenziale continua:

da 200 mV a 1000 V fondo scala: $\pm(0.03\% + 2 \text{ digit})$

Misure di corrente continua:

da 200 μA a 2000 mA fondo scala: $\pm(0.3\% + 2 \text{ digit})$

Misure di resistenza:

200 Ω e 2 k Ω fondo scala: $\pm(0.1\% + 2 \text{ digit})$

20 k Ω e 200 k Ω fondo scala: $\pm(0.05\% + 2 \text{ digit})$

2 M Ω e 20 M Ω fondo scala: $\pm(0.25\% + 3 \text{ digit})$

All'errore assoluto costante contribuisce l'errore di quantizzazione del convertitore almeno con $\pm \frac{1}{2}$ digit; la restante parte ha origini diverse e fra queste hanno senz'altro rilevanza la *tensione di offset* dell'amplificatore di ingresso del CAD e il suo *rumore*; sul significato di questi due contributi torneremo quando si parlerà dei circuiti amplificatori operazionali (Cap.XV,§6); inoltre a questo errore contribuisce il CAD con il suo errore di *linearità* (dovuto cioè alla sua *non* perfetta linearità). Soffermiamoci proprio su quest'ultimo punto: supponendo che il CAD lavori con un sistema binario in uscita e che, per semplicità, sia a 4 bit, possiamo rappresentare la funzione espletata dal convertitore riportando in grafico l'uscita (un numero binario) in funzione dell'ampiezza (relativa al fondo scala)

della ddp in ingresso, ovvero la *curva di risposta del convertitore*. Il grafico (Fig.8) si riferisce ad un caso di convertitore ideale.

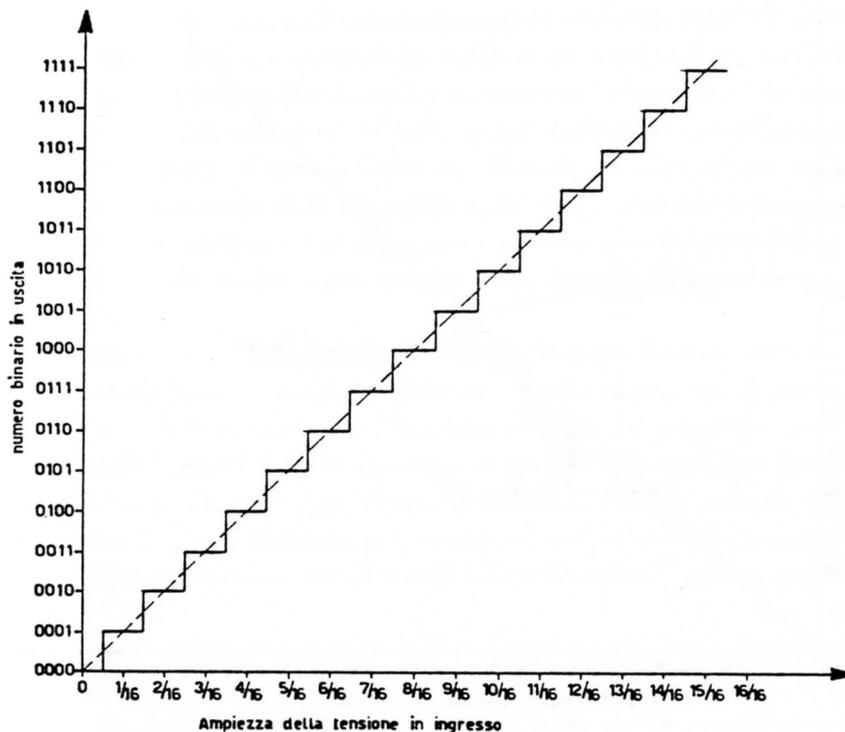


Fig.XIV.8

Il bit meno significativo, quello che corrisponde ad una unità è in genere abbreviato come LSB (in inglese: *Least Significant Bit*). Dalla figura è chiaro che in questo caso ideale, l'errore di quantizzazione di $\pm \frac{1}{2}$ LSB è associato al fatto che se l'uscita è ad esempio 0011 (=3 decimale) in realtà la tensione in ingresso può essere qualunque valore compreso fra $\frac{2.5}{16}$ e $\frac{3.5}{16}$ del fondo scala.

Quanto all'errore di linearità del convertitore si possono individuare un errore di *linearità "tout court"* o *linearità integrale* e un errore di *linearità differenziale*. L'errore di linearità integrale è associato al fatto che una retta passante per gli estremi della curva di risposta reale non passa per i punti di mezzo degli intervalli corrispondenti ad un certo codice numerico di uscita: l'errore di linearità integrale, che ricorda molto da vicino la *linearità assoluta* di un potenziometro, è dato dalla distanza massima fra le due curve, misurata lungo uno dei due assi; la linearità è data o in percentuale o in parti per milione (*ppm*) del valore di fondo scala o direttamente in LSB; nella Fig.9 l'errore di linearità integrale è circa $\frac{1}{2}$ LSB ovvero circa il 3%. In altri termini il codice 0110 (= 6 decimale) non corrisponde, come dovrebbe, a $\frac{(6 \pm 0.5)}{16}$, bensì a $\frac{(6.5 \pm 0.5)}{16}$ del valore di fondo scala. Quando il costruttore dice: linearità integrale (altrimenti detta *relative accuracy*) di $\pm \frac{1}{2}$ LSB, dobbiamo considerare questo errore costante su tutta la scala, perché, a meno che non lo misuriamo, non è conosciuto l'andamento dettagliato della curva di risposta.

L'errore di linearità differenziale non riguarda la massima deviazione entro tutto il campo, cioè l'andamento generale, ma si riferisce alla differenza nella larghezza degli intervalli di codici adiacenti. Guardiamo ciò su un altro esempio (Fig.10): il codice 0011 (= 3 decimale) corrisponde ad un intervallo più largo di $\frac{1}{2}$ LSB rispetto alla larghezza teorica di 1 LSB, il codice 110 (= 6 decimale) ha una larghezza di 2 LSB anziché 1 e il codice 1000 (= 8 decimale) ha addirittura larghezza 0. La

linearità differenziale del nostro CAD sarebbe, prendendo i valori massimi, ± 1 LSB.

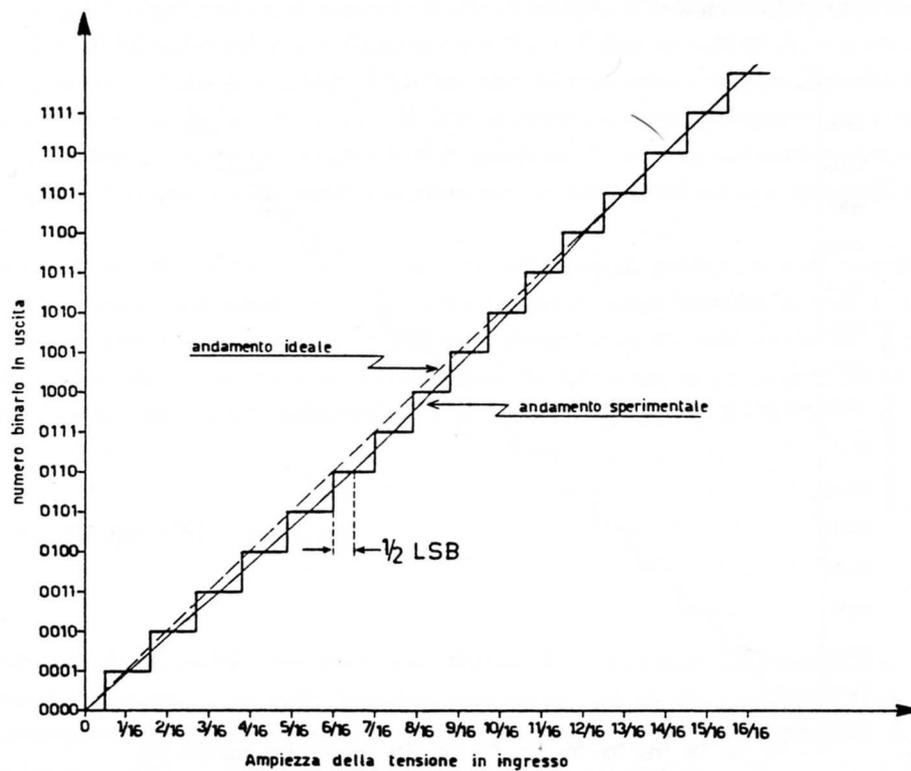


Fig. XIV.9

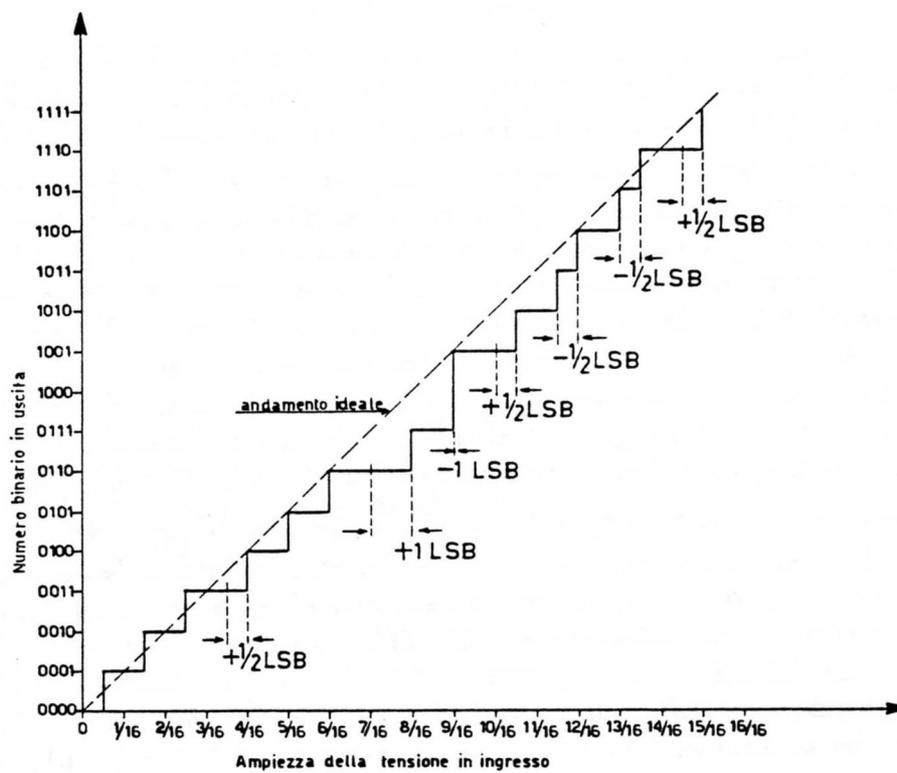


Fig. XIV.10

Alla linearità differenziale è associato un tipico effetto sistematico: precisamente, un errore di linearità differenziale superiore a $|1 \text{ LSB}|$ può portare a codici numerici mancanti. Nel nostro esempio infatti il numero binario 1000 non potrà mai essere presente in uscita, perché valori di tensione in ingresso compresi fra $8/16$ e $9/16$ del fondo scala saranno convertiti come 111 e quelli compresi fra $9/16$ e $10/16$ come 1001. Finché la linearità differenziale si mantiene al di sotto di $\pm 1 \text{ LSB}$, allora non esiste il problema dei codici mancanti e spesso il costruttore si limita a dire “niente codici mancanti” anziché errore di linearità differenziale $< \pm 1 \text{ LSB}$. Alcuni costruttori quantificano le caratteristiche di linearità differenziale dando il numero di bit significativi; per esempio per un convertitore a 12 bit dare una linearità differenziale di 12 bit significa che non ci sono codici mancanti.

Nei convertitori usati nei multimetri digitali l'errore è generalmente descritto dal costruttore nei soli termini di linearità integrale poiché quello associato alla linearità differenziale non dà mai luogo a mancanza di codici*.

Concludendo possiamo dire che in un multimetro digitale, la parte di errore costante espressa in digit (indipendentemente dalla funzione selezionata) è tutta dovuta al processo di conversione analogico-digitale; non a caso nella tabella degli errori riportata all'inizio del paragrafo, questo errore è praticamente sempre lo stesso (infatti il CAD converte sempre una ddp compresa fra 0 e 200 mV).

Quando col multimetro si misurano ddp o correnti alternate, l'errore costante aumenta anche notevolmente: il motivo di ciò va ricercato principalmente nel fatto che la necessaria operazione di rettificazione introduce un ulteriore contributo di indeterminazione, assente nel caso di misura di grandezze continue.

Come osservazione finale sulle indeterminazioni dichiarate dal costruttore, occorre precisare che esse sono garantite generalmente entro un anno dalla calibrazione dello strumento, dopo di che lo strumento dovrebbe essere nuovamente tarato. Di fatto si trova che le precisioni si mantengono per periodi di tempo anche superiori, purché lo strumento sia trattato con cura, ad esempio non sia sottoposto a sollecitazioni termiche e meccaniche.

5.— *Misure con multimetri digitali*

Oltre al naturale utilizzo in tutte le misure dove trova impiego uno strumento analogico, i multimetri digitali si prestano a compiere misure che con strumentazione analogica sarebbero o difficilmente realizzabili o notevolmente più complesse: per esempio, la possibilità di misurare con resistenza di ingresso elevata piccole differenze di potenziale, consente le misure della resistenza interna e della costante reometrica di un galvanometro descritte nel Cap.VI,§12.

Come altro esempio dell'utilità di disporre di un voltmetro che possiede una resistenza di ingresso elevata e nota (generalmente $10 \text{ M}\Omega$), consideriamo la misura di una capacità di qualche μF usando la resistenza interna dello strumento come resistenza di scarica (Fig.11).

* In alcuni particolari convertitori di precisione (*non* impiegati nei multimetri) la linearità differenziale è data come variazione percentuale rispetto al valore medio del LSB: ad esempio una linearità differenziale dello 0.3% significa che la massima differenza percentuale fra la larghezza di due intervalli corrispondenti a codici numerici successivi è al più dello 0.3% della larghezza media dell'intervallo.

In alcune applicazioni anche questa -per altro ottima- linearità differenziale pur non dando luogo a codici mancanti ($\ll 1 \text{ LSB}$), può creare ugualmente effetti sistematici indesiderati.

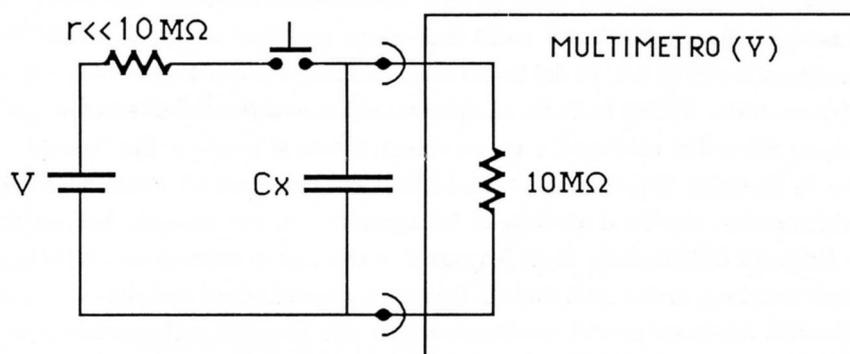


Fig.XIV.11

Si può infatti osservare l'andamento in funzione del tempo della tensione misurata, quando si scarica il condensatore lasciato chiuso sulla resistenza di ingresso del multimetro e ricavare C_x col metodo illustrato nel caso del galvanometro balistico. Questa misura si presta a mettere in evidenza oltre ai pregi di questi strumenti anche un problema insito nelle misurazioni fatte con multimetri digitali: osservando il display durante la misura si nota che la lettura della tensione non viene fatta continuamente, bensì è aggiornata a tempi regolari.

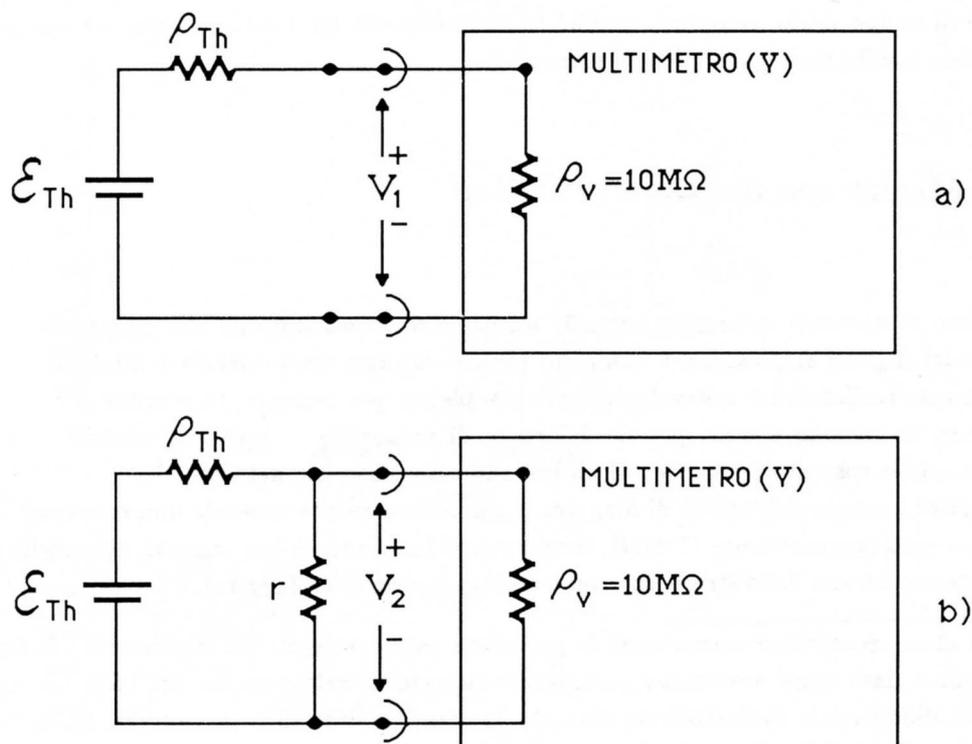


Fig.XIV.12

Ciò è dovuto al fatto che il CAD impiega un tempo finito (*tempo di conversione*) a trasformare l'informazione analogica in ingresso in un numero da presentare al display. Questo tempo varia da multimetro a multimetro e dipende dal particolare CAD impiegato; come ordine di grandezza il tempo di conversione vale $(0.1 \div 0.5)s$ e in linea di principio è tanto più grande quanto più lo strumento è preciso. Nella misura della scarica del condensatore ciò può determinare un'incertezza finita nella misura, maggiore forse della indeterminazione associata alla misura di intervallo di tempo (per rimediare si potrebbe sincronizzare la misura di intervallo di tempo di scarica con l'aggiornamento del numero del multimetro).

Il valore assai elevato della resistenza di ingresso ρ_V consente anche di misurare con buona precisione \mathcal{E}_{Th} e ρ_{Th} di generatori di Thévenin caratterizzati da valori di ρ_{Th} dell'ordine dei $M\Omega$ e più. Ciò si può fare in vari modi, il più semplice dei quali è quello di compiere in successione le misure riportate nelle Figg.12a e 12b. Avremo allora

$$V_1 = \mathcal{E}_{Th} \cdot \frac{\rho_V}{\rho_V + \rho_{Th}} \quad (\text{XIV.1})$$

e

$$V_2 = \mathcal{E}_{Th} \cdot \frac{\rho_V \parallel r}{\rho_{Th} + \rho_V \parallel r} \quad (\text{XIV.2})$$

e dalle due relazioni ricavare \mathcal{E}_{Th} e ρ_{Th} in funzione di V_1 , V_2 , r e ρ_V .

Quanto alle misure di corrente, abbiamo già detto che non esiste un sostanziale miglioramento rispetto all'impiego dei galvanometri come nel caso della misura di ddp, almeno per quanto riguarda il valore della resistenza interna. Qualora la presenza di una resistenza aggiuntiva sul ramo dove si vuole misurare la corrente non sia di particolare disturbo e se la corrente è particolarmente piccola, si può usare il multimetro per misurare la ddp V su una resistenza campione R nota con buona precisione ed ottenere così una misura di corrente $i_x = \frac{V}{R \parallel \rho_V}$ (ρ_V resistenza interna del multimetro) con una indeterminazione paragonabile a quella di V (se $R \ll \rho_V$ e se la precisione di R è superiore a quella della misura di V). Come esempio di questo metodo si veda la misura della costante reometrica di un galvanometro (Cap.VI,§12).

Infine per quanto riguarda la misura delle resistenze, il multimetro consente determinazioni di R con precisioni confrontabili con quelle ottenibili con un ponte di Wheatstone (parliamo ad esempio del multimetro descritto nel §4). Un errore che occorre evitare nella misura a 2 terminali (che spesso è l'unica consentita dallo strumento) è la sovrastima di R_x , che si ha se non si tiene conto delle cadute ohmiche sui contatti dei puntali e sui collegamenti: questo errore è in buona parte eliminabile (Fig.13 a e b) cortocircuitando, prima di effettuare la misura, i puntali alla loro estremità e misurando la resistenza ρ_c associata ai collegamenti. Con riferimento alla Fig.13, abbiamo che il valore vero di R_x è dato da

$$R_x = R_{M1} - R_{M2} = R_{M1} - \rho_c \quad (\text{XIV.3})$$

essendo R_{M1} e R_{M2} i valori misurati con i puntali posti agli estremi della resistenza da misura e con i puntali in cortocircuito rispettivamente. Alcuni multimetri consentono di fare automaticamente questa sottrazione: si cortocircuitano cioè i terminali e si misura ρ_c ; si preme quindi un pulsante (indicato generalmente col nome "offset") che memorizza nel microprocessore interno al multimetro questo dato e lo sottrae in tutte le misure successive (evidentemente in questo multimetro i dati convertiti dal CAD non vanno direttamente al display, ma vengono esaminati ed eventualmente trattati dal microprocessore interno).

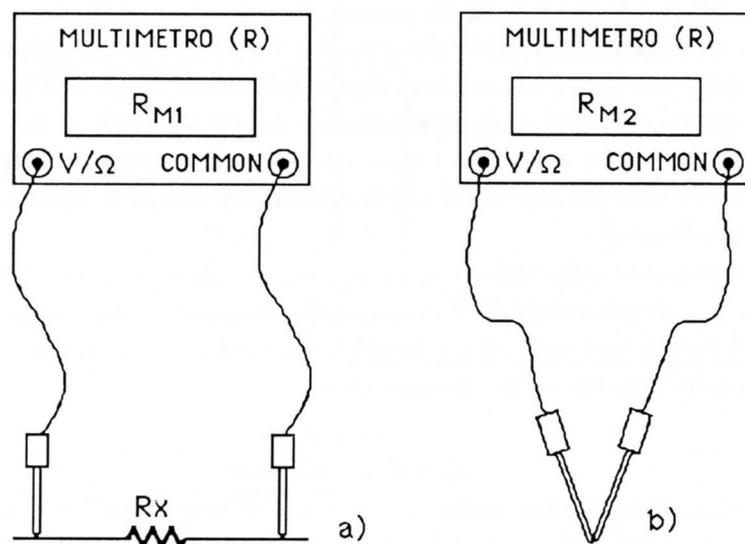


Fig.XIV.13

La versatilità dello strumento e le precisioni con esso raggiungibili fanno sì che al giorno d'oggi con un buon multimetro si possano compiere misure caratterizzate da precisioni un tempo ottenibili solo utilizzando campioni precisi con cura e attenzione; ciò nondimeno l'utilizzo dei multimetri richiede ugualmente criterio e conoscenza dei metodi di misura, perché i problemi che *comunque* si incontrano (resistenza interna nelle misure di V , burden voltage nella misura di i , resistenze dei collegamenti nelle misure di R) sono gli stessi delle corrispondenti misure fatte con strumenti analogici. Gli ordini di grandezza delle correzioni da apportare sono inferiori, ma se si vogliono sfruttare a pieno le caratteristiche di precisione della strumentazione, la cura richiesta per effettuare le misure rimane sostanzialmente la stessa.

NOTA BIBLIOGRAFICA

I manuali dei multimetri di buona qualità sono spesso una copiosa fonte di informazioni sugli argomenti trattati nel capitolo. Similmente, per la definizione delle caratteristiche e prestazioni dei Convertitori Analogico Digitali, si vedano i cataloghi delle ditte costruttrici (ad esempio il capitolo "General Information" del catalogo "Analog Devices").

Una ottima fonte di informazione per i metodi di misura di precisione, basati su strumentazione elettronica moderna, si trova su "Low Level Measurement" della Keithley Instruments Inc. (1984). **MA 78** tratta dettagliatamente il problema della messa a terra degli strumenti elettronici, la cui trattazione è completamente omessa nel testo, ma che spesso è di importanza fondamentale per effettuare misure accurate di piccole differenze di potenziale. Sulla strumentazione elettronica in generale, si può vedere **CO 83**, **CO 85**, **BE 84**.

L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

1.- Amplificatore ideale e amplificatore reale di tensione

Si definisce *amplificatore differenziale di tensione ideale* un dispositivo elettrico a quattro terminali con le seguenti caratteristiche: due terminali “+” e “-”, detti di *ingresso*, presentano fra loro una resistenza infinita e se ad essi applichiamo due ddp $v_+(t)$ e $v_-(t)$ misurate rispetto a un riferimento comune, allora gli altri due terminali, detti di *uscita*, si comportano come un generatore ideale ($R_o=0$) di fem $v_o(t)$ tale che:

$$v_o(t) = A \cdot (v_+(t) - v_-(t)) = A \cdot v_i(t) \quad (\text{XV.1})$$

con A costante e positivo; A è detto *fattore di amplificazione (o guadagno in tensione)*. La Fig.1 riporta il circuito equivalente a questo amplificatore ideale di tensione, nel caso in cui le ddp agli ingressi siano applicate mediante un unico generatore v_s posto in parallelo ad essi:

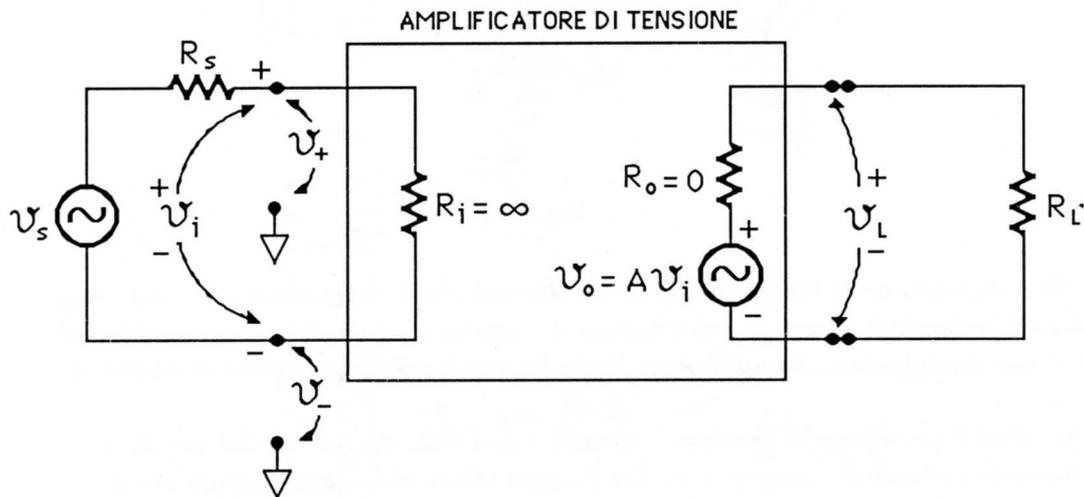


Fig.XV.1

Essendo $R_i = \infty$ e $R_o = 0$, allora per ogni t abbiamo: $v_i = v_+ - v_- = v_s$, $v_L = v_o$. Si noti che la ddp in uscita dipende solamente dalla differenza delle ddp ai terminali di ingresso; in questo senso si parla di *amplificatore differenziale ideale*. Nei casi reali infatti si trova che la tensione v_o dipende anche dalla somma di v_+ e di v_- e la si pone usualmente nella forma:

$$v_o = A_d \cdot (v_+ - v_-) + A_c \cdot (v_+ + v_-)/2 \quad (\text{XV.2})$$

Nel seguito ammetteremo sempre che il secondo membro della (2) sia trascurabile.

Un dispositivo di questo genere per funzionare correttamente deve ricevere energia da qualche fonte esterna: infatti in uscita è possibile ottenere una potenza finita, nonostante che la potenza ceduta all'ingresso dal generatore di fem sia, al limite di $R_i = \infty$, nulla. L'energia è ottenuta tramite dei generatori di tensione continua che alimentano il circuito elettronico contenuto all'interno del dispositivo: pertanto è opportuno, proprio per ricordare questo fatto, indicare esplicitamente questi alimentatori nonché i terminali a cui le rispettive tensioni sono applicate; in genere le ddp applicate dagli alimentatori sono due, una positiva ($+V_P$) e una negativa ($-V_N$) rispetto a una tensione comune di riferimento.

Perdendo in generalità, ma acquistando in semplicità e avvicinandosi ai casi che molto spesso si incontrano in pratica, assumeremo che il nodo di riferimento per le alimentazioni e in generale per tutte le tensioni coincida con uno dei due terminali di uscita. In altri termini, da qui in avanti schematizzeremo il nostro amplificatore di tensione ideale come in Fig.2.

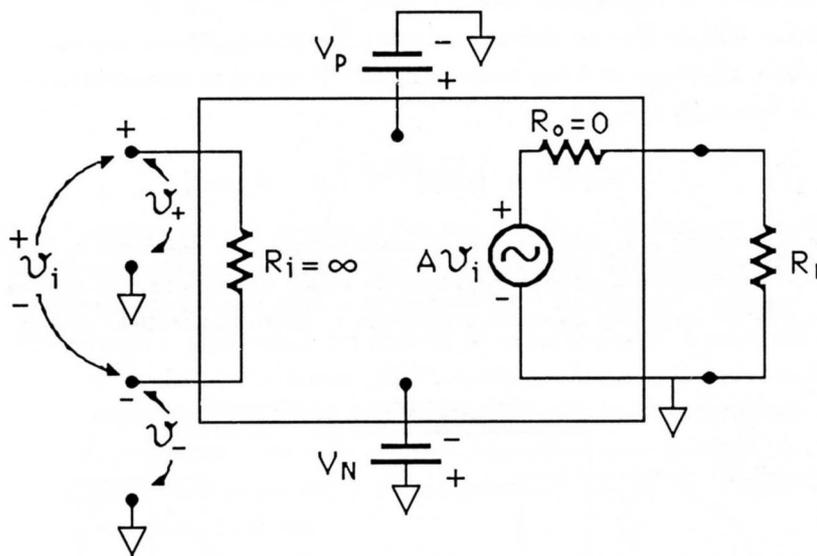


Fig.XV.2

Se l'amplificatore è ideale, la (1) vale qualunque sia la dipendenza di v_i dal tempo, con A costante; limitandoci al caso in cui il segnale di ingresso $v_i(t)$ sia di tipo sinusoidale, ciò significa che A non dipende da ω ; l'amplificatore ideale ha una banda passante che si estende da $\omega = 0$ a $\omega = \infty$. In un *amplificatore reale di tensione* avremo valori finiti sia per R_i che per R_o e A non sarà esattamente costante in funzione di ω . Esaminando più da vicino quest'ultimo aspetto si trova che per una larga classe di amplificatori reali eccitati con segnali sinusoidali, il fattore di amplificazione è un numero complesso \mathcal{A} che mostra un andamento (Fig.3) in funzione della frequenza del tipo RC passa basso (vedi Cap.XII,§2); la frequenza f_H alla quale l'amplificazione è diminuita di 3 dB definisce la *banda passante dell'amplificatore*. Nel seguito (salvo esplicita affermazione contraria) noi considereremo il nostro amplificatore eccitato con segnali caratterizzati da frequenze decisamente inferiori a f_H , cosicché, almeno da questo punto di vista, l'amplificatore potrà considerarsi ideale.

Negli schemi elettrici un amplificatore reale di tensione si indica con un simbolo a triangolo come in Fig.4 (R_L rappresenta il carico per l'uscita).

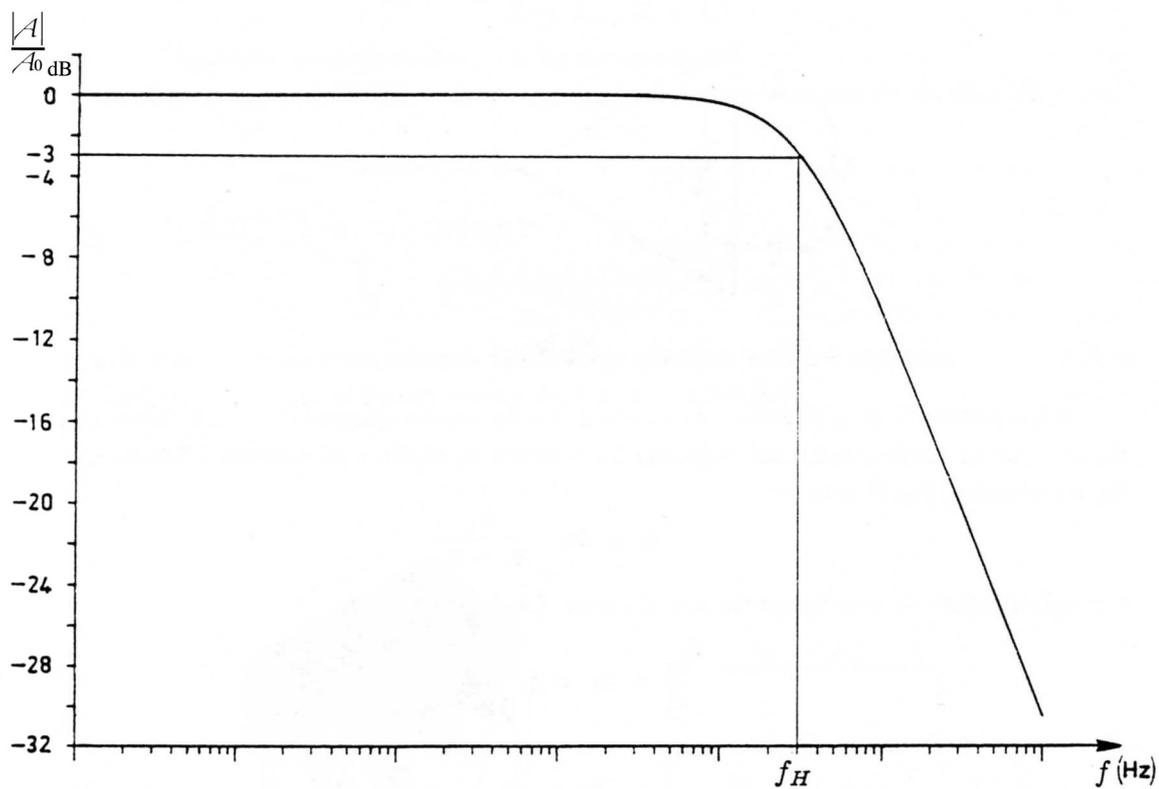


Fig.XV.3

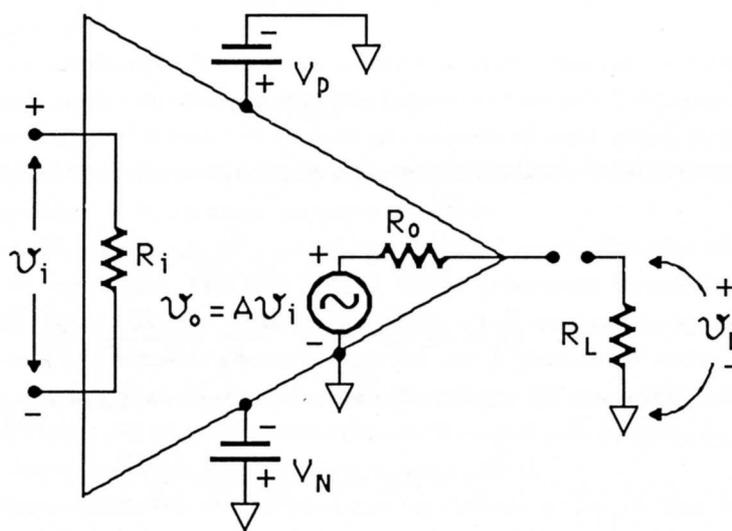


Fig.XV.4

Ancora più spesso si disegna l'amplificatore reale semplicemente come in Fig.5, omettendo sia

le tensioni di alimentazione che i dettagli del generatore di uscita .

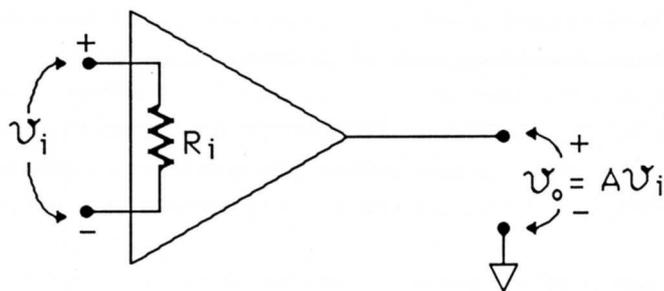


Fig.XV.5

A è il *fattore di amplificazione a circuito di uscita aperto*: quando l'uscita è chiusa su un carico R_L avremo un cambiamento nel rapporto fra tensione di uscita e di ingresso . Infatti nel caso che R_L sia inserita (Fig.6) avremo:

$$v_L = A v_i \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \quad (\text{XV.3})$$

e quindi il *fattore di amplificazione con il carico* (A_L) sarà dato da

$$\frac{v_L}{v_i} = A_L = A \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \quad (\text{XV.4})$$

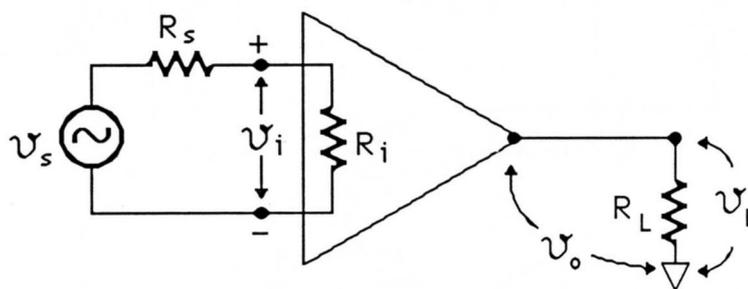


Fig.XV.6

Se poi ammettiamo che il generatore di ingresso abbia una certa resistenza interna R_s abbiamo (vedi Fig.6)

$$v_i = v_s \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s} \quad (\text{XV.5})$$

$$v_L = A_L v_i = A \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s} \cdot v_s \quad (\text{XV.6})$$

e pertanto A_{Ls} , rapporto fra tensione di uscita sotto carico e differenza di potenziale applicata dal generatore:

$$\frac{v_L}{v_s} = A_{Ls} = A \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s} \quad (\text{XV.7})$$

Se avessimo considerato non solo resistenze ma impedenze, avremmo dovuto definire delle quantità complesse per questi rapporti, ottenendo così :

$$A_L = A \cdot \frac{Z_L}{R_o + Z_L} \quad (\text{XV.8})$$

$$\mathcal{A}_{Ls} = A \cdot \frac{\mathcal{Z}_L}{R_o + \mathcal{Z}_L} \cdot \frac{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{Z}_i + \mathcal{Z}_s} \quad (\text{XV.9})$$

nelle quali continuiamo ad ammettere che A sia un numero reale.

Si vede che se $|\mathcal{Z}_L| \gg R_o$ e $|\mathcal{Z}_i| \gg |\mathcal{Z}_s|$ allora $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_{Ls} \simeq A$, indipendentemente da R_o e \mathcal{Z}_i .

2.— Circuiti amplificatori integrati

Da anni ormai la tecnica della microelettronica è in grado di produrre *amplificatori integrati* in un unico “chip” delle dimensioni lineari esterne di $\simeq 1 \text{ cm}$ (vedi Fig.7).

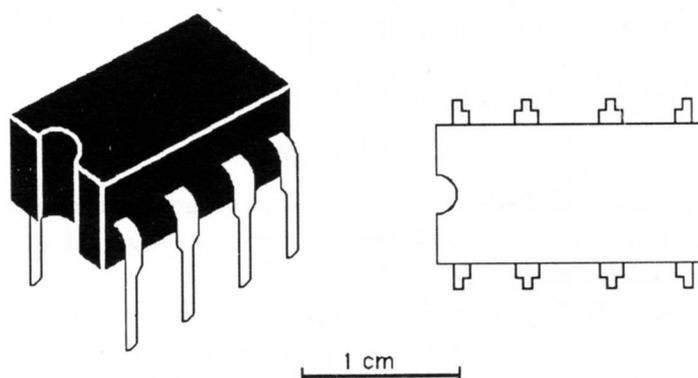


Fig.XV.7

L'involucro del chip è generalmente di materiale plastico e i reofori esterni sono i terminali per gli ingressi, l'uscita e le tensioni alimentazione. L'amplificatore vero e proprio è contenuto all'interno e ha dimensioni dell'ordine dei mm^2 e contiene un notevole numero di componenti elettronici quali transistori e diodi nonché resistenze e condensatori (fino a qualche decina di pF), tutti realizzati con le tecniche dei circuiti integrati su un unico supporto di Silicio.

Fra gli amplificatori integrati, quelli con gli ingressi costituiti da particolari tipi di transistori, detti *transistori a effetto di campo (Fet)*, vedi Cap.XVIII), hanno le seguenti caratteristiche tipiche: $R_i \simeq 10^{11} \Omega$; $A \simeq 2 \cdot 10^5$ ($f_H \simeq 10^3 \text{ Hz}$). Quanto alla resistenza di uscita, essa spesso non viene indicata, ma viene piuttosto dichiarata la corrente massima che il circuito di uscita può erogare senza che intervengano grosse riduzioni del fattore di amplificazione. Nel caso dello LF157 (un circuito amplificatore assai diffuso e del costo di poche migliaia di lire) si può stimare, dalle curve che vengono fornite dal costruttore, una resistenza di uscita di circa 200Ω .

Si sarà notato il valore estremamente elevato del guadagno A , di fatto molto più alto del valore che nelle applicazioni usuali è necessario avere*; inoltre il costruttore garantisce un certo valore medio di A attorno al quale son distribuiti i valori di un campione vasto di tali circuiti. Le variazioni

* tanto per fare un esempio che abbiamo già incontrato, nell'oscillografo i guadagni massimi richiesti al preamplificatore di ingresso sono dell'ordine di $10^2 \div 10^3$.

attorno al valor medio possono essere anche assai grandi; ciò significa che se in un certo dispositivo è impiegato uno di questi circuiti e se una delle funzioni svolte dall'apparecchiatura dipende esplicitamente da A , la sostituzione di un circuito amplificatore (ad esempio perché guastatosi) con un altro dello stesso tipo, non necessariamente con identico A , comporta inevitabilmente una revisione della taratura dell'apparecchiatura. L'eliminazione di questi e molti altri inconvenienti, quali la forte dipendenza di A dalla temperatura, è ottenuta tramite il ricorso a sistemi di amplificazione provvisti di *reazione negativa* (in inglese *negative feedback*): ovvero gli amplificatori integrati sono utilizzati come blocchi base di amplificazione, in configurazioni tali che l'amplificazione finale risultante A_f è $< A$ (questo quasi sempre non è un problema, dato il valore molto grande di A) ed ha il pregio di essere determinata quasi esclusivamente da grandezze indipendenti dal circuito amplificatore usato, tipicamente da rapporti di impedenze. Nel paragrafo successivo studieremo proprio un esempio di amplificatore con reazione negativa.

3.— Un esempio di reazione negativa: l'amplificatore operazionale

Gli esempi che seguono si riferiscono a soluzioni che vengono generalmente adottate nelle apparecchiature in cui siano necessarie amplificazioni di tensione per segnali di frequenza relativamente bassa (diciamo nel campo *audio*).

Consideriamo il circuito di Fig.8 (*amplificatore operazionale*).

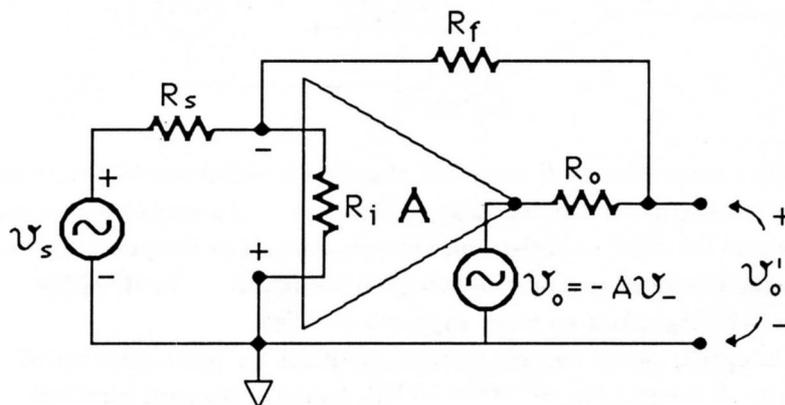


Fig.XV.8

Il blocco base è un amplificatore reale di tensione avente le caratteristiche medie descritte nel paragrafo precedente. Si noti che il terminale di ingresso + è cortocircuitato con l'elettrodo di riferimento; pertanto il segnale v_s è di fatto applicato fra il terminale - e il comune. Inoltre esiste un collegamento, tramite la resistenza R_f , fra il terminale di uscita e il terminale “-” di ingresso: questo tipo di collegamento costituisce proprio, nel caso preso in esame, la cosiddetta *reazione negativa*.

Guardiamo ora di esprimere il rapporto A_f fra la tensione v_o' e la tensione v_s del generatore. Tale rapporto rappresenta il guadagno in tensione del nostro *amplificatore reazionato*.

Per calcolare A_f , procediamo alla risoluzione del circuito, facendo ricorso allo schema equivalente dell'amplificatore base (Fig.9):

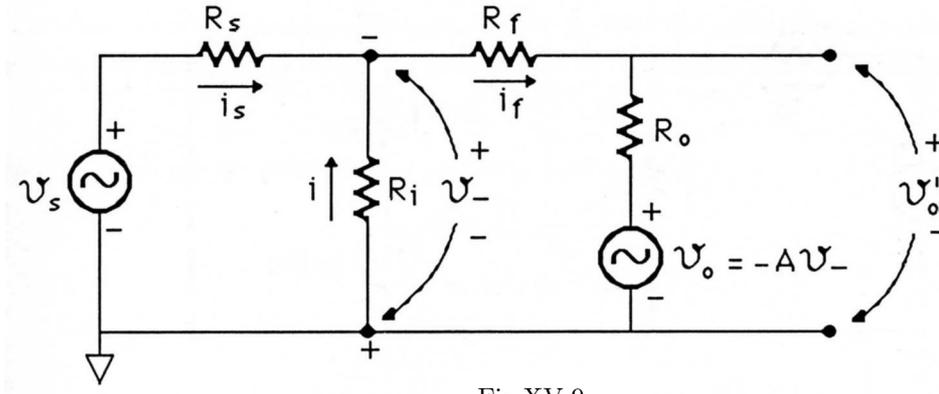


Fig.XV.9

Notiamo anzitutto che $v_o' \neq v_o$ poiché $R_o \neq 0$ ed inoltre (vedi (2)):

$$v_o = A(v_+ - v_-) = -Av_- \quad (\text{XV.10})$$

essendo $v_+ = 0$. Con riferimento al circuito di Fig.9 possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$v_s = i_s R_s - i R_i \quad (\text{XV.11})$$

$$Av_- = i R_i + i_f (R_f + R_o) \quad (\text{XV.12})$$

$$i_s + i = i_f \quad (\text{XV.13})$$

$$v_- = -i R_i \quad (\text{XV.14})$$

Dalle (12) e (14) si ottiene:

$$-i R_i (1 + A) = i_f (R_f + R_o) \quad (\text{XV.15})$$

Ricavando i_s dalla (11) e i_f dalla (15) in funzione di i e sostituendole nella (13) si ottiene:

$$i = -v_s \frac{(R_f + R_o)}{(R_s + R_i)(R_f + R_o) + R_i R_s (1 + A)} \quad (\text{XV.16})$$

Tenendo presente che la tensione di uscita a circuito aperto vale:

$$v_o' = -Av_- + i_f R_o = Ai R_i + i_f R_o \quad (\text{XV.17})$$

e sostituendo nell'espressione di v_o' , i e i_f prima calcolati si ottiene:

$$v_o' = -v_s \cdot \frac{R_i (AR_f - R_o)}{(R_s + R_i)(R_f + R_o) + R_i R_s (1 + A)} = A_f v_s \quad (\text{XV.18})$$

Moltiplicando entrambi i membri della (16) per R_i e sfruttando la (14), si può vedere che nel limite di $A \rightarrow \infty$, $v_- \rightarrow 0$. La drastica riduzione della ddp fra i due terminali di ingresso è proprio l'effetto *caratteristico della reazione negativa* introdotta nel nostro sistema; più avanti impareremo a sfruttare ampiamente questo risultato.

Se vogliamo ora calcolare la resistenza di uscita R_o' fra i terminali dove misuriamo v_o' , possiamo chiudere con un corto circuito questi terminali, calcolarci la corrente i_{cc} che fluisce in questo corto circuito e determinare R_o' come rapporto fra la ddp a circuito aperto v_o' (18) e i_{cc} .

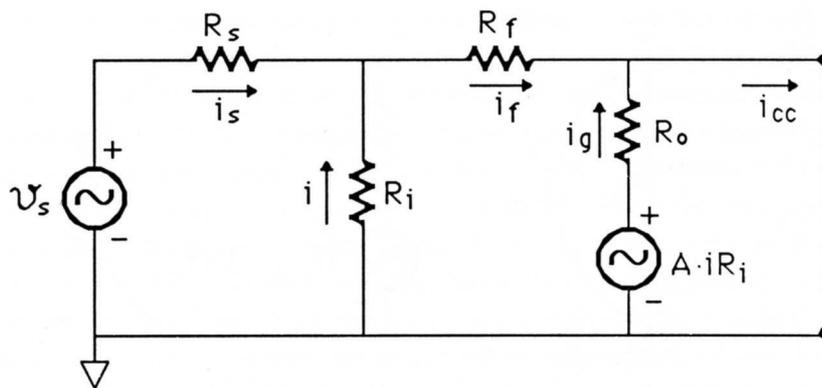


Fig.XV.10

Il circuito per calcolare i_{cc} è disegnato in Fig.10. Abbiamo

$$v_s = -iR_i + i_s R_s \quad (\text{XV.19})$$

$$A i R_i = i_g R_o \quad (\text{XV.20})$$

$$i R_i + i_f R_f = 0 \quad (\text{XV.21})$$

$$i = (i_f - i_s) \quad (\text{XV.22})$$

$$i_{cc} = i_f + i_g \quad (\text{XV.23})$$

Ricavando dalle prime quattro i_s , i_f , i_g e i in funzione di parametri noti, dalla (23) si ottiene:

$$i_{cc} = -\frac{v_s}{R_o} \frac{R_i(A R_f - R_o)}{(R_s + R_i) R_f + R_i R_s} \quad (\text{XV.24})$$

Quindi per R_o' abbiamo

$$R_o' = \frac{v_o'}{i_{cc}} = R_o \frac{R_f + \frac{R_i R_s}{R_i + R_s}}{R_f + R_o + \frac{R_i R_s}{R_s + R_i} (1 + A)} \quad (\text{XV.25})$$

Se avessimo voluto calcolare R_o' sostituendo i generatori con le loro resistenze interne e applicando una ddp fra i terminali di uscita, avremmo dovuto farlo con raziocinio, cioè avremmo dovuto cortocircuitare v_s , ma non $-Av_-$, poiché quest'ultimo generatore (propriamente detto *generatore controllato*) si *accende* in virtù della presenza di una ddp v_i , indipendentemente dalla causa che la produce (in questo caso il generatore applicato all'uscita).

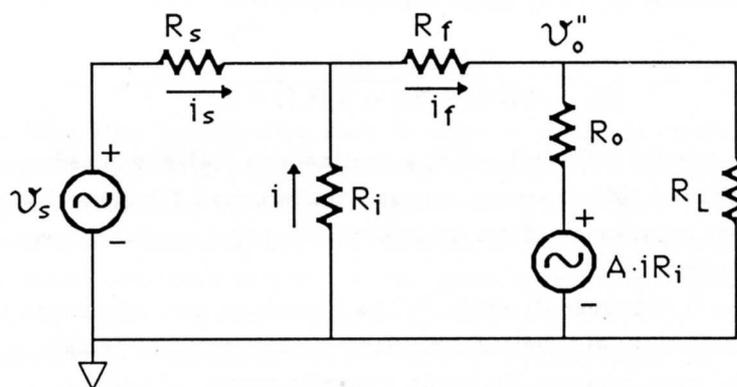


Fig.XV.11

Calcoliamo ora la resistenza di ingresso $R_{in} + R_s$ vista dal generatore v_s : consideriamo il caso generale di una resistenza di carico R_L qualsiasi e, con riferimento alla Fig.11, calcoliamoci

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_s} - R_s \quad (XV.26)$$

Le equazioni utili per la risoluzione del problema sono ora:

$$v_o'' = v_o' \cdot \frac{R_L}{R_L + R_o'} \quad (XV.27)$$

$$v_s = i_s R_s - i R_i \quad (XV.28)$$

$$i R_i + i_f R_f = -v_o'' \quad (XV.29)$$

$$i_f = i + i_s \quad (XV.30)$$

Svolgendo i conti si trova

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_s} - R_s = \frac{R_s(R_i + R_f) + R_i R_f}{(R_i + R_f) + \frac{R_i^2 (AR_f - R_o)}{(R_s + R_i)(R_f + R_o) + R_i R_s (1 + A)} \cdot \frac{R_L}{R_L + R_o'}} - R_s \quad (XV.31)$$

Guardiamo ora un po' più da vicino i risultati ottenuti; intanto va detto che le espressioni (18), (25) e (31) sono relativamente poco intelleggibili. Se però consideriamo il caso realistico in cui si utilizzi un blocco base di amplificatore con $A \geq 10^5$, allora tutto diviene estremamente più chiaro; infatti:

$$v_o' \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -v_s \frac{AR_f}{(1 + A)R_s} \quad (XV.32)$$

$$R_o' \xrightarrow{A \rightarrow \infty} R_o \cdot \frac{\left(1 + \frac{R_f(R_i + R_s)}{R_s R_i}\right)}{A} \quad (XV.33)$$

$$R_{in} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{R_s(R_i + R_f) + R_i R_f}{R_i + R_f + \frac{R_i R_f A}{R_s(1+A)}} - R_s \quad (XV.34)$$

e quindi con approssimazione decisamente buona se $A \simeq 10^5$, $v_o' = -v_s \frac{R_f}{R_s}$ cioè

$$A_f = -\frac{R_f}{R_s} \quad (XV.35)$$

e $R_o' \simeq 0$ e $R_{in} \simeq 0$.

Pertanto l'*amplificatore reazionato* si comporta, rispetto al generatore v_s , come l'amplificatore reale di tensione rappresentato in Fig.12 cioè resistenza di ingresso finita e pari ad R_s , guadagno A_f finito e negativo (dipendente dal rapporto di due resistenze) e resistenza di uscita praticamente uguale a zero.

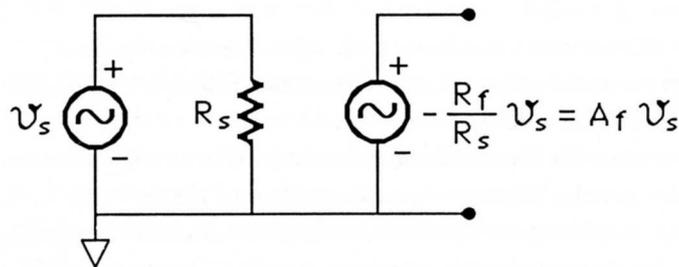


Fig.XV.12

Alle medesime conclusioni si può giungere con un ragionamento semplificato che non è esatto, ma ha il vantaggio di portare a risultati sostanzialmente corretti nei casi pratici e soprattutto aiuta a comprendere meglio il comportamento del sistema; inoltre questo schema di ragionamento ha il pregio di potersi applicare a molti altri casi simili a quello in esame. Consideriamo quindi nuovamente il nostro circuito, riprodotto in Fig.13.

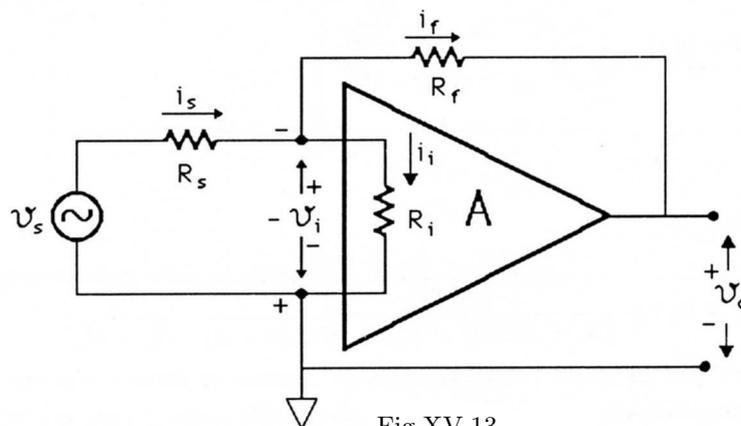


Fig.XV.13

Abbiamo già visto che la ddp v_i fra gli ingressi, proprio a causa della reazione negativa, tende ad assumere un valore prossimo a zero. A questa medesima conclusione si giunge anche più semplicemente notando che per tensioni v_o finite, valendo la (1) ed essendo $A \gg 1$, la ddp presente ai due ingressi deve necessariamente essere molto piccola:

$$-v_i = v_- - v_+ = -\frac{v_o}{A} \quad (\text{XV.36})$$

Ammettiamo quindi che v_i sia trascurabile rispetto a v_s . In questa ipotesi possiamo dire che v_- è allo stesso potenziale di v_+ , cioè zero, e quindi possiamo calcolare i_s come

$$i_s \simeq \frac{v_s}{R_s} \quad (\text{XV.37})$$

A questo punto osserviamo che i terminali v_- e v_+ oltre a trovarsi praticamente allo stesso potenziale, sono collegati fra loro da una resistenza finita (magari anche molto grande, ma ciò non è essenziale); questo autorizza a dire che nella resistenza R_i circolerà una corrente i_i molto piccola (dell'ordine di $|\frac{v_o}{AR_i}|$): poniamo quindi questa corrente uguale a 0. Conseguentemente la corrente i_f sarà uguale a i_s e la tensione v_o' potrà calcolarsi come:

$$v_o' \simeq v_- - i_f R_f \simeq -i_f R_f = -i_s R_f = -v_s \cdot \frac{R_f}{R_s} \quad (\text{XV.38})$$

Quanto alla resistenza di ingresso, essendo $v_- \simeq 0$, evidentemente $R_{in} \simeq R_s$.

Il ragionamento è rigoroso solo se $A = \infty$, ma l'approssimazione resta più che buona nei casi reali quando $A \simeq 10^5 - 10^6$, se $R_f/R_s \ll A$.

Nella configurazione ora descritta il circuito complessivo è detto *amplificatore operazionale* (il motivo del nome lo vedremo fra poco); l'ingresso $-$, nella condizione ideale di $A \rightarrow \infty$, si trova allo stesso potenziale dell'ingresso $+$ ed essendo questo alla tensione comune (massa), l'ingresso $-$ è detto *massa virtuale*. Si usa l'aggettivo *virtuale*, perché pur essendo il terminale alla tensione di massa, la corrente i_i che effettivamente fluisce da questo nodo verso massa è zero, cioè il terminale è di fatto *isolato* da massa.

Abbiamo detto all'inizio che quello ora esaminato è un circuito con *reazione negativa*: il motivo di questo nome discende dal fatto che una frazione del segnale di uscita viene ripresentata (in questo senso si parla di *reazione*, contrazione di *retroazione*) in ingresso in modo da diminuire (in questo senso si parla di *reazione negativa*) il segnale di eccitazione v_i . E' abbastanza facile rendersi conto che se invece colleghiamo l'uscita con l'ingresso +, l'effetto è quello di un ulteriore aumento della tensione v_i . Si parla in questo caso di *reazione positiva*. La reazione positiva viene generalmente impiegata per costruire oscillatori e circuiti di scatto e solo molto raramente per realizzare amplificatori; noi comunque non parleremo di nessuna di queste applicazioni.

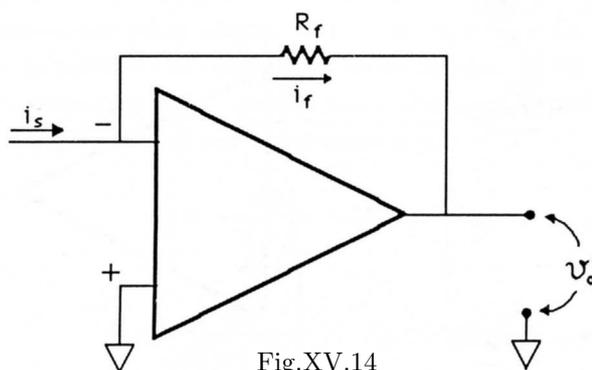


Fig.XV.14

Il circuito amplificatore operazionale può essere anche interpretato come un *convertitore corrente-tensione*. Infatti tutto il ragionamento fatto precedentemente può ripetersi nel caso della Fig.14 in cui non è specificata l'origine della corrente i_s : resta cioè vero che $v_- = v_+$ e quindi che $i_f = i_s$ indipendentemente da come è ottenuta i_s e quindi

$$v_o' = -i_s \cdot R_f \quad (\text{XV.39})$$

Il circuito converte cioè la corrente i_s in una tensione ad essa proporzionale.

Nel prossimo paragrafo vedremo alcune delle molte funzioni che un amplificatore operazionale è in grado di svolgere e comprenderemo anche il motivo del suo nome. Ora ci preme richiamare l'attenzione su un punto molto importante, accennato alla fine del paragrafo precedente: che cioè tramite la procedura (qui vista in un caso particolare) della reazione negativa, è stato possibile realizzare un circuito amplificatore le cui caratteristiche non dipendono più in maniera critica dai parametri costruttivi del circuito base, a patto che quest'ultimo abbia un guadagno $A \rightarrow \infty$. Se questa condizione è soddisfatta si ottiene -nel caso esaminato- un guadagno dell'amplificatore reazionato che dipende solo dal rapporto di due resistenze; inoltre l'amplificatore reazionato possiede una resistenza di uscita circa $(R_s/R_f) \cdot A$ volte più piccola di quella dell'amplificatore base; quanto alla resistenza di ingresso essa dipende solamente dal valore R_s della resistenza in serie al generatore di segnale. Possiamo quindi ora dire che se in un'apparecchiatura è utilizzato un amplificatore di questo tipo e se la funzione svolta dall'apparecchiatura dipende dal guadagno A_f del circuito reazionato, la sostituzione del circuito base (perché ad esempio danneggiato) non porta assolutamente a revisioni della taratura dell'apparecchio; infatti il guadagno A_f dipende dal rapporto di due resistenze e niente affatto (fintanto che $A \rightarrow \infty$) dalle caratteristiche particolari del circuito sostituito. Tutto questo guadagno in *stabilità* ha ovviamente un prezzo: il guadagno A_f è molto minore di A .

Per concludere ricordiamo che il blocco base, cioè l'amplificatore integrato, è molto spesso chiamato impropriamente "amplificatore operazionale"; *impropriamente* perché questo è il nome che compete al particolare amplificatore reazionato che utilizza quell'amplificatore base.

4.— Alcune configurazioni dell'amplificatore operazionale

Supponiamo di avere n generatori di tensione v_i (in genere dipendenti dal tempo) collegati ognuno tramite una resistenza R_i alla massa virtuale di un unico amplificatore operazionale (Fig.15).

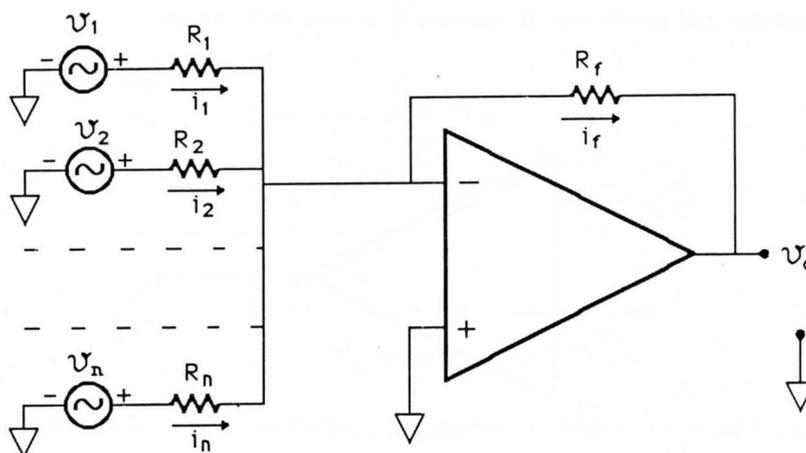


Fig.XV.15

La corrente i_f è pari alla somma $\sum_i^n i_i$ e quindi la ddp in uscita è pari alla somma algebrica (cambiata di segno) delle ddp dei segnali, pesate ognuna con l'inverso della propria resistenza in serie:

$$v_o = -R_f \cdot \sum_i^n \frac{v_i}{R_i} \quad (\text{XV.40})$$

Se tutte le resistenze R_i sono uguali, allora $v_o \propto \sum_i v_i$. L'origine del nome "circuitto operazionale" è associata proprio ad applicazioni quali quella ora vista, cioè alla capacità di compiere operazioni matematiche sui segnali (e non solo somme algebriche, come vedremo).

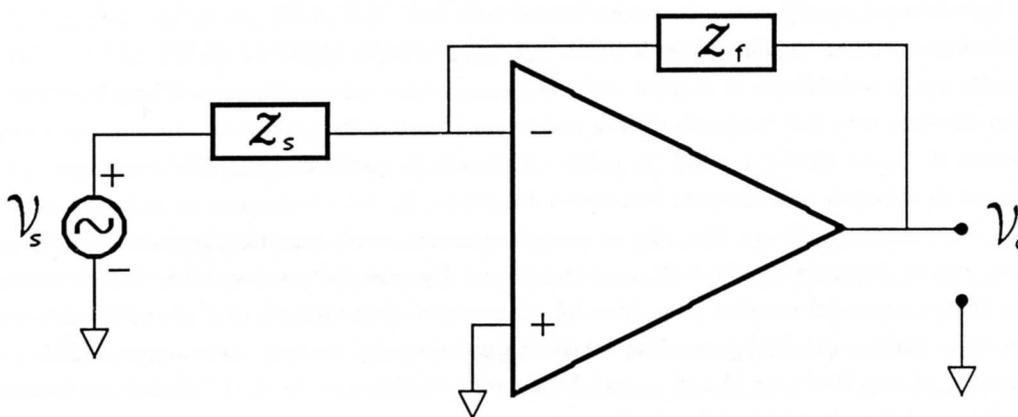


Fig.XV.16

Se il circuito operazionale presenta in serie all'ingresso - e in reazione, invece che resistenze pure, impedenze complesse e se la eccitazione è sinusoidale (Fig.16), varranno formalmente le stesse

relazioni viste prima per A_f salvo che questa volta si tratterà di numeri complessi:

$$\mathcal{V}_o = -\frac{\mathcal{Z}_f}{\mathcal{Z}_s} \cdot \mathcal{V}_s = \mathcal{A}_f \cdot \mathcal{V}_s \quad (\text{XV.41})$$

con \mathcal{A}_f complesso.

La (41) descriverà correttamente il comportamento del circuito operativo fintanto che $A(f)$ del circuito base si mantenga sufficientemente grande: ciò vuol dire che la frequenza f_s del segnale \mathcal{V}_s potrà anche essere assai maggiore di f_H (vedi §1), purché $A(f > f_H)$ sia ancora $\gg 1$.

Più precisamente, notiamo che se il guadagno del circuito base dipende dalla frequenza, allora esso è rappresentabile come un numero complesso \mathcal{A} il cui modulo ha, ad esempio, l'andamento di Fig.3 e la cui fase è quella caratteristica di un circuito passa basso con frequenza di taglio superiore f_H . Allora sappiamo (Cap.XII,§2) che \mathcal{A} si può rappresentare come:

$$\mathcal{A} = \frac{A_o}{1 + j\frac{f}{f_H}} = |\mathcal{A}| \exp j\theta_H \quad (\text{XV.42})$$

con

$$|\mathcal{A}| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_H})^2}} \quad \theta_H = -\text{atan}\frac{f}{f_H}$$

con A_o (reale) guadagno in bassa frequenza ($\ll f_H$). Il guadagno \mathcal{A}_f (un numero complesso) sarà dato da una espressione identica alla (18), salvo le impedenze \mathcal{Z}_f e \mathcal{Z}_s al posto di R_f e R_s : tale espressione si riduce alla (41) se $|\mathcal{A}|$ è molto maggiore di 1, ovvero anche per frequenze f maggiori di f_H , ma tali che $\frac{f}{f_H} \ll A_o$; se ad esempio $A_o = 10^6$ e se $\frac{|\mathcal{Z}_f|}{|\mathcal{Z}_s|} \ll A_o$, anche per $f = 10^2 \cdot f_H$ $|\mathcal{A}| \simeq 10^4$ e la (41) resta valida, pur con una approssimazione leggermente meno buona che per $f < f_H$ (si può verificare che la bontà dell'approssimazione è tanto migliore quanto più $\frac{|\mathcal{Z}_f|}{|\mathcal{Z}_s|}$ è piccolo rispetto a A_o).

Questo ora descritto è un altro degli effetti benefici caratteristici della reazione negativa: essa cioè *allarga la banda passante* dell'amplificatore reazionato rispetto alla banda passante dell'amplificatore base; più precisamente si trova che con buona approssimazione il prodotto $A_o \cdot f_H$ dell'amplificatore non reazionato è uguale all'analogo prodotto $|\mathcal{A}_{of}| \cdot f_H$ dell'amplificatore reazionato, cioè la banda si estende di tanto quanto si riduce il fattore di amplificazione.

Tornando al circuito operativo realizzato con impedenze complesse, consideriamo alcune configurazioni particolari. Supponiamo che l'impedenza in reazione (così si chiama \mathcal{Z}_f) sia un condensatore di capacità C_f e che \mathcal{Z}_s sia viceversa puramente resistiva; allora:

$$\mathcal{A}_f = -\frac{\mathcal{Z}_f}{\mathcal{Z}_s} = -\frac{1}{j\omega R_s C_f} \quad (\text{XV.43})$$

Pertanto l'uscita \mathcal{V}_o risulterà proporzionale all'integrale di \mathcal{V}_s in quanto sappiamo che nella rappresentazione delle grandezze sinusoidali mediante numeri complessi, dividere per $j\omega$ equivale ad integrare rispetto al tempo. Similmente nel caso che $\mathcal{Z}_f = R_f$, $\mathcal{Z}_s = \frac{1}{j\omega C_s}$ abbiamo:

$$\mathcal{A}_f = -j\omega C_s R_f \quad (\text{XV.44})$$

vale a dire il segnale di uscita è proporzionale alla derivata rispetto al tempo del segnale di ingresso. Quanto visto sopra non è risultato di un puro trucco matematico, ma corrisponde a un fatto fisico che

vale in generale, non solo quando le differenze di potenziale variano in maniera sinusoidale rispetto al tempo.

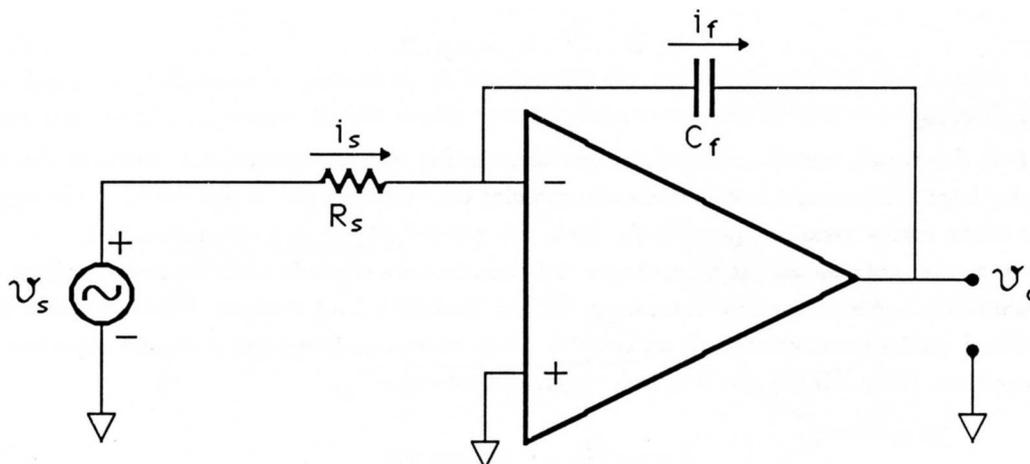


Fig.XV.17

Infatti, supponendo che $v_s(t)$ sia una qualunque funzione del tempo avremo, nel caso del circuito di Fig.17:

$$i_f = i_s = \frac{v_s}{R_s} \quad (\text{XV.45})$$

a motivo del solito fatto che per avere una tensione in uscita finita occorre che l'ingresso $-$ sia allo stesso potenziale dell'ingresso $+$. D'altronde, la tensione v_o sarà uguale alla ddp ai capi del condensatore :

$$v_o = -\frac{q_f}{C_f} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_f dt = -\frac{1}{C_f R_s} \int_0^t v_s dt \quad (\text{XV.46})$$

dove il tempo 0 è scelto come quello in cui $q_s = 0$, per esempio subito dopo aver scaricato il condensatore C_f mediante un dispositivo non riportato in figura. Si vede così che il circuito si comporta come un vero *integratore matematico* (a parte un segno), indipendentemente dalla effettiva dipendenza funzionale di v_s da t .

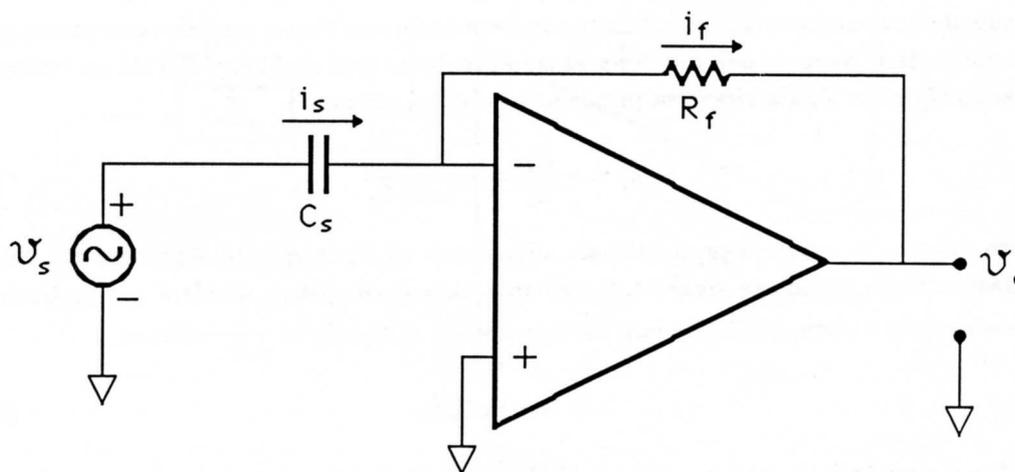


Fig.XV.18

Analogamente si vede che nella configurazione di Fig.18 vale:

$$v_o = -i_f \cdot R_f = -i_s \cdot R_f = -C_s R_f \cdot \frac{dv_s}{dt} \quad (\text{XV.47})$$

cioè la tensione in uscita è proporzionale alla derivata istantanea del segnale v_s cambiata di segno. Consideriamo ora una configurazione circuitale che utilizza un amplificatore base del tipo visto sopra e che consente la realizzazione di un amplificatore di tensione pressoché ideale (resistenza di ingresso molto elevata, resistenza di uscita molto bassa, guadagno indipendente dalla frequenza).

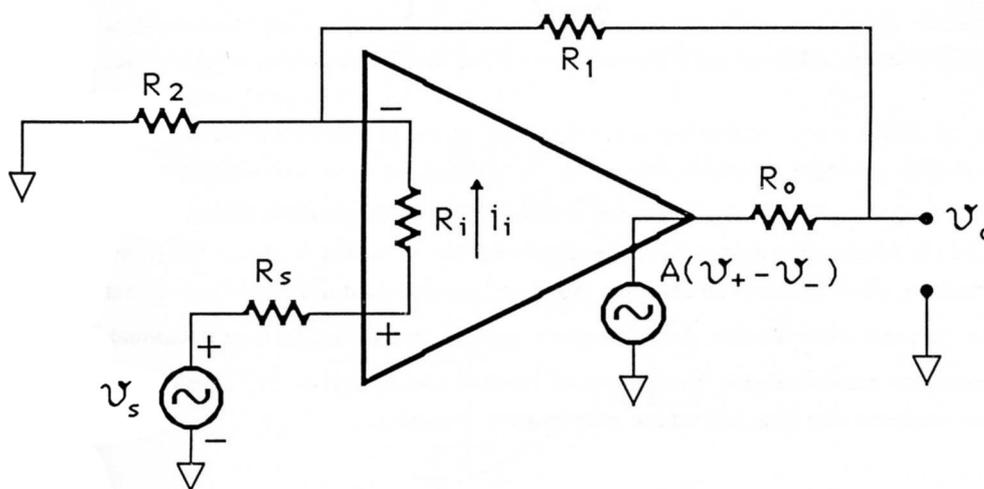


Fig.XV.19

Il circuito è rappresentato nella Fig.19: se A è molto grande possiamo dire che la tensione del terminale $-$ dovrà essere sostanzialmente la stessa del terminale $+$, differendone per una quantità del tipo $-\frac{v_o}{A}$. Dovrà allora essere $v_- = v_s = v_o \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ poiché, come visto precedentemente, la corrente i_i fra i due terminali $+$ e $-$ sarà sostanzialmente nulla, in quanto gli estremi del ramo sono equipotenziali e sono collegati con una resistenza finita. Pertanto

$$v_o = v_s \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (\text{XV.48})$$

cioè $A_f = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$. Si può inoltre dimostrare che la resistenza di uscita tende al valore $\frac{R_o}{A} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2}$ e la resistenza di ingresso vale circa $R_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} A$. Ciò significa, partendo dai valori di R_o , R_i ed A dell'amplificatore base ($\sim 200 \Omega$, $> 10^{10} \Omega$, $> 10^5$ rispettivamente) avere in pratica resistenza di uscita uguale a zero e resistenza di ingresso infinita. Comunque, anche se R_i non fosse stata così grande, per esempio se il blocco base non ha ingressi a Fet, la resistenza di ingresso dell'amplificatore reazionato sarebbe stata comunque elevata.

Questa ora descritta è una configurazione molto comune e assai utilizzata in tutti i casi in cui occorra amplificare una differenza di potenziale ed avere un'uscita con una bassa resistenza in serie. A motivo del fatto che il fattore di amplificazione è positivo, l'amplificatore è detto *non-invertente* (mentre la configurazione a operazionale è detta *invertente*).

Se si fa $R_2 \gg R_1$, o addirittura si omette il collegamento fra il terminale $-$ e il comune, si ha (vedi Fig.20a) quello che si chiama un *ripetitore di tensione* (o “+1”, o *follower*, o *buffer*); nella parte b) della Fig.20 è riportato il simbolo che generalmente si usa per tale configurazione.

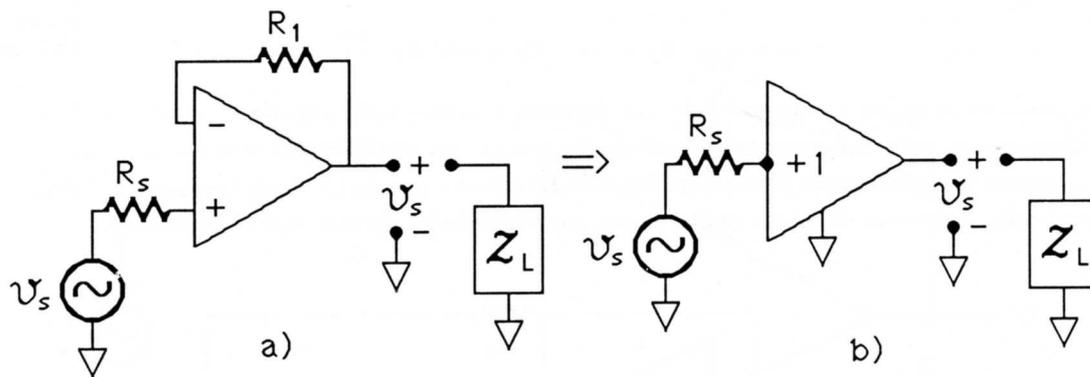


Fig.XV.20

R_1 può anche essere un corto circuito e il ripetitore di tensione funziona ugualmente bene. La funzione del ripetitore di tensione è quella di presentare in uscita la stessa differenza di potenziale, rispetto a massa, che è presente in ingresso, indipendentemente dalla impedenza in serie al generatore in ingresso; la resistenza interna del generatore equivalente di uscita è praticamente zero $\left(\frac{R_o}{A}\right)$ e quindi la tensione resta la stessa qualunque sia l'impedenza di carico Z_L , purché non venga superata la massima corrente che l'amplificatore può erogare in uscita.

5.— Le applicazioni nel campo della strumentazione

Un buffer o un amplificatore di tensione non invertente è un tipico *stadio di ingresso* di un Convertitore analogico digitale (CAD): abbiamo infatti visto che la resistenza di ingresso di un CAD deve essere tanto grande da non influenzare il valore del partitore in ingresso. Stadi di ingresso del tutto simili avranno quei voltmetri elettronici che presentano in ingresso resistenze particolarmente elevate. Ad esempio un *microvoltmetro* di quelli utilizzati come rivelatori di zero, può essere realizzato come in Fig.21.

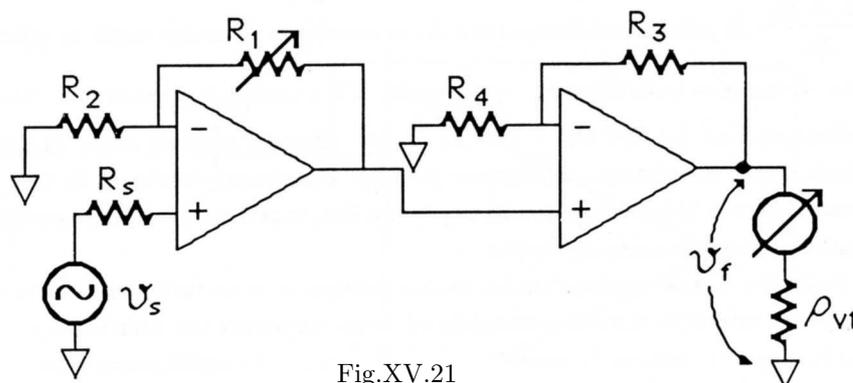


Fig.XV.21

La tensione di uscita

$$v_f = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_4} \cdot v_s \quad (\text{XV.49})$$

è inviata a uno strumento analogico a zero centrale, particolarmente utile se il microvoltmetro deve essere usato per rivelare uno zero. Poiché v_f dovrà essere dell'ordine del Volt (per comandare lo strumento), occorrono guadagni complessivi dell'ordine di $10^5 - 10^6$ e questo è ottenuto tramite due stadi di amplificazione in cascata. Variando R_1 (lasciando R_2, R_3 e R_4 costanti) si può variare la sensibilità dello strumento. Se lo strumento deve essere adoperato per misurare ddp e non come rivelatore di zero, allora invece di presentare l'uscita su uno strumento analogico, si potrà inviare la ddp v_f a un CAD; a parte la precisione del CAD, l'accuratezza dello strumento dipenderà dalla stabilità delle resistenze che determinano il guadagno e dalla precisione con cui esse sono note.

Un microvoltmetro non è realizzabile con un amplificatore base qualunque, ma occorre piuttosto che questo abbia caratteristiche particolari; a questo proposito nel prossimo paragrafo vedremo, anche in connessione con alcuni problemi intrinseci degli amplificatori base (per ora sottaciuti), quali sono i limiti minimi di tensione misurabile.

Come un amplificatore non-invertente si presta perfettamente all'utilizzo come stadio di ingresso di un misuratore ideale di tensione, così un misuratore pressoché ideale di corrente si può realizzare con una configurazione invertente a operazionale (Fig.22).

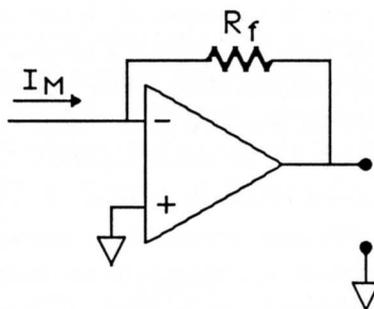


Fig.XV.22

La ddp in uscita è proporzionale alla corrente da misurare e poiché l'ingresso + è a potenziale comune, la resistenza di ingresso è nulla e la caduta di potenziale sullo strumento è zero. E' possibile usare questo milliamperometro elettronico come un comune misuratore di corrente in serie su un ramo di un circuito (Fig.23).

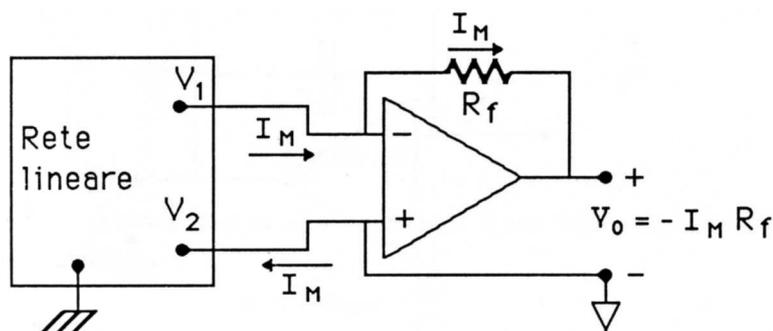


Fig.XV.23

Nell'esempio della figura, $V_1 = V_2$ rappresenta la ddp del terminale comune dell'amplificatore rispetto al terminale di riferimento della rete lineare (che abbiamo ammesso sia a terra). Affinché la configurazione sia effettivamente realizzabile, occorre che la corrente I_M si richiuda attraverso il terminale 2 e non segua altri percorsi, ovvero il terminale (∇) deve essere isolato da terra. Una

maniera semplice di realizzare questa condizione è alimentare lo strumento a pile *(vedi Fig.24): la tensione comune è il “meno” di una pila (V_P) e il “più” dell'altra (V_N).

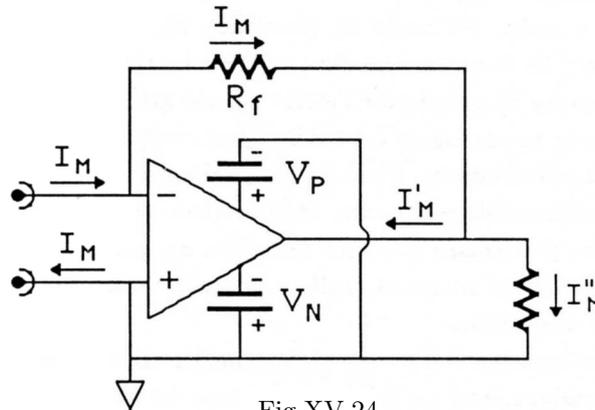


Fig.XV.24

La corrente I_M scorre attraverso la resistenza R_f e pertanto -in definitiva- viene erogata o ricevuta dall'amplificatore e quindi dalle pile (infatti è proprio per questa via che I_M ricompare sul terminale comune); il fatto che l'amplificatore debba erogare questa corrente, fa sì che questa configurazione di misuratore di corrente, per altro ideale, venga raramente impiegata nei multimetri. Infatti ciò porterebbe per prima cosa ad un limite superiore assai basso sulla corrente massima misurabile, pari alla corrente massima ottenibile in uscita dall'amplificatore; secondariamente, la presenza di I_M all'uscita dell'amplificatore causerebbe un drenaggio di corrente dalle pile e un loro rapido esaurimento. La configurazione ora vista è invece molto spesso adoperata per costruire strumenti molto sensibili, i cosiddetti *picoAmperometri* o *pAmperometri*, strumenti cioè che riescono a misurare correnti fino a frazioni di μA . La resistenza di reazione in queste applicazioni dovrà essere assai elevata, se si vuole avere in uscita una ddp facilmente misurabile o comunque che non richieda amplificazioni successive particolarmente spinte: ad esempio se $R_f = 1 G\Omega$ una corrente di $1 \mu A$ dà luogo in uscita a una ddp di $1 mV$ per la quale una successiva amplificazione di un fattore 100 è più che sufficiente.

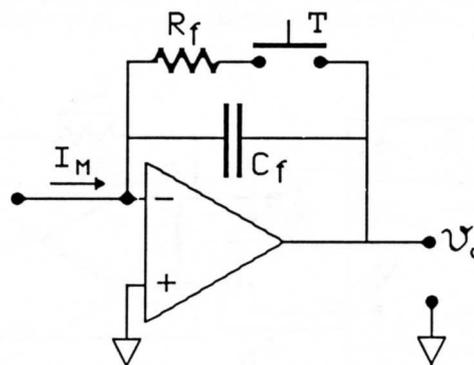


Fig.XV.25

Vale anche qui quanto detto a proposito dei μ Voltmetri, che cioè per costruire un pAmperometro occorre che l'amplificatore base risponda a precisi requisiti e questo sarà visto nel prossimo paragrafo.

* anche se non si usano pile si riesce ugualmente, tramite trasformatori, a ottenere delle tensioni di alimentazione isolate, ovvero con il terminale di riferimento isolato da altri conduttori (Cap.XVII,§8).

Col medesimo circuito base adatto per misurare piccole correnti, si può realizzare un integratore di carica estremamente sensibile, che può vantaggiosamente rimpiazzare il galvanometro balistico in (quasi) tutte le applicazioni (Fig.25). Supponendo di tener chiuso il tasto T fino al tempo $t = 0$ e successivamente di aprirlo, la tensione v_o in uscita sarà proporzionale a $\int_0^t I_M dt$:

$$v_o = -\frac{1}{C_f} \int_0^t I_M dt = -\frac{q_M}{C_f} \quad (\text{XV.50})$$

e sarà tanto più elevata quanto più C_f è piccolo. Valgono per questo circuito, riguardo alla chiusura dei percorsi delle correnti, le identiche considerazioni fatte per il circuito misuratore di corrente. La corrente I_M non deve mai, durante il tempo di integrazione, superare il valore massimo erogabile dall'amplificatore; se questo accade, il meccanismo della reazione diventa inefficace, l'ingresso - non è più alla stessa tensione dell'ingresso + e la risposta non riproduce l'integrale di I_M (vedi anche Cap.VII,§5). L'influenza dei parametri del circuito di base sul funzionamento dell'integratore, anche con riguardo alla resistenza del generatore che invia la corrente I_M , saranno discusse nel paragrafo successivo.

Per quanto riguarda la misura di resistenze, l'impiego di un circuito operativo nei multimetri può risultare utile, soprattutto in connessione con l'uso di CAD del tipo *a rapporto* (in inglese *ratio-metric*), che danno cioè una conversione numerica proporzionale al rapporto della tensione da misurare rispetto a una tensione di riferimento V_{REF} prodotta all'interno del multimetro. Il circuito per la misura di resistenze che sfrutta questa prerogativa del CAD può essere realizzato come in Fig.26.

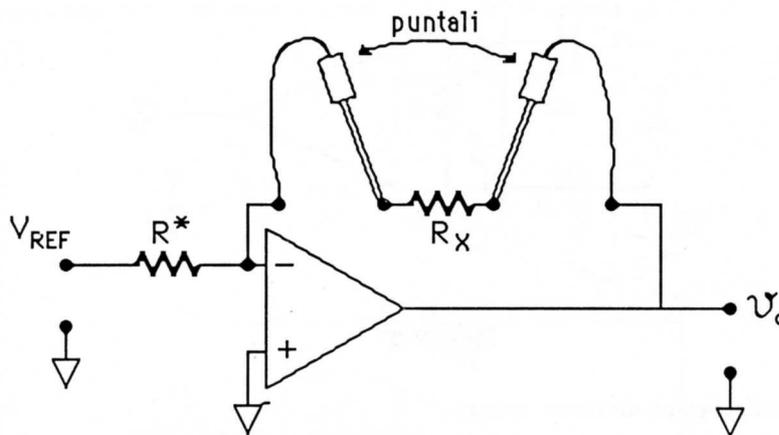


Fig.XV.26

R^* è una resistenza campione interna allo strumento, il cui valore dipende dal fondo scala impostato. La tensione v_o vale:

$$v_o = -V_{REF} \cdot \frac{R_x}{R^*} \quad (\text{XV.51})$$

Il CAD a rapporto (vedi Cap.XVI,§3) presenta poi un codice numerico proporzionale a $\left| \frac{v_o}{V_{REF}} \right| = \frac{R_x}{R^*}$ che dipende solo da R^* e R_x e non da V_{REF} (e quindi neppure da sue instabilità).

Per valori di R_x molto elevati, per non avere tensioni di uscita troppo grandi, conviene invertire R_x con R^* e in questo caso l'uscita del multimetro dà valori di conduttanza e non di resistenza. Anche nel caso dello schema ora descritto, valgono le solite considerazioni sull'influenza della resistenza dei puntali, particolarmente importanti se R_x è di valore non elevato.

6.— Tensione di offset e corrente di bias

Consideriamo un amplificatore usato come blocco base di amplificatori reazionati dei tipi precedentemente descritti. Finora abbiamo assunto che $v_o = A(v_+ - v_-)$; più realisticamente si trova che*:

$$v_o = A(v_+ - v_- - V_{off}) \quad (\text{XV.52})$$

dove V_{off} è una tensione in genere piccola ($< 10^{-2} V$) detta *tensione di offset* (di ingresso); essa rappresenta la ddp presente tra l'ingresso + e l'ingresso - quando l'uscita è a 0 V. L'origine fisica di questo tipo di comportamento dipende dalla non perfetta uguaglianza degli stadi di ingresso, ma non discuteremo questi aspetti e ci limiteremo a considerare alcune procedure atte a ridurre gli effetti indesiderati indotti dalla presenza di questa tensione spuria. Una maniera molto semplice per tenere conto della V_{off} , è quella di ammettere che il nostro circuito sia costituito da un amplificatore con tensione di offset nulla, ma che presenti all'utente due terminali (-, +) che non sono esattamente quelli (N, P) fra i quali è presente la ddp da amplificare (Fig.27), ma ne differiscano per un generatore di tensione V_{off} in serie.

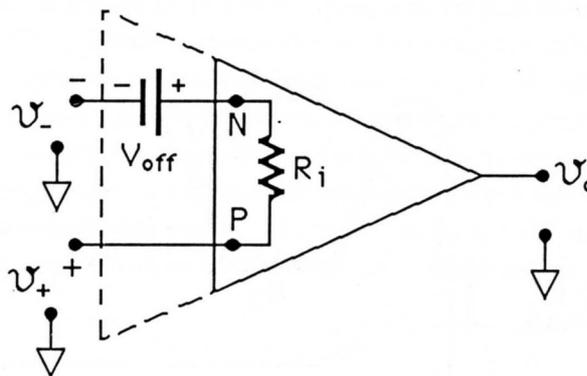


Fig.XV.27

In questa schematizzazione abbiamo infatti:

$$v_o = A(V_P - V_N) = A(v_+ - v_- - V_{off}) \quad (\text{XV.53})$$

La linea a tratteggio sta ad indicare che i terminali accessibili sono - e + (e non N e P). Usando questo schema equivalente è facile rendersi conto quale è l'effetto della tensione di offset in configurazioni di amplificatori reazionati. Ad esempio nella configurazione a operazione vera e proprio abbiamo lo schema riportato nella Fig.28:

* Come accennato all'inizio del capitolo non considereremo il fatto, per altro molto importante, che nei casi pratici la tensione di uscita dipende anche dalla somma $v_+ + v_-$; ammettiamo cioè che nelle nostre applicazioni l'effetto spurio associato a questa dipendenza sia meno importante degli altri che andiamo a considerare.

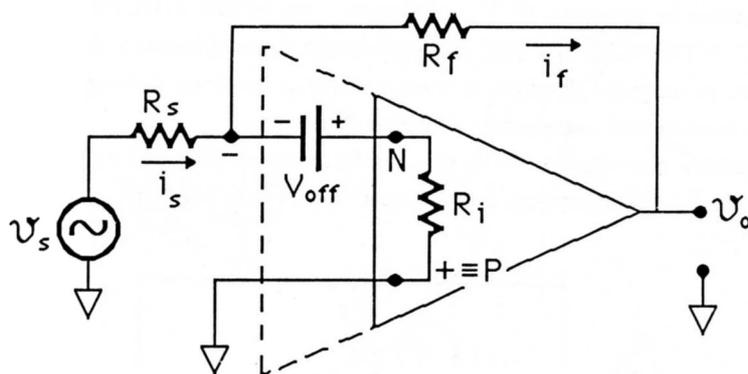


Fig.XV.28

Nell'ipotesi che $A \gg 1$, il terminale N deve trovarsi a massa e quindi il terminale $-$ sarà a $-V_{off}$. Avremo quindi

$$i_s = \frac{v_s + V_{off}}{R_s} \quad (XV.54)$$

$$i_s = i_f \quad (XV.55)$$

e conseguentemente:

$$v_o = -V_{off} - i_f \cdot R_f = -V_{off} - \frac{v_s + V_{off}}{R_s} \cdot R_f = -\frac{v_s R_f}{R_s} - V_{off} \frac{R_s + R_f}{R_s} \quad (XV.56)$$

Nella configurazione non invertente abbiamo invece la situazione di Fig.29:

$$v_- = v_s - V_{off} \quad (XV.57)$$

e quindi

$$v_- = v_s - V_{off} = v_o \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (XV.58)$$

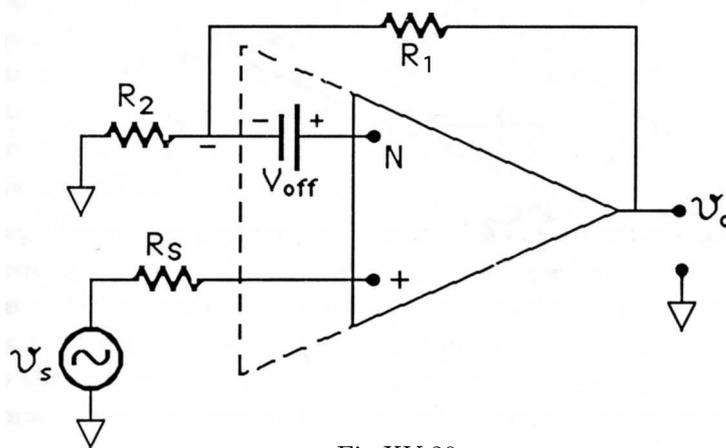


Fig.XV.29

Conseguentemente abbiamo:

$$v_o = (v_s - V_{off}) \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_2} \quad (XV.59)$$

In entrambe le configurazioni la presenza di V_{off} introduce un errore nella relazione fra v_o e v_s rispetto al caso in cui $V_{off} = 0$ (vedi (38) e (48) da confrontare rispettivamente con (56) e (59)). In entrambe le configurazioni la tensione di offset si mescola con la tensione del segnale e rischia, per v_s piccole, di dare un contributo sostanziale alla tensione di uscita.

Questi effetti spuri si possono eliminare nella prima configurazione (Fig.28) aggiungendo in serie all'ingresso + un generatore V_z che compensi esattamente V_{off} (vedi Fig.30).

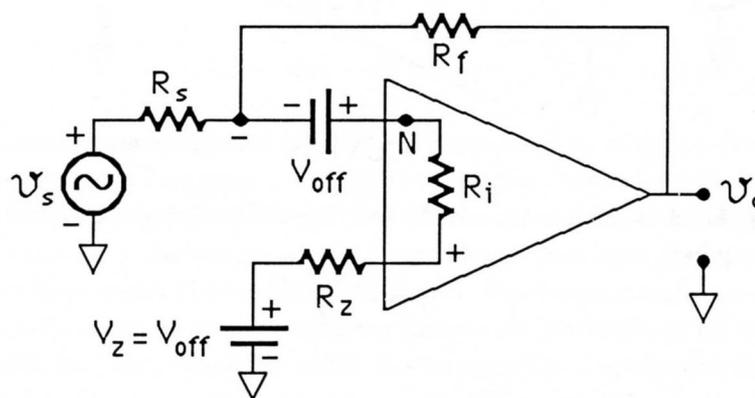


Fig.XV.30

In questo modo si ripristina una configurazione equivalente a quella di un amplificatore con tensione di offset $V_{off} = 0$. Il generatore V_z può ottenersi, mediante un forte rapporto di partizione, da una tensione di riferimento V_{REF} (Fig.31).

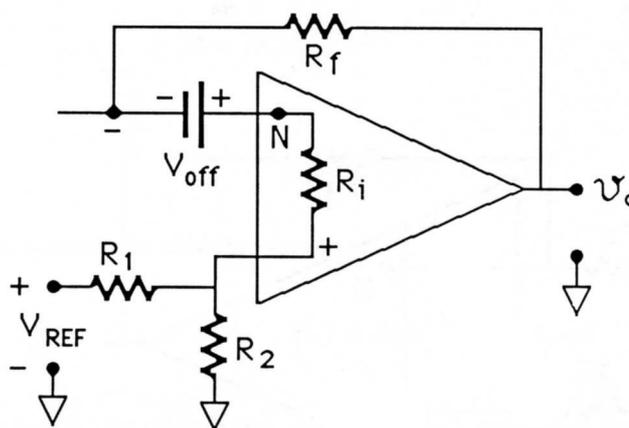


Fig.XV.31

E' facile rendersi conto che la resistenza interna R_z del generatore è di fatto influente (purché il guadagno A sia $\gg 1$ e R_i sia finita). Nella configurazione non invertente si potrebbe operare similmente (Fig.32) aggiungendo il generatore $V_z = V_{off} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ in serie a R_2 ; la resistenza interna di V_z deve essere questa volta $\ll R_2$, altrimenti occorre tenerne conto.

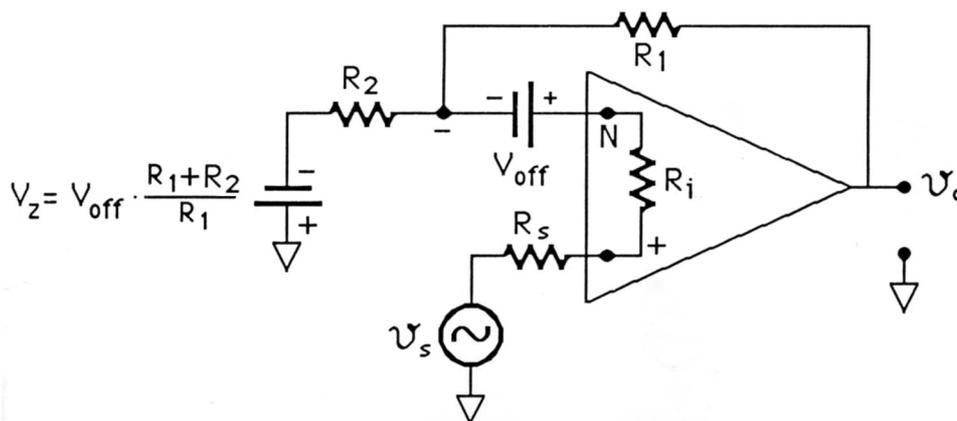


Fig.XV.32

Esistono altri sistemi, anche più diffusi dei precedenti, per eliminare i contributi della tensione di offset; tuttavia queste soluzioni rimuovono solamente il *valore statico* della tensione di offset e non possono compensare le instabilità della tensione di offset associate alla sua dipendenza dalla temperatura. Il costruttore, a questo riguardo, fornisce il valore tipico di $\frac{\Delta V_{off}}{\Delta T}$ (in μV per $^{\circ}C$), ovvero la variazione per grado centigrado della tensione di offset. Valori di V_{off} e $\frac{\Delta V_{off}}{\Delta T}$ per amplificatori abbastanza curati da questo punto di vista (LF157) sono: $|V_{off}| \simeq 2 \text{ mV}$, $\left| \frac{\Delta V_{off}}{\Delta T} \right| \simeq 5 \mu V/^{\circ}C$. Per costruire dei microvoltmetri è chiaro che occorre disporre di amplificatori base con caratteristiche decisamente superiori a queste, per rendere effettivamente possibile la misura di differenze di potenziale dell'ordine dei μV : la tecnica è in grado di produrre amplificatori con caratteristiche ottime riguardo alla tensione di offset (AMP-01): $|V_{off}| \simeq 15 \mu V$, $\left| \frac{\Delta V_{off}}{\Delta T} \right| \simeq 10^{-1} \mu V/^{\circ}C$, che si prestano perfettamente per il primo stadio di amplificazione di un microvoltmetro. Per la presenza di una V_{off} statica residua di qualche μV , un microvoltmetro deve comunque possedere un controllo sulla tensione di offset (del tipo di quelli in Fig.31 o 32 a seconda della configurazione). Mediante tale controllo si effettua l'azzeramento di v_o quando lo strumento è collegato ai terminali fra i quali deve misurare la ddp e i generatori della rete sono sostituiti dalle loro resistenze interne. A questo controllo di offset si dà sempre un margine di regolazione assai maggiore di quello necessario per compensare la sola tensione di offset del circuito amplificatore base: in questo modo è allora possibile correggere anche altri effetti spuri, per esempio le ddp termoelettriche e di contatto presenti nel circuito (vedi anche Cap.IV,§8).

Un'altra sorgente di errore negli amplificatori reali adoperati come blocchi base di circuiti operazionali è la *corrente di bias* (polarizzazione): questa è la corrente che entra nei due terminali di ingresso, in genere differente per i due terminali, dovuta al fatto che gli ingressi + e - sono costituiti dai gates di due Fet (vedi Cap.XVIII). Le correnti in questione (impropriamente dette "di bias") nient'altro sono che le correnti di polarizzazione inversa del *diodo gate-canale* contropolarizzato; come tali sono praticamente indipendenti da qualunque altro parametro, salvo la temperatura, dalla quale dipendono viceversa fortemente (tipicamente per Fet al silicio raddoppiano ad ogni aumento di $10^{\circ}C$).

Tenendo conto di queste correnti negli ingressi, l'amplificatore base va disegnato come in Fig.33. Il segno delle correnti sarà il medesimo per i due ingressi e dipende solo dal fatto se il Fet è canale n o canale p .

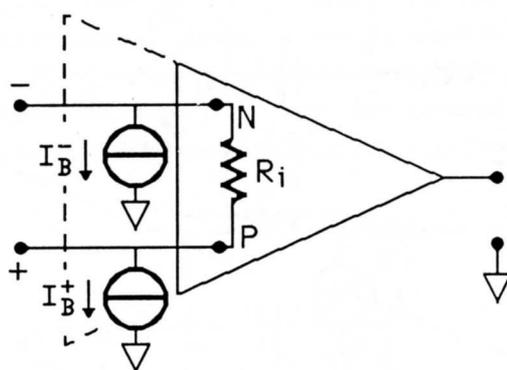


Fig.XV.33

Nello schema di sopra è stata omessa la tensione di offset, ma in genere anche essa andrà considerata. Valori tipici (LF157) delle correnti di bias (a 25°C) sono $\sim 50 \text{ pA}$, con una differenza fra le due correnti (*input offset current*) di un ordine di grandezza inferiore.

Guardiamo come queste correnti alterano il comportamento di un circuito reazionato, considerando dapprima la configurazione ad operazionale vero e proprio, cioè invertente (Fig.34).

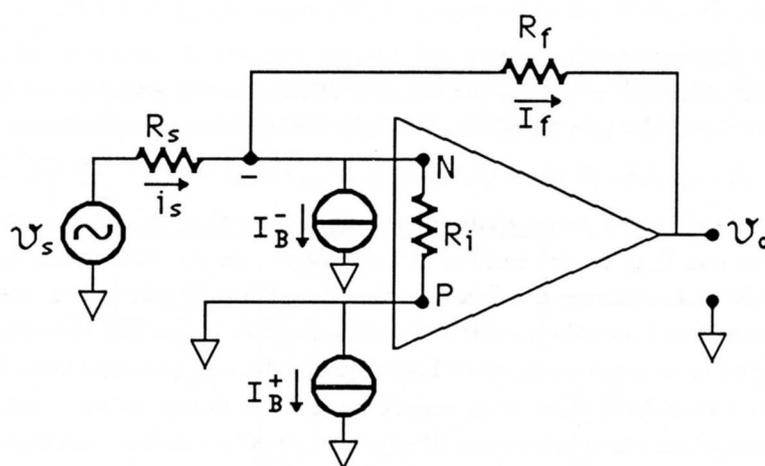


Fig.XV.34

Per quanto riguarda la corrente I_{B+} essa è inessenziale perché essa scorre dal terminale comune verso il terminale + e non provocherà alcuna caduta essendo zero la resistenza del collegamento. Se anche vi fosse una resistenza, essa, per dare qualche effetto misurabile, dovrebbe essere assai elevata, dato il valore di I_{B+} . Il problema è viceversa presente nel nodo - in quanto la presenza di I_{B-} fa sì che:

$$i_f = i_s - I_{B-} \quad (\text{XV.60})$$

e quindi

$$v_o = -i_s \cdot R_f + I_{B-} \cdot R_f \quad (\text{XV.61})$$

(la condizione che $v_- \simeq v_+$ resta ferma, perché $A \gg 1$). Abbiamo così :

$$v_o = -(i_s - I_{B-}) \cdot R_f = -v_s \frac{R_f}{R_s} + I_{B-} R_f \quad (\text{XV.62})$$

La relazione (60) è quella che interessa nel caso che si voglia realizzare un misuratore di corrente e si vede direttamente che la corrente di bias I_{B-} va a sommarsi algebricamente con i_s .

Nella configurazione non invertente (Fig.35), la corrente di bias I_{B+} modifica la tensione del terminale +.

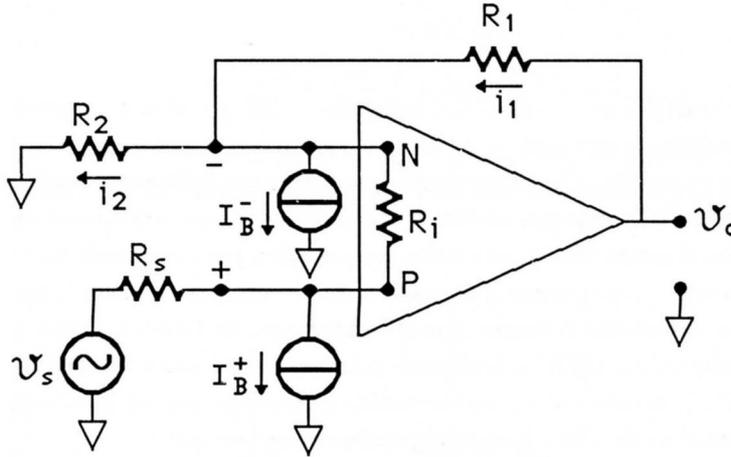


Fig.XV.35

Inoltre la presenza di I_{B-} fa sì che

$$i_2 = i_1 - I_{B-} \quad (\text{XV.63})$$

e quindi essendo

$$i_1 = \frac{v_o - v_s + I_{B+} R_s}{R_1} \quad (\text{XV.64})$$

e

$$i_2 = \frac{v_s - I_{B+} R_s}{R_2} \quad (\text{XV.65})$$

abbiamo finalmente:

$$v_o = v_s \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) - I_{B+} R_s \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} + I_{B-} R_1 \quad (\text{XV.66})$$

Anche qui si vede che prima di avere effetti sensibili sulla tensione v_o , il valore delle resistenze (principalmente R_s e R_1) deve essere assai elevato.

Torniamo alla configurazione ad operazionale, impiegata per misurare correnti (Fig.36).

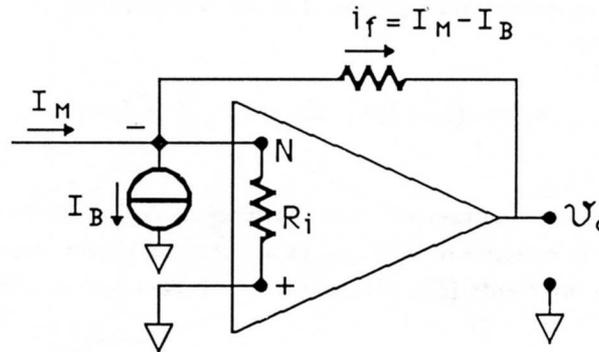


Fig.XV.36

Abbiamo visto che in realtà si misura non I_M , bensì $I_M - I_B$; per eliminare questo contributo in linea di principio basterebbe, tramite un opportuno generatore di corrente, inviare nel nodo $-$ un'altra corrente esattamente uguale a I_B . Purtroppo, come nel caso della tensione di offset, questa operazione toglie il contributo della corrente di bias solo fintanto che essa è costante; sappiamo viceversa che la corrente di bias dipende fortemente dalla temperatura per cui questo tipo di correzione rischia di essere assolutamente priva di senso a meno di non termostatare il tutto (oppure di inviare una corrente di correzione che abbia lo stesso tipo di andamento in funzione della temperatura). Amplificatori base particolarmente adatti a realizzare pAmperometri hanno correnti di bias anche assai inferiori al μA (a $25^\circ C$); spesso questa caratteristica si accompagna ad una tensione di offset e a una instabilità della tensione di offset non corrispondentemente basse.

Nelle varie applicazioni si tratterà di ottimizzare o l'una o l'altra delle caratteristiche (scegliendo cioè l'opportuno amplificatore base), per ridurre al minimo gli errori ad esse associati. Studiamo questo problema nel caso di un integratore operazionale. Sia la configurazione in esame quella di Fig.37.

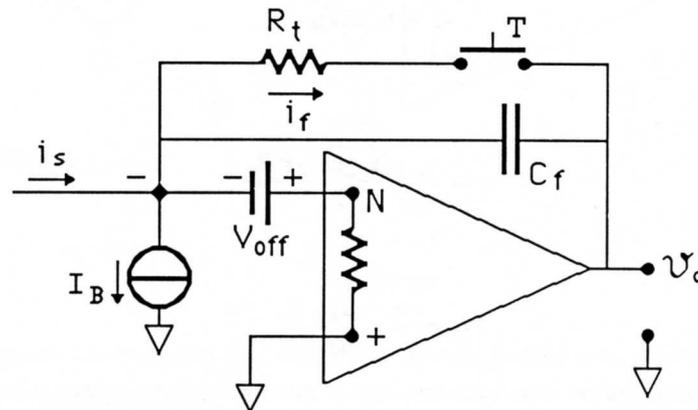


Fig.XV.37

I_B e V_{off} sono i residui *non compensati* della corrente di bias e della tensione di offset, cioè o le componenti erratiche o le variazioni associate agli inevitabili sbalzi termici. In ingresso è indicata semplicemente la corrente i_s ; nel seguito esprimeremo i_s in funzione delle grandezze misurabili, a seconda del tipo di eccitazione inviata all'integratore.

Calcoliamoci ora la tensione v_o : il nodo $-$ deve trovarsi in ogni istante alla tensione $-V_{off}$ (per

mantenere a zero la ddp fra i terminali N e $+$); inoltre $i_f = i_s - I_B$. Pertanto:

$$v_o(t) + V_{off} = -\frac{Q_f(t)}{C_f} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_f dt - \frac{Q(0)}{C_f} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_s dt + \frac{I_B}{C_f} t - \frac{Q(0)}{C_f} \quad (\text{XV.67})$$

Per il tempo $t = 0$ è scelto l'istante in cui si apre il tasto dopo averlo tenuto chiuso per un tempo sufficiente a scaricare C_f , quando la corrente i_s era ancora nulla (cioè il segnale è $\neq 0$ solo per $t > 0$). $Q(0)$ rappresenta la carica che il condensatore possiede all'istante dell'apertura del tasto. Il collegamento a resistenza molto bassa fra l'ingresso $-$ e l'uscita rende questi due elettrodi equipotenziali * e pertanto:

$$Q(0) = (v_o(0) + V_{off}) \cdot C_f = 0 \quad (\text{XV.68})$$

Abbiamo così :

$$v_o(t) = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_s dt + \frac{I_B}{C_f} \cdot t - V_{off} \quad (\text{XV.69})$$

Si tratta ora di vedere l'espressione di i_s nei vari casi che si possono presentare: consideriamo dapprima la condizione in cui si voglia scaricare un condensatore C_s su cui è accumulata una carica Q_{s0} (Fig.38).

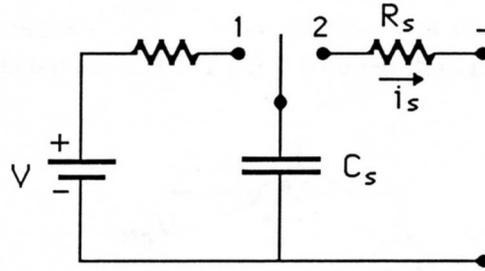


Fig.XV.38

Non si ridisegna tutto il circuito operativo, ma solo il terminale $-$ che si trova costantemente a tensione $-V_{off}$. Il condensatore sia inizialmente carico a tensione $V = \frac{Q_{s0}}{C_s}$; una volta che al tempo $t = \theta$ si stabilisce il collegamento con la resistenza R_s , esso si scaricherà secondo la legge:

$$Q_s = (Q_{s0} + V_{off}C_s) \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) - V_{off}C_s \quad (t > \theta) \quad (\text{XV.70})$$

come si può ricavare applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia C_s, R_s ($\tau = R_s C_s$); l'integrale di i_s fra l'inizio della scarica (per $t = \theta > 0$) e un tempo $(T + \theta) \gg \tau$ sarà dato da

$$\int_{\theta}^{T+\theta} i_s dt = Q_s(\theta) - Q_s(T + \theta) = Q_{s0} + V_{off}C_s = (V + V_{off})C_s \quad (\text{XV.71})$$

Quindi sostituendo la (71) nella (69) abbiamo:

$$v_o(T + \theta) = -(V + V_{off})\frac{C_s}{C_f} + \frac{I_B}{C_f} \cdot (T + \theta) - V_{off} \quad (\text{XV.72})$$

* stiamo ammettendo che V_{off} non cambi fra prima e dopo l'apertura di T e che il tasto non introduca ddp di contatto confrontabili con V_{off} ; quest'ultima ipotesi francamente può essere non molto realistica.

Entrambi gli effetti spuri (V_{off} , I_B) sono presenti; tuttavia mentre V_{off} contribuisce solo a modificare il valore della tensione di carica del condensatore C_s (pochi μV su qualcosa dell'ordine del Volt), la corrente di bias introduce una *deriva* nella tensione v_o e quindi un errore tanto più grande quanto più è grande T , cioè quanto più è lungo l'intervallo di tempo fra la commutazione del tasto su C_s e la lettura di v_o . In genere, in casi come quello ora descritto, questa deriva della tensione è un effetto relativamente piccolo. Infatti se mettiamo dei numeri realistici ($C_s = 1 \mu F$, $V = 1 V$, $R_s = 1 k\Omega$, $C_f = 1 \mu F$, $V_{off} = 5 \mu V$ e $I_B = 50 pA$) troviamo che la parte per così dire *regolare* di v_o , cioè $V \frac{C_s}{C_f}$, vale $1 V$, mentre $V_{off} \cdot \frac{C_s}{C_f} = 5 \mu V$ e $\frac{I_B}{C_f} T$ per ($T \simeq 10 s$) vale $5 \cdot 10^{-4} V$ molto maggiore del contributo di V_{off} , ma comunque ancora trascurabile in molti casi. Si può anche osservare che il rapporto *parte regolare/effetto spurio* non dipende da C_f poiché entrambi vengono scalati del medesimo fattore al variare di C_f . Si noti piuttosto che nei casi pratici possono intervenire effetti spuri molto più importanti della corrente di bias, ma con essa confondibili come sintomi: ad esempio un non perfetto isolamento dei due contatti (1 e 2) del tasto (Fig.38) può portare ad una corrente pari al rapporto fra V e la resistenza R_{is} di isolamento fra i due contatti che, entrando nel nodo $-$, si comporta come una corrente di bias. Riprendendo l'esempio di prima, se $V = 1 V$ e $R_{is} = 10^{10} \Omega$ (un valore ragionevole), tale corrente risulta di $100 pA$, maggiore di quella di bias.

Consideriamo ora il caso in cui i_s sia dovuta alla variazione di flusso di B in una bobina; il circuito di eccitazione è riportato in Fig.39 con $v_s = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$; supponiamo che la variazione di flusso $\Delta\Phi$ avvenga entro due limiti di tempo $\theta > 0$ e $T + \theta$, e che quindi $v_s(t) = 0$ per $t < \theta$ e per $t > T + \theta$.

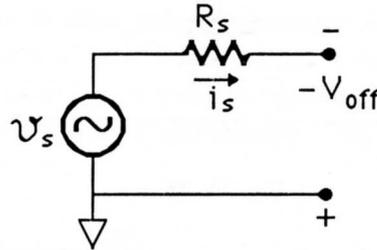


Fig.XV.39

Avremo così

$$i_s = \frac{v_s + V_{off}}{R_s} \quad (XV.73)$$

e quindi

$$\int_{\theta}^{T+\theta} i_s dt = \frac{1}{R_s} \int_{\theta}^{T+\theta} v_s dt + \frac{V_{off}}{R_s} \cdot T = -\frac{\Delta\Phi}{R_s} + \frac{V_{off}}{R_s} \cdot T \quad (XV.74)$$

Inserendo la (74) nella (69), che contiene ora un termine aggiuntivo pari a $\frac{V_{off}}{C_f R_s} \cdot t$, otteniamo per v_o :

$$v_o = \frac{\Delta\Phi}{R_s C_f} + \frac{1}{C_f} \left(I_B - \frac{V_{off}}{R_s} \right) \cdot (T + \theta) - V_{off} \quad (XV.75)$$

Il segno di $\Delta\Phi$ dipenderà dalla particolare condizione sperimentale, ma in genere siamo interessati al valore assoluto della variazione; il segno di I_B e V_{off} non è in genere sotto il nostro controllo e quindi in una fase di stima degli effetti sarà bene considerare pessimisticamente la loro combinazione. Si vede che a una risposta *regolare* dell'integratore, si aggiunge una deriva dovuta a V_{off} che molto spesso, se R_s non è sufficientemente grande, può dominare largamente rispetto al contributo di I_B : infatti supponendo di avere $V_{off} = 5 \mu V$, se $R_s = 1 k\Omega$ abbiamo $\frac{V_{off}}{R_s} \simeq 5 nA$ contro $I_B = 50 pA$; in queste condizioni, aumentare R_s non migliora la situazione (come cambiare C_f) poiché il rapporto

parte regolare/effetto spurio rimane costante.

La scelta di un particolare circuito base può quindi essere diversa a seconda delle applicazioni; occorre valutare i contributi di V_{off} e I_B , tenendo conto delle misure che con l'integratore vengono fatte. Gli esempi ora fatti suggeriscono comunque che, per applicazioni in cui si abbia in ingresso un generatore con bassa resistenza interna, diventa indispensabile ridurre la tensione di offset, mentre per alte resistenze del generatore di ingresso la cura maggiore va posta nel ridurre la corrente di bias. Prima di concludere con questi aspetti è opportuno ricordare che l'intervallo T in molti casi pratici (quelli che si presentano in laboratorio) è principalmente determinato dai tempi necessari per scaricare il condensatore C_f , commutare il tasto di C_s (o far variare il flusso di B) e poi compiere la lettura della tensione v_o , per esempio con un multimetro (il tempo τ di scarica di C_s in genere sarà assai piccolo, nel caso precedente $\sim 10^{-3}$ s); facilmente il tutto può richiedere qualche secondo. In un sistema di procedura elettronico in cui l'intervento umano fosse escluso e la lettura affidata a sistemi tipo *sample and hold*, questi tempi si riducono notevolmente e rendono il contributo degli effetti di deriva trascurabili anche in applicazioni di grande precisione.

Per completare il panorama delle fonti di indeterminazione nelle misure con un integratore operazionale, vanno citati i problemi associati al guadagno finito A e al rumore (e questi problemi sono generali per ogni applicazione, non valgono solo per l'integratore).

Il fatto che A sia finito fa sì che l'ingresso $-$ e l'ingresso $+$ non siano esattamente equipotenziali, ma si trovino a $\frac{v_o}{A}$ Volt; se $v_o \simeq 1$ V e $A \simeq 10^5$, ciò corrisponde ad avere una tensione di $10 \mu\text{V}$ in ingresso dello stesso ordine di V_{off} ; tale ddp avrà anche effetti simili a V_{off} , salvo il fatto che il suo valore cresce proporzionalmente all'uscita (e quindi complica un po' la quantificazione dell'effetto). La cura consiste ovviamente nell'aumentare A , cioè scegliere un amplificatore base con il guadagno A più alto possibile; di fatto però amplificatori con $A \gg 10^6$ non vengono costruiti, poiché, proprio a causa dell'alto guadagno, negli amplificatori reazionati che li utilizzano si innescano facilmente oscillazioni permanenti. Se siamo interessati ad applicazioni in bassa frequenza, riducendo la banda passante si può riuscire ad aumentare A di uno o due ordini di grandezza rispetto ai valori detti prima, senza avere oscillazioni e quindi si può ridurre sufficientemente anche questo effetto.

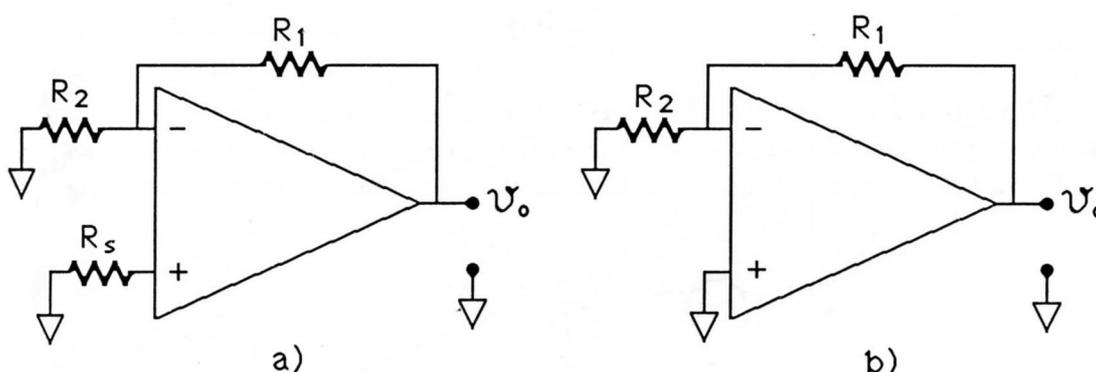


Fig.XV.40

Infine esaminiamo il problema del *rumore*, che stabilisce un limite al minimo segnale effettivamente misurabile: supponiamo di avere un amplificatore base con tensione di offset e corrente di bias uguali a zero (oppure perfettamente annullate); orbene, anche in queste ipotesi, circuiti come quelli in Fig.40a e 40b avrebbero una uscita non identicamente uguale a zero: precisamente, se osservassimo con un oscillografo v_o , troveremmo un andamento erratico di questa tensione, che si manterrebbe comunque a media nulla. Nella Fig.41 è riprodotta proprio una fotografia dell'immagine

che effettivamente si presenta su uno schermo oscillografico misurando la tensione v_o .



Fig.XV.41

Questa tensione fluttuante è il *rumore* dell'amplificatore ed è dovuto a vari contributi (temperatura finita, granularità della corrente ...) in genere assai complicati da trattare; quello che a noi interessa per il momento sapere, è che questo contributo è intrinsecamente presente e interessa tutta la banda passante dell'amplificatore. Il rumore può cioè scomporsi in componenti sinusoidali e si trova che l'ampiezza (media) di queste componenti dipende dalla frequenza e che non si annulla per nessun valore di essa. L'ampiezza di queste componenti è diversa per ogni tipo di amplificatore base e il costruttore dichiara quale è il rumore all'ingresso di quel particolare modello, dando la radice della cosiddetta *densità spettrale di rumore*:

$$\sqrt{\frac{\overline{v_R^2}(f)}{\delta f}} \quad (\text{XV.76})$$

dove $\overline{v_R^2}(f)$ è il quadrato del valore efficace delle componenti sinusoidali di tensione di rumore con frequenza compresa fra f e $f + \delta f$. Il rumore cioè lo si attribuisce (come la tensione di offset) ad un generatore di tensione presente all'ingresso di un amplificatore ideale esente da rumore (Fig.42).

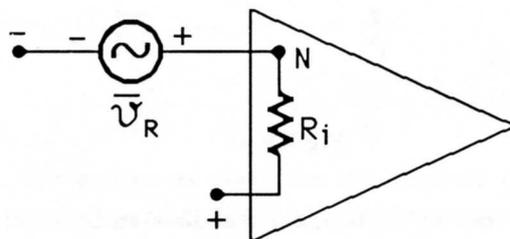


Fig.XV.42

Con $\overline{v_R}(f)$ nel seguito indicheremo il valore efficace della tensione di rumore integrata su una banda larga 1 Hz ($\delta f = 1 \text{ Hz}$) attorno a f ; esso quindi numericamente coincide con la radice della

densità spettrale di rumore a quella frequenza .
 Valori tipici sono (LF157):

$$f = 100 \text{ Hz} : \quad \sqrt{\frac{v_R^2}{\delta f}} = 15 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

$$f = 1000 \text{ Hz} : \quad \sqrt{\frac{v_R^2}{\delta f}} = 12 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

Sperimentalmente si trova che il rumore aumenta al diminuire della frequenza; per frequenze inferiori a 10 Hz si possono avere ampiezze dell'ordine dei μV in amplificatori particolarmente curati da questo punto di vista. Se non si prendono particolari precauzioni, le tensioni di uscita contengono sempre contributi di rumore che, solo se le ddp di ingresso sono relativamente grosse, saranno trascurabili. In quelle applicazioni in cui viceversa il rumore può dare un contributo importante, come ad esempio in un μ Voltmetro o in un pAmperometro, si sfrutta il fatto che le misure generalmente si riferiscono a grandezze continue o comunque molto lentamente variabili nel tempo: si può così limitare fortemente la banda passante dell'amplificatore a una frequenza di taglio superiore $f'_H \ll f_H$, con f_H definita nel §1, Fig.3 e praticamente eliminare tutte le componenti di rumore a frequenza più grande di f'_H . Per limitare la banda si può procedere come illustrato nella Fig.43a e 43b per le configurazioni invertente e non invertente rispettivamente; nella configurazione di Fig.43a si trova, per il segnale v_s :

$$v_o = -v_s \cdot \frac{Z_f}{R_s} = -v_s \cdot \frac{\frac{R_f}{1 + j\omega R_f C_f}}{R_s} = -v_s \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \quad (\text{XV.77})$$

cioè

$$|A_f| = \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_f^2 C_f^2}} \quad (\text{XV.78})$$

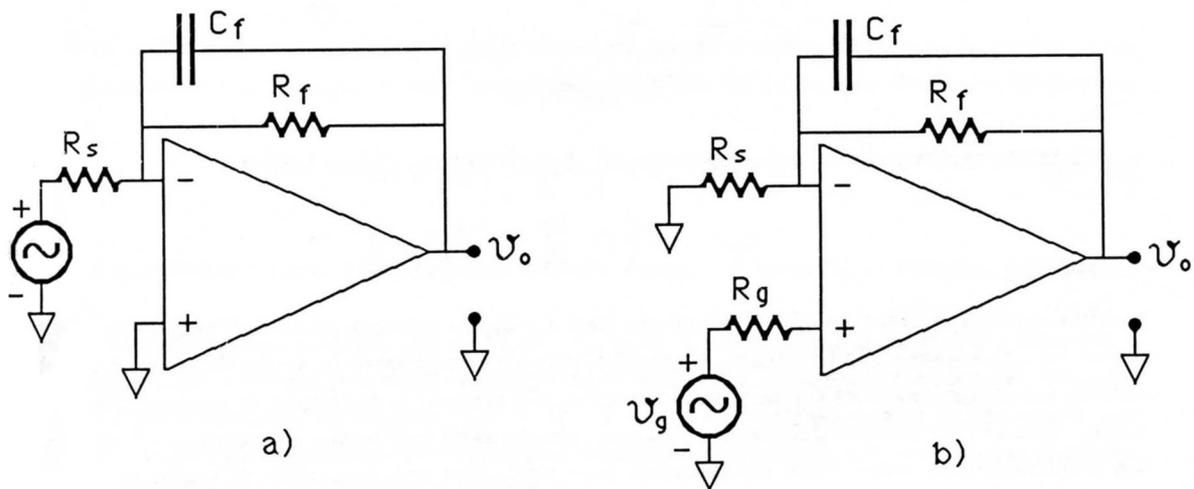


Fig.XV.43

Per il circuito di Fig.43b si ha per la risposta ad una eccitazione v_g :

$$v_g = v_o \left(\frac{R_s}{R_s + \frac{R_f}{1 + j\omega C_f R_f}} \right) \quad (\text{XV.79})$$

e pertanto

$$v_o = v_g \left(1 + \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \right) \quad (\text{XV.80})$$

$$\mathcal{A}_f = 1 + \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \quad (\text{XV.81})$$

Si vede così che il primo caso (vedi (77) e (78)) corrisponde alla risposta di un filtro passa basso con una frequenza di taglio superiore $f'_H = \frac{1}{2\pi R_f C_f}$; il secondo caso è leggermente diverso, poiché l'amplificazione \mathcal{A}_f tende, per $\omega \rightarrow \infty$, non a 0 come nel passa basso, ma a 1. Tuttavia ciò di fatto significa che, se $R_f/R_s \gg 1$, solo le componenti armoniche del segnale v_s o v_g con frequenza minore di f'_H vengono amplificate dai nostri sistemi, mentre le armoniche con $f \gg f'_H$ risultano sostanzialmente assenti in uscita. Se le eccitazioni sono ddp continue, esse risultano amplificate come se fosse $C_f = 0$. Questo è vero per i generatori esterni di segnale; il generatore equivalente di rumore \bar{v}_R si trova però in una configurazione topologicamente differente, la stessa in entrambi i casi (Fig.44).

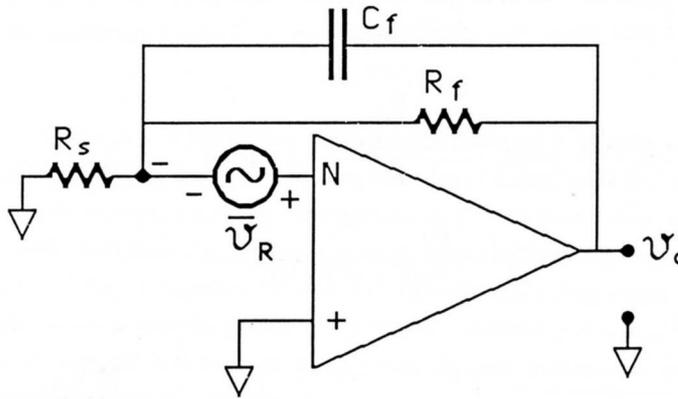


Fig.XV.44

Si trova, ragionando in maniera pressoché identica al caso ultimo trattato

$$v_o = -\bar{v}_R \left(1 + \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \right) \quad (\text{XV.82})$$

e quindi a parte la presenza di un contributo pari a $-\bar{v}_R$, la restante parte dell'amplificazione tende a zero all'aumentare della frequenza, cosicché il rumore complessivo in uscita diminuisce rispetto al caso in cui il condensatore C_f non fosse presente; ciò avviene in entrambe le configurazioni, e pertanto, essendo l'eccitazione del segnale continua, risulta assai migliorato il rapporto *segnale/disturbo*. Un μ Voltmetro da usare come rivelatore di zero può avere una frequenza di taglio superiore (ottenuta tramite il condensatore C_f) anche dell'ordine di qualche secondo. Ciò spiega la lentezza della risposta di strumenti di questo genere alle variazioni di tensione ΔV , che si hanno durante la procedura di azzeramento di un ponte; infatti un amplificatore di questo genere ha una risposta che, a parte costanti moltiplicative e il termine uguale a 1 nella configurazione non invertente, è identica ad un filtro passa basso; esso, ad una variazione brusca ΔV di tensione, risponde come $V_C = \Delta V [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$, $\tau = RC = \frac{1}{2\pi f'_H}$ (vedi Cap.XII,§2 e Cap.VI,§2). Le componenti residue, molto lente, di rumore sono osservabili solo quando lo strumento è posto nella massima sensibilità;

si osservano allora variazioni erratiche nell'indicazione, nonostante che il valore medio non si discosti sostanzialmente da zero.

Il generatore di tensione di rumore in ingresso non descrive completamente tutte le sorgenti di rumore del sistema; infatti, per avere una completa caratterizzazione del rumore del sistema, occorre introdurre, in parallelo agli ingressi, anche un generatore di corrente i_R con densità spettrale $\sqrt{\frac{i_R^2}{\delta f}}$. Per valutare gli effetti complessivi di tutte le sorgenti di rumore nel sistema reazionato dovremo considerare lo schema della Fig.45.

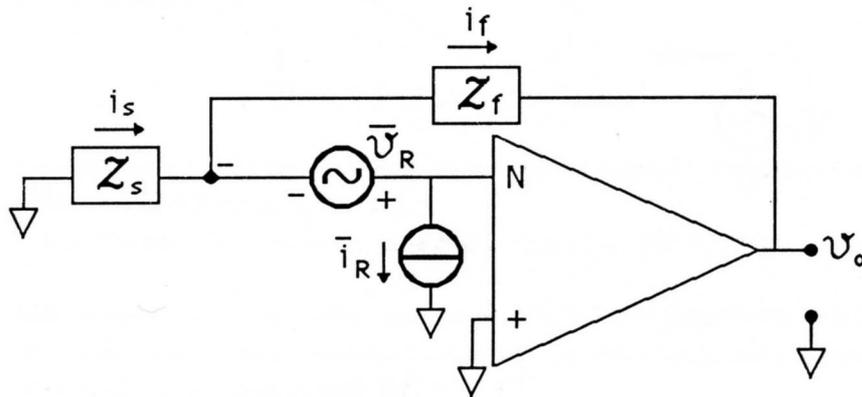


Fig.XV.45

Sempre nell'ipotesi semplificativa di avere $A \rightarrow \infty$, per la tensione di rumore in uscita troveremo (vedi ragionamenti fatti per il caso formalmente identico della tensione di offset e la corrente di bias) :

$$v_{or}^2 = \overline{v_R^2} \left| \frac{Z_f + Z_s}{Z_s} \right|^2 + \overline{i_R^2} |Z_f|^2 \quad (\text{XV.83})$$

Si noti che si sommano i quadrati dei valori efficaci, essendo le sorgenti di rumore, per ipotesi, incoerenti.

Prendendo dei valori tipici (LF157) ($\overline{v_R} = 15 \text{ nV}$, $\overline{i_R} = 10^{-2} \text{ pA}$ su una banda di 1 Hz centrata a 100 Hz) si trova che il rumore associato al generatore di tensione è largamente dominante: dovremo infatti avere una impedenza di modulo $|Z_f| > 10^6 \Omega$ e $|Z_s|$ dello stesso ordine di grandezza per osservare un contributo del rumore di corrente confrontabile con quello di tensione; questo risultato è tipico per amplificatori integrati con ingressi a Fet.

7.— Il ripetitore di tensione come un potenziometro ad azzeramento automatico

Consideriamo un ripetitore di tensione realizzato con un amplificatore avente guadagno base $A \gg 1$ (Fig.46).

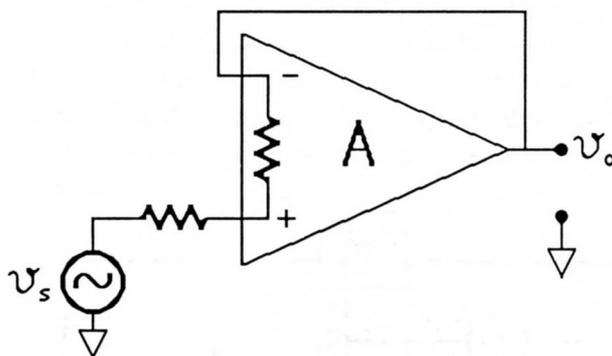


Fig.XV.46

La tensione di uscita v_o è tale per cui:

$$(v_s - v_o)A = v_o \quad (\text{XV.84})$$

cioè

$$v_o = \frac{Av_s}{1 + A} \quad (\text{XV.85})$$

e quindi se $A \gg 1$, $v_o = v_s$ come avevamo già dimostrato (vedi (48) con $R_2 \gg R_1$). Il punto che vogliamo ora mettere in evidenza è che il sistema può essere interpretato in modo suggestivo come un'applicazione del metodo potenziometrico di opposizione di due fem, avente però una procedura automatica di azzeramento: infatti qualunque variazione del segnale v_s provoca una variazione dello stesso segno in uscita, e quindi sull'ingresso $-$, che tende a compensare la divaricazione, fra le tensioni dei terminali, che l'aveva provocata. Le due fem in ingresso vengono cioè mantenute uguali (in realtà ad una differenza di potenziale molto piccola: $\frac{v_s}{A}$) esattamente come la tensione da misurare e quella di confronto in un potenziometro. Abbiamo già visto che nel caso del ripetitore di tensione è proprio il bilanciamento delle ddp agli ingressi che rende la corrente derivata dal generatore v_s comunque assai piccola, cioè molto elevata la resistenza verso massa, anche se R_i non è particolarmente grande: e questo è quanto accade anche nel metodo potenziometrico di confronto di due fem, nel quale infatti la corrente all'equilibrio è nominalmente zero.

Altre applicazioni dei circuiti amplificatori operazionali saranno viste nel seguito; in particolare vedremo come si possono realizzare *diodi di precisione* e *generatori di corrente* pressoché ideali. Questi argomenti saranno trattati quando si parlerà rispettivamente dei diodi a semiconduttore (Cap.XVII) e dei transistori ad effetto di campo (Cap.XVIII).

Prima di concludere questo capitolo è bene soffermarsi su un'implicita ipotesi che sta alla base di tutta la trattazione dell'argomento di questo capitolo: precisamente che un amplificatore reale possa sempre caratterizzarsi dal punto di vista circuitale come una rete lineare. Ciò è sicuramente una buona, in molti casi ottima, approssimazione, ma sicuramente resta una *schematizzazione*.

Se avessimo voluto compiere una descrizione accurata dell'amplificatore considerando anche le non linearità della sua risposta (ad esempio una dipendenza del fattore di amplificazione A dal valore del segnale di ingresso o di uscita), la trattazione si sarebbe oltremodo complicata. Vogliamo solo ricordare che tali effetti *comunque* esistono per cui, dal punto di vista pratico, l'operazione di amplificazione comporta sempre, almeno ad un certo livello, anche la *distorsione* del segnale amplificato: ovvero, in termini di analisi di Fourier, un segnale sinusoidale v_i in ingresso all'amplificatore con il contributo di una sola armonica fondamentale ω_F , non è accompagnato da un segnale amplificato v_o caratterizzato dalla sola componente di frequenza ω_F (come ci aspetteremmo se l'amplificatore equivallesse ad una rete puramente lineare), ma v_o conterrà piuttosto anche componenti armoniche diverse con ampiezze non nulle. Un po' schematicamente si può dire, e ne vedremo il perché quando faremo un esempio concreto di amplificatore (Cap.XVIII), che le distorsioni del segnale di uscita saranno tanto più marcate, quanto più vicina sarà l'ampiezza della ddp amplificata alle tensioni di alimentazione dell'amplificatore .

NOTA BIBLIOGRAFICA

Esistono numerosissimi testi ben fatti sull'argomento del capitolo. Per citarne uno dei più diffusi, precisi e chiari : **MI 72** (Cap.13, 15, 16).

Per i concetti fondamentali della reazione negativa il Cap.11 di **TE 57**, è esemplare per sintesi e chiarezza.

L'influenza della tensione di offset, della corrente di bias e del rumore nelle misure di basso livello ed alta precisione è studiata in maniera elementare, ma esauriente, nel già citato "Low Level Measurements" della Keithley Instruments Inc.

IL CONVERTITTORE ANALOGICO-DIGITALE

1.- Introduzione

In questo capitolo descriveremo alcuni tipi di *Convertitore analogico-digitale* (CAD) impiegati nella strumentazione di misura in continua o in bassa frequenza; si tratta quindi di convertitori in cui sono ottimizzate caratteristiche di *linearità integrale* e di *precisione*, non il *tempo di conversione*. Faremo anche un esempio in qualche modo “complementare”, cioè di un convertitore veloce, ma non particolarmente preciso. Prima di illustrare i principi di funzionamento dei CAD è importante definire alcuni termini e descrivere alcuni dispositivi presenti comunemente in un CAD.

Clock: si intende un segnale ripetitivo del tipo in Fig.1 caratterizzato da una frequenza $f_C = \frac{1}{T_C}$ e una ampiezza V rispetto a zero; valori tipici di V possono essere dell'ordine di alcuni *Volt*.

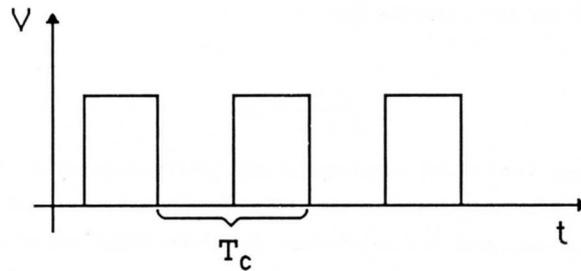


Fig.XVI.1

Switch (interruttore) elettronico: un contatto che si apre o si chiude (cioè presenta resistenza infinita o zero fra due terminali 1-2) a seconda del valore della ddp V_C fra un terminale di controllo C e uno di riferimento. Come simbolo possiamo usare quello in Fig.2.

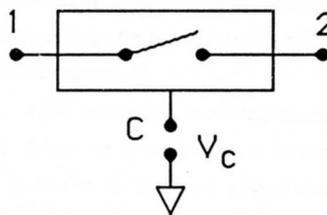


Fig.XVI.2

Un sistema di questo genere si può realizzare tramite un Fet (Cap.XVIII); a seconda che si tratti di un Fet *canale n* o di un Fet *canale p* la apertura avverrà con una tensione V_C negativa o positiva

rispettivamente, mentre il tasto risulterà chiuso, per entrambi i tipi di Fet, quando $V_C = 0$; affinché lo stato di apertura e chiusura dell'interruttore dipenda solo dal valore di V_C , i terminali 1 e 2 della Fig.2 devono trovarsi a potenziali assai prossimi a quello del riferimento in ogni condizione di lavoro (vedi Cap.XVIII). Facendo ricorso anche ad altri tipi di transistori a effetto di campo (MosFet a *depletion* e a *enhancement*), si riescono a costruire interruttori elettronici che si dispongono in chiusura e apertura (o *viceversa*) a seconda che la ddp V_C si trovi nell'intorno di 0 V e 5 V; negli esempi che faremo nei prossimi paragrafi non ci soffermeremo a precisare il tipo di interruttore adoperato per quella certa funzione, ma specificheremo soltanto la relazione che intercorre fra lo stato di apertura e chiusura e il valore di V_C .

Comparatore: si tratta di un *amplificatore differenziale* (Fig.3) con guadagno $A \gg 1$ in cui il terminale dell'ingresso + si trova ad una tensione di riferimento V_R .

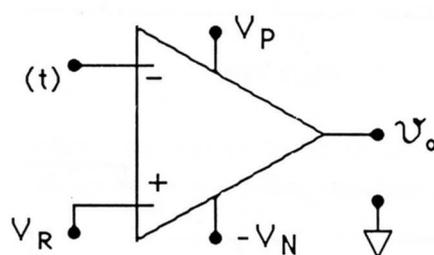


Fig.XVI.3

Quando la tensione $v(t)$ è minore di V_R la tensione v_o è positiva [$v_o = A(v_+ - v_-)$], mentre quando $v(t)$ è maggiore di V_R , l'uscita andrà negativa. Solo nel caso in cui le due tensioni di ingresso siano identiche l'uscita v_o si trova a zero. Un amplificatore non progettato per funzionare da comparatore, per differenze anche piccole fra $v(t)$ e V_R presenta una tensione di uscita molto vicina alle tensioni di alimentazione ($+V_P$ o $-V_N$) e, come si dice, *satura*; si trova che ciò compromette la prontezza con la quale l'uscita v_o cambia valore in corrispondenza dell'attraversamento del valore V_R da parte della tensione $v(t)$; nei circuiti progettati per funzionare da comparatori si fa in modo che l'uscita sia comunque limitata fra due valori di tensione V^+ e V^- lontani dalla saturazione; in questo modo il sistema è capace di reagire prontamente al cambiamento di segno della differenza $v(t) - V_R$. Con riferimento alla Fig.4, la tensione v_o passa da uno stato stazionario all'altro nell'istante in cui la tensione $v(t)$ assume momentaneamente il valore V_R della tensione all'altro terminale. I livelli V^+ e V^- dipendono dal tipo di comparatore e non sono necessariamente uno positivo e l'altro negativo; spesso lo stato basso corrisponde a una tensione prossima a 0 V.

Contatore (a N bit): Un contatore binario a N bit è un dispositivo elettronico con un terminale di ingresso, detto di *Clock*, al quale si può applicare un clock; sugli N terminali di uscita, secondo un criterio del tipo visto nel Cap.XIV,§2, in ogni istante è composto il numero (binario) di oscillazioni compiute dal segnale di clock a partire dall'istante in cui il numero era costituito da N zeri. Ciò si realizza con N moduli base detti *bistabili* o *flip-flop* posti in cascata, cioè con l'uscita di uno collegata con l'ingresso del successivo. Ognuno di questi moduli ha le seguenti caratteristiche (Fig.5):

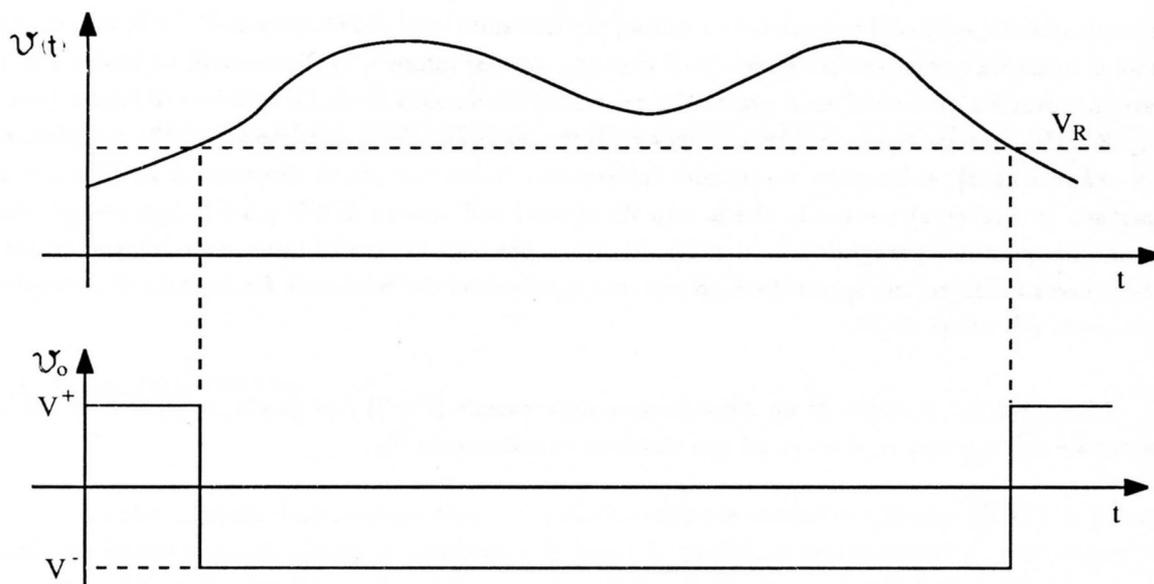


Fig.XVI.4

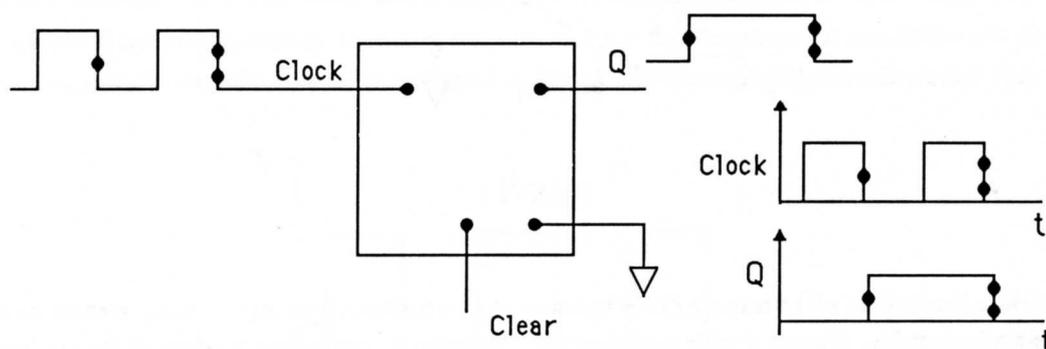


Fig.XVI.5

L'uscita Q del circuito può assumere solo due stati stazionari di tensione (identificabili simbolicamente come "0" e "1") per esempio $0 V$ e $5 V$ (nel caso della cosiddetta logica TTL "0" corrisponde a $V < 0.8 V$, "1" a $V > 2 V$). La transizione fra l'uno e l'altro di questi stati avviene quando il segnale di $Clock$ compie una transizione dal livello alto di tensione (diciamo $5 V$) a quello basso (diciamo $0 V$). Applicando una tensione definita (per esempio $0 V$) al terminale di $Clear$, si può forzare l'uscita Q del bistabile a "0" ovvero -secondo la nostra convenzione- $0 V$. Se colleghiamo N bistabili in cascata, con l'uscita Q di uno collegata con l'ingresso $Clock$ del successivo, abbiamo realizzato un contatore binario a N bit, il numero binario essendo composto dall'insieme delle uscite Q degli N contatori (Fig.6). Infatti, supponiamo di aver portato a zero le uscite Q di tutti i bistabili tramite il terminale $Clear$ e quindi di applicare un segnale di clock all'ingresso omonimo del primo flip-flop; all'atto della prima transizione verso il basso del primo impulso di clock, l'uscita Q_1 del primo bistabile andrà a "1"; tale transizione è inefficace nei confronti del bistabile successivo. La uscita Q_2 viceversa farà la transizione "0" \rightarrow "1" quando il secondo fronte discendente dell'impulso di clock ribalterà l'uscita del primo bistabile facendola passare da "1" a "0"; avremo così "0" sul primo bistabile e "1" sul secondo e ancora "0" su tutti gli altri. Ragionando così anche per gli impulsi

successivi di clock ci si rende conto che il numero binario corrispondente a M ($< 2^N - 1$) impulsi di clock è composto dalle uscite Q ordinate dei bistabili del contatore, a ognuna delle quali è quindi associato un bit. “Ordinate” si riferisce al fatto che il primo flip-flop dà il bit meno significativo (LSB, *least significant bit*), l’ultimo il bit più significativo (MSB, *most significant bit*).

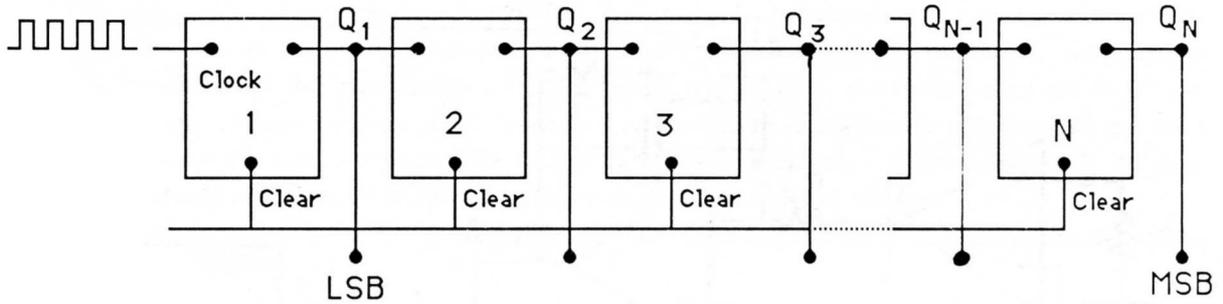


Fig.XVI.6

Monostabile: è un dispositivo che in risposta ad un impulso di tensione in ingresso, anche estremamente rapido, genera all’uscita un segnale di ampiezza V (per esempio 5 V) e durata T_M (Fig.7).

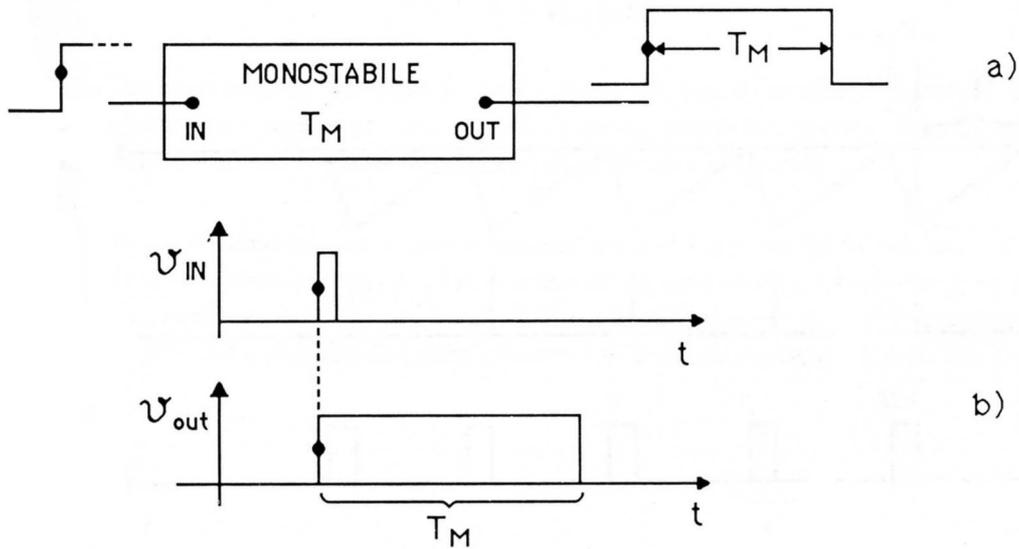


Fig.XVI.7

Il motivo per cui l’impulso di ingresso (detto *trigger*) può anche essere molto più breve della durata T_M , è che l’ingresso del monostabile è sensibile alle transizioni “0”→“1” e non a quelle “1”→“0” (o viceversa, a secondo del tipo di monostabile).

2.- Il Convertitore analogico-digitale basato sulla conversione tensione-frequenza

Supponiamo di avere il seguente circuito (Fig.8a).

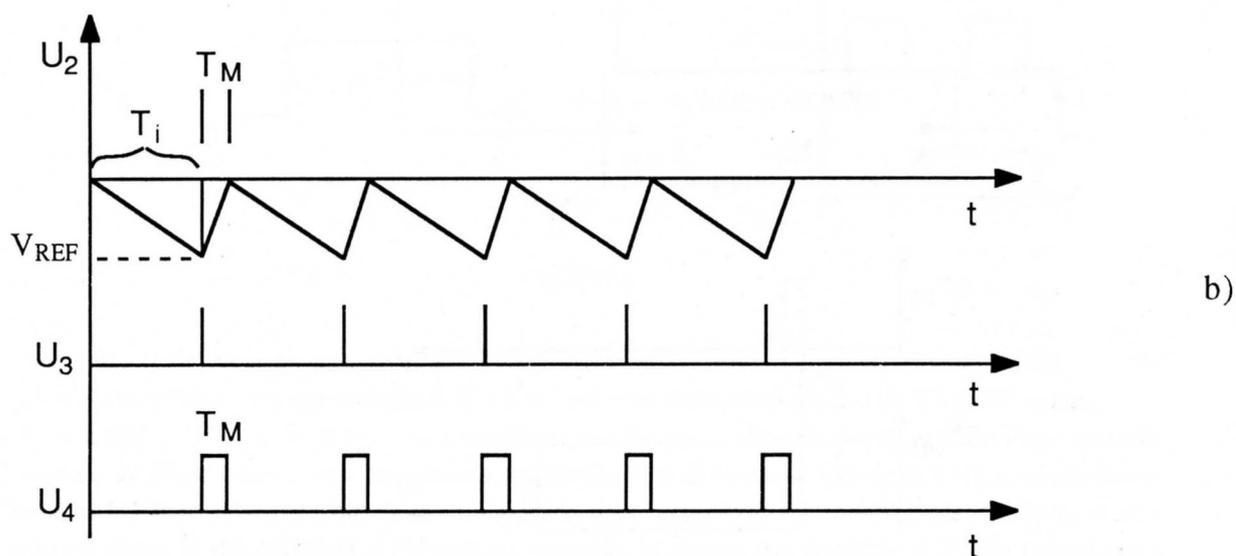
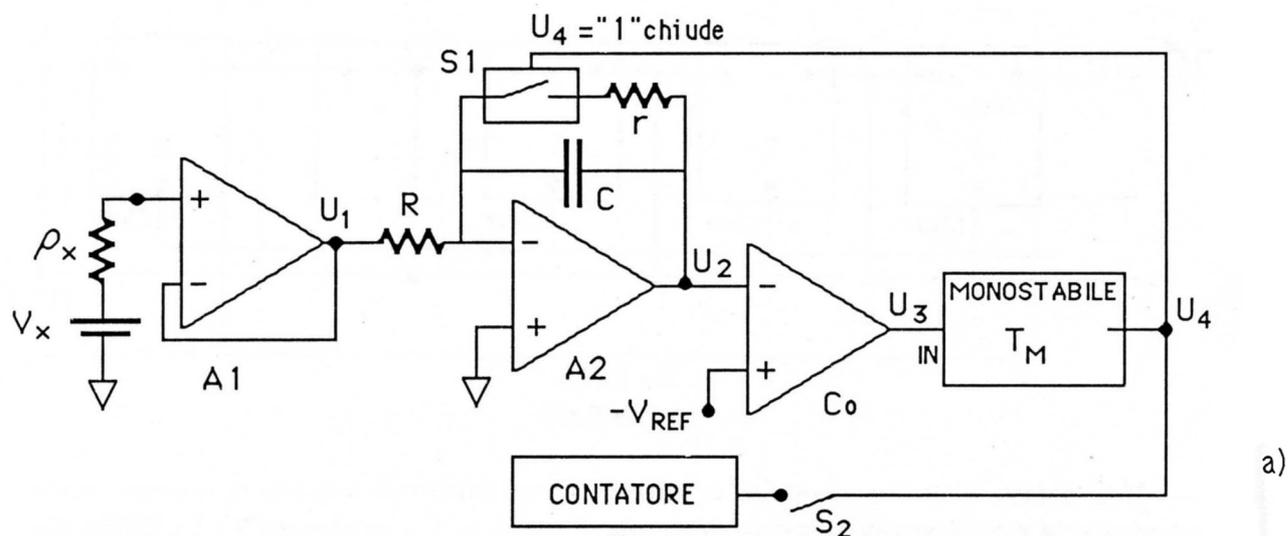


Fig.XVI.8

A1 è un ripetitore di tensione che invia all'integratore successivo A2 una corrente $I = V_x/R$. A2 è un integratore la cui uscita comanda il comparatore Co. Supponiamo di trovarci nella condizione in cui U_2 è negativo, ma in valore assoluto minore di V_{REF} (Fig.8b): l'uscita U_3 del comparatore è nello stato basso, U_4 nello stato logico "0" e lo switch S1 aperto, vale a dire A2 sta integrando la tensione $V_x = U_1$; l'uscita U_2 diminuisce linearmente in funzione del tempo:

$$U_2 = -\frac{V_x}{RC}t \quad (\text{XVI.1})$$

(l'origine dei tempi è scelta come in Fig.8b).

Quando, al tempo

$$T_i = \frac{V_{REF}}{V_x} \cdot RC \quad (XVI.2)$$

il segnale U_2 raggiunge il valore $-V_{REF}$, l'uscita U_3 del comparatore passa ad una tensione positiva (stato logico "1"): tale transizione fa scattare l'uscita U_4 del monostabile al valore positivo e pertanto, chiudendo lo switch $S1$, provoca la scarica del condensatore C . La durata T_M dell'impulso in U_4 , caratteristica del monostabile, è scelta molto minore di T_i ma molto maggiore di rC per assicurare una completa scarica di C . Quando il condensatore si è scaricato e la tensione di uscita dell'integratore è a zero, il monostabile compie la transizione inversa e riapre il tasto $S1$; $A2$ ricomincia pertanto ad integrare la corrente I e il ciclo si ripete indefinitamente.

Nella nostra ipotesi ($T_M \ll T_i$), la frequenza di ripetizione della forma d'onda all'uscita del monostabile è data da:

$$f = \frac{1}{T_i} = \frac{V_x}{V_{REF}} \cdot \frac{1}{RC} \quad (XVI.3)$$

corrispondente al numero di transizioni che l'uscita U_4 compie in un secondo.

Il circuito ora descritto è detto *Convertitore tensione-frequenza*; da esso, molto facilmente, si può ottenere un Convertitore analogico-digitale. Infatti basta inviare il segnale U_4 ad un contatore per un tempo definito T per registrare su di esso un numero di conteggi N_c pari a:

$$N_c = f \cdot T = \frac{V_x}{V_{REF}RC} \cdot T \quad (XVI.4)$$

Nella Fig.8a abbiamo indicato $S2$ come un interruttore meccanico, mentre ovviamente si tratterà di uno switch elettronico aperto per una durata di tempo molto ben precisa, definita tramite un orologio di precisione contenuto nello strumento (un oscillatore al quarzo).

L'uscita di questo convertitore è quindi proporzionale al rapporto fra la tensione da misurare V_x e una tensione di riferimento V_{REF} (cioè si tratta di un convertitore a rapporto); un difetto di questo tipo di convertitore è che la sua taratura dipende dal valore di R , C e T e pertanto la sua accuratezza dipende dalla stabilità di queste grandezze in funzione del tempo e della temperatura.

3.— Il Convertitore a pendenza duale o a doppia rampa

Questo CAD è particolarmente adatto all'impiego nei multimetri per le caratteristiche di precisione che lo contraddistinguono e per l'indipendenza della sua taratura dalla stabilità di componenti, quali resistenze e capacità (a differenza dall'esempio del paragrafo precedente).

Il principio su cui tale convertitore (a N bit) si basa è spiegato con riferimento alla Fig.9.

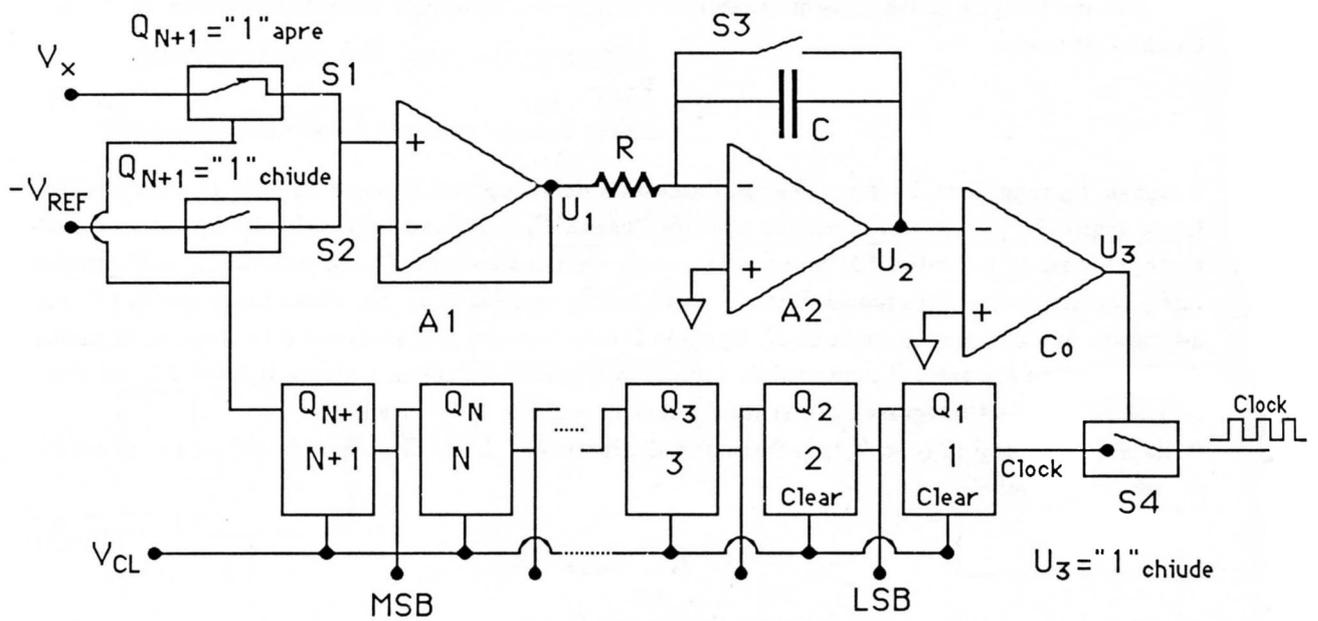


Fig.XVI.9

All'istante $t = 0$ si apre lo switch $S3$ che ha mantenuto scarico il condensatore C , e si rimuove la tensione V_{CL} applicata sui terminali *Clear* dei flip-flop che li forzava a "0" (*Reset*). Queste funzioni sono compiute automaticamente, mediante dispositivi elettronici, dal convertitore; non entriamo in questi dettagli che sono inessenziali per i nostri scopi. Essendo tutte le uscite degli $N + 1$ flip-flop a "0" e in particolare quella dello $(N + 1)$ -esimo, lo switch $S1$ è chiuso (e $S2$ aperto) e la tensione da misurare V_x è applicata all'integratore tramite il buffer $A1$. Pertanto la tensione U_2 comincia a decrescere linearmente col tempo: (Fig.10)

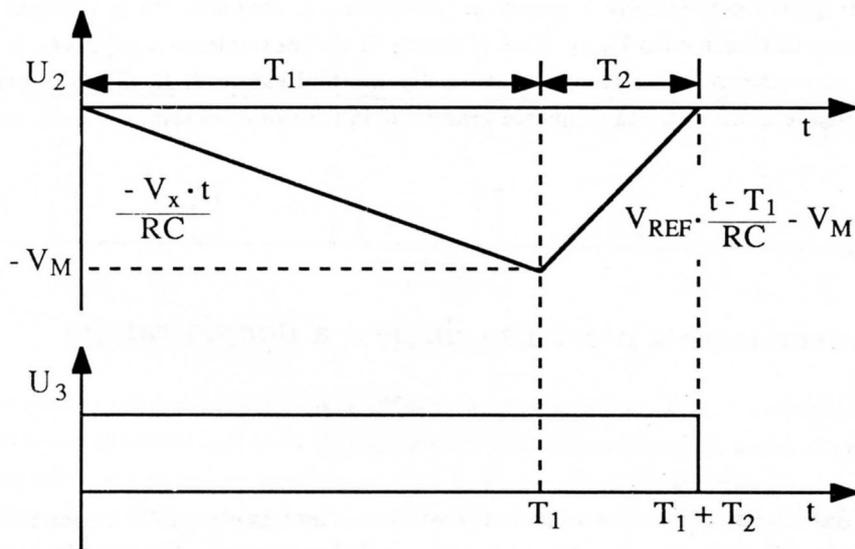


Fig.XVI.10

$$U_2 = -\frac{V_x}{RC} \cdot t \quad (\text{XVI.5})$$

Il comparatore è collegato in modo che, se la tensione U_2 è negativa, la sua uscita è a “1” e tiene chiuso l’interruttore $S4$ consentendo agli impulsi di clock provenienti da un oscillatore al quarzo (quindi molto ben stabile in frequenza) di essere registrati dal contatore. Pertanto mentre il segnale U_2 decresce secondo la (5), il contatore registra il numero delle oscillazioni del clock; il processo si arresta quando è passato un tempo T_1 corrispondente a 2^N oscillazioni del segnale di clock ($T_1 = 2^N \cdot T_c$ con T_c periodo dell’impulso di clock): infatti quando il contatore ha accumulato questo numero, tutti i bit (le uscite Q) sono “0”, meno il bit $N + 1$ (l’uscita Q_{N+1}) che è l’unico a trovarsi nello stato “1”; quando tale uscita assume il valore “1”, si apre $S1$ e si chiude $S2$ e la tensione di riferimento (negativa) $-V_{REF}$ viene applicata all’integratore. La tensione $-V_M$ raggiunta dalla tensione U_2 è data da:

$$-V_M = -\frac{V_x \cdot T_1}{RC} = -\frac{V_x}{RC} \cdot 2^N \cdot T_c \quad (\text{XVI.6})$$

Dall’istante T_1 in poi il condensatore inizia a perdere la carica accumulata, la tensione U_2 prende cioè a crescere linearmente con una pendenza pari a $\frac{V_{REF}}{RC}$. Poiché $V_{REF} > V_x$ (V_x deve soddisfare a questa condizione affinché si possa avere una conversione) il tempo T_2 che il segnale impiega per tornare a zero a partire dal valore $-V_M$ è minore di T_1 . Pertanto, quando al tempo $T_1 + T_2$, U_2 vale 0 e l’uscita del comparatore fa la transizione “1” \rightarrow “0” e blocca il segnale di clock, sui primi N bit del contatore sarà registrato un numero α pari a $\frac{T_2}{T_c}$; infatti al tempo $t = T_1$ i primi N bit si trovavano a “0” e da quel momento in poi essi registrano i conteggi afferenti alle oscillazioni successive.

Pertanto essendo $T_2 = \frac{V_M}{V_{REF}} \cdot RC$, in base alla (6) avremo:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_c} = \frac{V_x}{V_{REF}} \cdot 2^N \quad (\text{XVI.7})$$

In un multimetro che utilizza questo tipo di CAD, quando il comparatore blocca gli impulsi di clock, il convertitore abilita anche il trasferimento del numero α dal contatore al display. Successivamente vengono eseguite le seguenti operazioni: chiusura del tasto $S3$, messa a 0 della tensione sui terminali *Clear* di tutti i bistabili (e quindi azzeramento di tutte le uscite Q), chiusura di $S1$ e $S4$, apertura di $S2$. A questo punto inizia un’altra conversione.

Rispetto al caso del convertitore tensione-frequenza, il numero risultante dalla conversione dipende solo dal rapporto fra V_x e V_{REF} , a patto che entro il tempo $T_1 + T_2$ (frazioni di secondo) R , C e T_c restino stabili (e questo non è un requisito particolarmente difficile da soddisfare). Il tempo di conversione ($T_1 + T_2$) è sempre minore di $2^{N+1} \cdot T_c$, che per valori tipici di $T_c \simeq 10 \mu s$ e per $N = 15$ significa minore di $\sim 0.7 s$.

Il convertitore è un tipico convertitore a rapporto e l’uscita numerica può rappresentare direttamente (a parte il punto decimale) la tensione V_x purché V_{REF} sia, anch’esso a parte il punto decimale, uguale a 2^N . Di fatto nei moderni multimetri questo tipo di problema non si pone neppure poiché essi contengono un microprocessore che prende cura di fare tutte queste trasformazioni di scala, prima di trasferire i dati dal convertitore al display; in altri termini, quando è presente un microprocessore, i dati dal convertitore passano al microprocessore e solo successivamente al display.

Esiste anche un’altra fase, assai importante, nel processo di conversione, quella cosiddetta di *auto-zero*. Senza entrare nei dettagli, si tratta in sostanza di una fase immediatamente precedente la conversione vera e propria in cui il convertitore mette a massa l’ingresso ($V_x = 0$) e memorizza gli offset dei vari amplificatori e comparatori, così poi da tenerne conto nella conversione seguente.

E' anche presente un sistema automatico per adeguare il CAD alla polarità della tensione di V_x ; lo strumento è quindi in grado di convertire tensioni sia positive, sia negative.

4.— Il Convertitore ad approssimazioni successive

Acceniamo qui al principio di funzionamento del *Convertitore ad approssimazioni successive o a pesiera*. Si tratta di un convertitore particolarmente veloce che però richiede molta cura nella sua messa a punto, principalmente a causa della presenza di componenti la cui precisione e stabilità a lungo termine è essenziale per il mantenimento delle sue caratteristiche di precisione.

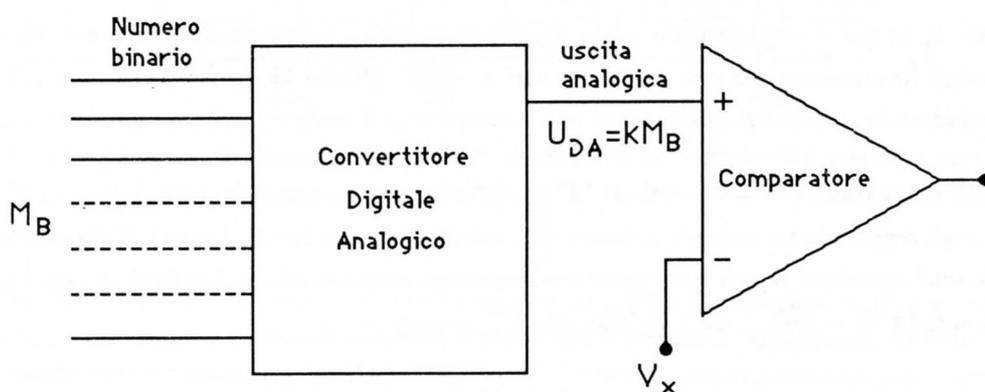


Fig.XVI.11

Il principio di funzionamento (Fig.11) si basa su un *Convertitore Digitale-Analogico* (CDA) di precisione, un dispositivo cioè che accetta in ingresso una certa configurazione di bit (un numero binario) e dà in uscita una tensione U_{DA} proporzionale a questo numero. Se l'uscita del comparatore che confronta U_{DA} con la tensione V_x da misurare è zero significa che la tensione U_{DA} di uscita del CAD è uguale a quella V_x , vale a dire il numero binario in ingresso del CDA rappresenta proprio la conversione digitale di V_x . Il metodo di conversione pertanto si basa su una procedura "intelligente" per indovinare col minor numero possibile di tentativi il codice binario che rappresenta V_x (o meglio il più prossimo a rappresentare V_x). Ciò viene fatto sfruttando l'uscita del comparatore. Consideriamo la conversione di una tensione V_x positiva e ammettiamo che all'inizio tutti gli N bit del CDA siano a "0". L'uscita del comparatore sarà allora negativa. Comincerà a questo punto (comandata da un clock interno al convertitore) l'operazione di *pesiera*. Viene portato a "1" il bit più significativo e l'uscita U_{DA} va ad un valore positivo; se il comparatore commuta, cioè la sua uscita va positiva, significa che $U_{DA} > V_x$; abbiamo cioè una stima in eccesso e pertanto il bit più significativo va fatto tornare a "0"; di ciò, automaticamente, si occupa proprio l'uscita del comparatore che, se positiva, *cancella*, mediante un dispositivo non riportato in figura, l'ultimo dei bit su cui si è operato. Il clock successivamente porta a "1" il bit immediatamente meno significativo del precedente e l'uscita del comparatore si preoccuperà di cancellarlo o confermarlo a seconda che sia positiva o negativa. La sequenza procede fino al bit meno significativo. Dopo N tentativi (quanti sono i bit) la conversione è finita. E' chiaro che la precisione della conversione dipende da quella del CDA. Brevemente vediamo ora (Fig.12) come può essere fatto un CDA a 5 bit.

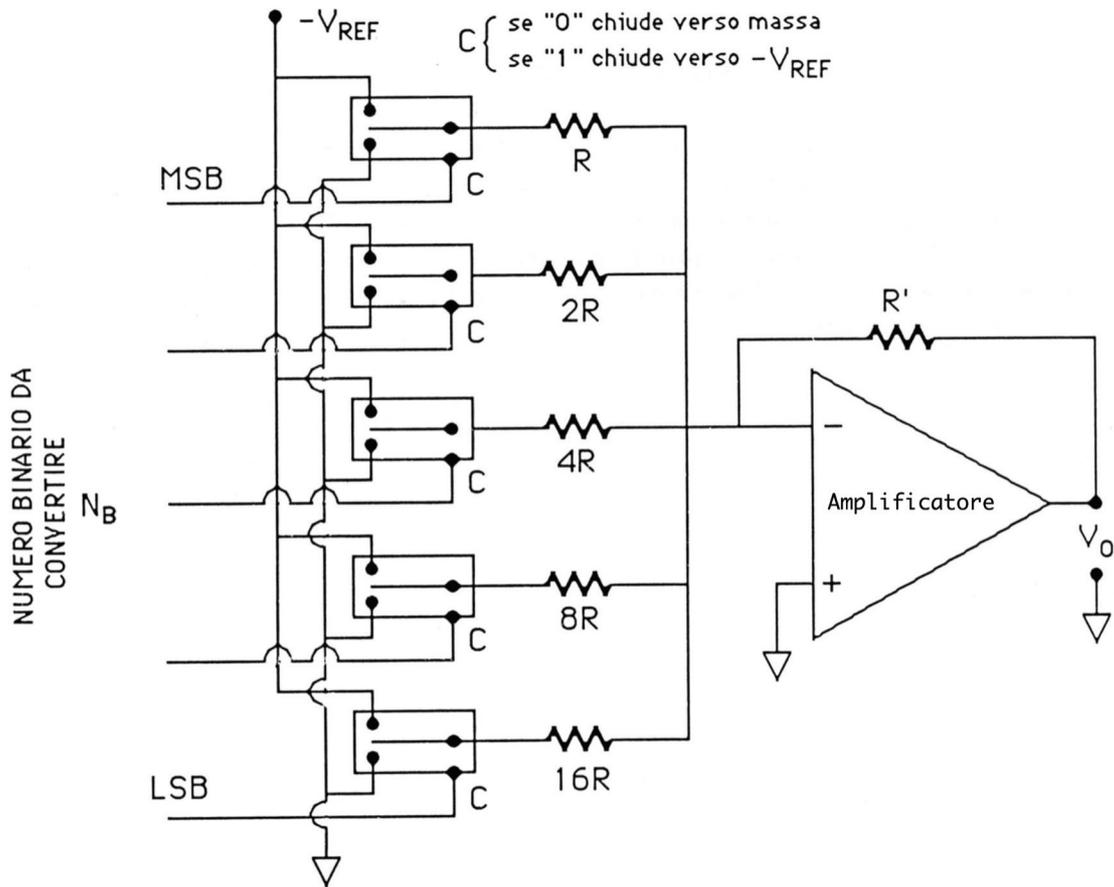


Fig.XVI.12

Le resistenze sono collegate o a una tensione di riferimento $-V_{REF}$ oppure a massa a seconda che il bit corrispondente sia alla tensione associata al valore "1" o al valore "0" rispettivamente. Se tutti i bit sono a "0", l'uscita V_o è a zero; se viceversa il codice binario contiene degli "1", allora la tensione V_o è uguale alla somma pesata di V_{REF} (per i bit a "1") con i pesi dati da $\frac{R'}{2^{i-1}R}$. Abbiamo allora (vedi Cap.XV,§4, (40))

$$V_o = \sum_{i=1}^N \frac{V_{REF} \cdot R'}{2^{i-1}R} \cdot b_i \quad (XVI.8)$$

dove $i = 1$ corrisponde al MSB, $i = N$ al LSB. Inoltre $b_i = 0$ se il bit i -esimo è a "0" e $b_i = 1$ se il bit i -esimo è a "1".

La relazione (8) può anche scriversi:

$$V_o = \frac{V_{REF}}{2^{N-1}} \cdot \frac{R'}{R} \sum_{i=1}^N (2^{N-i} \cdot b_i) = k N_B \quad (XVI.9)$$

che rappresenta una tensione proporzionale al numero binario $N_B = \sum_{i=1}^N 2^{N-i} \cdot b_i$. La costante di proporzionalità k dipende da V_{REF} , da R' e da R e pertanto tutte queste grandezze dovranno essere

molto accuratamente calibrate, ovvero vuol dire che *tutta* la catena di resistenze di valore $2^{i-1} \cdot R$ dovrà essere accuratamente calibrata e stabile.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Per approfondire le nozioni di elettronica logica illustrate nel capitolo, si consiglia **MI 79**. Esempi di convertitori analogico digitali si trovano su Taub, Shilling: "Digital Integrated Electronics" Mac Graw-Hill (1977). Su **MI 79** (Cap.6) si trovano cenni ai principali metodi di conversione analogico digitale e viceversa. **BE 84** tratta abbastanza dettagliatamente l'argomento del capitolo: sono descritti numerosi tipi di convertitori e sono esaminate le sorgenti di indeterminazione nel processo di conversione.

IL DIODO A GIUNZIONE P-N

1.— *Semiconduttori*

Nel Cap.I,§1 abbiamo visto che in un *metallo* esistono elettroni capaci di muoversi liberamente all'interno del reticolo cristallino e che il loro numero è pari a quello degli atomi presenti o ad un suo multiplo; infatti essi sono gli elettroni più esterni dei singoli atomi che hanno completamente perduto la loro identità e sono in compartecipazione con tutto il materiale. Abbiamo anche visto che tali elettroni sono in continuo movimento caotico, a causa della temperatura finita del corpo cui appartengono; per la stessa ragione gli atomi oscillano in maniera stocastica attorno alle posizioni di equilibrio che occupano nel reticolo. Quest'ultimo fatto provoca la resistenza al moto degli elettroni e tende ad isotropizzare una eventuale componente media di velocità trasferita agli elettroni da un campo esterno. Le mobilità ($\mu = v_d/E$) risultanti degli elettroni sono assai piccole; abbiamo infatti trovato (Cap.I, §1) che le velocità di deriva \vec{v}_d sono estremamente basse e corrispondono a $\mu \approx 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/(V \cdot \text{s})$ per il Rame a temperatura ambiente. Le correnti ottenibili con l'applicazione di campi elettrici anche estremamente piccoli sono tuttavia grosse a causa del grande numero di portatori per unità di volume (nel Rame circa $8 \cdot 10^{22} \text{ elettroni/cm}^3$).

Negli *isolanti* (per esempio: Zolfo, Diamante, per parlare di elementi puri) la situazione è completamente diversa a motivo del fatto che anche gli elettroni esterni, quelli di valenza cioè, *appartengono* a gruppi di atomi contigui e non sono liberi di abbandonarli, a meno che non sia ceduta ad essi dall'esterno energia sufficiente; tale energia è detta *Energia di legame*. Ad esempio, per il Diamante l'energia di legame degli elettroni è dell'ordine di 6 eV . Poiché tali elettroni sono confinati dall'attrazione coulombiana dei nuclei in una regione dello spazio molto limitata, cioè dell'ordine delle dimensioni atomiche, è estremamente arduo trasferire quantità significative di energia a questi elettroni applicando campi elettrici, anche intensi nella scala macroscopica, al materiale; solo meccanismi microscopici possono di fatto far acquistare agli elettroni energia sufficiente per abbandonare il loro legame (per esempio particelle ionizzanti che urtino contro gli elettroni). Fra questi meccanismi la agitazione termica gioca un ruolo importante; tenendo infatti presente che l'ordine di grandezza dell'energia termica media è di qualche centesimo di eV , ma che la distribuzione di energia ad essa associata non ha un limite superiore, può accadere che un elettrone si trovi a possedere una energia cinetica tale da poter abbandonare la propria condizione di elettrone di valenza, quindi legato all'atomo, per divenire un elettrone libero, quindi di conduzione. Negli isolanti propriamente detti la frazione di elettroni liberi è estremamente piccola ($\approx 10^2/\text{cm}^3$), proprio a causa dell'elevata energia di legame e quindi di fatto densità di corrente macroscopiche non sono ottenibili.

Fra questi due estremi (metalli e isolanti) si collocano i *semiconduttori*, per esempio, sempre per rimanere nel campo di elementi puri, il Germanio e il Silicio. In realtà essi sono isolanti, nel senso che in essi non esistono, a 0 K , elettroni liberi e occorre cedere energia agli elettroni affinché essi

abbandonino i loro legami di appartenenza. Tale energia di legame, è nel caso del Germanio 0.72 eV e nel caso del Silicio 1.1 eV . Rispetto agli isolanti questi valori sono assai inferiori e tali per cui a temperatura ambiente è presente una frazione macroscopicamente significativa di elettroni liberi.

Guardiamo più da vicino la struttura di questi elementi: entrambi sono tetravalenti, cioè ogni atomo possiede 4 elettroni di valenza. Il reticolo cristallino è formato da un atomo circondato, in una struttura a tetraedro regolare, da altri quattro atomi con i quali scambia i propri elettroni di valenza: la possibilità di avere elettroni in compartecipazione con gli atomi più vicini costituisce il cosiddetto *legame covalente* che tiene unito il cristallo. Nella Fig.1 è simbolicamente rappresentata la struttura di un cristallo di Ge; per semplicità grafica la struttura è raffigurata piana.

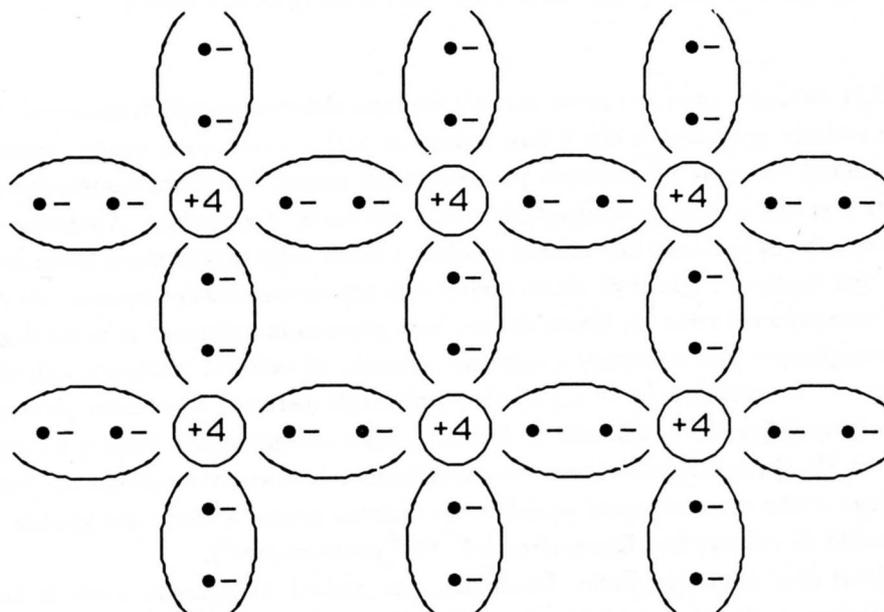


Fig.XVII.1

Lo ione Ge^{4+} è rappresentato con il cerchio grosso, mentre gli elettroni di valenza con i pallini scuri; il legame covalente è simboleggiato nella figura dalla coppia di elettroni fra due atomi di Ge adiacenti. Supponiamo che, a motivo della temperatura finita, un elettrone abbia acquistato sufficiente energia da abbandonare il legame fra due ioni. L'elettrone si troverà allora circondato da una struttura sostanzialmente inerte, con la quale interagisce esclusivamente tramite gli urti; infatti nel cristallo il campo elettrico medio è nullo essendo la neutralità assicurata anche a livello microscopico (4 elettroni intorno a ogni ione 4^+). L'applicazione di un campo elettrico esterno fa derivare l'elettrone nella direzione opposta a quella del campo ed il moto dell'elettrone contribuisce a costituire una corrente. Vedremo più avanti il valore della mobilità di questi elettroni. Tornando ora al meccanismo della rottura del legame, osserviamo che l'elettrone, abbandonando il legame, vi ha lasciato quella che viene definita *lacuna* (in inglese *hole*), cioè la mancanza di un elettrone (Fig.2). Questa lacuna si comporta come un vero e proprio portatore di carica positivo: infatti, sempre a causa dell'agitazione termica, un elettrone appartenente ad uno degli altri atomi, legati a quello che ha perduto l'elettrone, può andare a ripristinare quel particolare legame incompleto,

lasciando al suo posto una lacuna e così via, mettendo in moto un processo che a tutti gli effetti si può descrivere come il movimento puramente stocastico, in assenza di campo elettrico, di una carica positiva di valore assoluto pari a quella di un elettrone. Se è imposto dall'esterno un campo elettrico la lacuna si muoverà in media secondo la direzione del campo. Anche il moto delle lacune è quindi in realtà un moto di elettroni; si badi però che è un moto di elettroni legati (di valenza cioè) che abbandonano un legame completo per andare a riempirne un altro incompleto. Si trova che anche per questo tipo di conduzione elettrica è possibile definire una mobilità e più avanti ne vedremo il valore. In conclusione la rottura di un legame mette a disposizione della conduzione due portatori di carica, uno negativo (l'elettrone libero) e uno positivo (la lacuna): si dice perciò che la rottura di un legame genera una *coppia elettrone-lacuna*.

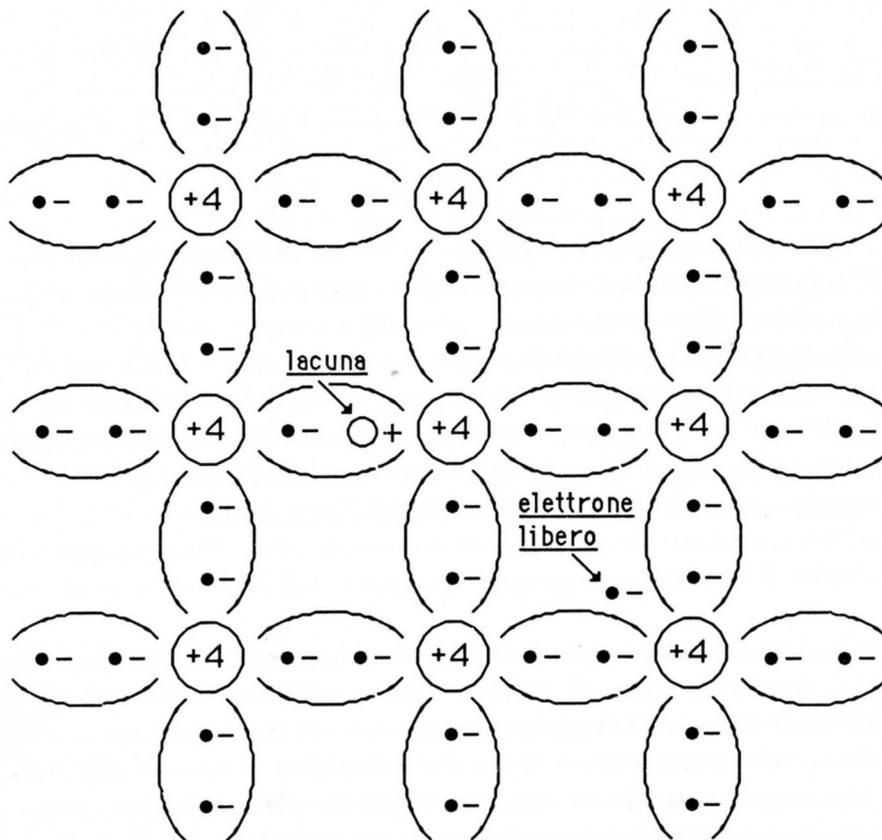


Fig.XVII.2

A temperatura ambiente esiste una quantità macroscopicamente significativa di questi portatori e sotto l'azione di un campo elettrico, avremo una densità di corrente:

$$\vec{j} = e(-n\vec{v}_n + p\vec{v}_p) \tag{XVII.1}$$

dove n rappresenta il numero di elettroni liberi per unità di volume, \vec{v}_n la velocità di deriva degli elettroni liberi, p il numero di lacune per unità di volume e \vec{v}_p la loro velocità di deriva. Purché il campo elettrico si mantenga al di sotto di un valore critico attorno a 10^3 V/cm , la conduzione è di tipo ohmico e valgono le seguenti relazioni (ammettendo il cristallo isotropo):

$$\vec{v}_n = -\mu_n\vec{E} \quad \vec{v}_p = \mu_p\vec{E} \tag{XVII.2}$$

con μ_n e μ_p mobilità degli elettroni e delle lacune. A temperatura ambiente $\mu_n = 0.38 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ e $\mu_p = 0.18 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ per il Germanio e $\mu_n = 0.13 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ e $\mu_p = 0.05 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ per il Silicio.

Se i materiali sono puri, le concentrazioni n e p coincidono, in quanto dovute alla rottura di legami a causa della temperatura. Tali concentrazioni sono spesso indicate con il simbolo $n_i = p_i$. L'indice i sta a significare concentrazione "intrinseca", e i semiconduttori puri ora descritti sono detti *semiconduttori intrinseci*. La concentrazione n_i dei portatori liberi dipende, in assenza di altri meccanismi capaci di rompere i legami, solo dalla temperatura. Si trova che a temperatura ambiente $p_i = n_i = 2.5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ portatori per il Germanio e $p_i = n_i = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ per il Silicio. La dipendenza dalla temperatura di n_i è del tipo:

$$n_i^2(T) = A_0 T^3 \exp - \frac{E_G}{kT} \quad (\text{XVII.3})$$

dove E_G è l'energia di legame già incontrata nel Cap.VIII. Il fatto che n_i raggiunga, per una data temperatura, un valore di regime e non cresca indefinitamente, dipende dal fatto che esiste anche il processo di *ricombinazione*, cioè una probabilità finita che un elettrone libero vada a riempire una lacuna. Si intuisce che la probabilità di ricombinazione è proporzionale al prodotto delle due concentrazioni

$$n_i p_i = n_i^2 \quad (\text{XVII.4})$$

Supponendo di partire da un blocco di semiconduttore a 0 K e di portarlo repentinamente a una temperatura $T > 0$, assisteremo inizialmente ad un aumento del numero di coppie prodotte dalle rottura di legami a causa della temperatura; tale aumento si arresterà quando il ritmo di produzione di coppie eguaglia il ritmo di ricombinazione, ovvero quando è $n_i = p_i = n_i(T)$, con $n_i(T)$ dato dalla (3). Tenendo presente che il numero di atomi di Germanio (di Silicio) per cm^3 è pari a $N_{Ge} = 4.4 \cdot 10^{22}$ ($N_{Si} = 5 \cdot 10^{22}$) abbiamo che la concentrazione di portatori n_i ($T = 300 \text{ K}$) corrisponde ad avere un elettrone e una lacuna liberi ogni 10^9 atomi di Germanio (nel Silicio circa 10^{12}). Se si confrontano queste concentrazioni con quelle degli elettroni liberi nel Rame, ci si rende immediatamente conto che, nonostante l'aumentata mobilità dei portatori nel semiconduttore rispetto a quella degli elettroni nei metalli, le densità di corrente che si potranno ottenere da tali semiconduttori saranno comunque assai piccole.

E' tuttavia possibile, tramite l'aggiunta di opportune impurezze nel cristallo, ottenere correnti di molti ordini di grandezza superiori. Vediamo - almeno qualitativamente - come questo possa avvenire. Supponiamo di avere aggiunto nell'elemento puro fuso delle minime quantità di un elemento pentavalente, ad esempio Fosforo (P), o Antimonio (Sb) o Arsenico (As): sia il livello di impurezze di 1 ppm (10^{-6}), ovvero un atomo di impurezze per ogni 10^6 di atomi di Germanio o Silicio. Quando l'elemento cristallizza, tali impurezze vanno a prendere il posto degli atomi di Germanio, essendo oltretutto le loro dimensioni paragonabili a quelle dell'elemento predominante. Questi atomi si comportano nel reticolo come atomi di Germanio, salvo il fatto che essi possiedono un elettrone di valenza in più rispetto ad esso; questo elettrone "sovrabbondante" può abbandonare il suo legame con l'impurezza molto più facilmente di quanto possa fare un elettrone di un normale legame covalente; si trova che basta una energia di circa 0.01 eV nel Germanio e 0.05 eV nel Silicio, contro 0.72 eV e 1.1 eV per la rottura di un legame covalente. Questo basso valore dell'energia di legame degli elettroni delle impurezze fa sì che a temperatura ambiente praticamente tutti questi atomi di impurezze siano stati abbandonati dal quinto elettrone: pertanto il cristallo si presenta come un cristallo di Germanio puro salvo che, circa ogni 100 atomi lungo ogni direzione, si incontra uno ione positivo dell'elemento pentavalente e che nel materiale tanti elettroni quanti sono gli atomi di impurezze si muovono liberamente, trascurando per il momento il fatto che la concentrazione definitiva dipende

anche dalla concentrazione dei portatori dovuta alla temperatura. Gli atomi pentavalenti sono detti atomi *donatori*, sottintendendo “di elettroni”. La neutralità complessiva del materiale continua ad essere conservata, poiché tanti sono gli elettroni liberi, quanti gli ioni positivi fissi. Supponiamo ora di compiere un procedimento analogo a quello sopra descritto, salvo che le impurezze sono ora costituite da atomi trivalenti come Boro (B), Alluminio (Al), Indio (In); quando il materiale si solidifica gli atomi di impurezze si vanno a collocare al posto degli atomi di Germanio e nella struttura di questo legame tetravalente manca un elettrone rispetto ai 4 caratteristici del legame normale; si trova che l'energia complessiva richiesta per togliere un elettrone da un legame “normale” vicino e ripristinare un legame a 4 elettroni nella zona dell'impurezza è di solo 0.01 eV per il Germanio e 0.08 eV nel caso del Silicio. Pertanto a temperatura ambiente tutti questi centri di impurezze trivalenti hanno catturato un elettrone da qualche atomo di Germanio adiacente lasciandovi una lacuna che è divenuta così un portatore libero di muoversi. Le impurezze trivalenti sono dette *accettori*. I materiali, indipendentemente dal fatto che si tratti di Germanio o Silicio, in cui ci siano impurezze di tipo donatori sono detti *semiconduttori estrinseci di tipo n* o semplicemente *semiconduttori n*. Quelli in cui le impurezze sono trivalenti, cioè atomi accettori, sono detti *semiconduttori estrinseci di tipo p* o semplicemente *semiconduttori p*.

Facciamo ora alcune considerazioni quantitative sul numero di portatori in un caso reale. Abbiamo supposto che la frazione di impurezze aggiunte fosse dell'ordine di 10^{-6} ; d'altronde sappiamo anche che a temperatura ambiente esiste una concentrazione $n_i = p_i = n_i(T)$ di portatori liberi - elettroni e lacune - prodotti dalla agitazione termica. Tale produzione permane anche nel caso in cui il materiale non sia puro e ciò è assai plausibile poiché - data la piccola frazione di impurezze aggiunte - molte delle proprietà del materiale si manterranno sostanzialmente immutate rispetto al caso di semiconduttori intrinseci. Altrettanto può dirsi della probabilità di ricombinazione che continua a dipendere solo dal prodotto delle concentrazioni; supponendo di avere un materiale estrinseco di tipo n, il prodotto delle concentrazioni non è più $n_i \cdot p_i$, bensì $n_n \cdot p_n$ dove ad n_n contribuiscono sia gli elettroni messi a disposizione dai donatori che quelli dovuti all'agitazione termica, mentre p_n riceverà un contributo solo dall'agitazione termica (e come vedremo non coincide con p_i): si trova che, ad una temperatura T ,

$$n_n \cdot p_n = n_i^2(T) \quad (\text{XVII.5})$$

cioè il prodotto delle concentrazioni dei due tipi di portatori è uguale al valore che esso assume nel materiale intrinseco. Questo risultato va sotto il nome di Legge di azione di massa e si spiega qualitativamente col fatto che l'aumentata concentrazione di elettroni aumenta la probabilità di ricombinazione delle lacune e ne riduce notevolmente la concentrazione rispetto al caso di materiale intrinseco; il valore di regime delle concentrazioni è però tale da garantire una probabilità di ricombinazione pari a quella di produzione per agitazione termica, in modo da consentire concentrazioni stabili, ovvero di regime; essendo rimasto il ritmo di produzione per agitazione termica praticamente inalterato a causa delle piccole perturbazioni introdotte dalle impurezze, si ha appunto il risultato espresso dalla (5). Tutto questo ha come conseguenza che *drogaggi* (così si chiama l'introduzione di impurezze) anche moderati, oltre a introdurre molti più portatori di un tipo rispetto al caso di materiale intrinseco, eliminano quasi del tutto i portatori del tipo opposto: infatti essendo $n_n \cdot p_n = n_i^2(T)$ e $n_n \approx 10^3 n_i$ per drogaggi di 10^{-6} in Germanio, si trova che $p_n \approx 10^{-3} n_i = 10^{-3} p_i$ cioè la concentrazione di lacune è ulteriormente ridotta rispetto al valore, già piccolo, che ha nel materiale intrinseco. Nel materiale n gli elettroni sono detti *portatori maggioritari*, le lacune *portatori minoritari*; nel materiale di tipo p, elettroni e lacune si scambiano i ruoli.

Possiamo quindi dire che in un semiconduttore tipo n in cui la concentrazione di atomi donatori N_D sia $\gg n_i$ (per esempio $N_D \approx 10^{-6} N(Ge)$ contro $n_i \approx 10^{-9} N(Ge)$), la densità di regime degli elettro-

ni liberi sarà data con ottima approssimazione da N_D , poiché solo una piccola frazione degli elettroni messi a disposizione dagli atomi donatori andrà perduta per ricombinazione con le lacune prodotte per agitazione termica. Similmente in un materiale di tipo p, con drogaggio dello stesso ordine di grandezza, la densità di lacune sarà con ottima approssimazione data proprio da N_A , essendo N_A il numero di atomi accettori per unità di volume. In entrambi i casi la densità dei portatori minoritari è inferiore al valore che essi avrebbero, alla stessa temperatura, nel materiale puro, in quanto la probabilità di ricombinarsi è aumentata a causa dell'aumentato numero di portatori dell'altro tipo.

Queste considerazioni continuano a valere anche in quei casi - molto più realistici di quelli ora descritti - in cui un semiconduttore di tipo n è in realtà il risultato del predominio di un certo tipo di impurezze rispetto all'altro (e così per un semiconduttore p). Questo avviene a causa del fatto che la metallurgia dei semiconduttori, pur avendo avuto sviluppi imponenti negli ultimi decenni, non è in grado di controllare a livello di frazioni di parti per miliardo la quantità delle impurezze che finiscono nel materiale puro durante la sua produzione: vale a dire in un semiconduttore n, i portatori minoritari - le lacune - avranno una concentrazione che sarà non solo data dalla produzione di coppie dovute alla temperatura, ma anche da un certo numero di impurezze residue di tipo accettore. Resta però vera la conclusione data dalla (5); altrettanto avverrà in un semiconduttore di tipo p ove siano presenti anche atomi donatori, cioè sarà $n_p \cdot p_p = n_i^2$; ovviamente nei due casi sarà $n_n > p_n$ e $p_p > n_p$ rispettivamente, affinché il semiconduttore sia effettivamente del tipo detto. Per fare un esempio supponiamo che in un materiale n con una concentrazione di N_D atomi per unità di volume sia aggiunta una concentrazione N_A di atomi accettori, pari al 1% di N_D . Come conseguenza di ciò, poiché sia prima che dopo deve valere la relazione $n_n \cdot p_n = n_i^2(T)$, accade che quasi tutte le lacune introdotte si ricombinano con un corrispondente numero di elettroni liberi: avremo quindi quasi lo stesso numero di lacune che si avevano prima dell'immissione delle impurezze di accettori e un numero di elettroni liberi inferiore al valore precedente di circa l'1%.

Per concludere, in un semiconduttore di tipo n (p) i portatori di carica sono quasi tutti elettroni (lacune) e sono detti portatori maggioritari; il loro numero n_n (p_p) nei casi in cui il numero degli atomi accettori (donatori) sia molto minore di quello di donatori (accettori), praticamente coincide con N_D (N_A). Considerando solo le concentrazioni dei portatori maggioritari, le correnti che si osservano in conseguenza dell'applicazione di un campo elettrico \vec{E} sono legate al flusso del vettore \vec{j} dato dalle seguenti relazioni ohmiche:

semiconduttori n:

$$\vec{j}_n = -e\vec{v}_n \cdot n_n = eN_D\mu_n\vec{E} = \sigma_n\vec{E} \quad (\text{XVII.6})$$

semiconduttori p:

$$\vec{j}_p = e\vec{v}_p \cdot p_p = eN_A\mu_p\vec{E} = \sigma_p\vec{E} \quad (\text{XVII.7})$$

I valori di μ_n e μ_p sono gli stessi del materiale intrinseco, o almeno assai simili, fintanto che - come nei casi reali - la concentrazione di impurezze si mantiene piccola. Conseguentemente la conducibilità che si ottengono nei due casi valgono per drogaggi tipici (10^{-6} di concentrazioni di impurezze): $\sigma_n \approx 27(\Omega\text{cm})^{-1}$ e $\sigma_p \approx 13(\Omega\text{cm})^{-1}$ (per Germanio a temperatura ambiente) da confrontarsi con le conducibilità tipiche dei metalli $\approx 10^5(\Omega\text{cm})^{-1}$. I valori ottenibili sono quindi assai inferiori rispetto ad un metallo, ma, come vedremo, ancora tali da consentire trasporti di carica macroscopici.

2.— Giunzione p-n non polarizzata

Supponiamo di aver realizzato un contatto, confinato idealmente da uno spessore monoatomico, fra un semiconduttore n e un semiconduttore p, entrambi dello stesso elemento. Una tale configurazione è detta *giunzione p-n* (Fig.3).

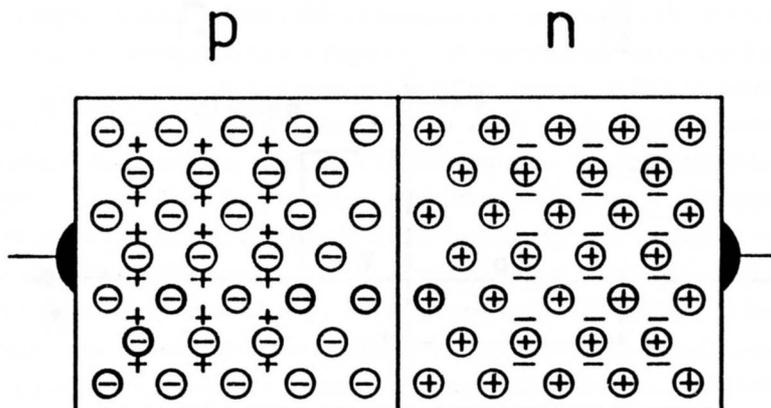


Fig.XVII.3

Studiamone qualitativamente il comportamento in assenza di campi elettrici esterni applicati. Nella zona di confine fra i due semiconduttori si crea una zona in cui sono virtualmente assenti portatori di carica: infatti i portatori che sono maggioritari in una delle due porzioni del materiale, tenderanno per effetto della temperatura finita a diffondere nell'altra, come farebbero due gas posti in un contenitore separati da un setto, all'atto della rimozione di questo. A differenza del caso di due gas dove le particelle sono neutre, nella giunzione abbiamo un processo diffusivo da parte di particelle cariche, che presenta quindi caratteristiche affatto speciali: quando un portatore diffonde dalla regione dove è maggioritario in quella dove è minoritario, molto rapidamente si ricombina e questo processo riduce nella zona di confine la densità di portatori liberi. Conseguentemente, nella zona di confine fra le due porzioni di semiconduttore, insorge un campo elettrico diretto in modo da opporsi alla ulteriore diffusione di portatori maggioritari nell'altra zona e dovuto alla presenza di ioni fissi nel reticolo (donatori nella zona n e accettori nella zona p) non più neutralizzati da una uguale e opposta densità di carica di portatori liberi; il campo elettrico cresce, ovvero la zona di carica non neutralizzata si espande fino a che viene raggiunto il valore "giusto" per impedire ulteriori diffusioni. Se si riporta in grafico l'andamento della densità di carica, del campo e della ddp nella zona della giunzione, nell'ipotesi (francamente poco "fisica") di una giunzione brusca e di una densità costante di atomi donatori e accettori nelle due zone n e p rispettivamente, avremo, ponendo ad $x = 0$ la giunzione, la situazione di Fig.4. I calcoli dettagliati che portano agli andamenti riportati nella Fig.4 saranno svolti più avanti, per ora limitiamoci a fare alcune considerazioni fenomenologiche. Avendo assunto come $V = 0$ il potenziale della zona p molto distante dalla giunzione, la zona n si colloca ad una ddp V_B , che si sviluppa per un tratto largo $W_n + W_p$ intorno alla giunzione. Nei casi tipici, la dimensione $W_n + W_p$ è dell'ordine di $10^{-6}m$ e la ddp vale poco meno di 1 V. La zona dove è presente il campo elettrico è detta *zona di svuotamento* o *zona di carica spaziale*. Si trova che il valore di V_B , detta *differenza di potenziale di contatto* o *barriera di giunzione*, dipende dal drogaggio relativo delle due zone n e p e dalla temperatura. Dette p_p e p_n ($p_p \gg p_n$) le concentrazioni di lacune,

lontane dalla giunzione, nella zona p ed n rispettivamente e n_p e n_n ($n_n \gg n_p$) le corrispondenti concentrazioni di elettroni si trova che:

$$V_B = kT \ln \frac{p_p}{p_n} = kT \ln \frac{n_n}{n_p} \quad (\text{XVII.8})$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la condizione imposta dalla legge di azione di massa (5) $p_n \cdot n_n = p_p \cdot n_p = n_i^2(T)$.

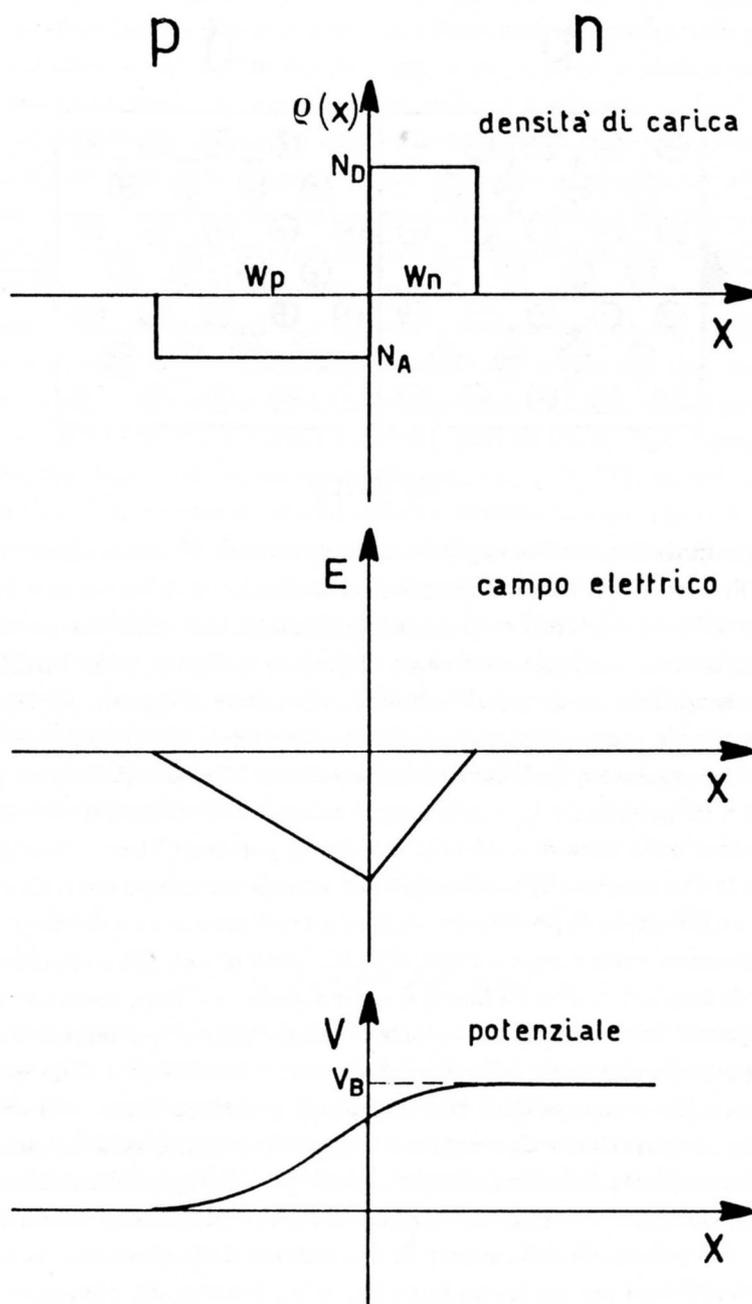


Fig.XVII.4

Il fatto che V_B dipenda dalla temperatura è facilmente comprensibile, in quanto tale barriera

deve proprio opporsi alla diffusione - puramente termica- dei portatori, ovvero delle lacune dalla zona p alla zona n e degli elettroni dalla zona n alla zona p; ricordando poi che questi portatori, come gli elettroni in un metallo, hanno velocità distribuite isotropicamente nello spazio con modulo non limitato superiormente e valor medio crescente con T , è ovvio che quanto più alta è la temperatura del sistema, tanto più alta dovrà risultare la ddp V_B , cioè l'altezza della barriera che inibisce la diffusione. Il fatto che la distribuzione di velocità di questi portatori non abbia un limite superiore (si ricordi quanto visto per gli elettroni in un metallo nel Cap.I,§2 e Cap.VIII,§2) implica che il valore della ddp V_B - finito- può al più limitare la intensità di questa corrente di diffusione, ma non inibirla completamente; infatti esisterà sempre un numero piccolo, ma non nullo, di portatori che possiederanno un'energia termica superiore all'energia potenziale corrispondente al valore eV_B . Pertanto, tenendo presente che nel materiale esistono sempre delle concentrazioni non nulle di portatori minoritari e che comunque, a regime, si deve avere un passaggio di corrente complessivamente nullo attraverso la giunzione, si ha -più realisticamente- la seguente situazione: la corrente di diffusione *residua*, lacune dalla zona p alla n e elettroni dalla zona n alla zona p, entrambi con energia termica maggiore di eV_B , è controbilanciata da una corrente uguale in valore assoluto, ma che attraversa la giunzione nell'altro senso e che è sostenuta dai pochi portatori minoritari (lacune nel materiale n ed elettroni nel materiale p) che sono prodotti dalla rottura di legami covalenti per effetto della temperatura; si noti che anche i portatori minoritari prodotti nella zona di campo nullo, cioè lontano dalla giunzione, possono - a causa della agitazione termica - diffondere fino alla zona della giunzione dove il forte campo elettrico li spinge poi verso l'altra porzione di semiconduttore; chiamiamo questa corrente *corrente di saturazione inversa* e vedremo più avanti il motivo di questo nome; indicheremo questa corrente col simbolo I_0 . Essa, come tutte le correnti ora esaminate, sarà dovuta a due contributi aventi la stessa origine fisica, ma uno associato alle lacune che si muovono in una direzione e un altro agli elettroni nel verso opposto.

Il fatto che, una volta stabilito l'equilibrio termodinamico, si formi una differenza di potenziale fra la zona p e la zona n, potrebbe far supporre che se andassimo a collegare le estremità opposte dei due semiconduttori mediante un conduttore, dovremmo osservare il passaggio di una corrente attraverso di esso, dovuto alla presenza di questa ddp. Di fatto ciò non accade e qualunque tentativo di voler misurare la ddp V_B ai capi dei due semiconduttori avrebbe esito negativo (Fig.5)

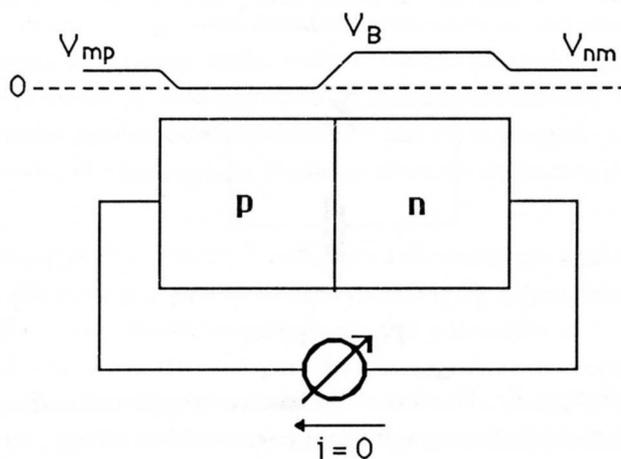


Fig.XVII.5

Ciò si può spiegare col fatto che in prossimità dei due contatti "ohmici" fra semiconduttore e metallo si creano due ddp V_{nm} e V_{mp} tali che la loro somma controbilancia esattamente V_B :

$V_{nm} + V_{mp} - V_B = 0$, come impone la seconda legge di Kirchhoff applicata alla maglia ($i = 0$). In altri termini, secondo la meccanica statistica, ciò corrisponde al fatto che all'equilibrio termodinamico l'energia di Fermi, ovvero il potenziale elettrochimico, di tutti gli elettroni della catena di conduttori e semiconduttori è costante e quindi non esiste alcuna tendenza netta allo spostamento di elettroni da una porzione del circuito all'altra; i voltmetri difatti non misurano differenze di potenziali elettrostatici, ma differenze di potenziali elettrochimici, cioè di livelli di Fermi.

3.— Il Diodo a giunzione

Supponiamo di disporre di una giunzione p-n del tipo descritto precedentemente e realizzata secondo le particolari tecniche metallurgiche che si sono venute via via perfezionando e che realizzano con approssimazione più o meno buona il caso ideale di transizione brusca fra il materiale p e il materiale n. Supponiamo anche di realizzare due contatti di tipo ohmico semiconduttore-metallo e quindi di collegare le due estremità delle porzioni n e p a due conduttori esterni; una giunzione di questo tipo è detta *diodo a semiconduttore a giunzione p-n* e il simbolo che lo rappresenta è quello della Fig.6 dove la porzione a freccia rappresenta la parte p (*anodo*) e la sbarretta la parte n (*catodo*).



Fig.XVII.6

Collegiamo ora il diodo a un generatore di differenza di potenziale V (Fig.7). Il comportamento elettrico del sistema è totalmente differente se applichiamo V nel senso concorde a quello della ddp di barriera V_B , cioè se rendiamo la zona p negativa rispetto a quella n (come in figura) oppure se il segno di V è quello opposto. Consideriamo il primo caso (come in Fig.7): si dice che la giunzione è contropolarizzata.

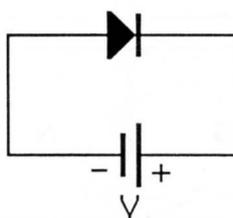


Fig.XVII.7

La ddp V tende a svilupparsi nella zona della barriera rimuovendo ulteriori cariche libere ai confini della zona di carica spaziale (la zona di svuotamento cioè si allarga, vedi §4) e quindi tende ad inibire ulteriormente la corrente di diffusione dei maggioritari: infatti se la temperatura rimane immutata rispetto al valore che aveva in assenza di ddp applicata dal generatore, la distribuzione di velocità dei portatori è anch'essa inalterata ed essendo aumentata la ddp da superare, il numero di portatori maggioritari con energia sufficiente per riuscirci sarà diminuito. La costanza di T , comporta la costanza del numero per unità di tempo di portatori minoritari che, per diffusione,

raggiungono la zona di carica spaziale e vengono poi avviati verso l'altra porzione di semiconduttore dal campo elettrico; questo significa che il contributo di corrente di saturazione inversa I_0 è costante e indipendente da V .

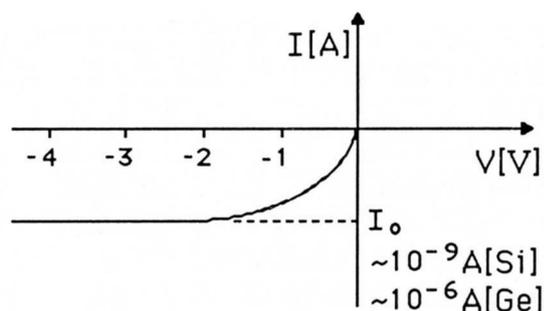


Fig.XVII.8

Nella Fig.8 è riportato in grafico I in funzione di V (V applicata è convenzionalmente presa positiva quando è nel verso opposto a quello della barriera). Salvo un primo tratto (poche decine di mV ove la corrente non ha ancora raggiunto il valore asintotico) si trova che la corrente, per qualunque valore della tensione di contropolarizzazione, assume un valore costante e pari a I_0 . Da qui l'origine del nome *corrente di saturazione inversa*. I valori tipici di I_0 per una giunzione al Silicio di sezione dell'ordine del mm^2 sono assai piccoli (a temperatura ambiente): $\approx 10^{-9}A$. Per il Germanio tali valori sono alcuni ordini di grandezza superiori, fino a qualche μA . In entrambi i casi si osserva comunque una forte dipendenza di I_0 dalla temperatura (nel Silicio raddoppia circa ogni aumento di 10^0C). Nei casi reali, si osserva un aumento della corrente inversa, all'aumentare del valore assoluto della tensione di contropolarizzazione; ciò dipende da contributi spuri di corrente che possono essere anche molto più grandi di I_0 (detta anche *corrente di volume*), per esempio perdite attraverso le superfici del diodo.

In un diodo reale esiste una tensione inversa massima oltre la quale il campo nella zona di barriera diviene così elevato che i legami covalenti vengono spezzati e il diodo passa a condurre anche correnti elevate (*breakdown*). Se questa situazione non viene rapidamente interrotta, il diodo si danneggia irreversibilmente, a causa dell'innalzamento violento della temperatura prodotto dalla potenza VI che viene dissipata alla giunzione. Alcuni diodi sono tuttavia progettati e dimensionati in modo da sfruttare utilmente il fenomeno del *breakdown*; li studieremo nel §5.

Quando la ddp applicata è nel verso di polarizzare direttamente il diodo, cioè il polo positivo del generatore collegato alla zona p (opposto al caso della Fig.7), allora, trascurando eventuali cadute ohmiche nel materiale, interviene un abbassamento del potenziale di barriera V_B di valore pari a quello della ddp applicata: pertanto quei portatori maggioritari di energia termica così elevata da riuscire a superare la barriera V_B , ora diventano assai più numerosi; non si ha - come nel caso del diodo aperto- nessun accumulo di carica con conseguente ricombinazione, poiché in questo caso il generatore si preoccupa di rimuovere ogni eccesso di carica e una corrente comincia a fluire. La corrente, a parità di altre condizioni, in particolare di temperatura, sarà tanto più elevata quanto più ridotta, ad opera di V , sarà la barriera complessiva che i portatori maggioritari devono attraversare; l'aumento è di tipo esponenziale in quanto la corrente è proprio associata all'integrale della coda esponenziale della distribuzione termica di energia dei portatori (si ricordi la legge di

Richardson-Dushman dell'emissione termoionica). La curva caratteristica teorica complessiva, per tensioni positive e negative di V , è la seguente:

$$I = I_0 \left(\exp \frac{V}{\eta V_T} - 1 \right) \quad (\text{XVII.9})$$

$V_T = kT/e$ vale 26 mV per $T = 300 \text{ K}$. Il fattore η che compare nella (9) vale 1 per diodi al Germanio e circa 2 per diodi al Silicio; esso ha una giustificazione semiempirica che non stiamo a descrivere. La (9) riproduce il fatto già anticipato, che per $|V| \gg V_T$, con V negativo, $I = -I_0$ cioè uguale alla corrente di saturazione inversa. Per $V = 0$, cioè quando alla barriera è presente solo V_B , $I = 0$; la (9) mostra, come già sappiamo, che questo zero deriva da due contributi uguali e contrari di cui uno, la corrente di saturazione inversa sempre presente e l'altro dovuto alla piccola coda di maggioritari che riescono a passare la barriera. Per $V > 0$ questa "coda" diviene sempre più importante e si possono avere anche correnti estremamente elevate. Riportiamo nella Fig.9 il grafico dell'andamento di I in funzione di V per un diodo al Silicio, corrispondente alla (9).

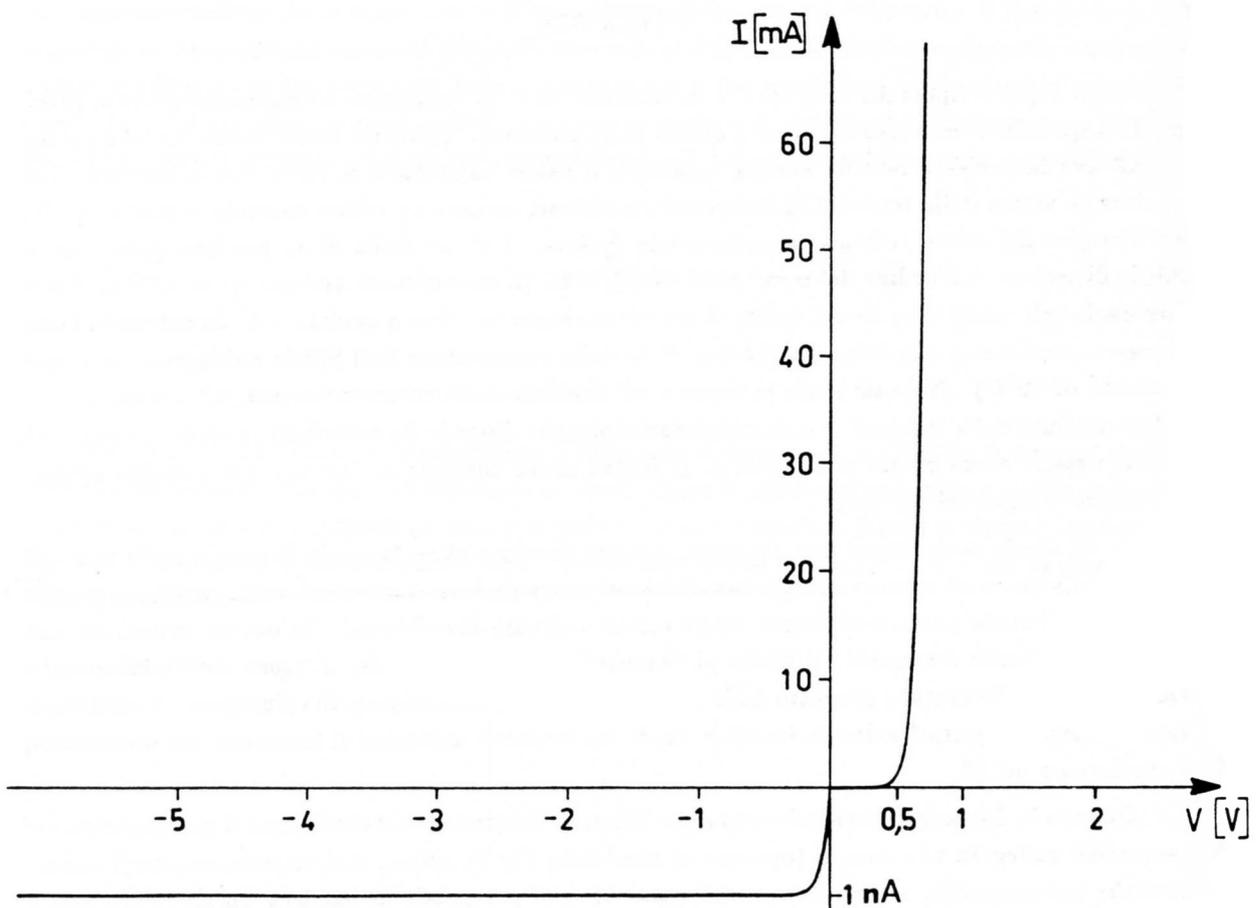


Fig.XVII.9

Sperimentalmente si trova che l'andamento dato dalla (9) è ben riprodotto, almeno per valori di I non troppo elevati, quando cioè si possono ancora trascurare le cadute ohmiche sul materiale. Si noti il cambiamento di scala verticale per l'asse negativo della correnti; se avessimo mantenuto la stessa scala dell'asse positivo (mA) la curva non sarebbe distinguibile dall'asse delle x . La curva riprodotta nella Fig.9 è detta *caratteristica statica del diodo*. Più avanti vedremo che il diodo si presta ad utilissime applicazioni di elettronica che sfruttano proprio il fatto che il diodo "lascia

passare" la corrente in un verso (dall'anodo al catodo) e ne impedisce di fatto il passaggio in senso opposto.

La caratteristica ottenuta vale nell'ipotesi che le cadute ohmiche dentro il materiale semiconduttore siano trascurabili; di fatto non è esattamente così, soprattutto all'aumentare della ddp applicata: infatti quando la corrente diretta - quella cioè che scorre conseguentemente all'applicazione di una ddp positiva - cresce, allora parte della ddp applicata va spesa per mantenere il gradiente di tensione nelle zone p e n necessario a sostenere la corrente in materiali di resistività piccola ma non nulla. L'effetto è sempre più importante al crescere della corrente e finisce col distorcere pesantemente (*linearizzare* in pratica) la curva esponenziale teoricamente prevista dalla (9).

Tornando ad esaminare la zona della caratteristica dove la corrente diretta è ancora molto debole, si definisce *tensione di soglia* V_γ quella al di sotto della quale la corrente non si è ancora sensibilmente discostata da zero. Per rendere più quantitativa questa definizione diciamo che essa non ha ancora superato una frazione opportuna (per esempio l'1%) della massima corrente diretta che il diodo può condurre senza soverchi riscaldamenti del materiale e che il costruttore avrà premura di farci sapere; tale tensione V_γ vale approssimativamente 0.2 V per diodi al Germanio e 0.6 V per diodi al Silicio. Si noti altresì che in tutto il campo di valori di corrente diretta in cui il diodo si utilizza generalmente, la ddp applicata varia, a causa della dipendenza esponenziale della corrente dalla tensione, solo di 0.1 - 0.2 V.

4.— *Larghezza della zona di svuotamento e capacità di transizione*

Ricaviamo ora la relazione che lega - in alcune ipotesi semplificative - la larghezza della zona di svuotamento alla ddp V_B di barriera e alle concentrazioni N_D e N_A di atomi donatori e accettori nelle zone n e p rispettivamente.

La schematizzazioni che adotteremo sono le seguenti:

- 1) le dimensioni delle due porzioni di materiale ortogonali all'asse x (introdotto nella Fig.4) siano molto maggiori dello spessore della zona di barriera ($W_n + W_p$)
- 2) la giunzione sia brusca cosicché si passi in maniera discontinua da una concentrazione costante N_A di atomi accettori fissi per unità di volume nel materiale p ad una concentrazione N_D di donatori nella zona n
- 3) in maniera altrettanto brusca si passi dalla zona di svuotamento dove non ci sono cariche libere alla zona in cui i centri di carica fissi sono perfettamente neutralizzati dai portatori aventi carica di segno opposto.

Il punto 1), che non è molto irrealistico nei casi pratici, consente la trattazione del problema in maniera unidimensionale; il punto 2) può essere una schematizzazione brutale a seconda del sistema adottato dal costruttore per realizzare la giunzione e comunque sarà tanto meno essenziale quanto più la zona di svuotamento si estenderà rispetto alle dimensioni in cui si passa con continuità da un tipo di semiconduttore all'altro, ovvero l'approssimazione è migliore per grossi valori di contropolarizzazione; il punto 3) può essere senz'altro una approssimazione grossolana poiché ci aspettiamo che la concentrazione di portatori, anche a causa dell'agitazione termica, si diluisca con continuità nel passare dal materiale neutro alla zona di svuotamento; comunque, anche in questo caso l'approssimazione è tanto migliore quanto più la giunzione è contropolarizzata.

Indichiamo con V_{TOT} la ddp complessiva fra la zona n e la zona p (a potenziale 0 per convenzione) e con $V(x)$ la ddp generica alla coordinata x . Il segno è tale che la ddp può scriversi: $V_{TOT} = V_B - V_e$ dove V_B è quella di barriera e V_e è quella applicata, negativa se contropolarizza il diodo, positiva se lo polarizza direttamente (coerentemente con quanto assunto precedentemente); ricordiamo qui che l'unica ddp misurabile fra i reofori esterni al diodo è V_e , essendo V_B compensata da altre due analoghe ddp alle giunzioni semiconduttore-metallo.

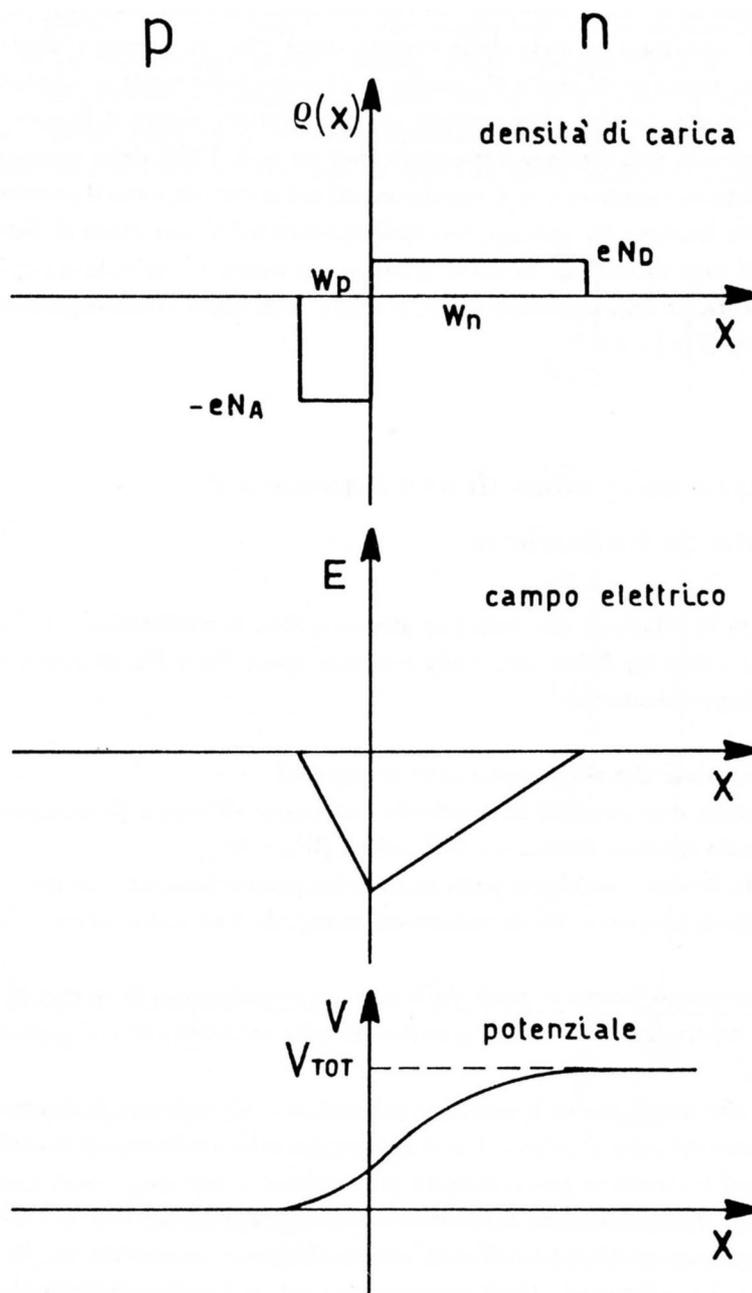


Fig. XVII.10

L'equazione di Poisson nel caso unidimensionale in questione si scrive:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{XVII.10})$$

ovvero

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{XVII.11})$$

essendo $E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$; ϵ rappresenta la costante dielettrica del semiconduttore, la stessa per entrambe le zone, assumendo che le concentrazioni di impurezze non alterino la costante dielettrica relativa del mezzo $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$. Ricaviamo ora $E_x(x)$. Per valori di $x < 0$, cioè nel materiale p, avremo (Fig.10):

$$-W_p < x < 0 \quad \rho = -eN_A \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{eN_A}{\epsilon} \quad (\text{XVII.12})$$

mentre nel materiale n:

$$0 < x < W_n \quad \rho = eN_D \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{eN_D}{\epsilon} \quad (\text{XVII.13})$$

Pertanto avremo, imponendo che $E_x = 0$ per $x < -W_p$ e $x > W_n$:

$$-W_p < x < 0 \quad E_x = -\frac{eN_A}{\epsilon}(x + W_p) \quad (\text{XVII.14})$$

$$0 < x < W_n \quad E_x = \frac{eN_D}{\epsilon}(x - W_n) \quad (\text{XVII.15})$$

La condizione di neutralità complessiva della zona di svuotamento dà:

$$N_A \cdot W_p = N_D \cdot W_n \quad (\text{XVII.16})$$

che, come è evidente dalle (14) e (15), corrisponde ad avere continuità della componente x del campo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ nel passare da un mezzo all'altro; essendo ϵ la stessa in entrambi i mezzi, la condizione di continuità di D_x è la stessa che per E_x . Per esprimere V_{TOT} in funzione di N_A, N_D e W_p, W_n dobbiamo integrare E_x fra $x = -W_p$ e $x = W_n$:

$$\begin{aligned} V_{TOT} &= - \left[\int_{-W_p}^0 \left(\frac{-eN_A}{\epsilon} \right) (x + W_p) dx + \int_0^{W_n} \left(\frac{eN_D}{\epsilon} \right) (x - W_n) dx \right] = \\ &= \frac{eN_A}{2\epsilon} W_p^2 + \frac{eN_D}{2\epsilon} W_n^2 \end{aligned} \quad (\text{XVII.17})$$

che sfruttando la (16) può scriversi:

$$V_{TOT} = \frac{eN_D}{2\epsilon} W_n^2 \left(1 + \frac{N_D}{N_A} \right) = \frac{eN_A}{2\epsilon} W_p^2 \left(1 + \frac{N_A}{N_D} \right) \quad (\text{XVII.18})$$

Nei casi pratici, proprio a causa del tipo di trattamento metallurgico adottato per realizzare la giunzione, uno dei due drogaggi è molto inferiore all'altro per cui l'ampiezza complessiva della zona di svuotamento è dominata dalla larghezza che si sviluppa nel materiale a minor concentrazione di impurezze (e quindi anche a minor conducibilità). Per esempio dalla (18) si vede che se $N_A \gg N_D$

$$V_{TOT} \approx \frac{eN_D}{2\epsilon} W_n^2 \quad (\text{XVII.19})$$

e quindi

$$W_n \approx \left(\frac{2\epsilon}{eN_D} V_{TOT} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XVII.20})$$

ovvero, per valori di $V_{TOT} = V_B - V_e$ per cui $-V_e \gg V_B$ cioè per contropolarizzazioni energiche, la larghezza della zona di svuotamento cresce con la radice del valore assoluto della tensione applicata. Facciamo un esempio numerico, realistico per un diodo al Silicio:

$$N_D \approx 10^{21} \text{ Atomi}/m^3, N_A \gg N_D \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = 12 \cdot 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ F}/m \quad V_{TOT} = 10 \text{ V} \text{ abbiamo:}$$

$$W_n = 3.6 \cdot 10^{-6} m$$

Spessori di zone di svuotamento anche tre ordini di grandezza superiori si possono avere in diodi a giunzione contropolarizzati con tensioni di alcune centinaia di *Volt*, impiegati come rivelatori di particelle ionizzanti: l'ottenimento di tali spessori è ovviamente legato all'alto grado di purezza (ovvero alla bassa concentrazione di impurezze) di una delle due sezioni del semiconduttore.

Alla zona di svuotamento si può associare la cosiddetta *capacità di transizione* del diodo; infatti, riprendendo la (19) e differenziandola abbiamo: ($V_{TOT} \rightarrow V$, $W_n \rightarrow W$):

$$dV = \frac{eN_D}{\epsilon} W dW \quad (\text{XVII.21})$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore del membro di destra per la area S della superficie affacciata abbiamo:

$$dV = \frac{dq}{\epsilon} \frac{W}{S} \quad (\text{XVII.22})$$

avendo posto

$$dq = eN_D S dW \quad (\text{XVII.23})$$

in quanto essa rappresenta proprio l'aumento di carica accumulata in una delle due zone della giunzione dovuta all'allargamento dW . La relazione (23) può anche essere posta nella forma:

$$dV = \frac{dq}{C_T} \quad (\text{XVII.24})$$

dove

$$C_T = \frac{\epsilon S}{W} \quad (\text{XVII.25})$$

rappresenta la cosiddetta capacità di transizione del diodo. Si noti che essa varia a seconda della tensione V e che è tanto più piccola quanto più il diodo è contropolarizzato. La dipendenza funzionale di C_T dalla geometria è la stessa che avrebbe un condensatore a facce piane e parallele distanti W fra di loro e aventi superficie S , in cui il mezzo dielettrico fra le due facce avesse permittività elettrica ϵ ; questo risultato non deve stupire, ricordando le ipotesi semplificatrici fatte. Valori tipici di questa capacità sono assai piccoli: riprendendo l'esempio precedente, con $S = 1 \text{ mm}^2$ troviamo:

$$C_T \approx 29 \text{ pF}$$

(per $V_{TOT} = 10 \text{ V}$). Nonostante il suo piccolo valore, questa capacità in alcune applicazioni non può trascurarsi, anche a motivo del fatto che, quando il diodo è contropolarizzato, presenta una resistenza equivalente R_i fra i due elettrodi p e n molto elevata e quindi in tensione alternata l'impedenza $Z_C = \frac{1}{j\omega C_T}$ può divenire dominante, cioè molto più piccola, di R_i ; si noti che stiamo schematizzando il comportamento del diodo contropolarizzato con una resistenza, in contraddizione

con l'andamento teorico atteso - corrente inversa costante, vedi (9) - ma in ragionevole accordo con gli andamenti sperimentali osservati.

5.- Il Diodo Zener

I *diodi Zener* o *diodi a valanga* (in inglese *breakdown diodes*) sono diodi a giunzione costruiti in modo tale da poter lavorare continuamente alla tensione di breakdown; particolari caratteristiche costruttive consentono di produrre diodi Zener con valori di tensione di breakdown da pochi *Volt* ad alcune centinaia di *Volt*. La caratteristica statica (Fig.11) di un diodo Zener, a parte la regione del breakdown, è estremamente simile a quella di un normale diodo a giunzione.

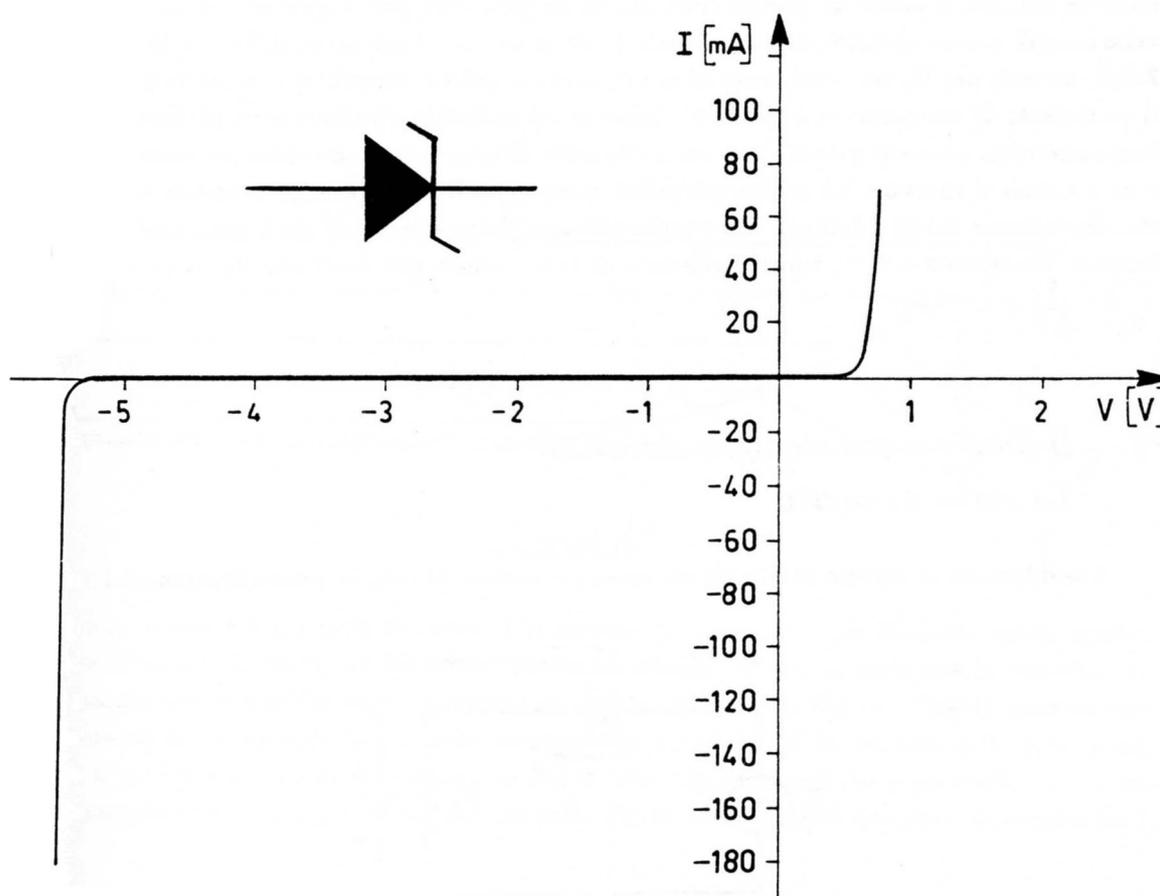


Fig.XVII.11

In figura è mostrata la caratteristica di un diodo Zener da 5.5 V: si noti che una volta innescato il processo di breakdown, anche variazioni grosse di corrente, provocano solo piccole variazioni di tensione ai capi del diodo; questo fatto - come vedremo fra qualche paragrafo - viene proprio sfruttato per costruire dei generatori di ddp continua. Il simbolo circuitale del diodo Zener è riportato nella Fig.11, dove la freccia rappresenta l'anodo.

Il diodo Zener viene impiegato quasi esclusivamente in condizioni di polarizzazione inversa, cioè con il catodo positivo rispetto all'anodo, ovvero ai suoi capi è presente la ddp di breakdown. I

meccanismi fisici alla base del breakdown sono almeno due: uno - detto propriamente *effetto Zener* - è la rottura dei legami covalenti nella zona della giunzione ad opera dell'alto campo elettrico ivi presente (si trova che tale effetto domina in quei diodi con tensioni V_Z di breakdown inferiori a 6 V); l'altro meccanismo è quello per cui i portatori minoritari responsabili della debole corrente inversa acquistano, a causa del loro libero cammino medio assai lungo, tanta energia nell'attraversamento della zona della barriera da rompere i legami covalenti; i portatori così liberati acquistano a loro volta energia sufficiente da rompere altri legami e si innesca così il processo propriamente detto di *valanga*. Esso domina nei diodi Zener con tensioni V_Z maggiori di 6 V. Vediamo ora la dipendenza di V_Z dalla temperatura, con riguardo al meccanismo che stabilisce l'innesco della scarica. Per quanto riguarda l'effetto Zener propriamente detto, la rottura dei legami avviene a tensioni inferiori se la temperatura aumenta poiché l'agitazione termica, rendendo mediamente meno legati gli elettroni agli atomi, facilita la rottura dei legami. Per quanto riguarda l'effetto a valanga invece, l'aumento della temperatura ritarda la scarica poiché riduce il libero cammino medio dei portatori e conseguentemente abbassa il valore di energia cinetica che un portatore può acquistare fra un urto e l'altro nella zona di campo elettrico elevato. Concludendo si ha che, se nel diodo utilizzato domina l'effetto Zener, avremo per V_Z un coefficiente di temperatura negativo, mentre se domina l'effetto valanga, il coefficiente di temperatura è positivo. Diodi in cui entrambi gli effetti sono presenti con contributi opportuni, possono quindi avere un coefficiente di temperatura complessivo molto prossimo a zero e quindi si prestano ad utili applicazioni come generatori di tensioni continue estremamente stabili; vedremo nel §9 i dettagli. Da quanto abbiamo detto sopra, tali diodi sono quelli che hanno tensioni V_Z attorno a 6 V; tipici coefficienti di temperatura per diodi con $V_Z \approx (5 \div 6) V$ sono $\frac{\Delta V_Z}{V_Z} \cdot \frac{1}{\Delta T} < 10^{-5}/^{\circ}C$.

6.- Il diodo come elemento circuitale

La retta di carico

Consideriamo il circuito di Fig.12: sia v_i un generatore di fem, in genere funzione del tempo.

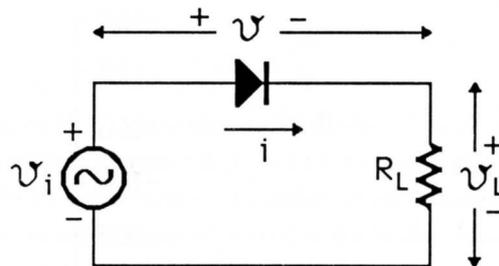


Fig.XVII.12

La risoluzione del circuito consiste nella conoscenza di $i(t)$ ovvero di $v_L(t) = i(t)R_L$; per arrivare ad esprimere i in funzione di t , possiamo esprimere i in funzione di v_i applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia:

$$v_i = v + iR_L \quad (\text{XVII.26})$$

Se poi esprimiamo v in funzione di i , per esempio sfruttando la (9), abbiamo risolto il nostro problema. In genere non si procede così, anche perché la dipendenza di v da i è teoricamente

descritta dalla (9), ma sperimentalmente si trovano andamenti leggermente diversi; si preferisce procedere per via grafica (Fig.13) partendo dalla caratteristica sperimentale del diodo ed osservando che la relazione (26) in un grafico (i, v) è rappresentata da una retta passante per $(i = 0, v = v_i(t))$ e $(i = \frac{v_i(t)}{R_L}, v = 0)$, avente quindi pendenza pari a $-\frac{1}{R_L}$; per ogni valore di $v_i(t)$ si può tracciare una di queste rette, tutte parallele fra loro.

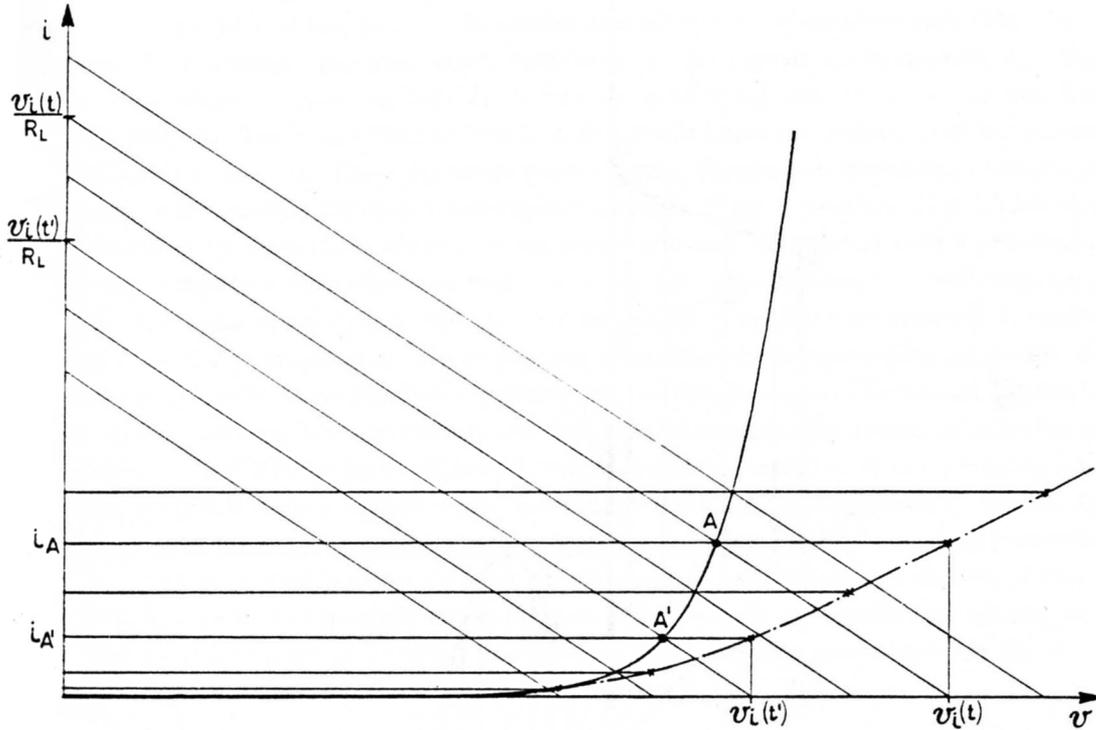


Fig.XVII.13

Ognuna di esse è detta *retta di carico*. L'intercetto di queste rette con la caratteristica statica del diodo determina la soluzione del nostro problema iniziale, in quanto stabilisce la corrente che circola nel circuito in quell'istante t , quando cioè $v_i = v_i(t)$ (i_A nella Fig.13). Questa osservazione ci consente anche di costruire la cosiddetta *caratteristica dinamica* del diodo: essa è la curva (i, v_i) che lega la corrente che passa nel circuito in Fig.12 alla ddp applicata dal generatore; tale curva è rappresentata come tratteggiata e a puntini nella Fig.13 ed è ottenuta dai punti di coordinate (i, v_i) .

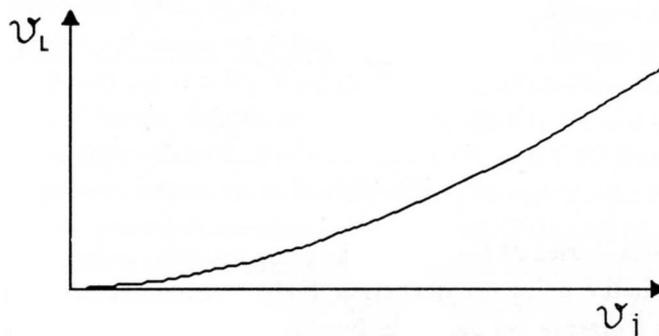


Fig.XVII.14

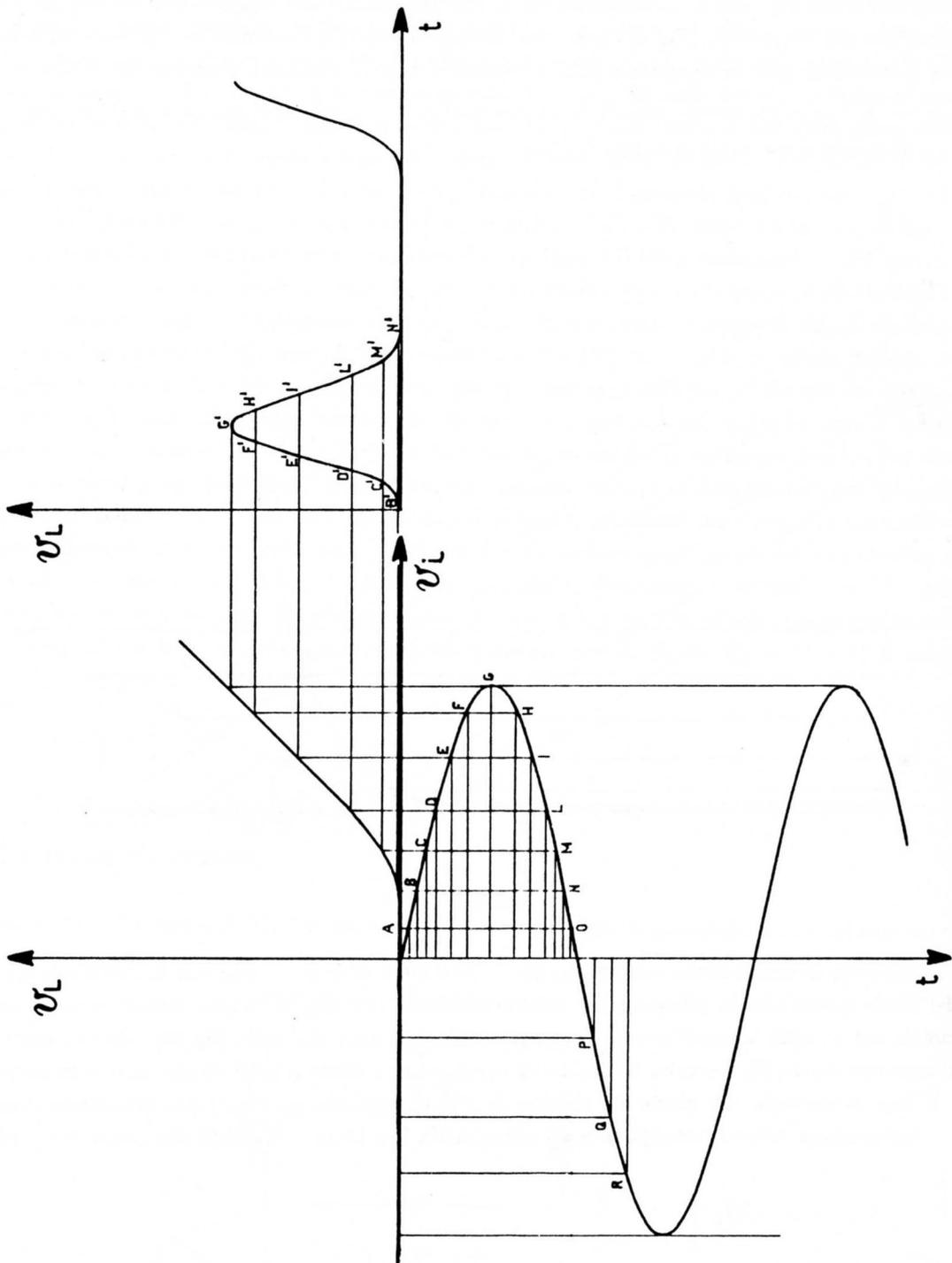


Fig.XVII.15

Mentre la caratteristica statica dà la corrente che passa nel diodo in funzione della ddp applicata agli estremi di esso, e quindi è unica per quel certo diodo, la caratteristica dinamica è diversa per ogni valore di R_L e dà i (corrente nel diodo) in funzione di v_i , ddp applicata dal generatore. Dal grafico è evidente che la caratteristica dinamica si presenta assai più lineare della caratteristica

statica; il motivo di ciò va ricercato nel fatto che la resistenza R_L utilizzata nell'esempio è maggiore della resistenza che *punto per punto* si può associare al diodo (l'inverso della pendenza della sua curva caratteristica): quanto più grande è R_L , tanto più trascurabile è nella (26) il contributo di v rispetto a iR_L .

Se siamo interessati a conoscere la tensione v_L ai capi della resistenza R_L , detta *resistenza di carico*, possiamo disegnare la caratteristica dinamica per il nostro circuito, riportando però in ordinata iR_L anziché i ; otteniamo così la cosiddetta *caratteristica di trasferimento* (Fig. 14). Essa ci consente di determinare per ogni valore della tensione del segnale v_i , la tensione v_L . Vediamo ora una applicazione di questi metodi di costruzione grafica nel caso in cui v_i sia una funzione sinusoidale (Fig.15). Tracciamo l'andamento di v_i sfruttando l'asse già disegnato per la caratteristica di trasferimento e tracciamo l'asse dei tempi verso il basso. Similmente sfruttiamo lo stesso asse v_L per tracciare a destra della curva di trasferimento il grafico di v_L in funzione di t . L'andamento di v_L in funzione di t è ottenuto graficamente nel seguente modo: la tensione $v_i(t)$ è proiettata sulla curva di trasferimento e determina una ordinata $v_L(t)$: tale valore insieme a t individua un punto nel grafico (v_L, t) . La costruzione è riportata per vari valori di v_i . Nel caso prescelto si osserva che per valori di $v_i < 0$ la tensione v_L non si discosta sensibilmente da zero e ciò corrisponde al fatto che il diodo contropolarizzato non lascia passare che una debole corrente inversa; si osserva inoltre che, non essendo la curva di trasferimento una retta, si ha una certa distorsione, principalmente per valori di $v_i \leq V_\gamma$ ($\approx 0.6 V$ nel diodo al Silicio); vale a dire i lobi positivi di v_i non vengono riprodotti fedelmente, a parte il fattore moltiplicativo, ma vengono, più o meno leggermente, distorti. Questo metodo di costruzione grafica è talvolta assai tedioso da utilizzare e poiché nonostante tutto ha una precisione limitata, proprio a causa del fatto che si tratta di una costruzione grafica, più spesso si preferisce procedere in una maniera ancora diversa, introducendo un circuito equivalente, anche se approssimato, del diodo; esso è il cosiddetto *modello a linea spezzata* o *piecewise model* che riconduce il problema a quello della risoluzione di una rete lineare.

7.— Il “piecewise model”

Un esempio di applicazione

In questo modello si approssima la caratteristica statica di un diodo con una linea spezzata, (vedi Fig.16) costituita da due semirette; la semiretta per $v < V_\gamma$ coincide con l'asse delle v , mentre la semiretta per $v > V_\gamma$ ha pendenza finita esprimibile come $\frac{1}{R_f}$ e intercetto con l'asse delle ascisse pari a V_γ . Questa approssimazione grafica corrisponde a schematizzare il diodo come una resistenza infinita per $v < V_\gamma$ e come un generatore di fem costante pari a V_γ in serie ad una resistenza R_f (detta *resistenza diretta del diodo*) per $v > V_\gamma$. I valori di V_γ e R_f dipendono dal particolare diodo che si usa ed anche dal punto di lavoro. Infatti, con riferimento alla Fig.17, se si intende adoperare il diodo fino a correnti massime dell'ordine di $10 mA$ la retta 1 ($V_\gamma \approx 0.5 V$, $R_f \approx 12\Omega$) può risultare una ragionevole approssimazione, mentre per correnti attorno a $50 mA$ la retta 2 ($V_\gamma \approx 0.8 V$, $R_f \approx 1.5\Omega$) riproduce più soddisfacentemente l'andamento. E' chiaro che il circuito (Fig.18) studiato nel §6, può ora essere risolto sfruttando il circuito equivalente del diodo. Supponiamo che l'andamento di v_i sia sinusoidale $v_i = v_0 \sin \omega t$. Per $v_i < V_\gamma$ avremo una ddp nulla ai capi di R_L , poiché, essendo il diodo in queste condizioni schematizzato come una resistenza infinita, la corrente nel circuito sarà zero e tale la caduta su R_L .

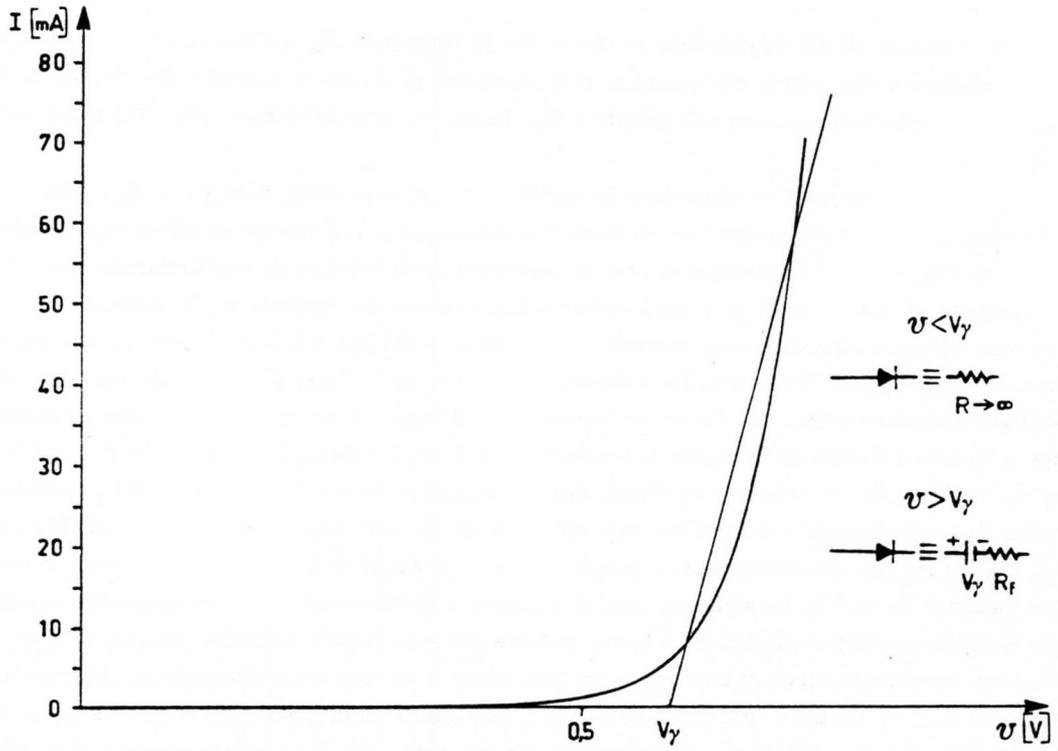


Fig.XVII.16

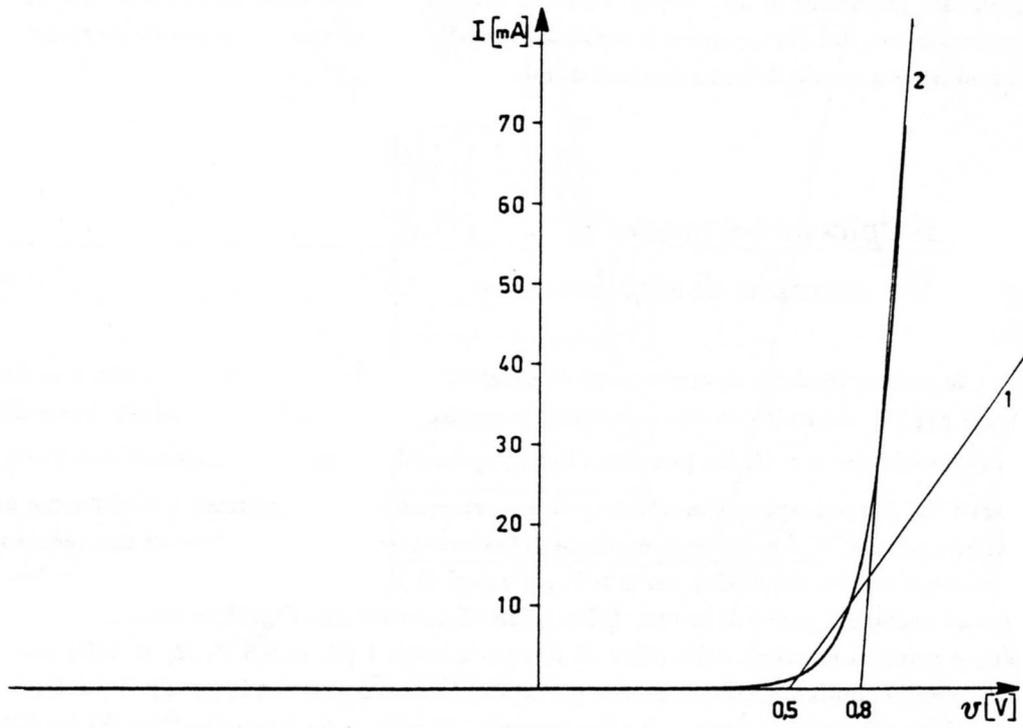


Fig.XVII.17

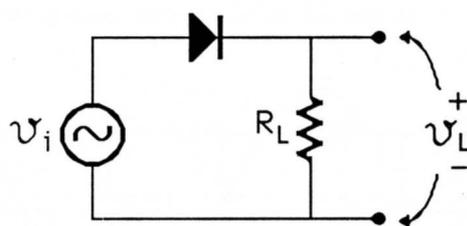


Fig.XVII.18

Per $v_i > V_\gamma$ possiamo risolvere il circuito sostituendo al diodo il suo equivalente (Fig.19).

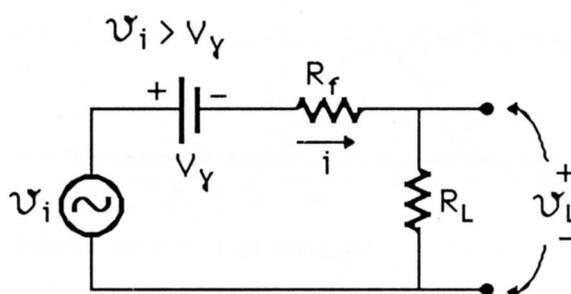


Fig.XVII.19

La seconda legge di Kirchhoff questa volta ci consente la risoluzione del problema poiché è possibile esplicitare la dipendenza di v da i :

$$v_i - V_\gamma = i(R_f + R_L) \quad (\text{XVII.27})$$

e quindi

$$v_L = iR_L = \frac{v_i - V_\gamma}{R_f + R_L} R_L = \frac{v_i}{R_f + R_L} R_L - \frac{V_\gamma R_L}{R_f + R_L} \quad (\text{XVII.28})$$

Riportando in grafico l'andamento di v_i e v_L otteniamo le curve di Fig.20. Per quanto riguarda v_L , l'andamento, per $v_i > V_\gamma$, è una sinusoide pura alla quale è sottratto un termine costante. La principale approssimazione introdotta dal modello consiste nella discontinuità con cui si passa dal segnale uguale a zero (per $v_i < V_\gamma$) a valori diversi da zero; si veda per confronto il raccordo continuo nella costruzione grafica della Fig.15, esente da approssimazioni.

Se vogliamo compiere una analisi dettagliata del comportamento di un circuito ove sia presente un diodo, il modello "a linea spezzata" non è adatto poiché approssimato; tuttavia in molti casi la possibilità di poter affrontare il problema mediante le tecniche di risoluzione delle reti lineari costituisce un indubbio vantaggio. Vedremo ciò su un esempio di applicazione molto comune del diodo: il *raddrizzamento delle correnti alternate*.

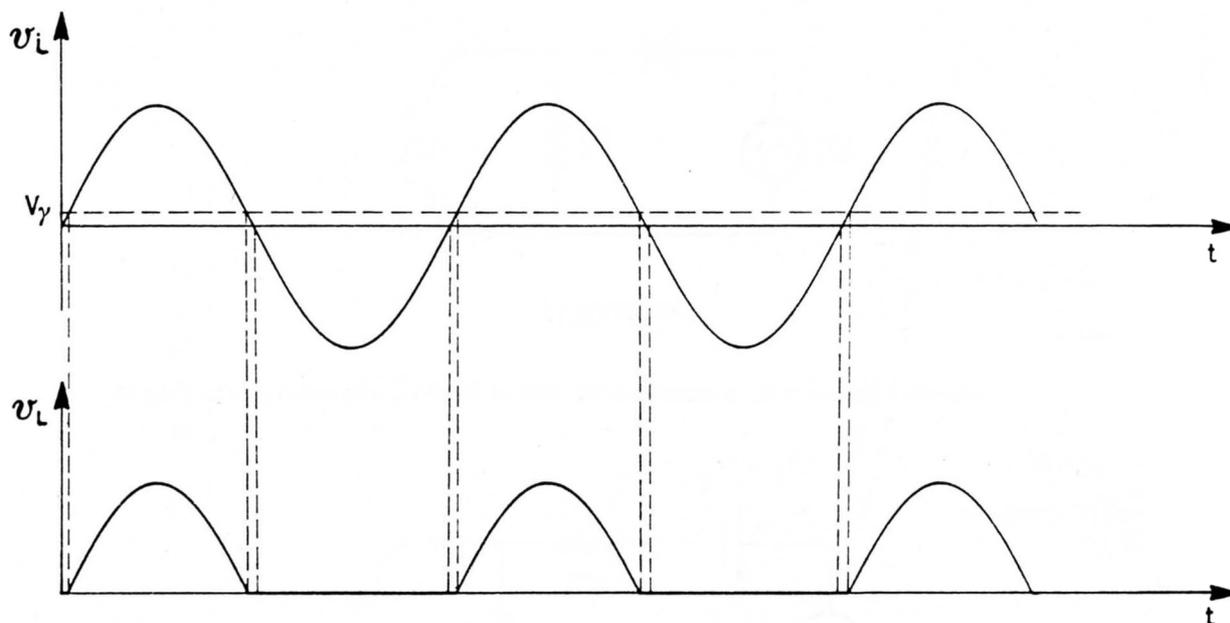


Fig.XVII.20

8.- Il diodo come raddrizzatore

Un esempio di generatore elettronico di fem continua

Consideriamo il circuito in Fig 21. La tensione v_R , che supponiamo essere quella di rete (220 V di valore efficace, frequenza 50 Hz) è applicata al primario di un trasformatore; sul secondario appare una ddp alternata che con buona precisione può esprimersi come (vedi Cap. IX, §6)

$$v_S = v_R \frac{N_S}{N_P} = \alpha v_R \quad (\text{XVII.29})$$

dove α è il rapporto di trasformazione pari al rapporto fra il numero di spire del secondario e quelle del primario.

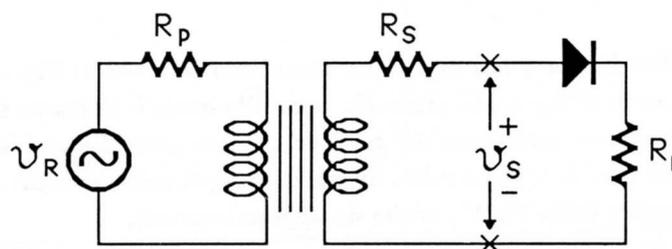


Fig.XVII.21

Sappiamo anche che se $\alpha < 1$, come spesso accade in questo tipo di applicazioni, la impedenza interna del generatore v_S è dell'ordine di grandezza di R_S , la resistenza ohmica dell'avvolgimento

del secondario. Pertanto il circuito del secondario può essere rappresentato come in Fig.22, con $v_S = V_M \cos \omega t$ (scegliendo opportunamente l'origine dei tempi).

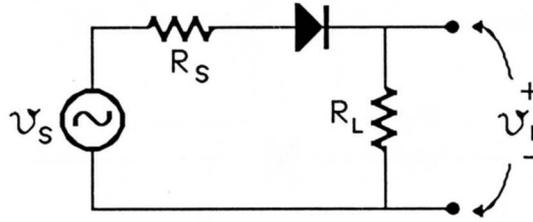


Fig.XVII.22

Dall'analisi del paragrafo precedente sappiamo che se $V_\gamma \ll V_M$ la tensione v_L ha un andamento del tipo:

$$v_L = 0 \quad \text{se} \quad v_S < 0 \quad (\text{XVII.30})$$

$$v_L = v_S \frac{R_L}{R_S + R_f + R_L} \quad \text{se} \quad v_S > 0 \quad (\text{XVII.31})$$

L'andamento di v_S e v_L è riportato nella Fig.23.

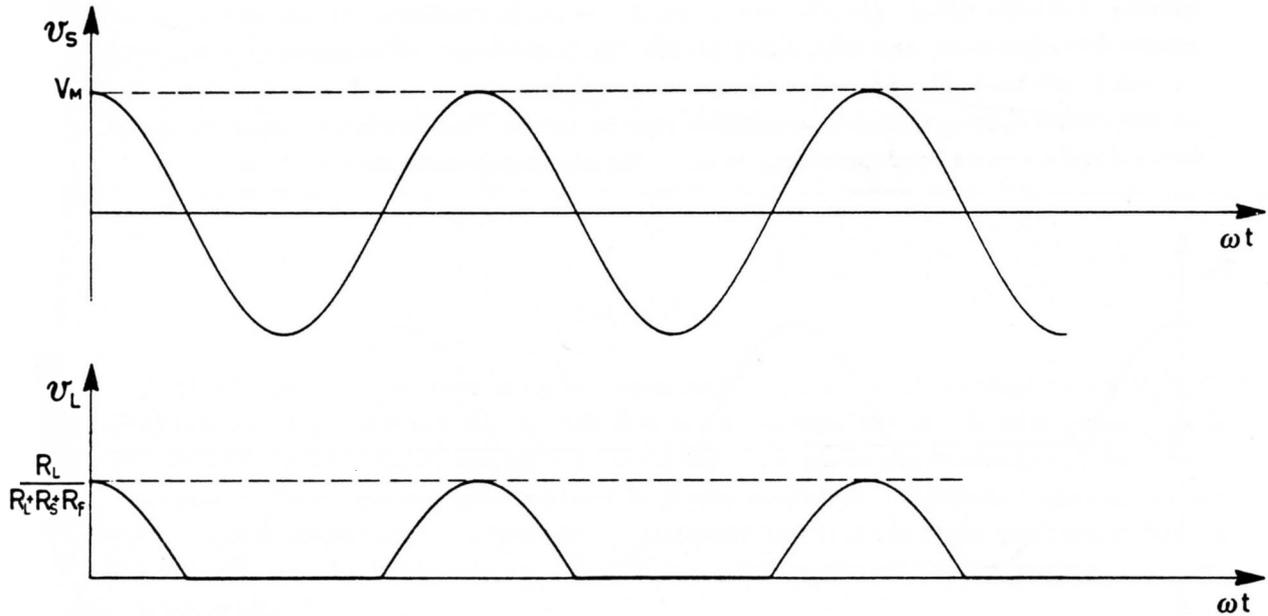


Fig.XVII.23

Vediamo che sulla resistenza R_L è presente una ddp con media diversa da zero pari precisamente

$$^a \langle v_L \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_M \frac{R_L}{R_L + R_S + R_f} \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \frac{V_M R_L}{(R_S + R_L + R_f)} \quad (\text{XVII.32})$$

La funzione espletata dal circuito, di ottenere una forma d'onda a media non nulla partendo da una forma d'onda a media nulla, è detta di *raddrizzamento* o *rettificazione*. Questa è la prima

e fondamentale operazione che occorre fare per passare da una tensione sinusoidale ad una ddp continua o almeno il più possibile costante. La forma d'onda $v_L(t)$ ha sì media non nulla, ma necessita di altre operazioni prima di poter anche solo approssimare una ddp continua. Aggiungiamo per questo un condensatore in parallelo a R_L e riconsideriamo la risposta v_L del nostro circuito alla applicazione della medesima tensione di eccitazione v_S (Fig.24)

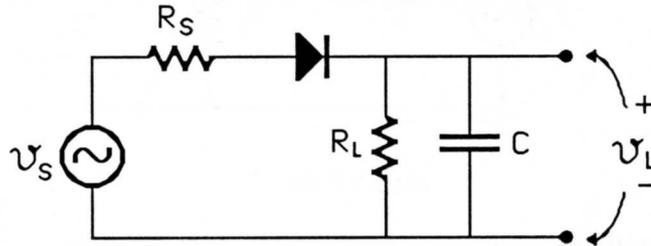


Fig.XVII.24

Lo studio di questo circuito (*raddrizzatore a singola semionda con filtro a condensatore*) è abbastanza complicato se lo si vuole trattare rigorosamente, proprio a motivo della presenza dell'elemento *non lineare* diodo. Diamo pertanto una descrizione approssimata del funzionamento che, sfruttando i circuiti equivalenti del §7, permette di descrivere almeno il grosso degli effetti caratteristici del circuito. Notiamo intanto che nel caso in cui $R_L \rightarrow \infty$, la condizione di regime è $v_L(t) = V_M$ in quanto il condensatore, una volta caricatosi alla ddp positiva pari all'ampiezza massima del segnale v_S , non ha più modo di scaricarsi in quanto la ddp sul diodo è sempre nel verso di contropolarizzarlo ed esso quindi si comporta sempre come un circuito aperto. Qualora la resistenza R_L sia finita, la forma d'onda assume l'andamento riportato in Fig.25 (ammettiamo che $\omega R_L C \gg 1$).

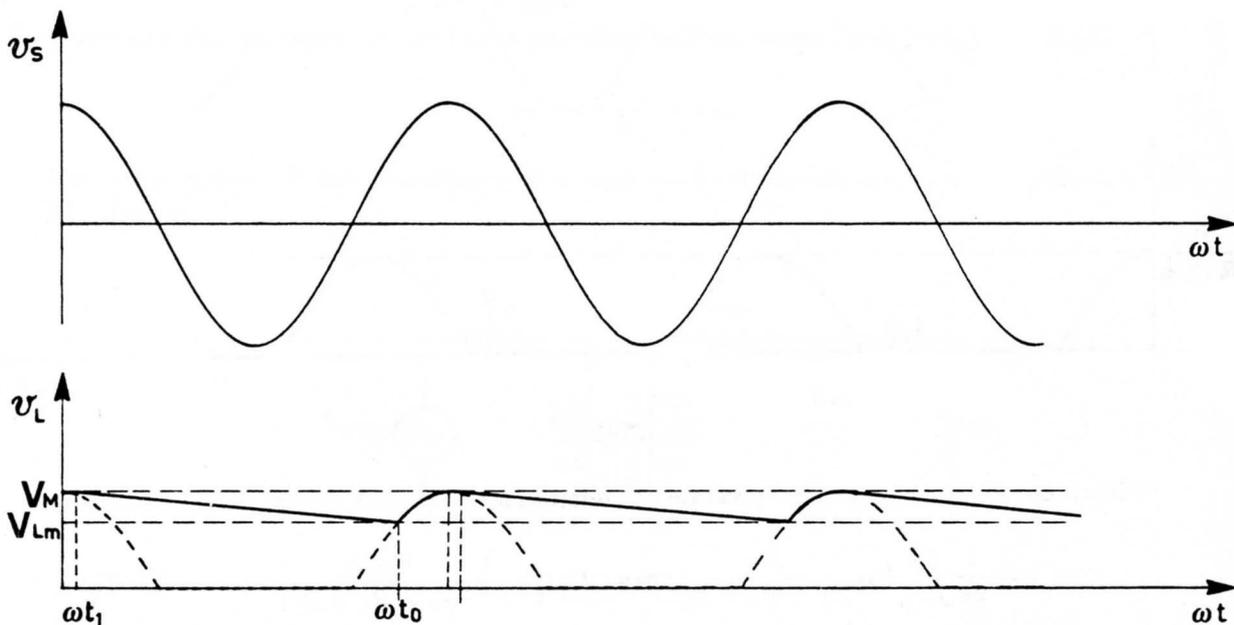


Fig.XVII.25

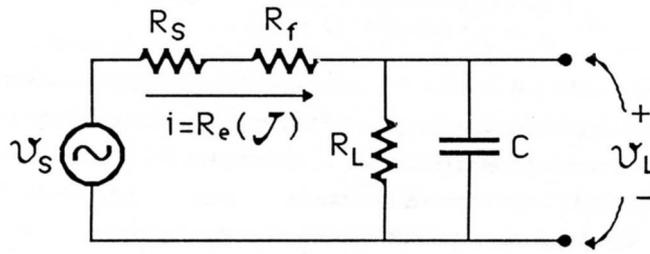


Fig. XVII.26

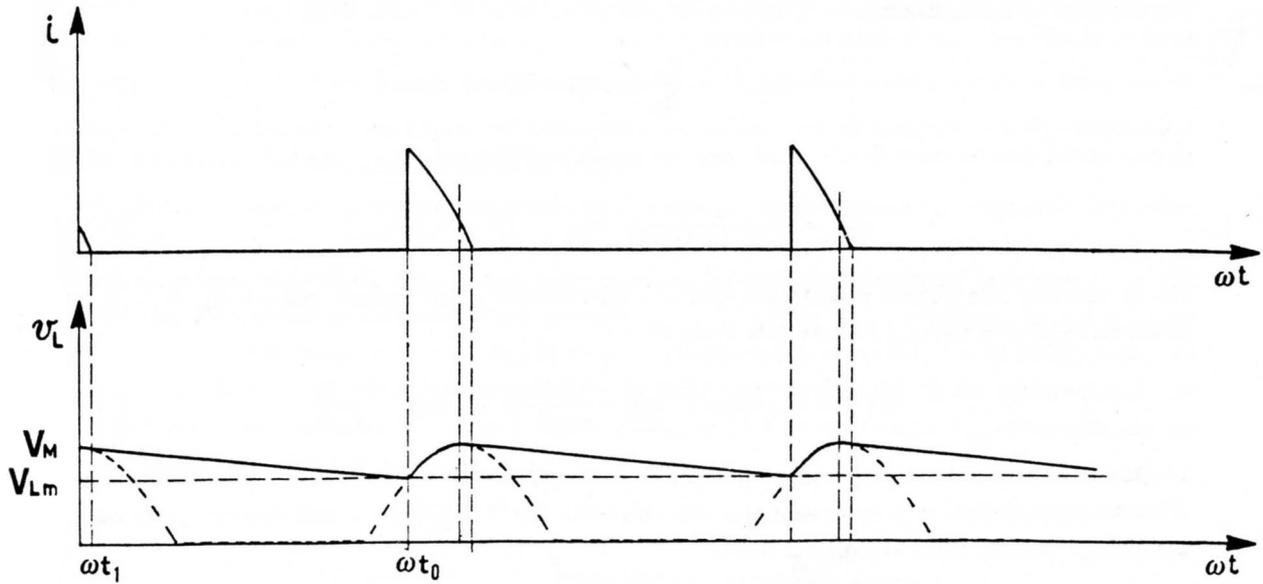


Fig. XVII.27

I tratti rettilinei rappresentano la scarica esponenziale, per tempi piccoli rispetto a $\tau = R_L C$, del condensatore sulla resistenza R_L , quando il diodo è contropolarizzato; le altre porzioni della tensione di uscita sono archi di sinusoidi e corrispondono a quelle condizioni in cui, essendo la ddp applicata al diodo positiva, esso conduce; in queste condizioni, sfruttando l'approssimazione "piecewise" e trascurando anche la tensione V_γ , trattando cioè il diodo come una pura resistenza R_f (Fig.26), abbiamo che la corrente attraverso di esso potrà esprimersi come la parte reale di una corrente complessa \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \frac{V_M \exp j\omega t}{R_f + R_S + \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L}} \quad (\text{XVII.33})$$

Facciamo l'ulteriore approssimazione di trascurare le cadute su R_S e R_f , vale a dire trascuriamo R_S e R_f rispetto a R_L ed inoltre assumiamo che $\omega C R_S$, $\omega C R_f \ll 1$; questa può essere una ragionevole approssimazione nei casi reali, almeno fintanto che il trasformatore è stato dimensionato sufficientemente bene e il diodo lavora mediamente a corrente elevata (così da avere una R_f piccola).

In queste ipotesi

$$\mathcal{J} = \frac{V_M}{R_L} \exp j\omega t \cdot (1 + j\omega CR_L) \quad (\text{XVII.34})$$

La (34) può essere applicata solo nel campo di valori di t (vedi Fig.25) compresi fra t_0 e t_1 ; per $t = t_0$ la corrente presenta una discontinuità (Fig.27) in quanto immediatamente prima di t_0 è il condensatore che eroga la corrente necessaria a fare la caduta su R_L (la tensione ha derivata negativa), immediatamente dopo è il generatore ad inviare la medesima corrente su R_L più un ulteriore contributo di corrente nel condensatore; quest'ultimo è di segno opposto rispetto alla corrente che fluiva attraverso il condensatore nell'istante immediatamente precedente (infatti la derivata di v_L : $\frac{dv_L}{dt} = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{C}$ cambia repentinamente di segno). Queste discontinuità non intervengono nei casi reali poiché esse vengono rimosse dalla presenza di resistenze R_S e R_f non nulle; considerare queste resistenze finite complicherebbe eccessivamente il calcolo, senza aiutare molto la comprensione del meccanismo di raddrizzamento. Considerando la parte reale di \mathcal{J} data dalla (34):

$$i = \text{Re}(\mathcal{J}) = \frac{V_M}{R_L} \cos \omega t - V_M \omega C \sin \omega t \quad (\text{XVII.35})$$

si può anche determinare il valore ωt_1 per cui $i = 0$, cioè l'istante in cui il diodo cessa di condurre:

$$\omega t_1 = \text{atan} \frac{1}{\omega CR_L} + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{XVII.36})$$

che ci dice che tale istante è tanto più vicino a zero ovvero a $2n\pi$ quanto più $\omega CR_L \gg 1$. Il tratto di curva $v_L(t)$ che segue è descrivibile nella forma

$$v_L(t) = V_M \cos \omega t_1 \cdot \exp -\frac{t-t_1}{R_L C} \approx V_M \exp -\frac{t-t_1}{R_L C} \quad (\text{XVII.37})$$

L'ultimo passaggio della (37) è tanto più giustificato quanto più $\omega CR_L \gg 1$; in questa stessa ipotesi il tratto esponenziale può approssimarsi con una retta $V_M(1 - \frac{t-t_1}{R_L C})$ e si può ricavare t_0 in base alla condizione di ddp nulla ai capi del diodo:

$$V_{Lm} = V_M(1 - \frac{t_0-t_1}{R_L C}) = V_M \cos \omega t_0 \quad (\text{XVII.38})$$

La forma d'onda v_L (Fig.25) ricorda molto più da vicino una ddp continua di quanto non succedesse in assenza di condensatore (Fig.23). Se si vuole quantificare l'entità degli scarti di $v_L(t)$ dal valore medio, possiamo procedere così: il valor medio di v_L è, almeno approssimativamente, dato dalla semisomma dei valori massimo (V_M) e minimo ($V_{Lm} = V_M(1 - \frac{t_0-t_1}{R_L C})$); l'approssimazione è tanto migliore quanto più lineare è il tratto fra ωt_1 e ωt_0 , in sostanza quanto più $\omega CR_L \gg 1$.

$$\langle v_L \rangle = \frac{1}{2} \left(V_M + V_M - V_M \frac{t_0-t_1}{R_L C} \right) = V_M - V_M \frac{t_0-t_1}{2CR_L} \quad (\text{XVII.39})$$

Se, come abbiamo supposto, $\omega R_L C \gg 1$, allora sarà $t_0 - t_1 \approx T = \frac{1}{f}$ dove f è la frequenza del generatore, nel nostro caso la rete, quindi 50 Hz; nell'ambito delle attuali schematizzazioni, il fattore $\frac{1}{2fR_L C}$ è $\ll 1$ e pertanto potremmo porre $\frac{V_M}{R_L} \approx \frac{\langle v_L \rangle}{R_L} = \langle I \rangle$, con $\langle I \rangle$ corrente media su R_L ; possiamo quindi scrivere:

$$\langle v_L \rangle = V_M - \frac{\langle I \rangle}{2fC} \quad (\text{XVII.40})$$

Quest'ultima relazione suggerisce che il nostro sistema, con riferimento ai due terminali cui è collegato R_L , si comporta *in media* come un generatore di Thévenin avente fem a circuito aperto

pari a V_M ($R_L \rightarrow \infty, \langle I \rangle \rightarrow 0$) e una resistenza interna equivalente pari a $\frac{1}{2fC}$. Vale a dire, considerando questo generatore, la tensione media che esso mantiene ai capi di un carico R_L , è tanto più vicina al valore asintotico V_M , quanto più grande è R_L .

A questo punto possiamo esemplificare il meccanismo secondo il quale avviene il raddrizzamento della tensione alternata v_S : durante tutta la fase in cui il diodo è contropolarizzato, di fatto la maggior parte del tempo, il condensatore eroga la corrente richiesta dall'utilizzatore, cioè fornisce energia all'esterno; solo per brevi istanti il diodo risulta polarizzato direttamente e in queste fasi una corrente di elevata intensità viene inviata dal generatore sia per sostenere la caduta su R_L che per rifornire al condensatore la carica perduta nella fase in cui il diodo era contropolarizzato; una eventuale riduzione della resistenza R_L ha come effetto che la corrente media richiesta per mantenere approssimativamente la stessa ddp aumenta e quindi il condensatore perde più carica fra un intervento del diodo ed il successivo e quindi lo scarto medio della tensione di uscita rispetto al valore massimo aumenta; l'effetto medio è descritto nei termini ora visti di una *resistenza interna efficace* pari a $\frac{1}{2fC}$. Il residuo di componente alternata attorno al valore medio è detto *ripple* (increspatura); da quanto visto sopra, all'aumentare del carico, cioè al diminuire di R_L , diminuisce il valore medio $\langle v_L \rangle$ ed aumenta anche il "ripple".

Facciamo un esempio numerico: supponiamo di avere un trasformatore con rapporto di trasformazione 10 a 1 con una resistenza sul secondario R_S dell'ordine di 1Ω . Supponiamo di avere un diodo di caratteristiche tali da poter essere approssimato dal modello "piecewise", con una $R_f \approx 1\Omega$. La ampiezza della tensione sinusoidale sul secondario è: $\frac{220}{10}\sqrt{2} \approx 31\text{ V}$; supponendo che il carico massimo (ovvero la minima resistenza R_L) al quale vogliamo applicare la ddp sia di 100Ω , possiamo trascurare la resistenza interna del secondario e la resistenza diretta del diodo commettendo un errore di qualche per cento; inoltre dato il valore di $V_M \approx 31\text{ V}$, trascuriamo V_γ , commettendo un ulteriore errore di qualche per cento nella stima del massimo.

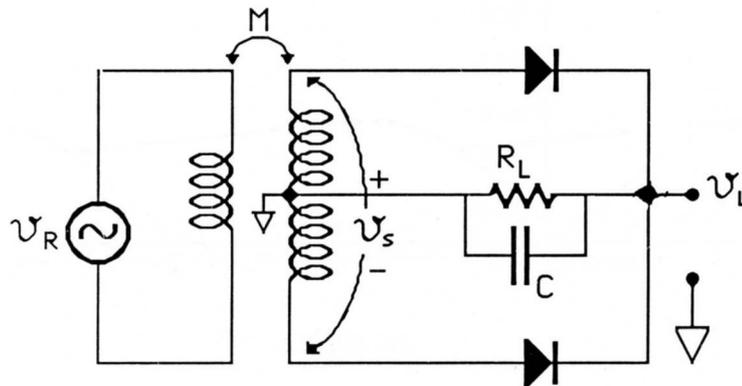


Fig.XVII.28

Se ora vogliamo che per il carico massimo di 100Ω si abbia una *regolazione* del 10%, ovvero che il valor medio della tensione non diminuisca di più del 10% rispetto al valore per carico nullo ($R_L = \infty$), abbiamo una prescrizione riguardo a C ; infatti dalla (40) otteniamo: $\frac{\langle I \rangle}{2fC} \leq 10^{-1}V_M$ e quindi $C \geq 1000\ \mu F$ che è senz'altro un condensatore di valore assai elevato, ma ancora facilmente reperibile (condensatori elettrolitici). Quanto alla resistenza interna equivalente $R_e = \frac{1}{2fC}$ essa vale: $R_e = 10\Omega$. Si verifica così che la resistenza efficace domina rispetto a quella del trasformatore e del diodo; se avessimo viceversa trovato un valore dell'ordine di qualche *Ohm* non avremmo più potuto dimenticarci degli altri contributi; ovviamente tutto ciò si è verificato perché la *regolazione* richiesta

è stata del 10%, che equivale proprio ad accettare una resistenza interna di 10Ω . Prima di passare a descrivere un circuito che utilizza un diodo Zener per migliorare le prestazioni di questo generatore di tensione "continua", notiamo che un raddrizzatore di questo tipo costringe il diodo e il trasformatore a lavorare in maniera assai poco efficiente, che oltretutto può mettere a dura prova i componenti: infatti, richieste repentine di corrente intensa per brevi periodi, richiedono al diodo densità di corrente molto elevata, molto superiore al valore medio della corrente richiesta dal carico; pertanto il diodo va scelto fra i tipi che siano in grado di sopportare un tale genere di funzionamento (per esempio di sezione grossa, in modo che le cadute ohmiche al suo interno siano piccole); anche per il trasformatore erogare grosse correnti di spunto può portare a problemi, in quanto si richiedono potenze istantanee estremamente elevate. Il sistema ora descritto, *raddrizzamento a singola semionda*, si può facilmente migliorare sfruttando anche la semionda successiva, ricorrendo a due diodi e ad un trasformatore a presa centrale (Fig.28). Non entreremo nei dettagli, ma diremo soltanto che il miglioramento è ottenuto principalmente facendo in modo che il trasferimento di energia dal trasformatore al condensatore avvenga più frequentemente e quindi a parità di valori di V_M , C , R_L la regolazione migliora di un fattore 2 (Fig.29).

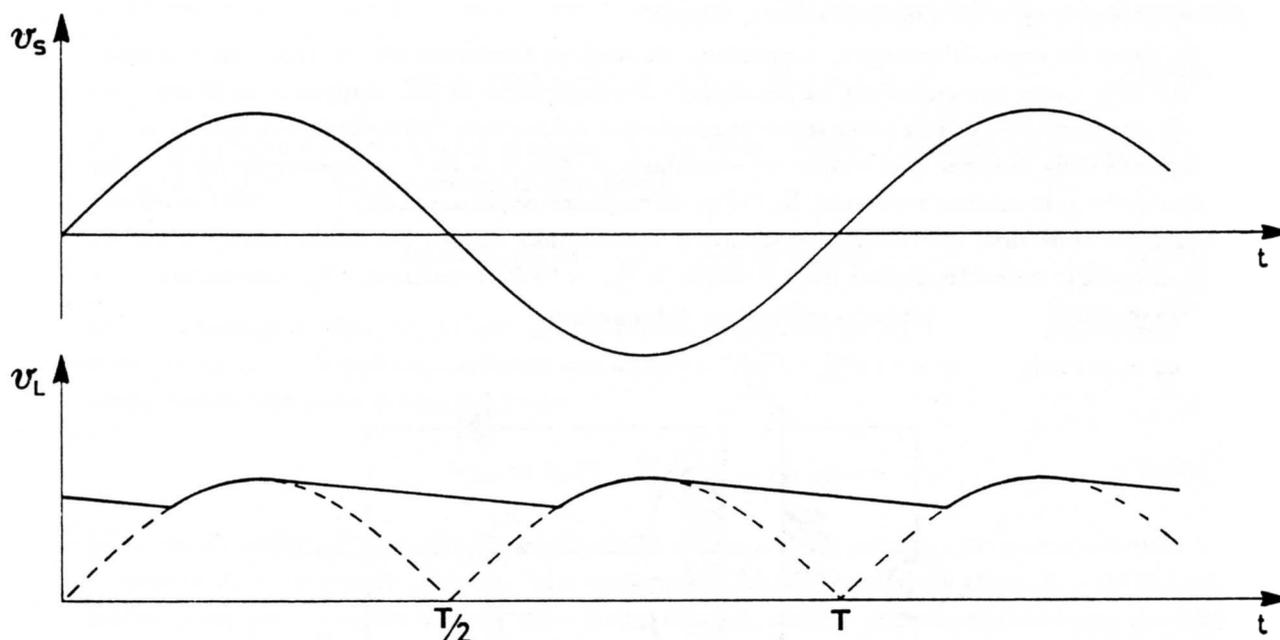


Fig.XVII.29

9.— Un regolatore di tensione a diodo Zener

Abbiamo ora visto che, usando un raddrizzatore a diodi con un filtro a condensatore, se si vuole realizzare un generatore di fem il più possibile costante e il più possibile insensibile al carico, cioè con una piccola resistenza interna, occorre - fissata la frequenza - aumentare il valore del condensatore; questo pone alcuni problemi di funzionamento sia al diodo che al trasformatore che si trovano a lavorare praticamente in regime impulsivo. Quest'ultimo fatto stabilisce un limite superiore al

valore del condensatore e pertanto un valore minimo del ripple e della regolazione (indipendenza dal carico) ad alimentatori di questo tipo. Si possono ottenere risultati migliori sia dal punto di vista della costanza del valore medio rispetto al carico che da quello del ripple realizzando un alimentatore mediante un diodo Zener. Riportiamo in Fig.30 la caratteristica di un diodo Zener e notiamo che quando la corrente inversa supera un certo valore minimo I_{Zmin} la tensione ai capi del diodo V_Z si mantiene pressoché costante ed indipendente da I .

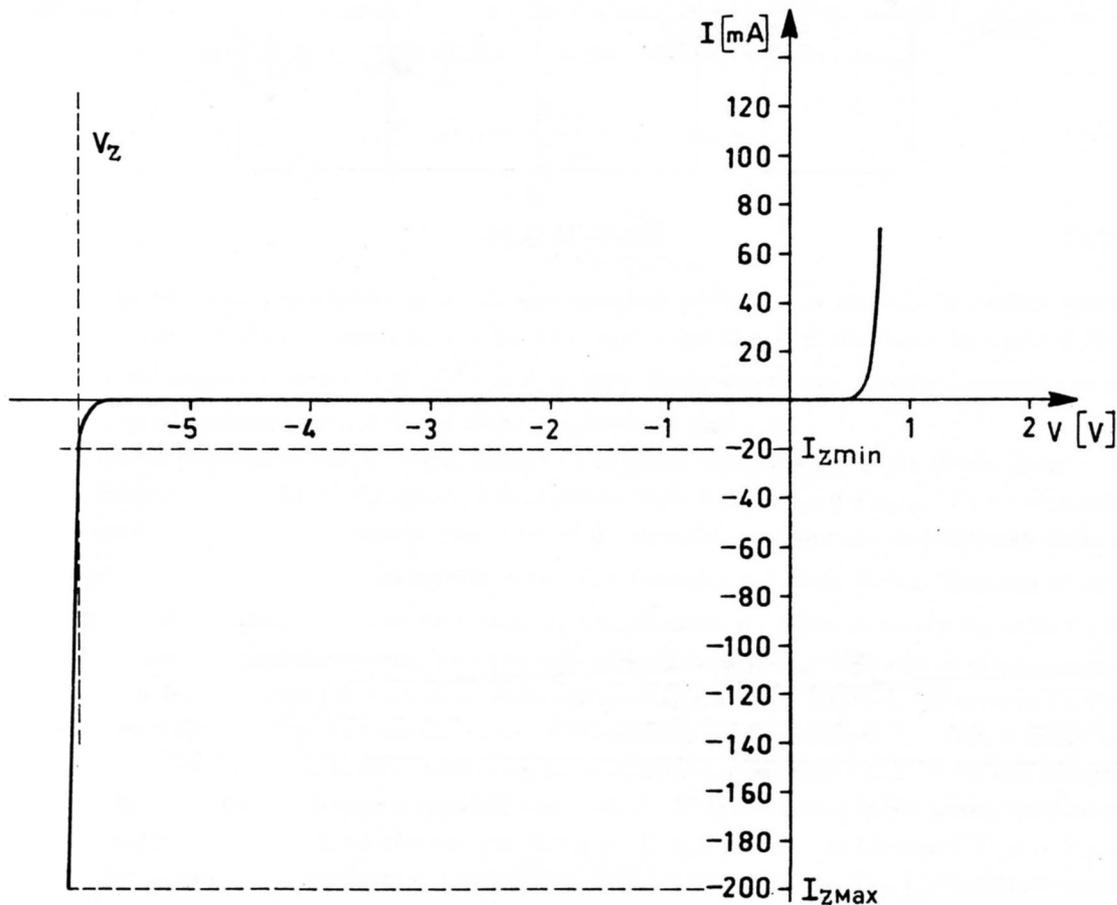


Fig.XVII.30

La zona della caratteristica dove si passa da una corrente praticamente nulla al valore I_{Zmin} è detta *ginocchio* dello Zener. Il limite massimo I_{ZMax} della corrente nel diodo è determinato dalla potenza massima W_M che si può dissipare ($V_Z I_{ZMax} < W_M$) sul diodo medesimo. Vediamo ora (Fig.31) come si può realizzare un discreto generatore di fem costante di valore V_Z con una massima corrente erogabile attorno al valore $(I_{ZMax} - I_{Zmin})$: innanzitutto occorre disporre di un raddrizzatore del tipo descritto nel paragrafo precedente, avente magari un “ripple” residuo anche grosso, purché la tensione minima V_m che presenta ai suoi capi (A,B) sia comunque abbastanza superiore a V_Z , quando eroghi una corrente media nell’intorno del valore I_{ZMax} . Oltre alla variazione della tensione fra A e B dovuta al ripple, sarà anche presente una instabilità associata alla fluttuazione

della tensione sul primario, ovvero della rete, tipicamente $\pm 10\%$.

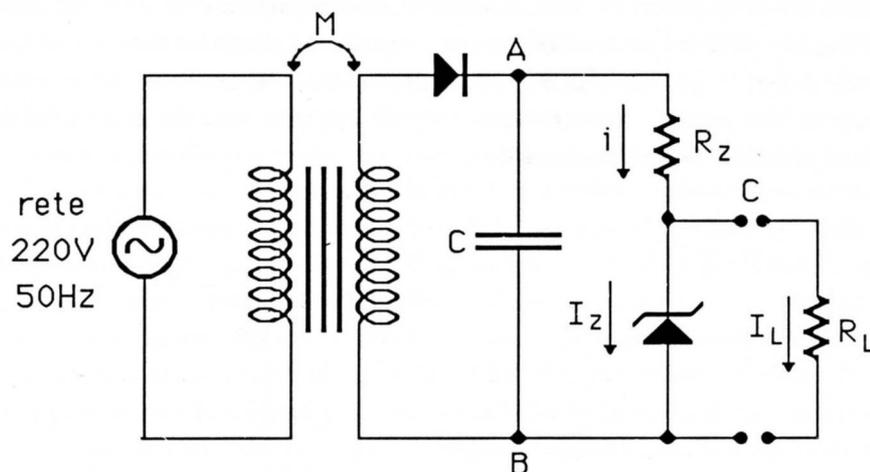


Fig.XVII.31

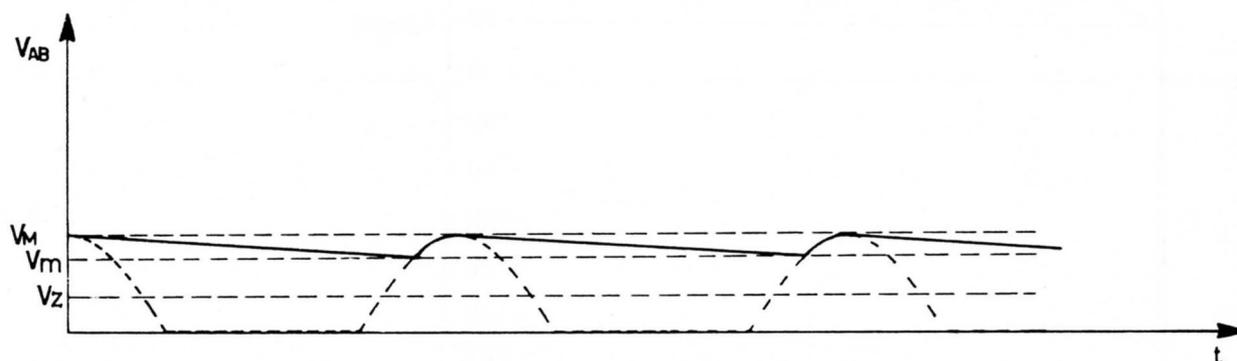


Fig.XVII.32

Poiché, almeno fintanto che $I_Z > I_{Zmin}$, la ddp ai capi del diodo Zener è pari a V_Z , avremo che la corrente i su R_Z oscillerà fra due valori, corrispondenti al massimo (V_M) e al minimo (V_m) di V_{AB} (vedi Fig.32), di cui il più elevato pari a

$$i_M = \frac{V_M - V_Z}{R_Z} \quad (\text{XVII.41})$$

e l'altro

$$i_m = \frac{V_m - V_Z}{R_Z} \quad (\text{XVII.42})$$

Nel caso in cui fra C e B (terminali del nostro generatore) non sia collegato alcun carico, sarà $i = I_Z$ e pertanto, se non vogliamo danneggiare lo Zener in questa situazione di lavoro, R_Z dovrà essere scelta in modo da fare i_M al più uguale a I_{ZMax} ; pertanto avremo

$$R_Z \geq \frac{V_M - V_Z}{I_{ZMax}} \quad (\text{XVII.43})$$

Scegliamo R_Z in modo da soddisfare la relazione di uguaglianza. In corrispondenza dei minimi di $V_{AB} = V_m$ avremo una corrente nello Zener in assenza di carico, pari a (vedi (42) e (43)):

$$i_m = \frac{V_m - V_Z}{V_M - V_Z} I_{ZMax} \quad (\text{XVII.44})$$

Se a questo punto colleghiamo fra C e B il carico R_L , esso deriverà una corrente I_L , che andrà a sottrarsi alla corrente I_Z che circolava nel diodo Zener; fintanto che la corrente residua nel diodo si mantiene superiore a I_{Zmin} la ddp V_{CB} resta uguale a V_Z ; questa considerazione, insieme alla relazione $I_L = \frac{V_Z}{R_L} = i - I_Z$ stabilisce un limite minimo per la resistenza R_{Lm} (e un massimo I_{LM} per I_L), quello per cui I_Z si è ridotta fino al minimo valore consentito I_{Zmin} :

$$I_{LM} = \frac{V_Z}{R_{Lm}} = i_m - I_{Zmin} \quad (\text{XVII.45})$$

ovvero

$$R_{Lm} = \frac{V_Z}{i_m - I_{Zmin}} \quad (\text{XVII.46})$$

Si noti che abbiamo considerato la condizione peggiore per i , quella cioè che si verifica quando la tensione V_{AB} è minima. Concludendo, finché il carico fra C e B si mantiene inferiore a R_{Lm} , se vengono cioè erogate correnti $I_L \leq \frac{V_Z}{R_{Lm}} = I_{LM}$, nello Zener scorre una corrente comunque superiore a I_{Zmin} , quella minima necessaria ad avere una tensione pari a V_Z .

L'analisi precedente non è esatta, poiché dalle caratteristiche reali di un diodo Zener si ricava una variazione non nulla di V_Z , quando la corrente varia fra I_{ZMax} e I_{Zmin} . Tale variazione può anche ammontare anche a qualche per cento ed è calcolabile conoscendo la pendenza della curva caratteristica $\frac{\Delta I_Z}{\Delta V_Z}$, il cui inverso è detto *resistenza dinamica* del diodo Zener. Facendo un esempio che verrà poco più avanti trattato nuovamente, consideriamo un diodo Zener da $V_Z = 20 V$, $W_M = 10 W$; ammettiamo anche che esso, per correnti dell'ordine di $(100 \div 300) mA$ abbia una resistenza dinamica di 4Ω . Pertanto per variazioni della corrente I_Z da 100 a $300 mA$, la tensione V_Z varia di $0.8 V$, ovvero del 4%. Il miglioramento rispetto al semplice raddrizzamento con filtro a condensatore è comunque netto, anche tenendo conto che si ha stabilizzazione sia rispetto al carico che rispetto alla tensione di alimentazione (ripple e instabilità della rete). E' chiaro tuttavia che questo miglioramento ha una contropartita nel fatto che occorre disporre di una tensione raddrizzata $V_{AB} > V_Z$ e che, anche quando la potenza richiesta dal carico fosse molto piccola ($R_L \gg R_{Lm}$), dissipiamo comunque energia in quanto la corrente $i \approx I_{ZMax}$ è sempre erogata fra i terminali A e B. Il sistema - in altri termini - è poco efficiente dal punto di vista energetico: supponiamo infatti di voler realizzare un generatore di fem da $20 V$ con una disponibilità massima di $100 mA$ (vale a dire che riesca ad alimentare un carico massimo $R_{Lm} = 200\Omega$). Ammettiamo che la tensione raddrizzata abbia una escursione fra $V_M = 50 V$ e $V_m = 40 V$ con la resistenza $R_Z = 100\Omega$. Ciò corrisponde ad erogare sullo Zener (a carico nullo) una corrente variabile fra 300 e $200 mA$. Il diodo Zener dovrà pertanto essere in grado di dissipare una potenza di $6 W$ (in genere si dimensiona il wattaggio dello Zener con larghezza, tipicamente con un fattore di sicurezza 2, ovvero nel nostro caso sarebbe opportuno utilizzare un diodo da almeno una *decina* di *Watt*). Quando si applica in parallelo al diodo Zener il carico di 200Ω scorre nel diodo una corrente compresa fra 100 e $200 mA$. Il fatto che entrambi i valori siano $\gg I_{Zmin}$ (pochi mA per casi reali) assicura una minor variazione di V_Z e quindi una migliore regolazione. Tutto questo comporta però che anche nel caso di carico massimo con una richiesta di potenza di utilizzo di $2 W$, nel generatore complessivamente si dissipano poco meno di $15 W$.

Nella pratica i generatori di tensione non sono quasi mai fatti con questi criteri: pur utilizzando un diodo Zener per creare la tensione di riferimento necessaria per “costruire” la tensione di uscita dell'alimentatore, il circuito è però realizzato in modo che la corrente attraverso lo Zener è mantenuta nominalmente costante. Si ottiene così che la tensione V_Z resta estremamente stabile sia perché è eliminata la sua variazione indotta dalle variazioni di I_Z , sia perché la potenza dissipata sul diodo resta costante e con essa la temperatura, riducendo le instabilità indotte dalle variazioni termiche.

10.— Cenni al transistoro bipolare

Diamo qui una sommaria descrizione del principio di funzionamento del *transistore* (più propriamente del *transistore bipolare*), dispositivo sul cui vastissimo impiego non occorre neppure soffermarsi.

Il transistoro è costituito da due giunzioni p-n affacciate e con una porzione di semiconduttore a comune (nelle Fig.33 è rappresentato un transistoro pnp).

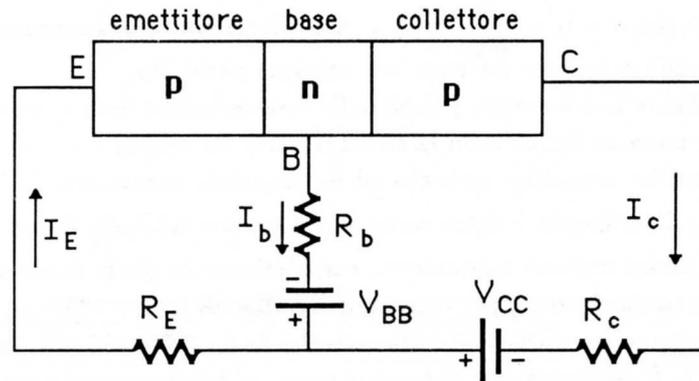


Fig.XVII.33

Alle tre porzioni di semiconduttore sono collegati dei reofori metallici tramite opportuni contatti ohmici. Supponiamo di polarizzare il transistoro in modo da avere il diodo *Emettitore-Base* (E-B, secondo la terminologia corrente) in conduzione diretta e quello *Collettore-Base* (C-B) contropolarizzato. Se non esistesse interazione fra le operazioni dei due diodi, per quanto abbiamo finora visto, dovremmo avere una corrente I_E di alcuni mA (a seconda della tensione V_{EB} , attorno comunque a 0.7-0.8 V) e invece una debolissima corrente I_C (di saturazione inversa); conseguentemente la corrente I_B dovrebbe essere praticamente uguale a I_E . Quello che si osserva è totalmente diverso: infatti poiché il drogaggio della zona della base è stato fatto deliberatamente inferiore (almeno di due ordini di grandezza) a quello dell'emettitore, in essa il libero cammino medio per ricombinazione dei portatori è maggiore della dimensione della base e pertanto la concentrazione di lacune che dalla zona p dell'emettitore sono diffuse nella zona n della base si estende fino alla barriera fra la base e il collettore dove il campo elettrico le sospinge verso il collettore. Si ottiene così una corrente $I_C \approx I_E$ e la corrente I_B resta molto piccola, poiché poche sono le lacune che si sono ricombinate nella base con gli elettroni riforniti dal polo negativo del generatore V_{BB} . Con la piccola potenza associata al generatore V_{BB} ($V_{BB}I_B$) si riesce a controllare una potenza molto più elevata ($V_{CC} \cdot I_C$). Il simbolo

circuitale del transistor è quello in Fig.34a e 34b, per il transistor pnp e npn rispettivamente. Riportiamo nella Fig.35, come esempio, le cosiddette caratteristiche di uscita a emettitore comune di un transistor pnp; V_{CE} rappresenta la ddp fra collettore ed emettitore, I_C la corrente uscente dal collettore, I_B la corrente uscente dalla base.

Curve simili le otterremo per il transistor ad effetto di campo (Fet), del quale studieremo nel prossimo capitolo principio di funzionamento e applicazioni.

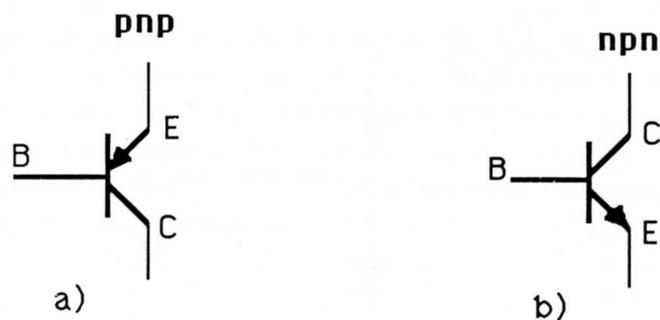


Fig.XVII.34

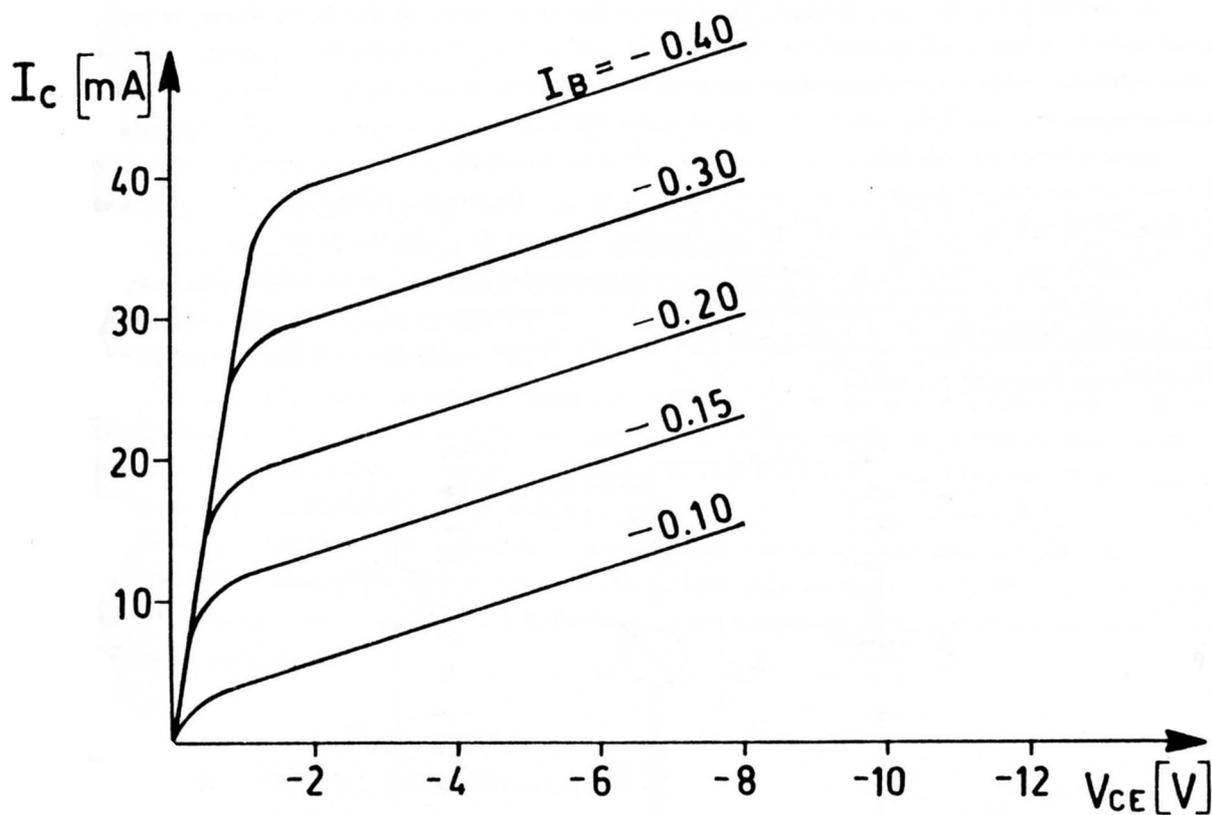


Fig.XVII.35

11. – Determinazione della caratteristica statica di un diodo a semiconduttore

Mediante il circuito di Fig.36 è possibile costruire la caratteristica statica del diodo D.

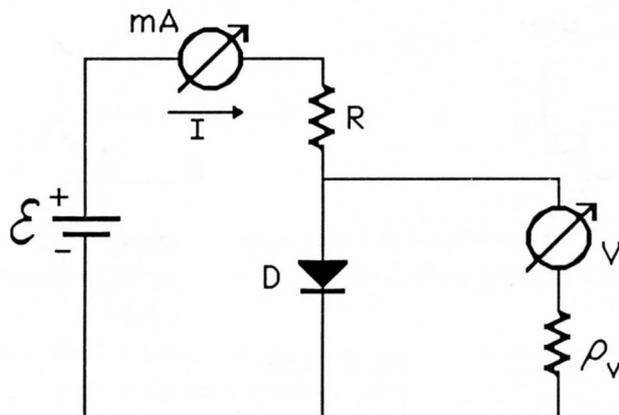


Fig.XVII.36

La caratteristica inversa, interessante soprattutto se si tratta di un diodo Zener, si studierà invertendo la polarità del generatore. Quanto alla scelta della strumentazione converrà adoperare come voltmetro uno strumento ad alta resistenza di ingresso in modo che la corrente I , misurata dal milliamperometro, sia il più possibile vicina al valore della corrente che passa nel diodo. Quest'ultima condizione è facile da soddisfare per quanto riguarda la caratteristica diretta, poiché la ddp ai capi del diodo si mantiene comunque al di sotto di 1 V e se ρ_V vale almeno $10^7\Omega$, tipici di un multimetro elettronico, al più verranno derivati 10^{-7} A , rispetto al valore di I attorno ai 10^{-3} A .

Tuttavia, nello studio della caratteristica inversa, per tensioni dell'ordine della decina e più di Volt, la corrente attraverso il voltmetro dà un contributo sostanziale ad I (si ricordi che la corrente di saturazione inversa di un diodo è dell'ordine dei $n\text{ A}$). Pertanto per studiare la parte inversa della caratteristica conviene procedere come in Fig.37:

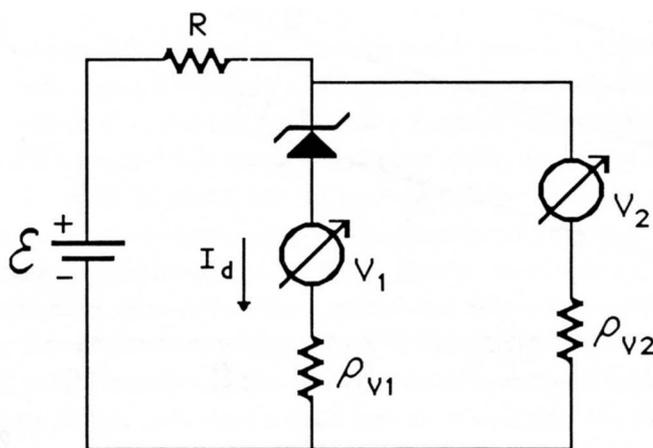


Fig.XVII.37

Se $\rho_{V1} = 10^7\Omega$, anche una corrente I_d di 1 nA darà una caduta misurabile (10^{-2} V) con V_1 .

$V_2 - V_1$ dà la ddp ($\approx V_2$) sul diodo e pertanto è possibile determinare - pur con un errore non proprio piccolo - la corrente di saturazione inversa. Alternativamente, disponendo di un misuratore di corrente sufficientemente sensibile, lo si potrà impiegare al posto di V_1 e ricavare direttamente I_d .

La determinazione della caratteristica statica con questo metodo, soprattutto se si tratta di un diodo Zener, comporta alcuni piccoli problemi, dovuti al fatto che ogni punto della nostra curva corrisponde ad una temperatura della giunzione differente da quello degli altri; infatti la potenza dissipata sul nostro componente dipende fortemente dal punto di lavoro. Ciò è particolarmente evidente nel caso del diodo Zener ove, una volta passato il ginocchio, la potenza cresce linearmente con la corrente e si possono raggiungere facilmente temperature elevate della giunzione. Occorre perciò fare attenzione a non superare il wattaggio massimo consentito. Anche nella caratteristica diretta, la potenza cresce pressappoco con I , però questa volta, essendo la ddp piccola, difficilmente si raggiungono potenze, e quindi temperature, elevate.

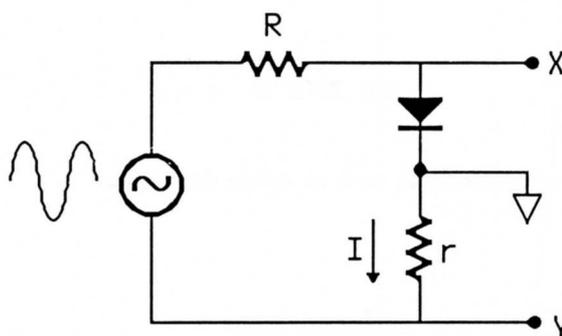


Fig.XVII.38

Con questo sistema è quindi arduo ottenere una caratteristica statica corrispondente ad una temperatura fissa, cosa viceversa necessaria se si volesse provare a fare un "fit" dell'andamento sperimentale con la dipendenza teorica. Per far ciò occorre ricorrere ad un *caratteristigrafo*, ovvero un oggetto che automaticamente cambia il punto di lavoro (I, V) e registra su uno schermo oscillografico i due parametri corrente e tensione. Se la frequenza con cui i parametri V e I vengono aggiornati è sufficientemente grande rispetto all'inverso del tempo di propagazione del calore nel diodo, e il ciclo di scansione è ripetuto continuamente, si può ritenere che la temperatura della giunzione sia costante in tutti i punti di lavoro. Un metodo di realizzare la funzione ora descritta - limitata allo studio delle caratteristiche di un diodo - è quello (Fig.38) di inviare ai capi del diodo una ddp variabile (una sinusoide va benissimo) che comandi l'asse x di un oscillografo e di inviare al canale Y del medesimo oscillografo la ddp provocata dalla caduta della corrente del diodo su una resistenza nota r . Otteniamo così un grafico (I, V); l'escursione dei parametri dipende dall'ampiezza della ddp applicata nonché da R e r .

12.- Un diodo di precisione

Abbiamo visto che uno dei problemi connessi con l'uso di diodi a semiconduttore nelle applicazioni come raddrizzatori di segnali non troppo ampi, è la presenza della tensione V_γ ; a causa di essa una tensione sinusoidale con ampiezza $< V_\gamma$ dà addirittura un segnale raddrizzato di ampiezza

zero. Un sistema per eliminare questo inconveniente è quello di inserire il diodo nel ramo di reazione negativa di un operazionale montato ad inseguitore di tensione (Fig.39).

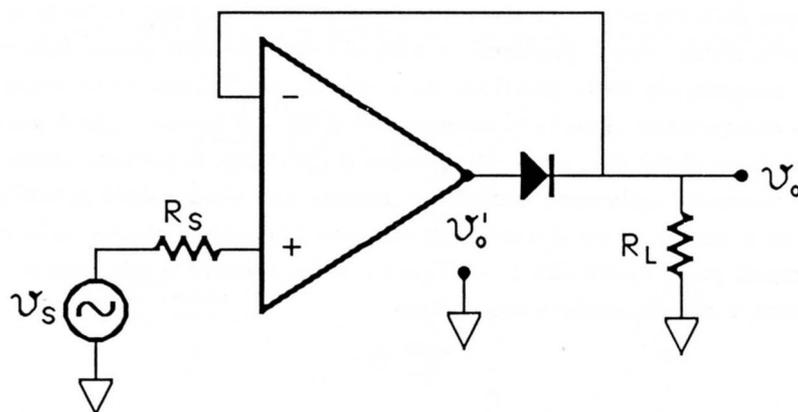


Fig.XVII.39

Supponiamo che v_S sia > 0 ; l'uscita v'_0 sarà al valore di tensione

$$v'_0 = A(v_S - v_0) \quad (\text{XVII.47})$$

Inoltre

$$v'_0 = v_0 + v_d \quad (\text{XVII.48})$$

dove v_d rappresenta la ddp presente ai capi del diodo quando si trova ad essere percorso dalla corrente $i = \frac{v_0}{R_L}$ (l'ingresso dell'operazionale si suppone a Fet). A v_d contribuisce in modo essenziale V_γ (Fig.40); ad esempio il modello "piecewise" ci dice che $v_d \approx V_\gamma + iR_f$. Dalle (47) e (48) abbiamo allora:

$$v_0 = \frac{Av_S - v_d}{A + 1} \approx v_S - \frac{v_d}{A} \quad (\text{XVII.49})$$

cioè la tensione di uscita riproduce (a meno di un termine $\frac{v_d}{A}$ che può essere trascurato nella maggior parte dei casi se, ad esempio, $A > 10^5$) la tensione applicata v_S , se positiva. Quando v_S è negativa la tensione v'_0 tende a diventare negativa e a contropolarizzare il diodo cosicché v_0 resta praticamente a 0.

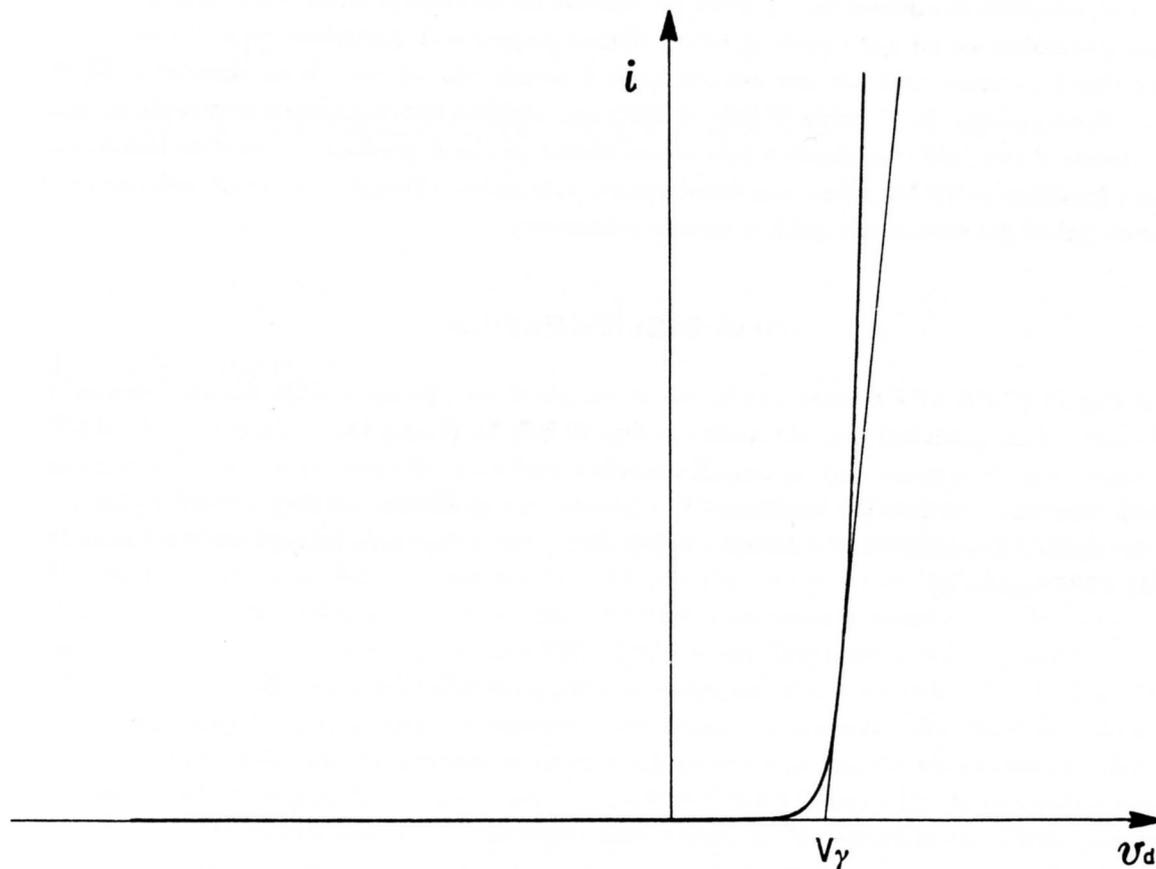


Fig.XVII.40

Abbiamo così realizzato un diodo praticamente perfetto, nel senso che v_0 riproduce esattamente v_S quando $v_S > 0$, mentre l'uscita sta praticamente a zero quando $v_S < 0$. Quindi la caratteristica di trasferimento (v_0, v_S) di questo dispositivo è una semiretta a 45° ; raddrizzatori realizzati con questo dispositivo al posto del diodo tradizionale e con un filtro a condensatore sono adoperati per realizzare convertitori AC-DC di precisione in alcuni multimetri (Fig.41).

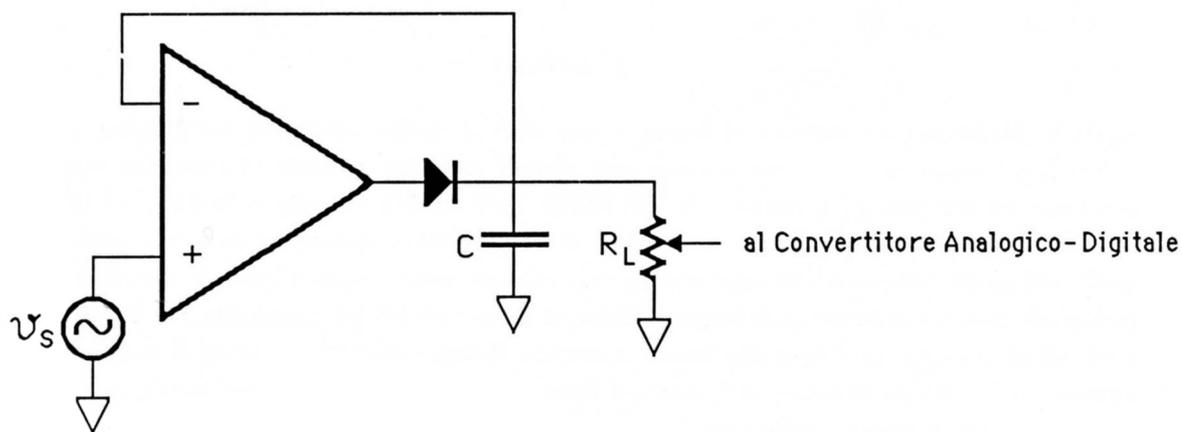


Fig.XVII.41

La ripartizione di tensione su R_L serve per passare da una ddp continua pari all'ampiezza del segnale sinusoidale v_S ad una uguale al valore efficace (rapporto di partizione $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Un sistema di questo tipo è pertanto calibrato per una sinusoide e quindi solo nel caso di v_S sinusoidale dà un valore efficace esatto. Se la forma d'onda ripetitiva in ingresso ha un andamento non sinusoidale la situazione è assai più complicata e solo alcuni multimetri sono predisposti per dare indicazioni corrette (multimetri TRMS - *true root mean square, vero valore efficace*); per far ciò essi ricorrono a manipolazioni del segnale che qui non stiamo a descrivere.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Il Cap.21 di **TE 57** è tuttora una buona introduzione all'argomento delle proprietà dei semiconduttori e delle giunzioni p-n; altrettanto si dica di **FR 71** (Cap.4,§3). I Capp.1 e 2 di **MI 72** contengono una descrizione delle principali proprietà elettriche dei conduttori, isolanti e semiconduttori. Uno studio di tipo più fondamentale si può trovare su **KI 76**. Le proprietà delle giunzioni p-n, del diodo a semiconduttore e delle sue applicazioni sono abbastanza dettagliatamente descritte su **MI 72** (Capp.3 e 4).