

XVIII

IL TRANSISTORE A EFFETTO DI CAMPO

1. – Introduzione

Il *transistore a effetto di campo* è un dispositivo elettronico a tre terminali; conseguentemente il suo comportamento elettrico non è più descrivibile mediante una semplice relazione I, V come nel caso dei componenti bipolari, ma occorre –ad esempio– conoscere la famiglia di curve (I, V) rispetto a due terminali con la tensione del terzo terminale come parametro. Il dispositivo che studieremo è comunemente indicato come FET (Field Effect Transistor), più propriamente JFET (Junction.....), per distinguerlo dall'altro tipo di transistore ad effetto di campo, il MOSFET (Metal Oxide Semiconductor....). In maniera estremamente schematica possiamo dire che il Fet consiste in una sbarretta di materiale semiconduttore recante agli estremi due contatti ohmici per due elettrodi conduttori, detti terminali di *Source* e *Drain*. La conducibilità fra Source e Drain, cioè della sbarretta di semiconduttore –detta *canale*–, è controllata dalla differenza di potenziale fra il terzo elettrodo, detto *Gate*, e gli altri due (da qui il nome transistore ad effetto di campo, sottintendendo elettrico). Il materiale semiconduttore del canale può essere di tipo p o di tipo n, nel qual caso il Fet si chiama Fet canale-p o Fet canale-n rispettivamente. I simboli circuitali sono quelli delle Fig.1a e Fig.1b.

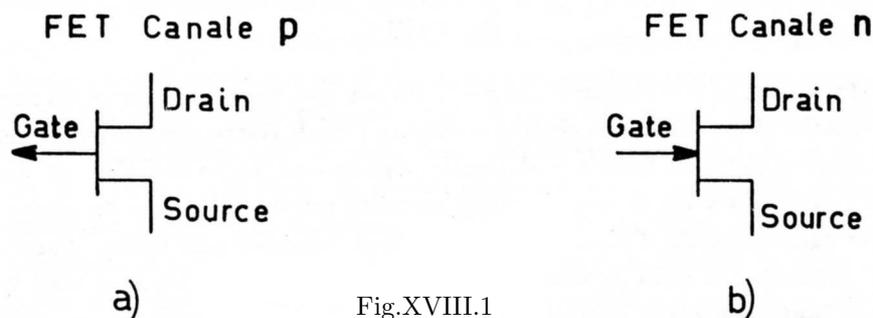


Fig.XVIII.1

La possibilità del Fet di controllare la resistenza e quindi la corrente fra i terminali di Drain e di Source mediante la tensione del Gate ricorda una caratteristica del transistore bipolare descritto molto sommariamente nel §10 del Cap. XVII, cioè il controllo della corrente fra collettore ed emettitore mediante la corrente di base. Di fatto molte delle funzioni che un transistore bipolare svolge nei circuiti elettrici possono essere espletate (in qualche caso anche meglio) da un Fet. Conseguentemente le applicazioni del Fet sono vaste in tutti i campi dell'elettronica e principalmente in quelle applicazioni in cui sono richieste grandi miniaturizzazioni alle quali le caratteristiche del Fet e dei Mosfet meglio si prestano di quelle dei transistori bipolari. Nei paragrafi seguenti descriveremo dapprima la fisica del dispositivo e quindi passeremo a descriverne alcune applicazioni.

2.— Comportamento di un Fet per piccoli valori della tensione Source-Drain

Consideriamo ora e nel seguito un Fet canale-p: con riferimento alla Fig.2, che rappresenta la sezione del canale in un caso di geometria non molto realistica, ma utile per comprendere il principio di funzionamento, si nota che il Gate è costituito da due elettrodi equipotenziali; essi sono in realtà due zone di materiale semiconduttore del tipo opposto a quello del canale, cioè n, molto drogato rispetto al drogaggio del canale (un drogaggio forte si indica aggiungendo il simbolo + alla concentrazione).

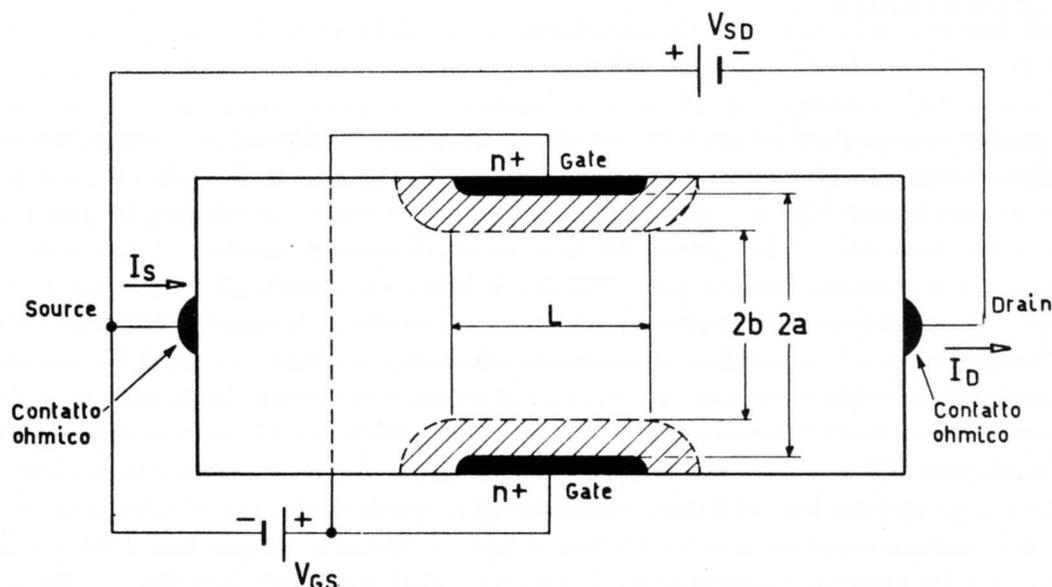


Fig.XVIII.2

Pertanto fra Gate e canale abbiamo due giunzioni p-n, cioè due diodi simmetrici rispetto al piano mediano del canale. Supponiamo di contropolarizzare i diodi Gate-canale, mantenendo positivo il terminale di Gate rispetto al Source e al Drain; supponiamo anche che $V_{SD} \ll V_{GS}$, ovvero la caduta ohmica lungo il canale di una eventuale corrente attraverso di esso sia molto piccola, così da considerare equipotenziale il conduttore complessivo Source-canale-Drain. Sappiamo che una giunzione p-n presenta una zona di svuotamento ove i portatori di carica sono stati tutti rimossi e che tale zona è tanto più estesa quanto più la giunzione è contropolarizzata; sappiamo anche che se una delle due zone è molto meno drogata dell'altra, allora la zona di svuotamento si estende praticamente solo in essa. Nel nostro caso una contropolarizzazione Gate-canale dà luogo quindi all'avanzamento entro il canale di una zona svuotata di portatori e quindi di fatto non disponibile per la corrente di canale dal Source al Drain. Nel disegno tale zona è stata disegnata come tratteggiata (non si prendano troppo sul serio i profili disegnati ai confini verso il Source e il Drain). Detta $2a$ l'altezza complessiva del canale in corrispondenza del Gate e $2b$ l'altezza della porzione atta alla conduzione, cioè non svuotata, ricordando il risultato (XVII.20), abbiamo:

$$(a - b) = \left(\frac{2\epsilon}{eN_A} V_{GC} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XVIII.1})$$

dove V_{GC} rappresenta la differenza di potenziale di contropolarizzazione fra Gate e canale, com-

prendente anche la ddp di contatto (o di diffusione) V_B : $V_{GC} = V_B + V_{GS}$ dove V_{GS} è la ddp applicata dall'esterno fra Gate e Source (e Drain, avendo supposto Drain e Source equipotenziali). Si ricordi che la (1) vale nell'ipotesi di giunzione brusca e di densità di accettori costante; queste sono senz'altro ipotesi poco realistiche, ma sappiamo che il grosso del comportamento di un diodo contropolarizzato viene discretamente riprodotto anche con queste schematizzazioni. Ricordandoci i valori calcolati nel Cap. XVII, §4, abbiamo che se a è dell'ordine di qualche μm (e nei Fet usuali è questo il caso), per tensioni non particolarmente elevate applicate fra Gate e Source il canale risulta completamente "strozzato". Tale ddp fra Gate e Source è detta tensione di *pinch-off* (restringimento, chiusura) e indicata con V_P . In letteratura esiste un po' di confusione nel definire V_P come comprensiva o meno di V_B (ovviamente il problema non è poi così importante se $V_P \gg V_B$); noi la definiremo comprensiva di V_B , cioè $V_P = V_{GP} + V_B$, dove V_{GP} è la tensione applicata fra Gate e Source cui corrisponde lo strozzamento del canale; al "pinch-off", avremo ($b = 0$ nella 1)):

$$a = \left(\frac{2\epsilon}{eN_A} V_P \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XVIII.2})$$

ovvero

$$V_P = \frac{eN_A}{2\epsilon} a^2 \quad (\text{XVIII.3})$$

e quindi

$$V_{GP} = \frac{eN_A}{2\epsilon} a^2 - V_B \quad (\text{XVIII.4})$$

Il valore della tensione di pinch-off dipende dalla geometria e dalle concentrazioni di impurezze specifiche del Fet in esame e quindi la (2) può dare solo poco più che un ordine di grandezza. Nei casi reali V_P varia da pochi *Volt* ad una decina di *Volt*, a seconda dei Fet.

A questo punto è forse anche più chiaro il significato dell'approssimazione di equipotenzialità del canale, perché è stata introdotta una unità di misura *fisica* della tensione applicata, vale a dire V_P : pertanto finché la corrente nel canale, uguale a $I_S = I_D$ (poiché il diodo Gate-canale essendo contropolarizzato conduce solo la piccolissima corrente di saturazione inversa) provoca una caduta di potenziale lungo il canale molto minore di V_P , allora potremo ragionare come sopra e considerare il profilo della zona di svuotamento costante lungo tutta la dimensione longitudinale del canale, trascurando così la modulazione dello spessore della zona di svuotamento indotto da un gradiente di potenziale lungo il canale medesimo. Su questo punto torneremo nel seguito. Calcoliamoci ora, nell'ipotesi sopradette, la resistenza del canale fra Source e Drain; detta W la profondità del Fet (dimensione ortogonale al piano del disegno), ammettendo che la resistenza sia tutta dominata dal tratto L compreso fra i due elettrodi di Gate, detta μ la mobilità delle lacune sul materiale p, ricordando che

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\mu e N_A} \quad (\text{XVIII.5})$$

abbiamo per una certa altezza $2b$ del canale effettivo:

$$R(2b) = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\mu e N_A W 2b} \quad (\text{XVIII.6})$$

Dalla (1) e (2) si ricava l'espressione di b in funzione di quantità o note (V_B) o misurabili:

$$b = a \left[1 - \left(\frac{V_{GC}}{V_P} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = a \left[1 - \left(\frac{V_{GS} + V_B}{V_{GP} + V_B} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{XVIII.7})$$

e quindi

$$R(2b) = R(V_{GC}) = \frac{L}{\mu e N_A W 2a} \frac{1}{1 - \left(\frac{V_{GS} + V_B}{V_{GP} + V_B} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{XVIII.8})$$

Pertanto se esprimiamo la corrente di Drain $I_D (= I_S)$ in funzione della ddp V_{SD} fra Source e Drain per vari valori di V_{GS} , sempre nell'ambito della nostra ipotesi di $|V_{SD}| \ll |V_{GC}| = |V_{GS} + V_B|$ abbiamo:

$$I_D = \frac{V_{SD}}{R(V_{GC})} = \frac{2\mu e N_A W a}{L} \left[1 - \left(\frac{V_{GC}}{V_P} \right)^{\frac{1}{2}} \right] V_{SD} \quad (\text{XVIII.9})$$

La relazione ora scritta vale indipendentemente dal segno di V_{SD} purché $|V_{SD}| \ll V_P$.

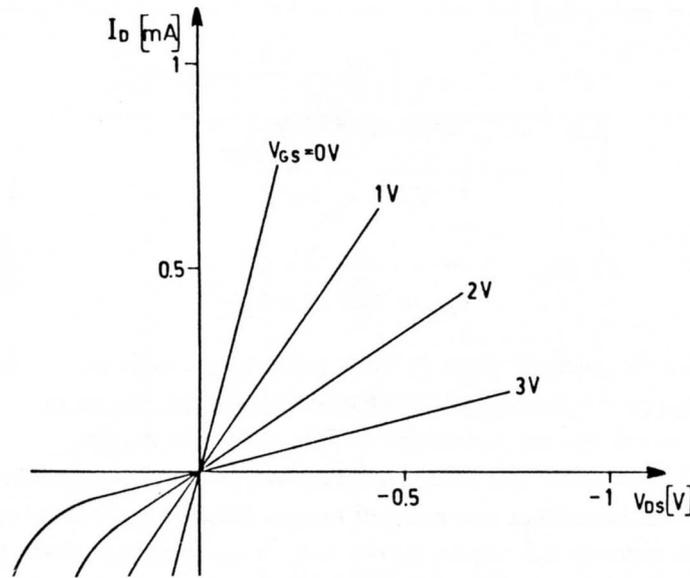


Fig.XVIII.3

Il grafico di I_D in funzione di V_{SD} per vari valori di V_{GS} nell'intorno dell'origine ha l'andamento di Fig.3 (nelle ascisse è riportato V_{DS} , negativa, per rispettare la convenzione normalmente usata dai costruttori). Si osserva che il valore della resistenza del canale $\left(\frac{V_{SD}}{I_D} \right)$ passa da valori $\approx 100\Omega$ (per $V_{GS} = 0 V$) a valori attorno a $10^4\Omega$ per V_{GS} attorno a $3 V$. Quando poi V_{GS} corrisponde al pinch-off la resistenza di canale cresce fino a valori estremamente elevati ($10^{10} \div 10^{11}\Omega$); in queste condizioni infatti sono stati rimossi dal canale quasi tutti i portatori di carica. La relazione (9) può anche essere scritta come:

$$I_D = \left[1 - \left(\frac{V_{GC}}{V_P} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{V_{SD}}{r_{d(on)}} \quad (\text{XVIII.10})$$

dove

$$r_{d(on)} = \frac{L}{2a\mu e N_A W} \quad (\text{XVIII.11})$$

rappresenta la resistenza del canale corrispondente a $V_{GC} = 0$, cioè a una tensione di polarizzazione diretta pari a V_B . A seconda dei Fet, $r_{d(on)}$ può essere compresa fra una decina di *Ohm* e qualche decina di migliaia di *Ohm*.

Da quanto detto sopra si evince che un Fet può essere usato come una resistenza (fra Source e Drain)

variabile e controllabile mediante una ddp (fra Gate e Source); vedremo nei paragrafi seguenti un possibile e comune utilizzo di questa prerogativa del Fet.

3.- La caratteristica statica di un Fet

Il grafico riportato nella Fig.3 rappresenta un particolare attorno all'origine della *caratteristica statica a Source comune* di un Fet canale-p. La caratteristica statica del Fet è il grafico di I_D in funzione di V_{DS} per vari valori di V_{GS} ; la locuzione "a Source comune" indica che l'elettrodo di Source è preso come riferimento per la misura delle tensioni. Un esempio di tale caratteristica è ora riportato nella Fig.4 per tutta la parte di interesse, non limitata cioè, come nel paragrafo precedente, all'intorno dell'origine; la curva caratteristica di un Fet reale può anche differire assai da quella riportata in figura, che va vista più che altro come rappresentativa degli andamenti di massima.

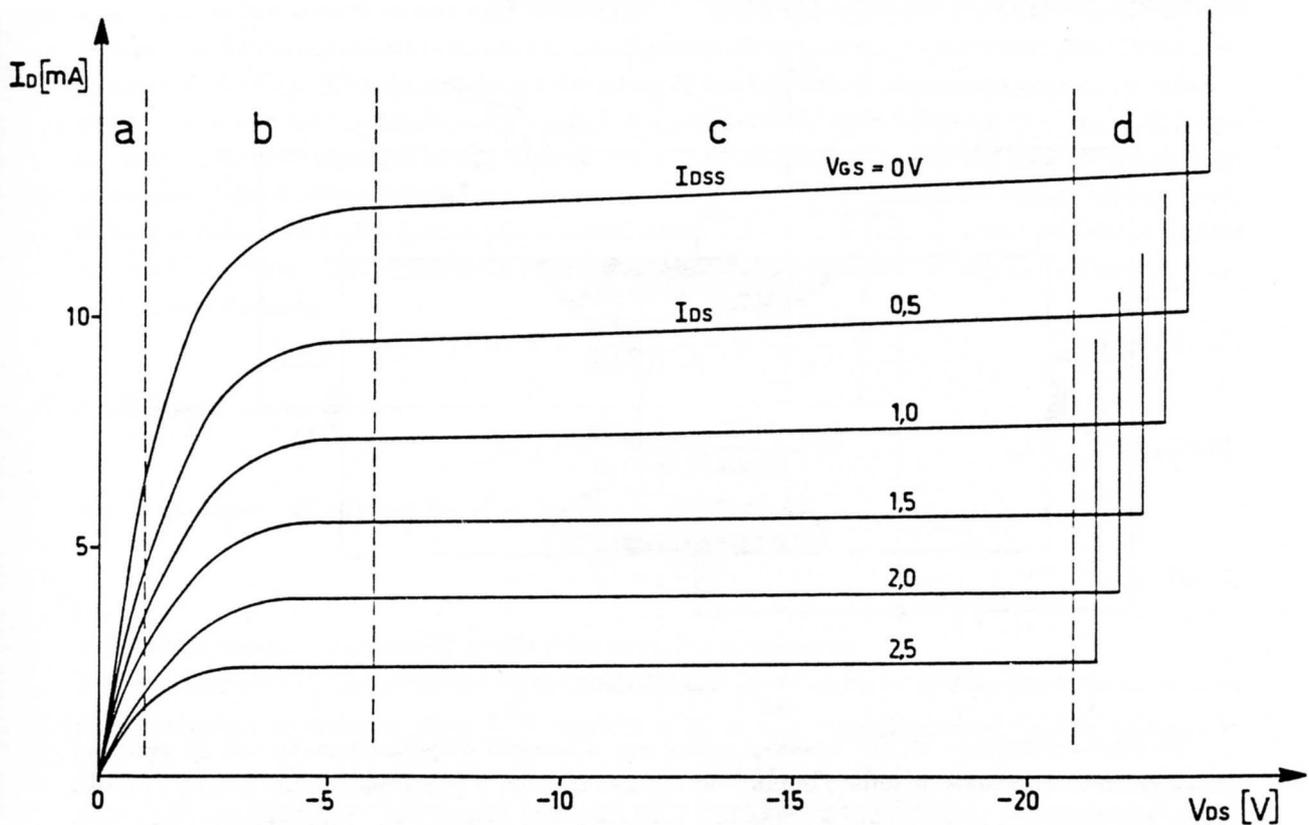
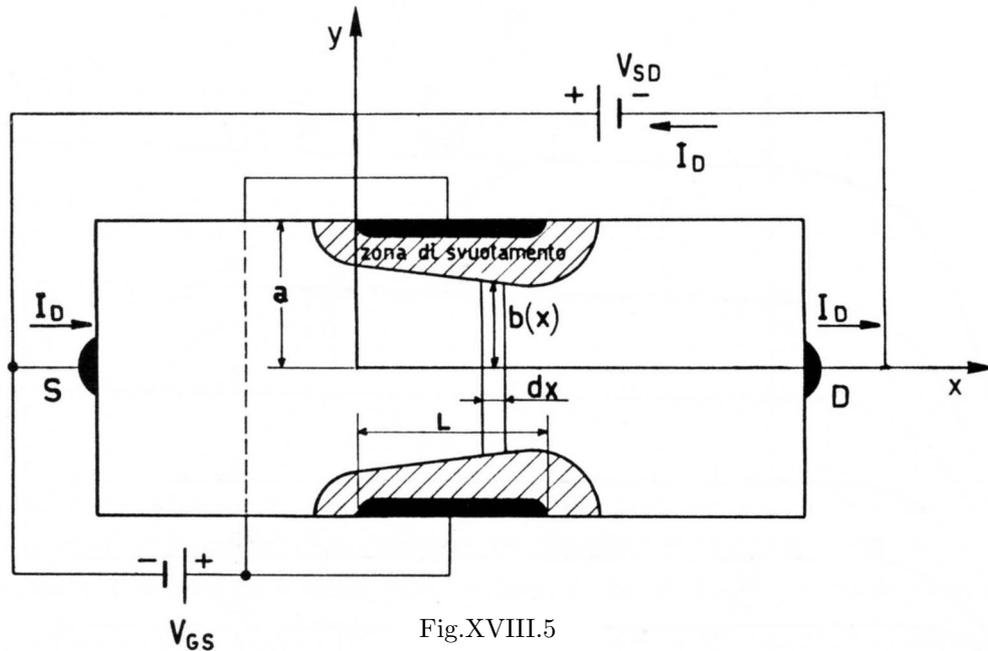


Fig.XVIII.4

Queste curve determinano completamente il comportamento elettrico del Fet nelle sue applicazioni più comuni in bassa frequenza; infatti in queste applicazioni il diodo Gate-canale è sempre contropolarizzato o comunque mai polarizzato direttamente e pertanto la corrente I_G di Gate può con buona approssimazione considerarsi nulla; le altre grandezze che determinano le caratteristiche elettriche del transistor, cioè le tensioni dei terminali e la corrente di Drain $I_D = I_S$, sono legate fra loro dalla relazione rappresentata appunto dalla caratteristica a Source comune di Fig.4. La curva caratteristica a Source comune è stata suddivisa nella Fig.4 in quattro zone a seconda del valore di

V_{DS} : nella prima zona (a) il Fet si comporta come un conduttore ohmico la cui resistenza dipende dalla tensione applicata fra Gate e Source e di ciò abbiamo parlato nel paragrafo precedente; nella parte (b) si osserva che, fissato V_{GS} (cioè una curva della famiglia di caratteristiche), la relazione fra I_D e V_{DS} si discosta fortemente dalla linearità; la parte (c) è detta zona a *pentodo*, in analogia con la caratteristica di un particolare tubo elettronico a vuoto, il pentodo appunto, o a *corrente costante* e si osserva una sostanziale indipendenza di I_D da V_{DS} ; infatti, fissata V_{GS} , la pendenza della curva è ora molto inferiore di quella per $V_{DS} \rightarrow 0$; infine la zona di *breakdown* (d) dove il diodo Gate-Drain entra in “breakdown” in conseguenza della forte contropolarizzazione. La permanenza anche per periodi brevi in regime di breakdown può danneggiare irreversibilmente il Fet.

E' facile rendersi conto che il comportamento delle curve nella zona (b) della caratteristica è dovuto al fatto che non è più possibile trascurare la ddp V_{DS} (che sostiene la corrente I_D) rispetto alla tensione V_{GS} . Abbiamo cioè un gradiente nel profilo del canale che è più largo nelle vicinanze del Source che non nelle vicinanze del Drain, poiché la profondità della zona di svuotamento è maggiore dove maggiore è la contropolarizzazione. E' possibile ricavare analiticamente la dipendenza $I_D = I_D(V_{DS}, V_{GS})$ nell'ambito del modello estremamente semplificato del Fet introdotto nel paragrafo precedente, aggiungendo qualche ulteriore ipotesi semplificativa.



In Fig.5 è riportato un Fet canale-p sottoposto a tensioni di polarizzazione tali da avere un restringimento del canale modulato in funzione della coordinata x (direzione Source-Drain) a motivo della caduta ohmica lungo il canale medesimo, associata alla corrente I_D . Limitandoci, come fatto anche precedentemente, a considerare soltanto il contributo della zona del canale lunga L e compresa fra i due elettrodi di Gate avremo, considerando una fetta di canale avente dimensioni $dx \cdot 2b(x) \cdot W$, che la caduta di potenziale dV lungo di essa nella direzione del dx , provocata dalla corrente I_D , sarà esprimibile come:

$$dV(x) = I_D dR = I_D \frac{\rho dx}{2Wb(x)} \quad (\text{XVIII.12})$$

Si tratta ora di esprimere $b(x)$ in funzione della tensione di contropolarizzazione fra canale e Gate, alla coordinata generica x . Tale tensione di contropolarizzazione $V_{GC}(x)$ sarà data da $V_{GS} + V_B$ (per $x = 0$) più la caduta ohmica $V(x)$ prodotta dalla corrente I_D lungo il canale fra $x = 0$ e la

coordinata generica x (la differenza di potenziale complessiva fra $x = 0$ e $x = L$ sarà quindi data da V_{SD} , sempre trascurando la caduta al di fuori della zona del Gate). Tenendo quindi presente che:

$$V_{GC}(x) = V_{GS} + V_B + V(x) \quad (\text{XVIII.13})$$

e ricordando il risultato (7) avremo:

$$b(x) = a \left[1 - \frac{(V(x) + V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{XVIII.14})$$

e quindi, sostituendo la (14) nella (12):

$$dV(x) = \frac{I_D \rho dx}{2Wa \left[1 - \frac{(V(x) + V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right]} \quad (\text{XVIII.15})$$

Prima di procedere all'integrazione dell'equazione differenziale (15) che darà la relazione cercata fra V_{SD} e I_D , soffermiamoci su una approssimazione implicita nel ragionamento fatto, ma sottaciuta. Abbiamo infatti applicato al nostro caso di canale modulato il risultato (7) che a sua volta si basa sulle conclusioni del Cap. XVII, §4, ottenute nell'ipotesi di una barriera di dimensione trasversale infinita; questa volta non solo la lunghezza è finita (L) come nel caso della relazione (7), ma addirittura la tensione di contropolarizzazione dipende da x . Le conclusioni tratte nel caso di dimensione trasversale della barriera infinita non potranno quindi mai essere considerate esatte; saranno però tanto più vicine alla realtà quanto più la modulazione del canale è dolce e quanto più siamo lontani dai bordi del Gate. Una trattazione rigorosa del problema esigerebbe di imporre all'interno della zona di svuotamento

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{eN_A}{\epsilon} \quad (\text{XVIII.16})$$

e nella zona del canale

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{XVIII.17})$$

con la condizione al contorno fra zona di svuotamento e canale

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{db(x)}{dx} \quad (\text{XVIII.18})$$

cioè campo elettrico tangente al profilo della zona di svuotamento.

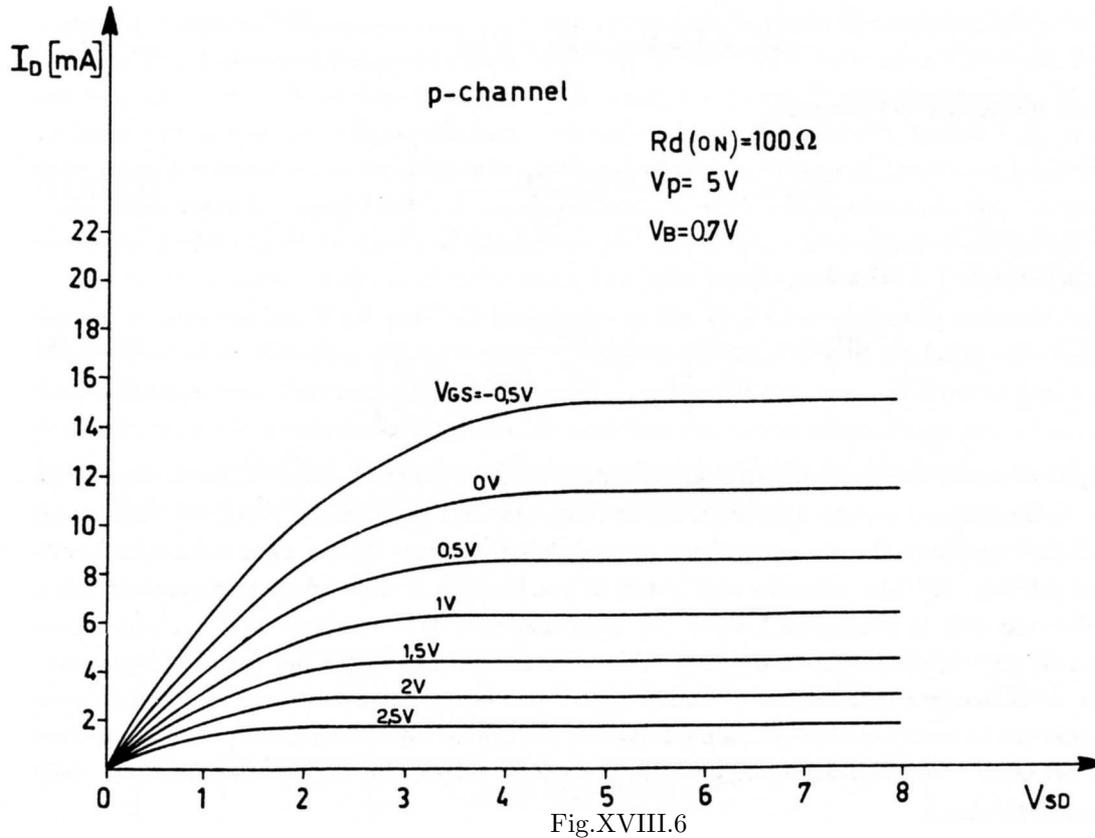
Matematicamente la "modulazione dolce" che abbiamo ammesso significa che all'interno della zona di svuotamento si trascura E_x e $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ rispetto a E_y e $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ rispettivamente; inoltre in tutta la zona del canale, fino al confine con la zona di svuotamento, si assume che E_y sia nullo; di fatto questa ultima condizione è stata già ammessa quando abbiamo supposto che le equipotenziali nel canale fossero fette perpendicolari all'asse x . Tenendo presenti questi limiti dell'approccio seguito, procediamo all'integrazione della (15). Separando le variabili e integrando fra $x = 0$ e $x = L$ si ottiene:

$$V \Big|_0^{V_{SD}} - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} (V + V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{V_{SD}} = \frac{I_D \rho L}{2Wa} = I_D r_{d(on)} \quad (\text{XVIII.19})$$

Otteniamo finalmente:

$$I_D = \frac{1}{r_{d(on)}} \left[V_{SD} - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} \left((V_{SD} + V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} - (V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (\text{XVIII.20})$$

Riportando in grafico $I_D = I_D(V_{SD} = -V_{DS}, V_{GS})$ per $V_P = 5V$, $V_B = 0.7V$, $r_{d(on)} = 100\Omega$ si ottiene la famiglia di curve in Fig.6.



Per un dato valore di V_{GS} , non tutta la curva corrisponde effettivamente alla soluzione (20), poiché il modello non è proprio più applicabile quando la tensione fra Source e Drain raggiunge il valore V_{SDM} per cui il diodo Gate-canale, all'estremo corrispondente al Drain, risulta contro-polarizzato con la tensione V_P di pinch-off: $V_{SDM} + V_{GS} + V_B = V_P$; infatti quando è raggiunta tale condizione, essendo il canale all'estremità verso il Drain completamente strozzato, la corrente dovrebbe andare a zero. Torneremo poco più avanti sull'argomento, dopo aver studiato, sempre nell'ambito di questo modello, il profilo modulato del canale per una certa tensione V_{GS} al variare di V_{DS} . Per far ciò è sufficiente ricordarsi l'espressione (12) ed anziché esprimere b in funzione di V mediante la (14), proprio dalla (14) ricavare dV . Abbiamo così:

$$dV = -2V_P \left(1 - \frac{b}{a}\right) \frac{db}{a} \quad (\text{XVIII.21})$$

che sostituito nella (12) dà, dopo separazione delle variabili:

$$\frac{I_D \rho}{2W} dx = -2V_P \left(1 - \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} db \quad (\text{XVIII.22})$$

Integrando la (22) fra $x = 0$ e la coordinata generica x si ottiene

$$\frac{I_D \rho}{2W} x = -V_P a \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2(0)}{a^2}\right) + \frac{2}{3} V_P a \left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{b^3(0)}{a^3}\right) \quad (\text{XVIII.23})$$

D'altronde dalla (7) si ricava che

$$\frac{b(0)}{a} = 1 - \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{XVIII.24})$$

Adoperando il risultato (20) e l'espressione (11) per $r_{d(on)}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{L} \left[V_{SD} - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} \left((V_{SD} + V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} - (V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = \\ & = -V_P \left[\frac{b^2}{a^2} - \left(1 - \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} V_P \left[\frac{b^3}{a^3} - \left(1 - \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{XVIII.25})$$

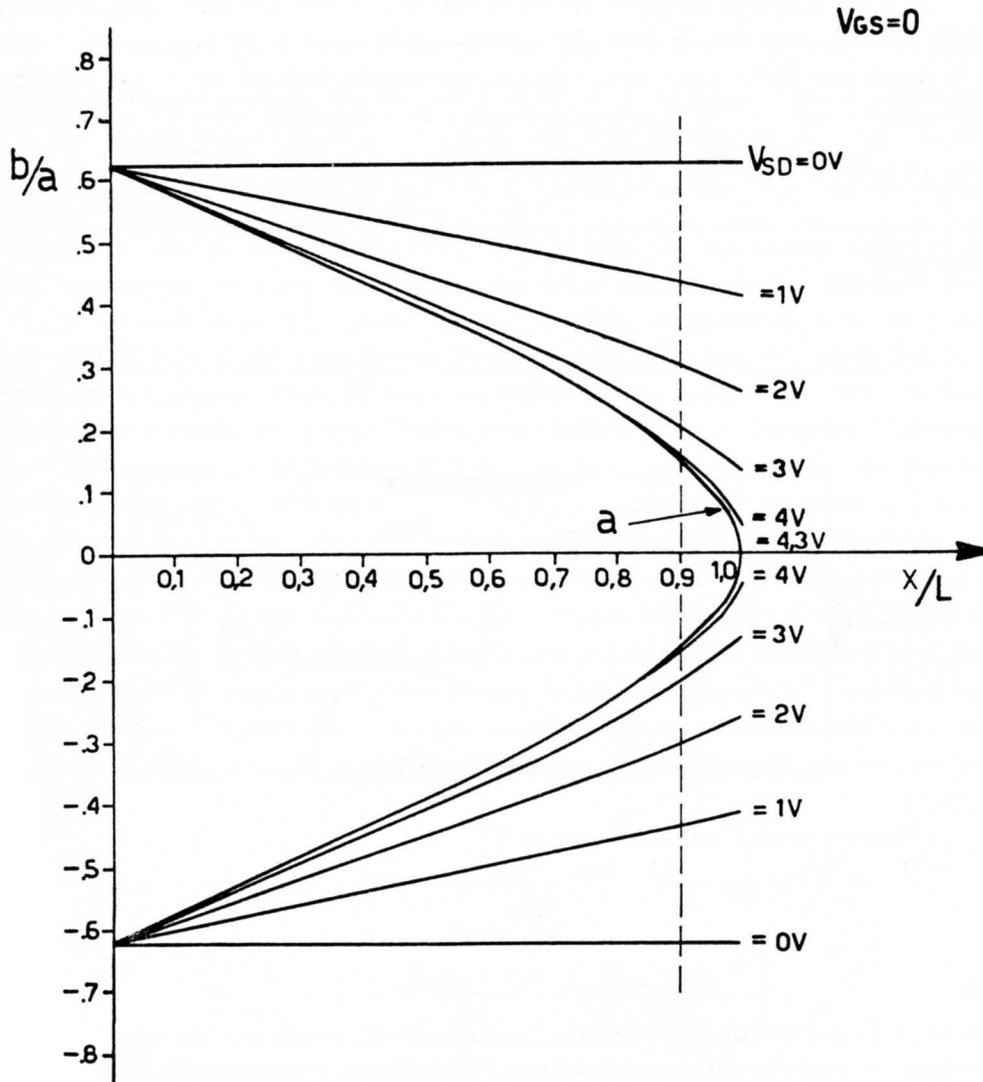


Fig.XVIII.7

In base a questa relazione sono calcolate le curve in Fig.7 per $V_{GS} = cost = 0$, per vari valori di V_{SD} ; si noti come all'aumentare della ddp applicata fra Source e Drain, il canale si va via via restringendo; questo comporta che ad un aumento della tensione corrisponde anche un aumento della resistenza del canale e conseguentemente la corrente sale meno che linearmente con la tensione (vedi Fig.6). Si noti che per $V_{SD} = V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B (= 4.3V$ nel caso in figura) il canale raggiunge la condizione di strozzamento proprio in corrispondenza della estremità verso il Drain.

Ripensando alle approssimazioni fatte circa la *gradualità* della modulazione del profilo del canale, ci si rende immediatamente conto che alla destra della linea verticale tratteggiata in Fig.7, l'andamento di $b(x)$ non è da prendere eccessivamente sul serio, vista la pendenza della curva. Inoltre anche un ragionamento di autoconsistenza esclude che si possa avere un effettivo strozzamento dalla parte del Drain associato alla caduta ohmica lungo il canale: infatti ciò porterebbe ad una chiusura del canale con conseguente interruzione della corrente; quest'ultimo fatto porterebbe alla scomparsa della modulazione e quindi della strozzatura del canale medesimo, proprio quella che impedisce alla corrente di fluire. Anche sperimentalmente, d'altronde, si sa (si vedano le caratteristiche reali all'inizio del paragrafo, Fig.4) che la corrente passa nel canale anche per tensioni $V_{SD} > V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B$ e che mantiene un valore pressoché costante. L'interpretazione di questo andamento sperimentale che allo stato attuale delle conoscenze sembra essere la più ragionevole, è la seguente: il canale in realtà non arriva mai a strozzarsi completamente, diciamo che al più raggiungerà una dimensione minima pari a $2\delta \ll 2a$ in corrispondenza della estremità verso il Drain quando $V_{SD} = V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B$; aumentando ulteriormente la ddp V_{SD} , cioè portando il terminale di Drain ancora più negativo rispetto al Source (e al Gate) la geometria del canale a sinistra della strozzatura resta praticamente inalterata e quello che accade è un *allungamento* verso il Drain del canale "strozzato".

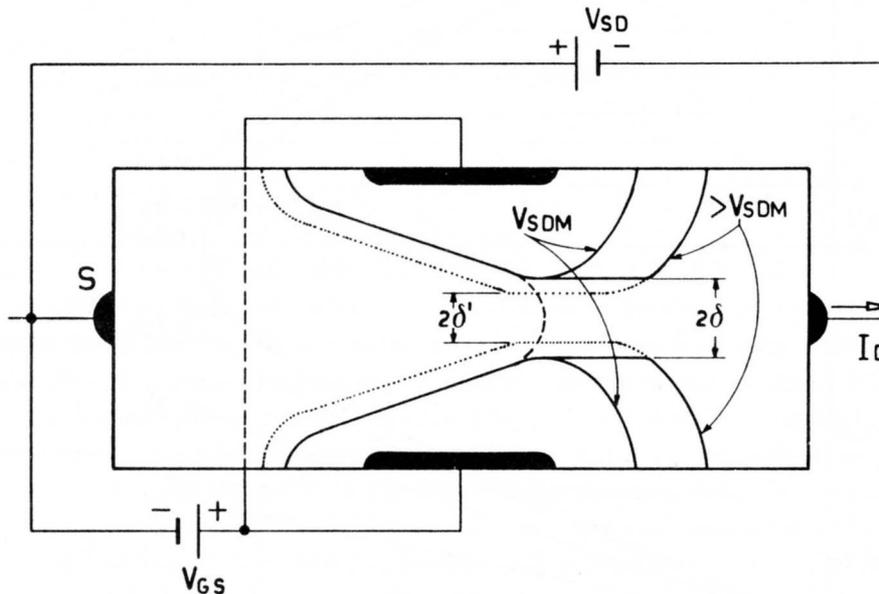


Fig.XVIII.8

Nella Fig.8 è riportato qualitativamente l'andamento del canale per due valori di V_{SD} : $V_{SD} = V_{SDM}$ e $V_{SD} > V_{SDM}$ (entrambi con lo stesso V_{GS}). Limitandoci a considerare la porzione di canale compresa fra le parti piane dei due elettrodi di Gate, il profilo di canale (tratto continuo) coincide per $V_{SD} = V_{SDM}$ con la curva a) della Fig.7 fino a che la larghezza del canale non raggiunge un valore critico 2δ ; da questo punto in poi il profilo si discosta da quello della curva a) della Fig.7 (disegnata a tratteggio nella Fig.8); la curva a tratto continuo è disegnata in modo da tener conto qualitativamente del fatto che la zona di svuotamento circonda tutto l'elettrodo di Gate e che verso il Drain è più vasta che non verso il Source, perché maggiore è la contropolarizzazione. Per tensioni $V_{SD} > V_{SDM}$ il profilo dello svuotamento a sinistra della strozzatura a "2δ" resta inalterato e viceversa si ha un allungamento del canale verso il Drain, coerentemente col fatto che la profondità

dello svuotamento deve aumentare, essendo cresciuta la contropolarizzazione Gate-Drain. Poiché nell'ambito di questa descrizione, la geometria a sinistra del punto di strozzamento a "2 δ " è la stessa che per $V_{SD} = V_{SDM}$ e quindi la tensione all'inizio dello strozzamento è anch'essa la stessa e pari a $V_P = V_{SDM} + V_{GS} + V_B$, l'ulteriore caduta $V_{SD} - V_{SDM}$ si sviluppa nel tratto di canale strozzato e il valore della corrente I_D per $V_{SD} > V_{SDM}$ è uguale a quello I_{DS} per $V_{SD} = V_{SDM}$.

Quanto alla dimensione minima dello strozzamento essa è determinata dal fatto che il campo elettrico che assicura il trasporto della corrente assume valori così elevati che non vale più la legge di Ohm, cioè la mobilità dei portatori (le lacune per un canale p) non è più costante; si raggiunge viceversa una condizione per cui la velocità dei portatori v_m è costante, cioè la mobilità va come $\frac{1}{E}$, e pertanto la corrente:

$$I_{DS} = 2W\delta eN_A v_m \quad (\text{XVIII.26})$$

è indipendente dal campo elettrico, purché questo sia superiore ad un certo valore critico, nel Silicio $> 2 \cdot 10^6$ V/m. Si noti che se non esistesse il fenomeno della saturazione della velocità dei portatori, il canale potrebbe anche strozzarsi di più e la corrente I_D continuare a fluire; in questo caso aumenterebbe il modulo del vettore densità di corrente.

Tornando alle curve sperimentali del Fet (Fig.4), si nota che una piccola pendenza della corrente I_D in funzione di V_{SD} è pur sempre presente; essa si può interpretare pensando che quando $V_{SD} > V_{SDM}$ il canale largo "2 δ " avanza sì verso il Drain, ma presenta anche un modesto arretramento verso il Source; ciò porta a una riduzione della resistenza del canale dal Source fino allo strozzamento e quindi un moderato aumento della corrente I_D con V_{DS} . In fondo la cosa non deve minimamente sorprendere, poiché l'unico fatto fisicamente poco comprensibile sarebbe una diminuzione della corrente I_D in funzione di V_{SD} , non certo un suo aumento. Se considerassimo ora l'andamento della curva caratteristica $I_D = I_D(V_{SD}, V_{GS})$ per un valore di V_{GS} maggiore di quello ora trattato, cioè con una contropolarizzazione Gate-Source superiore, avremmo a che fare con un canale tutto più ristretto, fin dall'estremità verso il Source, e che terminerebbe, per valori di $V_{SD} > V_{SDM}$, verso il Drain con un canale strozzato avente dimensioni $2\delta' < 2\delta$ (curva a puntini in Fig.8). Infatti essendo il valore v_m della velocità saturata sempre lo stesso, la (26) ci dice che la dimensione trasversale del canale sarà inferiore, essendo inferiore la corrente, a parità di V_{SD} .

Riprendiamo ora la relazione (20). Le argomentazioni svolte precedentemente ci dicono che per $V_{SD} > V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B$, I_D si mantiene costante e pari al valore che assume secondo la (20) per $V_{SD} = V_{SDM}$:

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \frac{1}{r_{d(on)}} \left[V_P - V_{GS} - V_B - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} \left(V_P^{\frac{3}{2}} - (V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{V_P}{3r_{d(on)}} \left[1 - 3 \frac{(V_{GS} + V_B)}{V_P} + 2 \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}}}{V_P^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{XVIII.27})$$

I_{DS} è detta *corrente di saturazione* e nella realtà segue solo approssimativamente l'andamento in funzione di V_{GS} prescritto dalla (27); tradizionalmente la corrente di saturazione per $V_{GS} = 0$ è indicata con I_{DSS} . Dalla (27) si vede che qualora $V_{GS} + V_B$ sia fatto tendere a V_P , $I_{DS} \rightarrow 0$; ciò corrisponde al fatto che se il diodo Gate-Source viene fortemente contropolarizzato, tutto il canale si restringe, fino a chiudersi completamente: questa volta lo strozzamento non è più localizzato e determinato dalla dinamica, cioè dal passaggio della corrente, ma piuttosto dalla ddp statica fra Gate e Source. Quando la ddp $V_{GS} \geq V_P - V_B$, il Fet è detto essere nella condizione di "cut-off"; in pratica fra Source e Drain, anche per valori finiti della ddp V_{SD} , non passa corrente o meglio solo una piccola corrente $I_{D(off)}$ in genere dell'ordine del nA .

Trattiamo infine il problema delle regione di breakdown: quando la ddp fra Gate e Drain raggiunge valori particolarmente elevati si può innescare la scarica a valanga caratteristica di qualunque diodo contropolarizzato oltre un certo limite; dalla curve sperimentali si nota che tale valanga si innesci per tensioni V_{DS} tanto più piccole quanto più è contropolarizzato il diodo Gate-Source; infatti l'innescio della valanga dipende dalla somma $V_{GS} + V_{SD} = V_{GD}$ (valori tipici intorno a 20 V).

L'analisi teorica del comportamento del Fet fatta fino ad ora è - ripetiamolo ancora una volta - basata su alcune ipotesi riguardanti la geometria e le distribuzioni dei drogaggi del Fet (nonché su certe approssimazioni matematiche) che necessariamente sono schematizzazioni della realtà. Ad esempio una geometria molto più realistica di un Fet è quella della Fig.9.

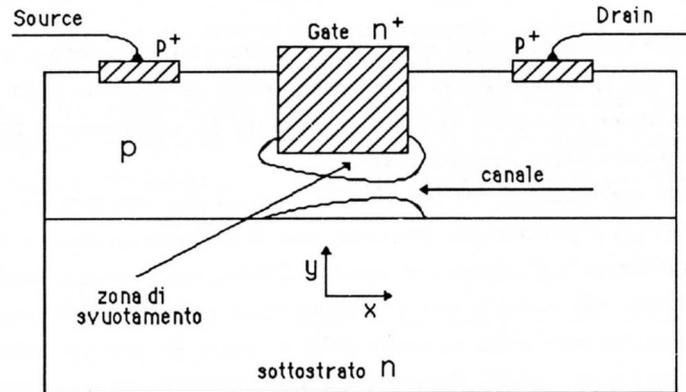


Fig.XVIII.9

Inoltre con questi tipi di geometria le tecniche di costruzione sono tali che l'approssimazione di drogaggio costante nella zona del canale non è verificata, e si ha piuttosto un drogaggio dipendente dalla coordinata y della Fig.5. Non deve quindi sorprendere che quando si vanno a considerare le caratteristiche di un Fet reale si trovino andamenti che qualitativamente sono magari assai simili a quelli teorici previsti, ma che difficilmente si possono riprodurre in modo quantitativo. In particolare la relazione fra I_{DS} e I_{DSS} si trova che è molto ben rappresentata da:

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (\text{XVIII.28})$$

che è sostanzialmente differente dalla (27), pur conservandone l'andamento caratteristico secondo cui la spaziatura fra due I_{DS} , ΔI_{DS} a parità di ΔV_{GS} cresce al diminuire di V_{GS} . Vedremo nei prossimi paragrafi che questa spaziatura è direttamente collegata ad un parametro fondamentale del Fet nel suo impiego come amplificatore, la cosiddetta *transconduttanza*.

4.- Il Fet come interruttore

Supponiamo di avere il circuito di Fig.10 dove V_C rappresenta una ddp variabile. Essendo il Fet del tipo a canale n, V_P , la tensione fra Gate e Source che corrisponde al pinch-off, è ora negativa; se V_C è tale da contropolarizzare completamente il diodo Gate-Source ($V_C \geq |V_P|$), la

corrente nel canale $I_{D(off)}$ sarà assai piccola (tipicamente meno di 1 nA), a patto che la tensione fra Drain e Source sia inferiore al valore (tipicamente $15 \div 20\text{ V}$) corrispondente al breakdown del diodo Gate-Drain.

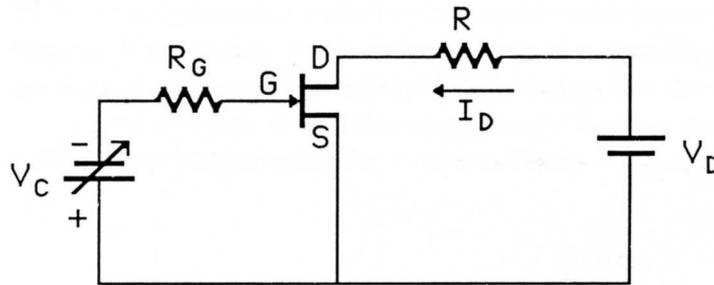


Fig.XVIII.10

Pertanto per $V_C \geq |V_P|$ il Fet si comporta praticamente come un circuito aperto, almeno per valori di R tali che $\frac{V_D}{R} \gg I_{D(off)}$: supponiamo ad esempio che $V_D = 10\text{V}$, $R = 10^4\Omega$; nel caso in cui $V_{GS} = V_P$, abbiamo, nell'ipotesi che il Fet conduca la corrente $I_{D(off)} = 1\text{nA}$:

$$V_{DS} = V_D - I_{D(off)}R = 10\text{V} - 10^{-5}\text{V}$$

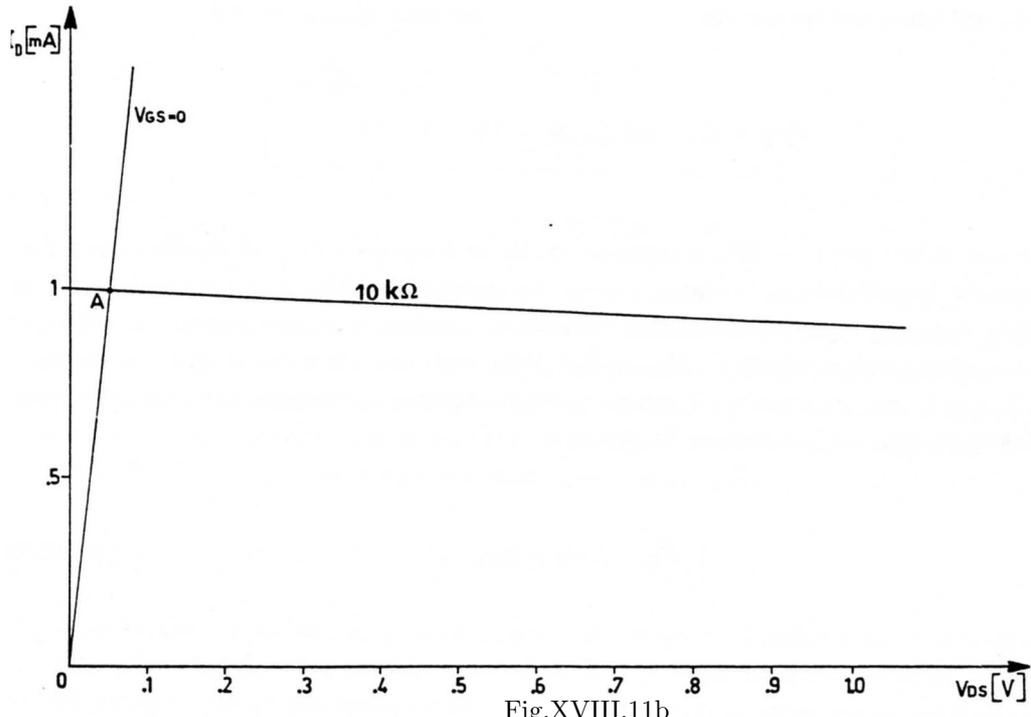
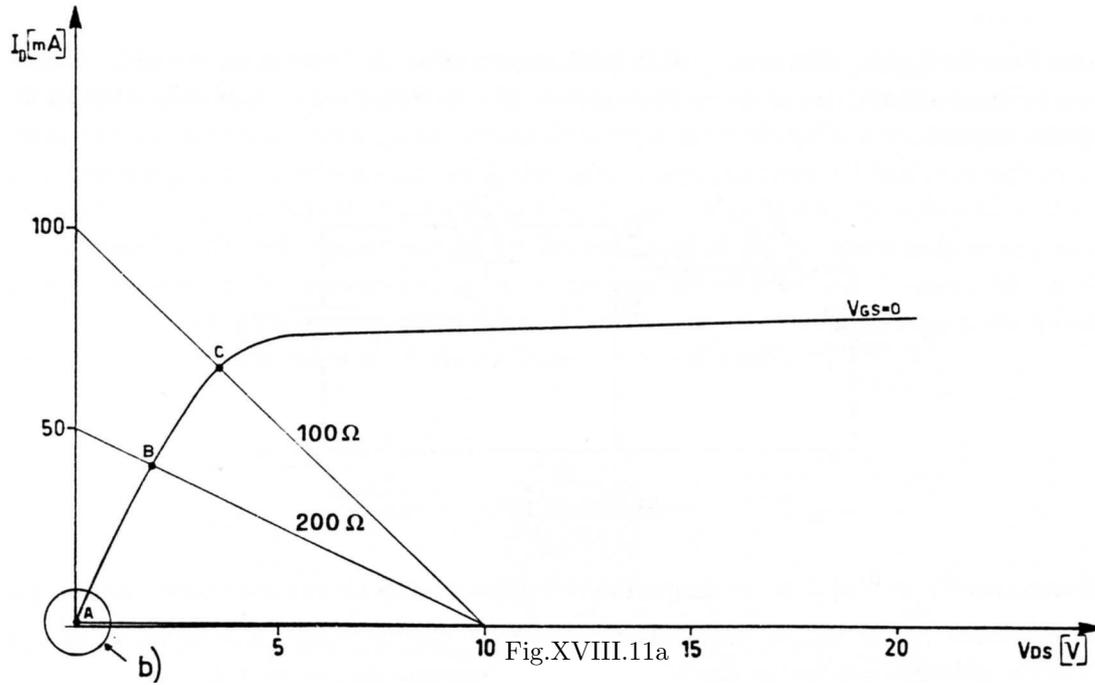
e quindi, a meno di una parte su 10^6 , la tensione sul Drain è uguale a V_D ; ciò significa che il Fet è quasi esattamente assimilabile ad un tasto aperto. Se invece $V_C < |V_P|$ allora il canale non è più completamente strozzato e per definire il comportamento del circuito occorre conoscere, oltre a V_D e R , la caratteristica corrispondente a $-V_{GS} = V_C$. Nelle Fig.11a e 11b è riportata la caratteristica del Fet per $V_{GS} = 0$. Per determinare il comportamento elettrico del sistema nelle varie condizioni di lavoro, dobbiamo trovare la soluzione del sistema:

$$V_D - I_D R = V_{DS} \quad (\text{XVIII.29})$$

con

$$I_D = I_D(V_{DS}, V_{GS} = 0) \quad (\text{XVIII.30})$$

La (30) rappresenta le curve delle Fig.11a e 11b. La soluzione del sistema si può trovare per via grafica tracciando la retta corrispondente alla prima delle due equazioni nel piano I_D, V_{DS} . Tale retta passa per il punto $(I_D = 0, V_{DS} = V_D)$ e $(I_D = \frac{V_D}{R}, V_{DS} = 0)$; essa è disegnata nel grafico della figura precedente, visibile nella parte espansa b), per il caso numerico prima considerato ($R = 10^4\Omega$). Tale retta è detta -come nel caso del diodo- *retta di carico*. Dalla posizione dell'intercetto delle due curve (punto A della Fig.11b) si ha una ddp fra Drain e Source $\approx 0.05\text{V}$, che corrisponde ad una $r_d(on) = 50\Omega$.



Pertanto la ddp non è esattamente uguale a 0 come nel caso di un cortocircuito, ma comunque assai piccola rispetto a V_D . Nel caso preso ora in esame non era per la verità necessario ricorrere alla costruzione grafica: sapendo che nelle condizioni considerate il Fet si comporta come un resistore di resistenza pari a $r_{d(on)}$, potevamo scrivere:

$$V_{DS} = V_D \frac{r_{d(on)}}{R + r_{d(on)}} \approx V_D \frac{r_{d(on)}}{R} \tag{XVIII.31}$$

Nel caso in cui il punto di lavoro interessi zone del Fet più lontane dall'origine allora la costruzione grafica è effettivamente indispensabile, come nei punti B e soprattutto C della Fig.11a, corrispondenti

a $R = 200\Omega$ e $R = 100\Omega$ rispettivamente. Per entrambi i casi si nota che le cadute V_{DS} ai capi del Fet non sono più trascurabili rispetto a V_D . Tornando al caso di una resistenza R dell'ordine della decina di $k\Omega$, notiamo che il Fet considerato in questo esempio, possedendo una resistenza $r_{d(on)}$ decisamente bassa (50Ω), è particolarmente indicato a funzionare come interruttore controllato dal valore di V_{GS} (applicazioni di *switching*). Senza entrare in eccessivi dettagli che comporterebbero lo studio del Fet in presenza di eccitazioni in alta frequenza, possiamo dire che con il Fet si possono fare commutazioni (come se si trattasse di un interruttore) molto rapide e frequenti, per esempio inviando sul Gate una ddp V_C periodica del tipo riportato in Fig.12.

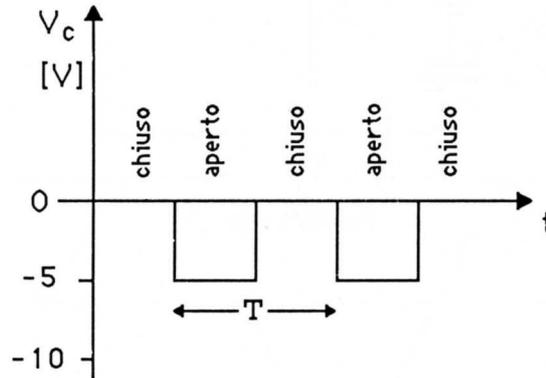


Fig.XVIII.12

In moltissime applicazioni elettroniche le operazioni di interruzione e chiusura di un ramo sono di fatto effettuate tramite transistori ad effetto di campo. Alcuni esempi li abbiamo visti nel Cap.XVI, §§2 e 3, studiando il principio di funzionamento dei Convertitori analogico-digitali.

5.- Il Fet come amplificatore

Metodo di risoluzione

Supponiamo di aver montato il circuito di Fig.13 e chiediamoci quale è l'andamento della differenza di potenziale fra Drain e Source (che è a massa) in funzione della ddp v_g (che supponiamo sinusoidale). La soluzione di questo problema non è in genere semplice, soprattutto se la ddp v_g non è piccola rispetto a V_{GG} (o meglio rispetto a $|V_P|$, la tensione di pinch-off). Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se v_g è un segnale di tensione squadrato con escursione ampia (rispetto a V_P) la ddp $V_d = V_{DS}$ varierà praticamente fra V_{DD} e 0, ma questo è un caso molto particolare, in cui senz'altro l'eccitazione v_g non è piccola rispetto a $|V_P|$.

Il problema consiste nel risolvere un sistema del tutto simile a quello dato dalle (29) e (30), cioè:

$$V_{DD} - I_d R_L = V_{DS} \quad (\text{XVIII.32})$$

$$I_d = I_d(V_{DS}, V_{GS} = V_G + v_g(t)) \quad (\text{XVIII.33})$$

Una maniera di risolvere il problema è quella della costruzione grafica seguendo una procedura che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche del Fet e sull'intercetto con la retta di carico determinata col solito sistema (nel caso in Fig.14: $V_{DD} = 16\text{ V}$, $R_L = 2\text{ k}\Omega$).

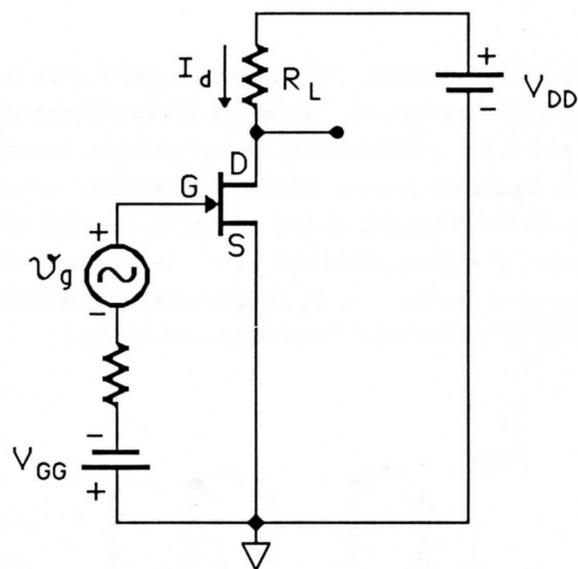


Fig.XVIII.13

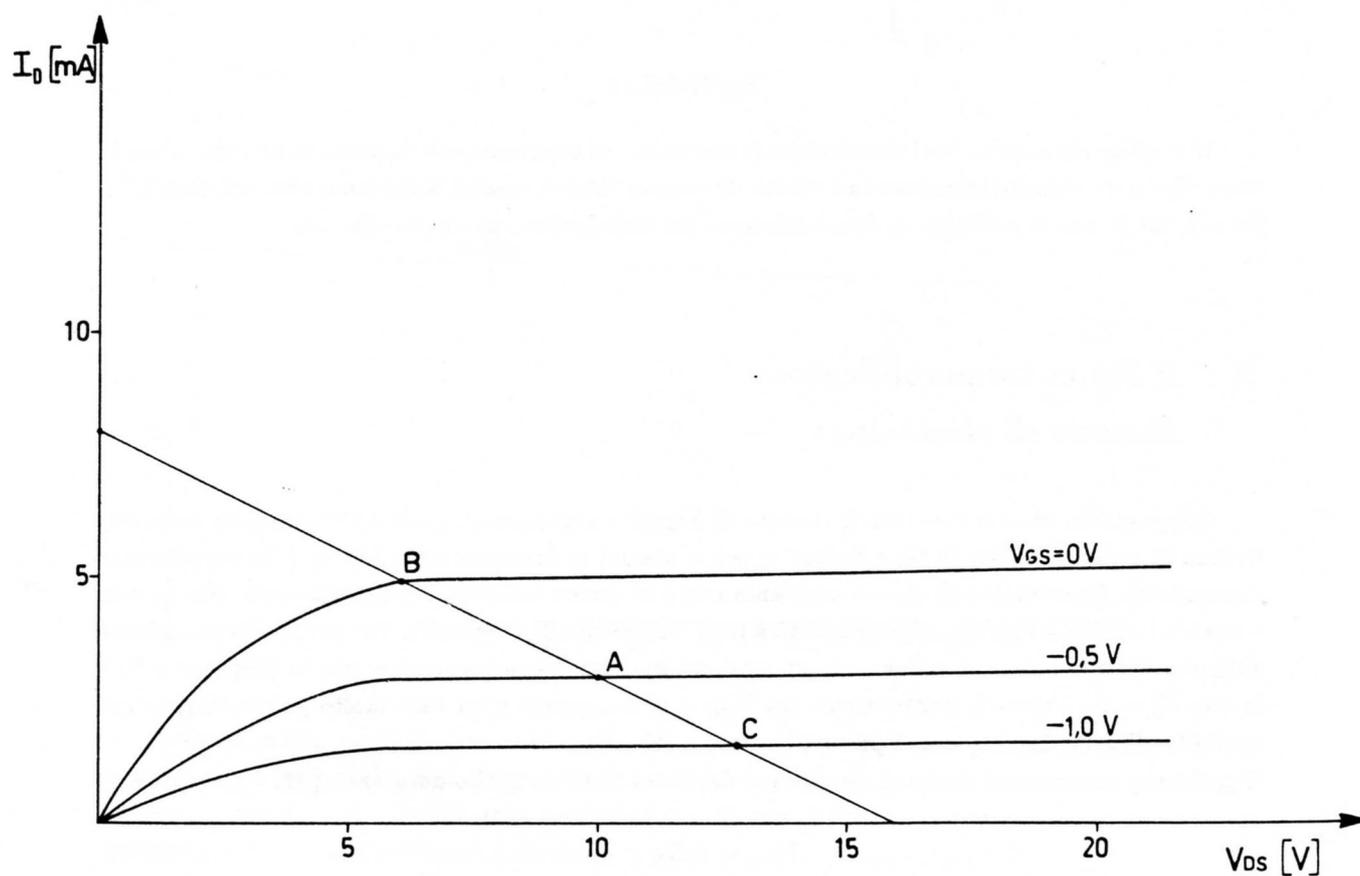


Fig.XVIII.14

La retta di carico stabilisce il vincolo imposto dalla particolare configurazione circuitale (vedi (32)), ovvero la corrente I_d e la tensione $V_d = V_{DS}$ dovranno sempre appartenere a questa retta, anche al variare della ddp complessiva $V_g = V_{GS} = -V_{GG} + v_g$. Se ad esempio (Fig.14) $V_{GG} = 0.5 V$

e $v_g = 0$ abbiamo la corrente $I_d = 3.0 \text{ mA}$ e $V_{DS} = 10 \text{ V}$ (punto A); se $v_g = v_o \cos \omega t$, con $v_o = 0.5 \text{ V}$, quando v_g è massima e pari a v_o , avremo $I_d = 4.9 \text{ mA}$, $v_d = 6.3 \text{ V}$ (punto B); quando v_g è minima avremo invece $I_d = 1.6 \text{ mA}$, $V_d = 12.8 \text{ V}$ (punto C). Questo tipo di costruzione è possibile per tutti i valori intermedi e in linea di principio può essere seguito per definire tutto l'andamento di V_d (e I_d). Nella Fig.15 riportiamo il grafico, nella stessa scala temporale, di $-V_{GG} + v_g$ e di $V_d = V_{DS}$, ottenuti come sopra descritto.

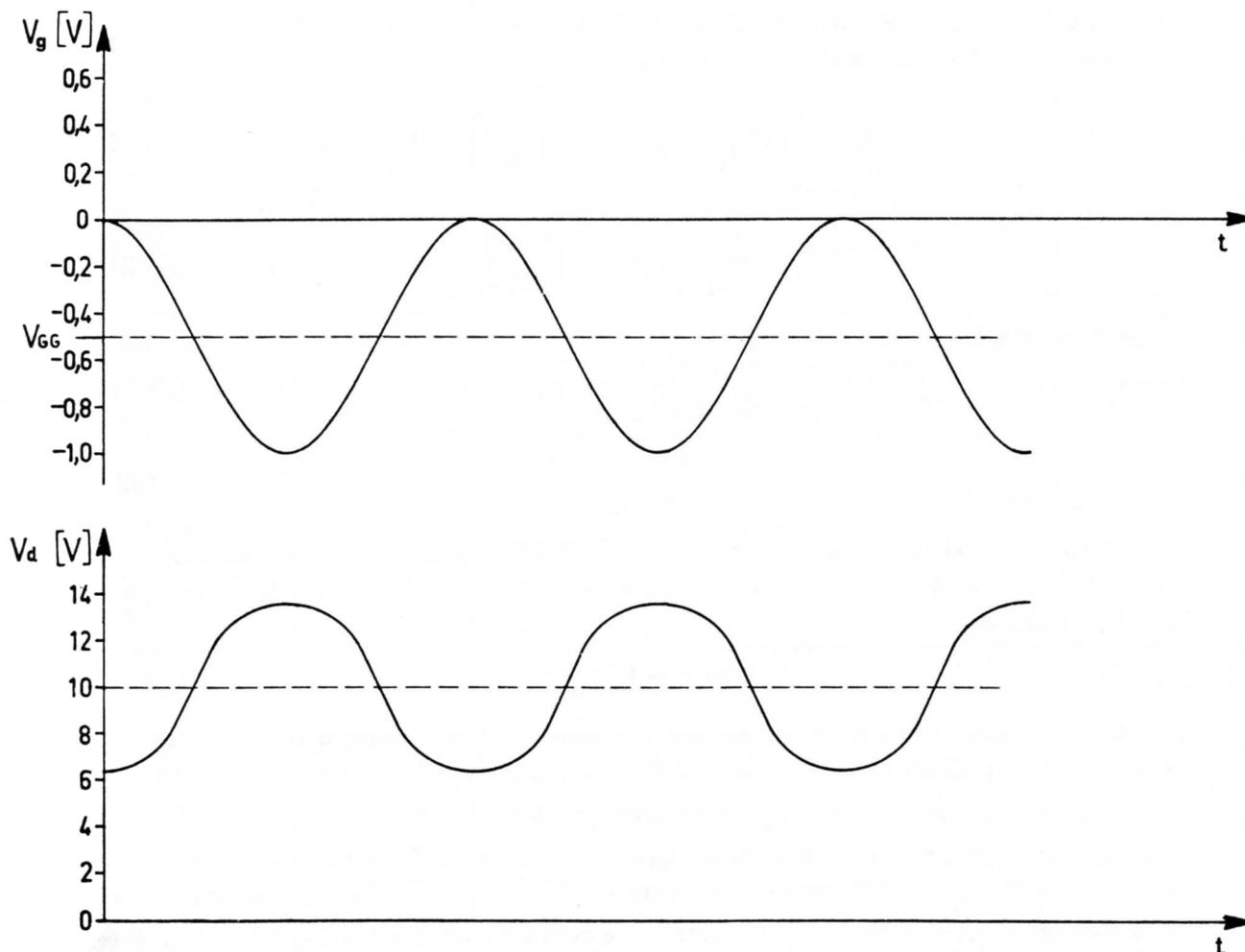


Fig.XVIII.15

Il metodo seguito, pur consentendo la soluzione del problema, è laborioso e richiede la conoscenza del grafico di tutta la famiglia, a passi molto fini di V_{GS} , della curva caratteristica. Poiché questo in genere non avviene, cioè i costruttori di Fet non forniscono queste curve dettagliate, si incontrano problemi di precisione principalmente per valori piccoli di v_g .

Notiamo intanto (Fig.15) che la oscillazione sovrainposta al valore stazionario della tensione V_{DS} è molto più ampia (attenzione al cambio di scala) delle oscillazioni del segnale v_g sul Gate; inoltre l'analisi ora fatta mostra che l'oscillazione della tensione di Drain non è simmetrica ($(10 - 6.3) \text{ V} = 3.7 \text{ V}$ contro $(12.8 - 10) \text{ V} = 2.8 \text{ V}$), vale a dire l'oscillazione della tensione del Drain è una *replica* (moltiplicata per un numero < -1) della ddp v_g , con una *distorsione* non piccola rispetto

all'ampiezza. È facile rendersi conto che tale distorsione sarebbe stata assai inferiore se l'ampiezza v_o fosse stata più piccola, cioè se avessimo considerato variazioni ancor più piccole attorno al punto di lavoro. In un caso come questo però il metodo grafico non è proprio quello più indicato; si può invece sfruttare matematicamente il fatto della piccolezza di v_g . Infatti, in queste ipotesi, anche la variazione di V_d rispetto al valore stazionario V_D ($V_D = 10 V$ nel nostro caso) sarà piccola, così come quella della corrente di Drain (il cui valore stazionario I_D vale nel nostro caso $3.0 mA$). Poiché la corrente istantanea I_d è sempre esprimibile (come abbiamo visto nel §3) in funzione dei valori istantanei V_g e V_d delle ddp fra Gate e Source e fra Drain e Source (il Source è a massa), potremo esprimere I_d mediante uno sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine attorno al punto A, caratterizzato dai valori stazionari I_D, V_G, V_D :

$$I_d = I_D + \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_g} \right)_{V_D} (V_g - V_G) + \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right)_{V_G} (V_d - V_D) \quad (\text{XVIII.34})$$

ovvero

$$\Delta I_d = \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_g} \right)_{V_D} \Delta V_g + \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right)_{V_G} \Delta V_d \quad (\text{XVIII.35})$$

Ponendo, come generalmente si fa:

$$\left(\frac{\partial I_d}{\partial V_g} \right)_{V_D} = g_m \quad (\text{XVIII.36})$$

$$\left(\frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right)_{V_G} = \frac{1}{r_d} \quad (\text{XVIII.37})$$

e adottando il metodo universalmente accettato di indicare con lettere corsive minuscole e indici minuscoli le variazioni delle grandezze rispetto ai valori stazionari ($i_d = I_d - I_D$, $v_g = V_g - V_G$, $v_d = V_d - V_D$) possiamo scrivere:

$$i_d = g_m v_g + \frac{1}{r_d} v_d \quad (\text{XVIII.38})$$

g_m è detta *transconduttanza* o *conduttanza mutua*, mentre r_d è detta *resistenza di Drain*. I costruttori di Fet nelle loro specifiche spesso denotano g_m come Y_{fs} (*Common Source forward transadmittance*) e $\frac{1}{r_d}$ come Y_{os} (*Common Source output admittance*). Nella Fig.16 è mostrato schematicamente un metodo per ricavare le variazioni di I_d a V_{DS} e V_{GS} costanti allo scopo di ottenere una stima approssimata di g_m e r_d della curva caratteristica a Source comune: la transconduttanza è data dalla variazione $\frac{\Delta I_d}{\Delta V_{GS}}$ a $V_{DS} = \text{cost}$, mentre $\frac{1}{r_d}$ è ottenuta come rapporto $\frac{\Delta I_d}{\Delta V_{DS}}$ a $V_{GS} = \text{cost}$. Dalla figura si ottiene, nell'intorno del punto di lavoro (A): $g_m \approx \frac{(8.2-2.5)}{1} mA/V = 5.7 mA/V$ e $\frac{1}{r_d} \approx \frac{1}{15} mA/V = \frac{1}{15} k\Omega^{-1}$. Dal grafico non si può ottenere una valutazione molto puntuale dei parametri (altrimenti avremmo potuto risolvere il nostro problema per via grafica!) e pertanto i costruttori, per un dato Fet, forniscono gli andamenti di g_m e di $\frac{1}{r_d}$ in funzione di V_{GS} o di I_D per vari valori di V_{DS} . Su questo punto e sulla dipendenza di questi parametri dalla temperatura torneremo più avanti.

Soffermiamoci ora sulla (38) e sulla portata di tale approccio: la convenzione di usare i simboli minuscoli e di aver eliminato i Δ ha un significato non solo di praticità; infatti i_d e v_d possono essere anche interpretati come la corrente e la tensione di Drain associate al generatore v_g posto sul Gate, mentre i valori stazionari di corrente I_D e di tensione V_G e V_D sono determinati dagli altri generatori di fem continue.

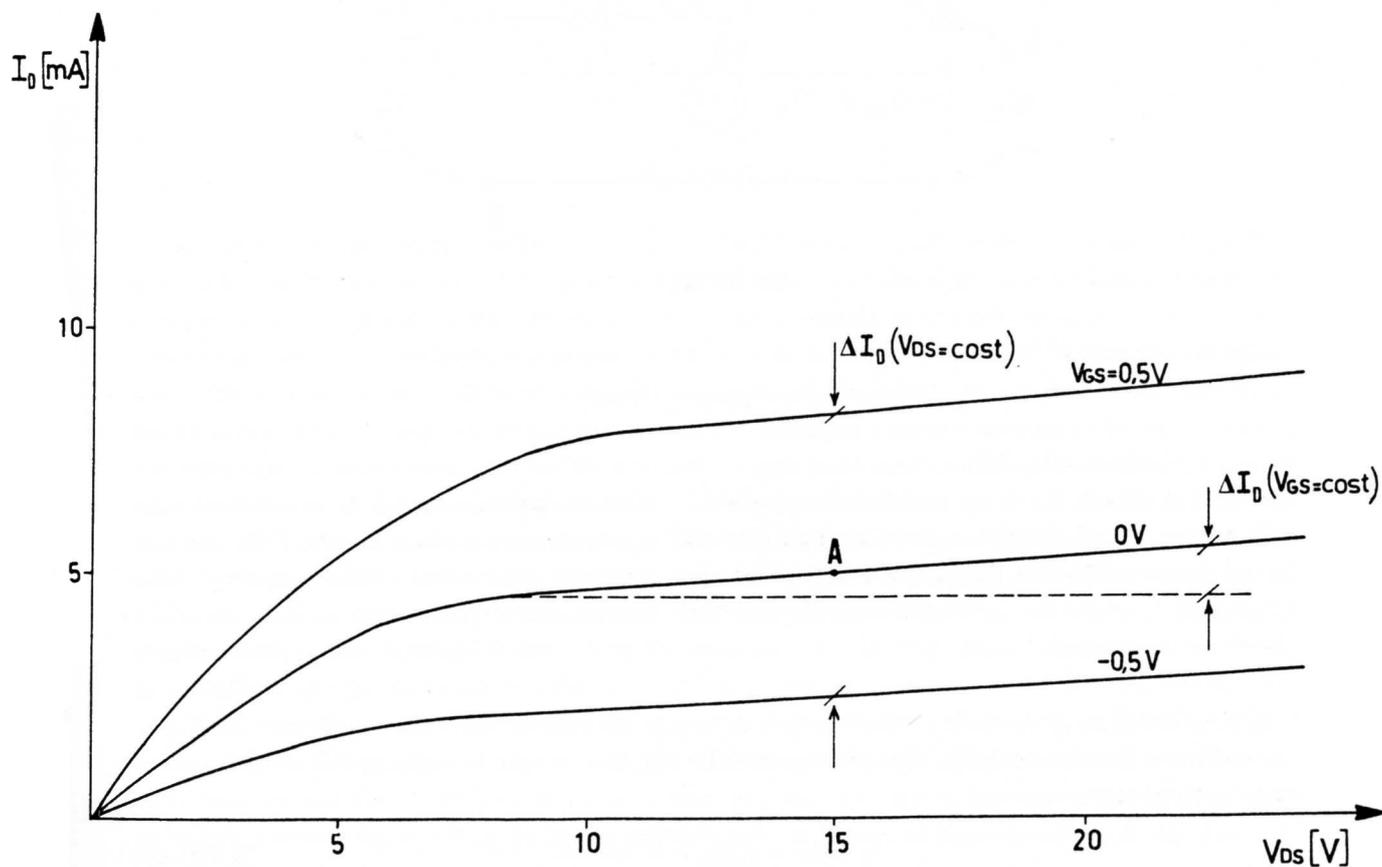


Fig.XVIII.16

Per dimostrare questa affermazione notiamo innanzitutto che la relazione lineare (38) fra v_g , v_d , e i_d è, proprio in quanto lineare, passibile di una interpretazione in termini di *equivalente circuitale*; tale equivalente è riportato nella Fig.17.

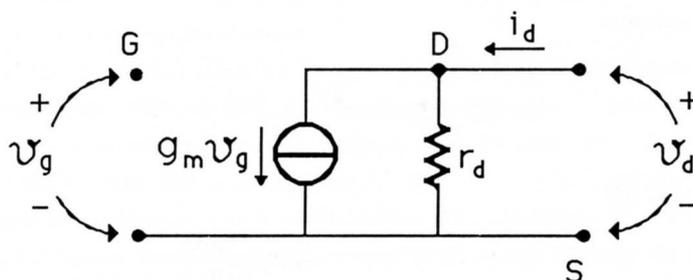


Fig.XVIII.17

L'equivalenza è immediata: infatti secondo questo schema abbiamo, applicando la legge dei nodi in D: $g_m v_g = i_d - \frac{v_d}{r_d}$ cioè esattamente la (38). Analogamente si può ottenere un circuito

equivalente che ricorra ad un generatore di tensione, facendo la trasformazione generatore di corrente → generatore di tensione (Fig.18).

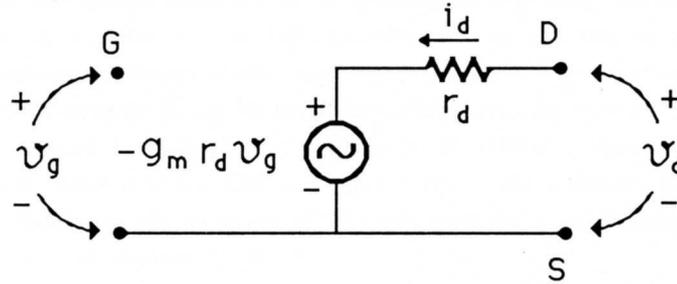


Fig.XVIII.18

In questo caso si ottiene:

$$v_d = -g_m v_g r_d + i_d r_d$$

ancora equivalente alla (38).

Pertanto il tripolo Fet può, nell'ipotesi attuale di piccole variazioni rispetto ai valori stazionari delle tensioni degli elettrodi e delle correnti entranti in essi, essere sostituito da una delle due reti lineari disegnate in Fig.17 e Fig.18; se si vuole poi conoscere l'andamento delle correnti e delle tensioni in funzione dei generatori esterni, occorrerà inserire questa rete equivalente nel resto del circuito e risolvere con i soliti metodi delle reti lineari il problema. Ad esempio del caso che stiamo esaminando (amplificatore a Source comune, Fig.13) occorrerà contemporaneamente soddisfare la (38) e il vincolo imposto dalla retta di carico, ovvero la 2ª legge di Kirchhoff applicata alla maglia Drain-Source (equazione (32)). Con riferimento alla Fig.13 e usando la solita notazione per i valori stazionari, abbiamo:

$$I_d - I_D = g_m v_g + \frac{(V_d - V_D)}{r_d} \quad (\text{XVIII.39})$$

$$V_{DD} = V_d + I_d R_L \quad (\text{XVIII.40})$$

Ricaviamo I_d dalla (40); aggiungendo e togliendo $\frac{V_D}{R_L}$ otteniamo:

$$I_d = \frac{V_{DD} - V_D}{R_L} - \frac{(V_d - V_D)}{R_L} = I_D - \frac{(V_d - V_D)}{R_L} \quad (\text{XVIII.41})$$

Da quest'ultima otteniamo:

$$i_d = I_d - I_D = -\frac{(V_d - V_D)}{R_L} = \frac{-v_d}{R_L} \quad (\text{XVIII.42})$$

che sostituita nella (39) dà:

$$v_d = V_d - V_D = -g_m v_g \frac{r_d R_L}{r_d + R_L} \quad (\text{XVIII.43})$$

E' immediato rendersi conto che tale soluzione corrisponde alla risoluzione del circuito disegnato in Fig.19, ottenuto aggiungendo alla rete equivalente il circuito esterno, con i generatori ideali di ddp, che non siano di segnale, sostituiti con dei cortocircuiti.

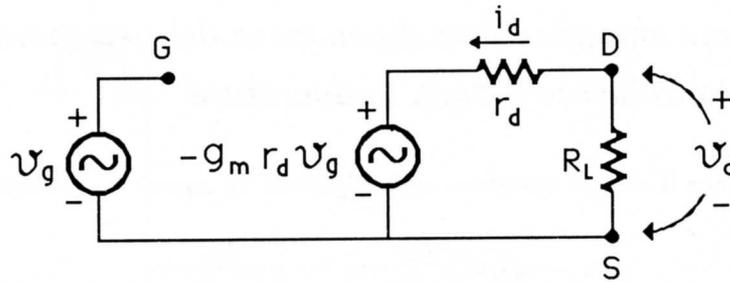


Fig.XVIII.19

Il metodo di risoluzione, rappresentato nella Fig.19 nel caso particolare in esame, vale qualunque sia la rete lineare in cui il Fet è inserito. Infatti, una volta che il problema è stato linearizzato sostituendo il Fet col suo circuito equivalente per piccoli segnali, la conoscenza delle correnti e delle tensioni nei vari rami è ottenibile mediante le tecniche di risoluzione delle reti lineari: in particolare le variazioni delle correnti e delle tensioni rispetto ai valori stazionari, essendo attribuibili esclusivamente al generatore di segnale, si possono ottenere, in ottemperanza al Principio di Sovrapposizione, cortocircuitando tutti i generatori di fem continue, ovvero sostituendoli con la loro resistenza interna e lasciando *acceso* il solo generatore di segnale. La funzione dei generatori di fem continua è esclusivamente quella di assicurare la corretta posizione del punto di lavoro o, come si dice, la *polarizzazione* del Fet; si noti anche che lasciare acceso il generatore di (piccolo) segnale, significa lasciare accesi anche tutti gli altri generatori da esso *controllati*; ad esempio nel caso preso in esame, lasciare v_g impone lasciare acceso anche il generatore di tensione $-g_m r_d v_g$ (oppure il generatore di corrente $g_m v_g$).

Tornando al nostro problema, la (43) dà, se non ce ne fossimo accorti, il risultato al quesito posto all'inizio del paragrafo, almeno nel caso di eccitazione piccola rispetto al valore stazionario della tensione sul Gate. Esso ci dice che la presenza sul Gate di un segnale v_g sovrainposto ad un valore costante $V_G = -V_{GG}$ dà luogo, sull'elettrodo di Drain, ad una variazione di ddp (sempre rispetto al valore stazionario V_D) pari a $-g_m \frac{r_d R_L}{r_d + R_L} v_g$. Prendendo dei numeri realistici ricavati dalla caratteristica riportata in Fig.16

$$g_m = 5.7 \text{ mA/V} \quad r_d = 15 \text{ k}\Omega$$

e assumendo che $R_L = 2 \text{ k}\Omega$ abbiamo che l'ampiezza di v_d è circa 10 volte v_g . Il rapporto $\frac{v_d}{v_g}$ è detto *guadagno in tensione* o *amplificazione* del nostro circuito; quest'ultimo è cioè interpretato come un *amplificatore* nel quale il Gate è il terminale di ingresso, il Drain quello di uscita e il Source quello di riferimento sia per l'ingresso che per l'uscita.

La correttezza del risultato (43) dipende da quanto è giustificata l'approssimazione lineare, in altri termini da quanto corretta è l'ipotesi di considerare costanti g_m e r_d entro il campo di variazione di v_g . La verifica o meno di questo punto può venire solo dalla completa definizione del problema in esame, per esempio dalle curve che il costruttore dà per g_m e r_d in funzione del punto di lavoro. In genere se l'approssimazione lineare non è particolarmente giustificata (come ad esempio nel caso risolto per via grafica all'inizio del paragrafo), osserveremo che il segnale v_d di Drain riproduce, moltiplicato per il guadagno, il segnale v_g di Gate, ma presenta componenti di armoniche superiori, segno palese della distorsione introdotta dalla non linearità del sistema. Nel paragrafo successivo vedremo alcuni tipici andamenti di g_m e r_d in funzione di V_{GS} e di I_D , nonché la loro dipendenza dalla temperatura.

6.— Il Fet come amplificatore: dipendenza dei parametri dal punto di lavoro e dalla temperatura

Abbiamo visto che il circuito disegnato nella Fig.20 dà un segnale v_d sul Drain pari a:

$$v_d = -g_m r_d \frac{R_L}{R_L + r_d} v_g = -\mu \frac{R_L}{R_L + r_d} v_g \quad (\text{XVIII.44})$$

dove abbiamo posto come si fa tradizionalmente:

$$\mu = g_m r_d \quad (\text{XVIII.45})$$

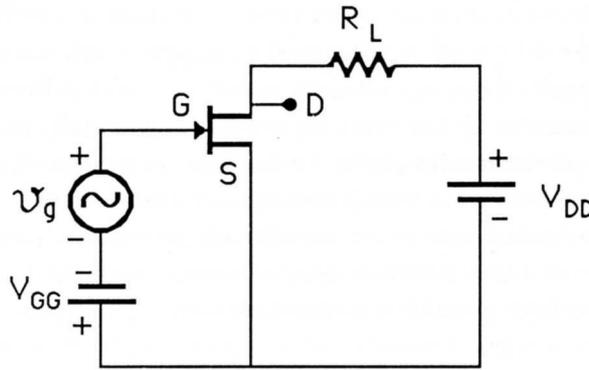


Fig.XVIII.20

Esso è detto *fattore di amplificazione* e misura, a parte il segno, il guadagno in tensione $\frac{v_d}{v_g}$ quando $R_L \gg r_d$. La configurazione ora studiata è detta *amplificatore a sorgente (Source) comune* e costituisce una configurazione che trova effettivo e vasto impiego nell'elettronica. Esistono ovviamente altre configurazioni in cui il Fet è adoperato come amplificatore e in tutte queste, in maggior o minor misura, il guadagno fra ingresso e uscita dipende dai parametri g_m e r_d . Pertanto nello stabilire il punto di lavoro del nostro amplificatore in modo che esso risponda alle esigenze particolari per cui è stato progettato, occorrerà conoscere l'andamento dei parametri g_m e r_d in funzione delle polarizzazioni. Ad esempio sappiamo che una buona stima della dipendenza della transconduttanza g_m in funzione di V_{GS} si può ottenere derivando la (28): $g_m \propto (1 - \frac{V_{GS}}{V_P})$. Sperimentalmente si trovano andamenti un po' differenti, del tipo disegnato in Fig.21 (Fet canale-p). Il fatto principale da notare è che la transconduttanza è massima attorno a piccoli valori di V_{GS} ; in tali condizioni di polarizzazione si hanno infatti, al variare di V_{GS} , le maggiori modulazioni di canale, responsabili della variazione della corrente di Drain a parità di V_{DS} . Dalla curva della Fig.21 si nota anche che non si individuano zone ove la transconduttanza è stazionaria; essa presenta pertanto una derivata ovunque finita, per cui l'approssimazione lineare per piccoli segnali difficilmente può essere valida per variazioni di V_{GS} non piccole. Quanto ai valori della transconduttanza per $V_{GS} = 0$, essa, a seconda dei Fet, varia tipicamente nell'ambito di $0.1 \div 100 \text{ mA/V}$; r_d invece ha un campo caratteristico di variazioni fra $10 \text{ k}\Omega$ e $1 \text{ M}\Omega$. Generalmente il costruttore non fornisce l'andamento di r_d in funzione del punto di lavoro, bensì dà un certo valore minimo garantito per un certo punto di lavoro, considerato in qualche modo ottimale per quel Fet.

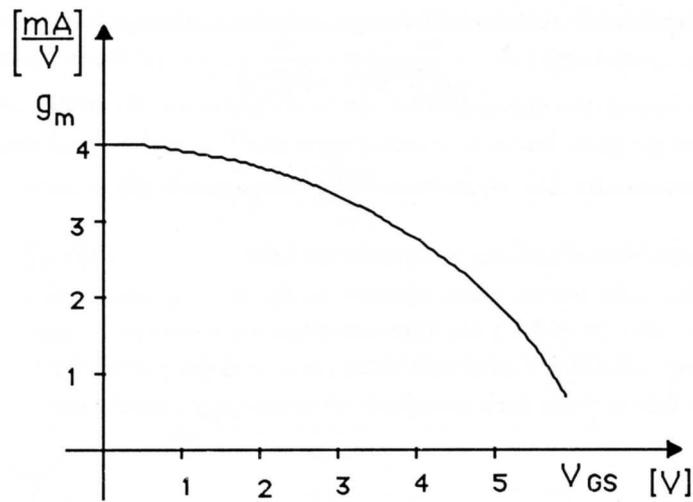


Fig.XVIII.21

Di fatto r_d dipende assai poco dal valore di V_{DS} purché il punto di lavoro sia mantenuto nella zona a “pentodo” (come si fa generalmente quando si adopera il Fet come amplificatore), mentre una moderata dipendenza da V_{GS} esiste nel verso di aumentare all’aumentare di V_{GS} (cioè della contropolarizzazione). Nel caso dell’amplificatore a Source comune ora studiato, la soluzione (43):

$$v_d = V_d - V_D = -g_m v_g \frac{r_d R_L}{r_d + R_L}$$

dice che la dipendenza da r_d è assai meno critica di quella rispetto a g_m , almeno per valori di $R_L < r_d$; infatti se $R_L \ll r_d$, $v_d = g_m R_L v_g$.

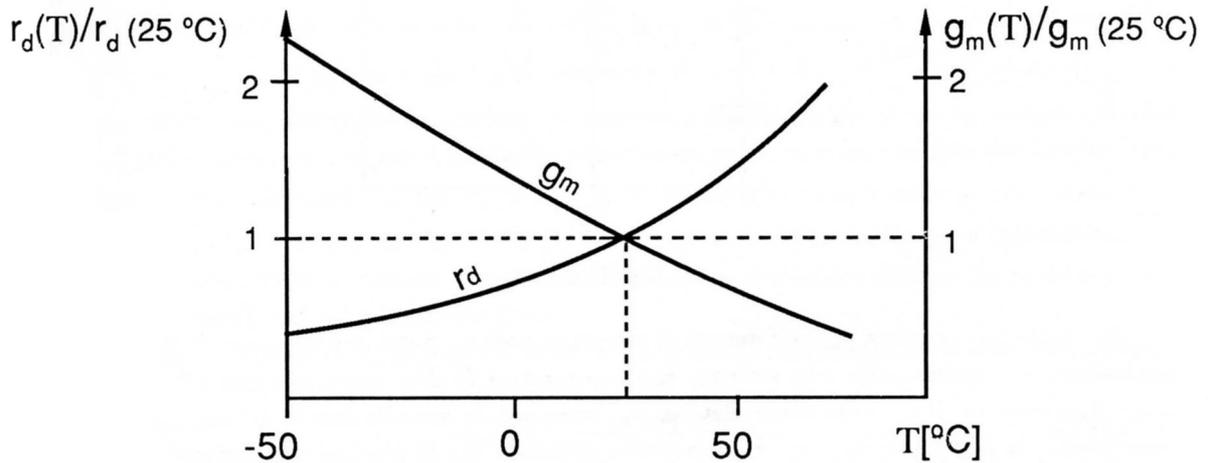


Fig.XVIII.22

In altri termini l’influenza della non perfetta costanza di r_d al variare del segnale è fortemente attenuata dalla presenza della resistenza di carico R_L che, essendo piccola, riduce v_d e conseguentemente l’influenza del termine $\frac{v_d}{r_d}$ nell’espressione di i_d (vedi (39)). Un altro punto assai importante è la dipendenza del guadagno dell’amplificatore dalla temperatura, dipendenza che deve essere più

ridotta possibile. Il guadagno risente della temperatura in quanto g_m e r_d ne dipendono. In Fig.22 sono riportati gli andamenti tipici di $\frac{g_m}{g_m(25^{\circ}C)}$ e $\frac{r_d}{r_d(25^{\circ}C)}$. Entrambe le dipendenze sono dominate dal fenomeno della diminuzione della mobilità con la temperatura: il canale cioè, in quanto costituito di un semiconduttore drogato, ha un comportamento simile a quello di un conduttore. Il guadagno $\frac{v_d}{v_g} = g_m \frac{r_d R_L}{R_L + r_d}$ pertanto ha una dipendenza dalla temperatura più o meno marcata a seconda del rapporto $\frac{R_L}{r_d}$: ad esempio se $R_L \ll r_d$, la dipendenza è dominata da quella di g_m , ovvero il guadagno aumenta al diminuire della temperatura, mentre se $R_L \gg r_d$ si ha la più debole dipendenza di μ da T . Abbiamo già visto (Cap.XV) che l'introduzione della reazione negativa consente di definire amplificazioni in larga misura indipendenti dalle variazioni dei parametri dei transistori impiegati. Un altro esempio di tale metodo sarà esaminato proprio nel paragrafo successivo.

7.— Un altro esempio di applicazione del Fet: il "Source follower"

Il circuito di Fig.23 differisce dal circuito amplificatore a Source comune per l'aggiunta di una resistenza fra Source e massa; inoltre l'uscita è presa sul Source anziché sul Drain.

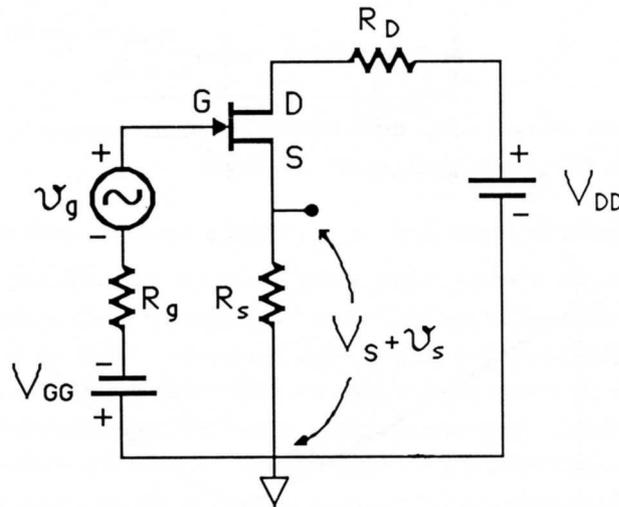


Fig.XVIII.23

Se vogliamo conoscere v_s , nell'ipotesi di piccoli segnali v_g , possiamo sostituire il Fet col circuito equivalente e inserirlo nella rete esterna, con i generatori di ddp cortocircuitati (Fig.24). Si noti che nel generatore di corrente controllato $g_m v_{gs}$ compare, in accordo con la definizione del circuito equivalente, la ddp $v_{gs} = v_g - v_s$. E' opportuno ricordare che le tensioni e le correnti si riferiscono alle variazioni rispetto ai valori stazionari. La seconda legge di Kirchhoff applicata alla maglia di destra, tenendo conto che in r_d circola una corrente pari a $(i_d - g_m v_{gs})$, dà:

$$i_d(R_S + R_D) + [i_d - g_m(v_g - v_s)]r_d = 0 \quad (\text{XVIII.46})$$

che insieme alla relazione

$$v_s = i_d R_S \quad (\text{XVIII.47})$$

permette di ottenere i_d in funzione di grandezze tutte note o misurabili ($\mu = g_m r_d$):

$$i_d = \frac{\mu v_g}{R_S + R_D + r_d + \mu R_S} \quad (\text{XVIII.48})$$

Pertanto

$$v_s = \frac{v_g}{1 + \frac{R_S + R_D + r_d}{\mu R_S}} \approx v_g \quad (\text{XVIII.49})$$

L'ultimo passaggio si basa sul fatto che per valori realistici di μ (≈ 100) e di R_S, R_D, r_d ($2 \text{ k}\Omega, 2 \text{ k}\Omega, 15 \text{ k}\Omega$) il secondo membro a denominatore risulta assai piccolo.

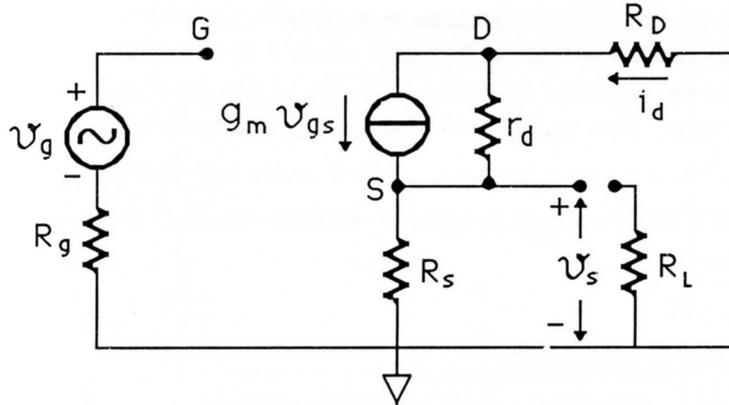


Fig.XVIII.24

Se vogliamo trovare la resistenza di uscita rispetto a un carico R_L da porre in parallelo a R_S possiamo usare la (48) ponendo $R_S = 0$ per ricavare la corrente di cortocircuito i_{cc} e la (49) per ottenere la tensione a circuito aperto $v_{ca} = v_s$; la resistenza di uscita R_o sar  quindi data da:

$$R_o = \frac{v_{ca}}{i_{cc}} = \frac{\mu R_S v_g}{(\mu + 1) R_S + R_D + r_d} \frac{R_D + r_d}{\mu v_g} = R_S \parallel \frac{(R_D + r_d)}{\mu + 1} \quad (\text{XVIII.50})$$

Pertanto il nostro circuito si comporta, con riferimento ai terminali di ingresso, come una resistenza molto elevata (infinita nella attuale schematizzazione); in uscita si comporta come un generatore di tensione $v_s \approx \frac{\mu}{\mu + 1} v_g \approx v_g$ con in serie una resistenza R_o pari a $R_S \parallel \frac{(R_D + r_d)}{\mu + 1} \approx R_S \parallel \frac{1}{g_m}$ (se $R_D \ll r_d$). Il circuito cio  ripete la tensione in ingresso indipendentemente dall'impedenza R_g del segnale. L'impedenza di uscita non   particolarmente bassa come in molti casi sarebbe desiderabile, ma in molte situazioni, quelle in cui $R_g \gg \frac{1}{g_m}$ e $R_L \approx R_g$ il circuito   utile poich  consente di comandare un carico non piccolo rispetto a R_g senza eccessive cadute sulla resistenza interna del generatore. Il nome "Source follower", cio  Source *inseguitore*, si riferisce al fatto che la tensione sul Source segue le variazioni del segnale sul Gate.

Se avessimo considerato la ddp v_d fra Drain e elettrodo di riferimento avremmo trovato (vedi Fig.24)

$$v_d = -i_d R_D = \frac{-\mu R_D v_g}{R_S(\mu + 1) + R_D + r_d} \quad (\text{XVIII.51})$$

Facendo tendere a zero R_S si ritrova il risultato (43), caso nel quale R_D   chiamata R_L . Consideriamo il caso in cui $g_m = 5.7 \text{ mA/V}$, $r_d = 15 \text{ k}\Omega$, $R_S = 500 \Omega$, $R_D = 2 \text{ k}\Omega$: la (51) ci dice che il guadagno $\frac{v_d}{v_g}$ vale:

$$\frac{v_d}{v_g} = -\frac{\mu R_D}{(\mu + 1) R_S + R_D + r_d} = -\frac{R_D}{R_S} \frac{1}{\frac{\mu + 1}{\mu} + \frac{R_D + r_d}{\mu R_S}} \approx -2.8 \quad (\text{XVIII.52})$$

Se viceversa consideriamo il caso in cui $R_S \rightarrow 0$, ovvero il caso dell'amplificatore a Source comune otteniamo:

$$\frac{v_d}{v_g} = -\frac{\mu R_D}{R_D + r_d} = -g_m R_D \frac{1}{1 + \frac{R_D}{r_d}} \approx -10 \quad (\text{XVIII.53})$$

Pertanto l'amplificatore a Source comune presenta un guadagno più elevato dell'amplificatore con una resistenza R_S fra Source e elettrodo di riferimento; la diminuzione del guadagno in questo secondo caso si accompagna tuttavia (vedi (52)) ad una molto maggiore indipendenza dai parametri del transistor usato e quindi delle loro variazioni con la temperatura. Ricordando quanto detto nel Cap.XV,§3, sappiamo che questo effetto (riduzione del guadagno, aumento della stabilità) è tipico dell'introduzione di una *reazione negativa*. Il caso in esame è di fatto attribuibile a una tale causa: infatti l'aver introdotto la resistenza finita R_S fa sì che la ddp fra Gate e Source, che controlla l'entità del generatore controllato $g_m v_{gs}$ anziché essere v_g , è ad essa inferiore e pari a $v_g - i_d R_S$; d'altronde il secondo termine è proporzionale alla ddp di uscita v_d ($-i_d R_S = v_d \frac{R_S}{R_D}$), cioè una parte della tensione di uscita è stata sottratta a quella di ingresso; questo è proprio, per definizione, un esempio di reazione negativa.

8.— Il Fet in alta frequenza: un esame più accurato dell'amplificatore

La descrizione fino ad ora fatta del comportamento per piccoli segnali del transistor a effetto di campo si dimostra essere adeguata fin tanto che la frequenza f del segnale v_g (ammesso essere sinusoidale) è nel campo audio ($\leq 20 \text{ kHz}$). Per frequenze più elevate le schematizzazioni adottate risultano non sufficientemente accurate. Si trova che per riprodurre gli andamenti sperimentali osservati è sufficiente aggiungere allo schema equivalente del Fet delle reattanze pure fra gli elettrodi; conforta poi trovare che queste reattanze nient'altro sono che le capacità fra i terminali di Gate, Source e Drain, la cui esistenza era indipendentemente prevedibile. Infatti abbiamo già fatto vedere (Cap.XVII, §4) che in un diodo contropolarizzato con una certa tensione di barriera V_{TOT} è definibile una capacità fra anodo e catodo il cui valore dipende da $(V_{TOT})^{-\frac{1}{2}}$. A causa di ciò nel Fet avremo una capacità fra Gate e Source e una capacità fra Gate e Drain; inoltre va considerata la capacità puramente geometrica fra i due elettrodi Drain e Source. Poiché poi si trattano piccole variazioni delle tensioni fra gli elettrodi, tali capacità si potranno considerare ragionevolmente costanti. Complessivamente il modello per piccoli segnali del Fet, adeguato per descrivere il funzionamento anche a frequenze elevate è quello in Fig.25.

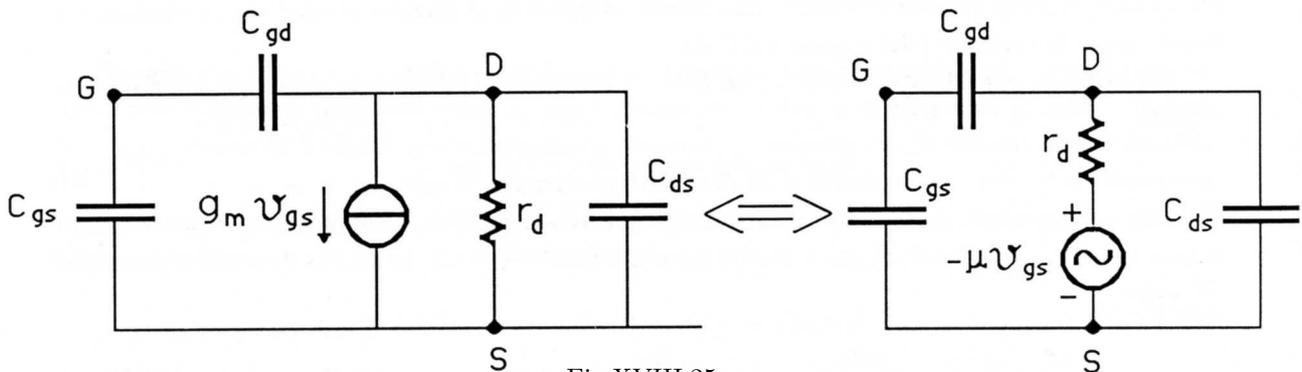


Fig.XVIII.25

Le configurazioni equivalenti (generatore di tensione - generatore di corrente) sono entrambe indicate, principalmente con lo scopo di far notare la corretta topologia dei collegamenti. Quanto agli ordini di grandezza di queste capacità, abbiamo tipicamente:

$$C_{gd} \approx C_{gs} \approx 1 - 10pF \quad C_{ds} \approx 0.1 - 1pF$$

Si vede così che i valori sono assai piccoli; tuttavia, esaminando il caso dell'amplificatore a Source comune, vedremo che esse (principalmente C_{gd}) influenzano notevolmente la tensione di uscita, anche a frequenze non particolarmente elevate.

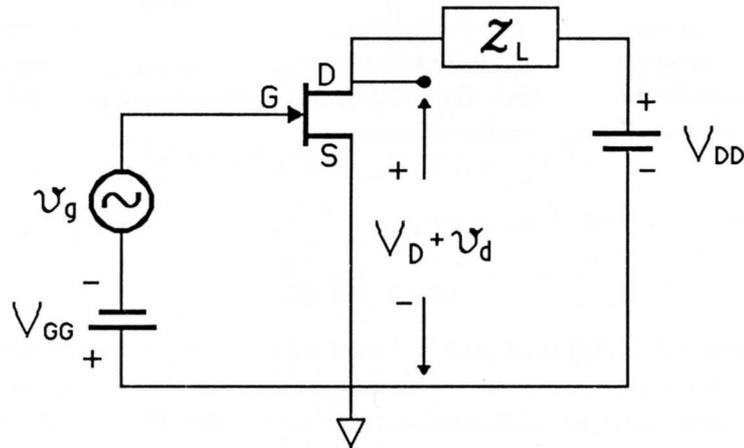


Fig.XVIII.26

Il circuito che vogliamo studiare è disegnato nella Fig.26, dove abbiamo introdotto una impedenza di carico complessa Z_L . Vogliamo innanzitutto calcolare $v_d = v_o$ in funzione di v_g . Poi calcoleremo la impedenza di ingresso (cioè fra Gate e Source) che questa volta a causa di C_{gs} e C_{gd} non sarà più estremamente elevata e infine valuteremo la impedenza di uscita e confronteremo i risultati col modello in bassa frequenza. Il circuito equivalente per piccoli segnali è riportato nella Fig.27.

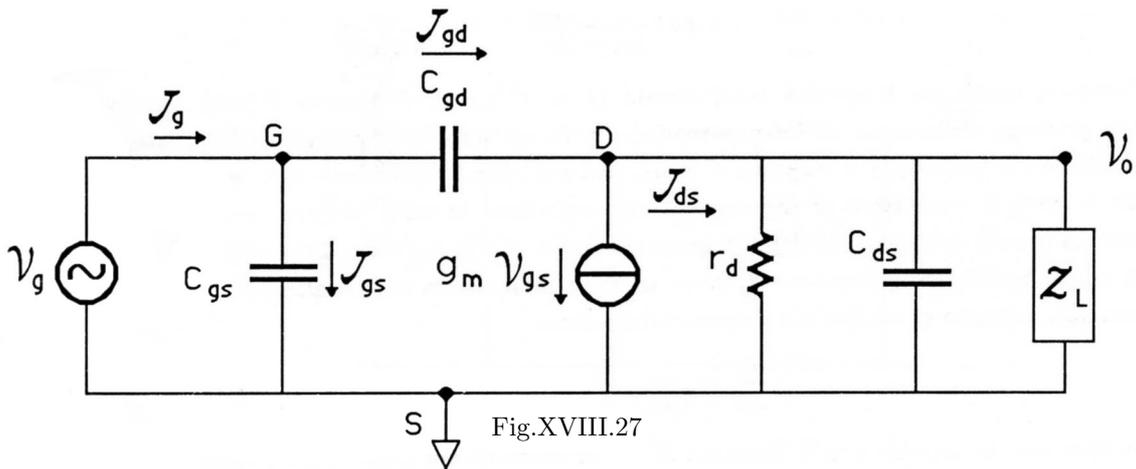


Fig.XVIII.27

Introducendo le ammettenze dei vari rami:

$$\mathcal{Y}_{gs} = j\omega C_{gs} \quad \mathcal{Y}_{gd} = j\omega C_{gd} \quad \mathcal{Y}_d = \frac{1}{r_d} \quad \mathcal{Y}_L = \frac{1}{Z_L}$$

possiamo risolvere il nostro problema, vale a dire di esprimere $v_o (= v_d)$ in funzione di $v_g (= v_{gs})$, in base alle seguenti relazioni (anche le tensioni sono ora complesse):

$$\mathcal{J}_{ds} = v_o(\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d) \tag{XVIII.54}$$

$$\mathcal{J}_{gd} = (\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_o)\mathcal{Y}_{gd} \quad (\text{XVIII.55})$$

$$\mathcal{J}_{gs} = \mathcal{V}_g\mathcal{Y}_{gs} \quad (\text{XVIII.56})$$

e alla legge dei nodi applicata in D:

$$0 = \mathcal{J}_{gd} - g_m\mathcal{V}_g - \mathcal{J}_{ds} = (\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_o)\mathcal{Y}_{gd} - g_m\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_o(\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d) \quad (\text{XVIII.57})$$

Da questa si ricava:

$$\mathcal{V}_o = \frac{-\mathcal{V}_g(g_m - \mathcal{Y}_{gd})}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_{gd}} = \mathcal{A}\mathcal{V}_g \quad (\text{XVIII.58})$$

Il guadagno \mathcal{A} è ora un numero complesso e questo rispecchia il fatto di avere esplicitamente tenuto conto delle capacità interelettrodiche. Il guadagno \mathcal{A} si può esprimere come $A_{DC} \cdot \mathcal{F}$ (A_{DC} guadagno in continua, reale) dove \mathcal{F} è un termine complesso:

$$\mathcal{A} = A_{DC} \frac{1 - \frac{\mathcal{Y}_{gd}}{g_m}}{1 + \frac{\mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_{gd}}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d}} \quad (\text{XVIII.59})$$

ovvero:

$$A_{DC} = \frac{-g_m}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d} \quad (\text{XVIII.60})$$

$$\mathcal{F} = \frac{1 - \frac{\mathcal{Y}_{gd}}{g_m}}{1 + \frac{\mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_{gd}}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d}} \quad (\text{XVIII.61})$$

Considerando il caso numerico già esaminato ($g_m = 5.7 \text{ mA/V}$, $r_d = 15 \text{ k}\Omega$, $R_L = 2 \text{ k}\Omega$) e supponendo che $C_{gd} = 2 \text{ pF}$, $C_{ds} = 0.2 \text{ pF}$, si trova che il fattore correttivo \mathcal{F} vale:

$$\mathcal{F} = \frac{1 - \frac{j\omega C_{gd}}{g_m}}{1 + j\omega \frac{(C_{ds} + C_{gd})}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d}} \approx \frac{1 - j \frac{\omega}{2.9 \cdot 10^9}}{1 + \frac{j\omega}{2.6 \cdot 10^8}}$$

Pertanto, anche per frequenze assai elevate ($f \approx 10^7 \text{ Hz}$), il numero \mathcal{F} resta assai vicino ad 1 e la presenza delle capacità interelettrodiche è, in un vastissimo campo di frequenze, inefficace a modificare il guadagno \mathcal{A} rispetto a A_{DC} , che nel caso in questione vale ≈ -10 . Vedremo ora che se però il generatore in ingresso ha una resistenza in serie non trascurabile, la risposta del sistema risente dell'aumento della frequenza a causa dell'impedenza di ingresso finita. L'impedenza di ingresso vista dal generatore \mathcal{V}_g verso massa è infatti data dal parallelo di \mathcal{Z}_{gs} con l'impedenza associata al ramo verso Drain e determinabile come:

$$\frac{\mathcal{V}_g}{\mathcal{J}_{gd}} = \frac{\mathcal{V}_g}{(\mathcal{V}_g - \mathcal{A}\mathcal{V}_g)\mathcal{Y}_{gd}} = \frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} \frac{1}{1 - \mathcal{A}} \quad (\text{XVIII.62})$$

Si vede che, in accordo con il Teorema di Miller studiato nel Cap. I, §8, l'impedenza verso massa risulta ridotta di un fattore circa uguale a \mathcal{A} rispetto a quella verso il nodo di Drain. Ciò comporta che l'impedenza di ingresso verso massa vista dal generatore è quasi tutta determinata dalla capacità C_{gd} moltiplicata per il fattore $1 - \mathcal{A}$, almeno finché $|\mathcal{A}| \gg 1$ (C_{gd} è infatti dello stesso ordine di C_{gs}). Nel caso ora esaminato, di un generatore v_g con resistenza interna nulla, la presenza della impedenza:

$$\mathcal{Z}_i = \frac{1}{j\omega [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]} \quad (\text{XVIII.63})$$

è assolutamente ininfluenza poiché la tensione fra Gate e Source (quella che compare nel generatore controllato $g_m \mathcal{V}_{gs}$) è sempre identica a \mathcal{V}_g . Se però ammettiamo la presenza di una resistenza interna r_g in serie al generatore \mathcal{V}_g , allora

$$\mathcal{V}_{gs} = \mathcal{V}_g \frac{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{Z}_i + r_g} \quad (\text{XVIII.64})$$

e si trova pertanto

$$\mathcal{V}_{gs} = \mathcal{V}_g \frac{1}{1 + j\omega r_g [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]} \quad (\text{XVIII.65})$$

Si riconoscerà in questa relazione (vedi Cap.XII,§2) la risposta di un filtro passa basso con $f_L = \frac{1}{2\pi r_g [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]}$ se \mathcal{A} può considerarsi reale. La relazione fra \mathcal{V}_o e \mathcal{V}_g risulta in questo caso così modificata:

$$\mathcal{V}_o = \mathcal{A} \frac{1}{1 + j\omega r_g [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]} \mathcal{V}_g \quad (\text{XVIII.66})$$

Se supponiamo che $r_g = 10 \text{ k}\Omega$ e per tutti gli altri elementi in gioco assumiamo i valori dell'esempio precedente troviamo:

$$f_H \approx 6.6 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

cioè assai inferiore alle frequenze per le quali il fattore \mathcal{F} dato dalla (61) si discosta sensibilmente da 1; questo risultato pertanto giustifica l'aver considerato \mathcal{A} reale e pari a A_{DC} nelle (63), (65) e (66).

Si vede così che la presenza delle capacità interelettrodiche ha come principale conseguenza l'introduzione di un filtro passa basso in ingresso, la cui frequenza di taglio superiore è determinata principalmente dalla resistenza in serie al generatore di segnale e dalla capacità Miller fra Gate e massa ($\approx |\mathcal{A}| * C_{gd}$).

Calcoliamoci ora la impedenza di uscita (cioè l'impedenza di Thévenin rispetto ai terminali di uscita) dell'amplificatore: per far ciò, ricorrendo proprio alla definizione, applichiamo un generatore di ddp \mathcal{E} fra Drain e Source e cortocircuitiamo il generatore di segnale \mathcal{V}_g : il rapporto fra \mathcal{E} e la corrente \mathcal{J} erogata dal generatore dà proprio \mathcal{Z}_o , impedenza di uscita fra Drain e Source. Il circuito da studiare è quello riportato in Fig.28.

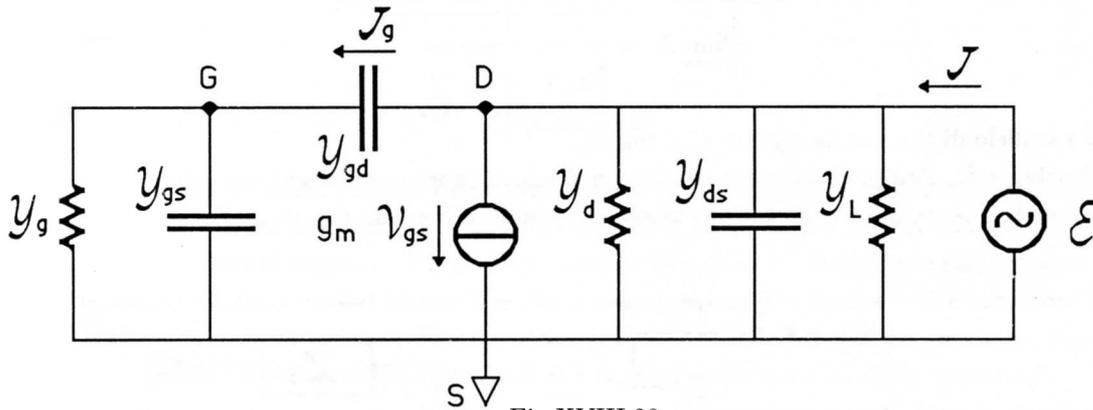


Fig.XVIII.28

Applicando la legge dei nodi in D

$$\mathcal{J} = \mathcal{E}(\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d) + g_m \mathcal{V}_{gs} + \mathcal{J}_g \quad (\text{XVIII.67})$$

Tenendo presente che:

$$\mathcal{V}_{gs} = \mathcal{J}_g \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}} \quad (\text{XVIII.68})$$

$$\mathcal{J}_g = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}}} \quad (\text{XVIII.69})$$

si ha, sostituendo queste relazioni nella (67):

$$\mathcal{J} = \mathcal{E} \left[\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_L + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}}} \left(1 + \frac{g_m}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}} \right) \right] \quad (\text{XVIII.70})$$

e pertanto:

$$\mathcal{Z}_o = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}} = \frac{1}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_L + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}}} \left(1 + \frac{g_m}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}} \right)} \quad (\text{XVIII.71})$$

Tale relazione può anche mettersi nella forma:

$$\mathcal{Z}_o = \frac{1}{(\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L) \left(1 + \frac{\mathcal{Y}_{ds}}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L} \right) + \mathcal{Y}_g \frac{1}{\frac{\mathcal{Y}_g}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{Y}_{gs}}{\mathcal{Y}_g}}} \left(1 + \frac{g_m}{\mathcal{Y}_g (1 + \frac{\mathcal{Y}_{gs}}{\mathcal{Y}_g})} \right)} \quad (\text{XVIII.72})$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{Y}_{ds}}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L} &= j\omega \frac{C_{ds}}{(\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L)} \approx \frac{j\omega}{2.8 \cdot 10^9} \\ \frac{\mathcal{Y}_{gs}}{\mathcal{Y}_g} &= j\omega C_{gs} r_g \approx \frac{j\omega}{5 \cdot 10^7} \\ \frac{\mathcal{Y}_{gd}}{\mathcal{Y}_g} &\approx \frac{j\omega}{5 \cdot 10^7} \end{aligned}$$

si vede che per frequenze $f < 10^7$ Hz:

$$\mathcal{Z}_o \approx \mathcal{Z}_{o,DC} = \frac{1}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L} \quad (\text{XVIII.73})$$

vale a dire l'impedenza \mathcal{Z}_o è determinata dal parallelo di R_L con r_d (nel nostro caso $\mathcal{Z}_{o,DC} \approx 1.8 \text{ k}\Omega$). All'aumentare della frequenza, \mathcal{Z}_o diminuisce fino a tendere a zero col seguente andamento:

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_o = \frac{1}{\mathcal{Y}_{ds} + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_{gs}}}} \quad (\text{XVIII.74})$$

cioè al parallelo di C_{ds} con la serie di C_{gd} con C_{gs} .

Concludendo, l'amplificatore ora studiato può essere rappresentato col suo schema equivalente in termine di Thévenin, con riferimento ai suoi terminali di ingresso G e di uscita D (Fig.29):

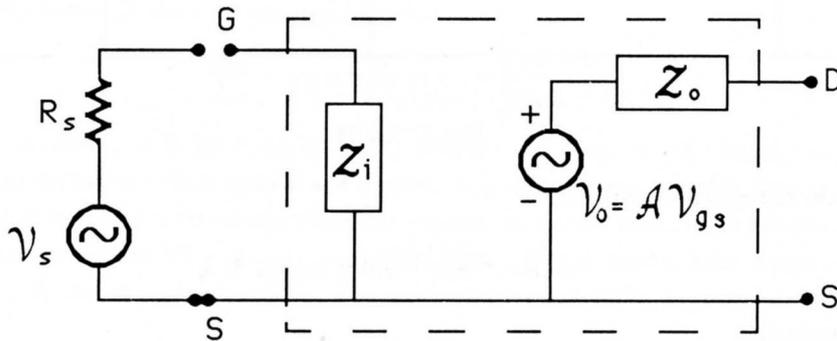


Fig.XVIII.29

dove \mathcal{A} è definito dalla (58), Z_i dalla (63) e Z_o dalla (72). L'equivalenza di questo circuito con l'amplificatore a Fet a Source comune è rigorosa solo se i segnali sono sufficientemente piccoli; si ricordi comunque che questa ultima equivalenza non aggiunge nulla allo schema circuitale equivalente introdotto nel §5 e perfezionato all'inizio di questo paragrafo; infatti si tratta solamente di una schematizzazione in termini di equivalente di Thévenin della rete lineare precedentemente studiata.

9.— Un'altra applicazione del Fet: un generatore di corrente

Ricordiamo che un generatore ideale di corrente è un dispositivo in grado di erogare una corrente costante nel ramo fra i suoi terminali, indipendentemente dal valore e dal tipo di impedenza inserita. In pratica si riescono a realizzare generatori (quasi) ideali di corrente, almeno fintanto che la ddp fra i due terminali si mantiene entro un definito campo di valori. Vediamo un esempio di generatore di corrente (Fig.30).

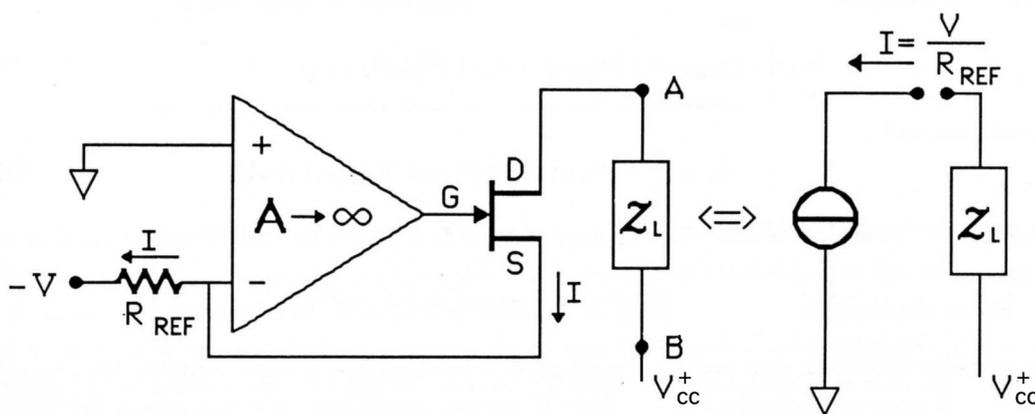


Fig.XVIII.30

Sulla falsariga del solito ragionamento semplificato (Cap. XV, §3), poiché la ddp fra ingresso $-$ e ingresso $+$ deve essere nulla, avremo che sulla resistenza R_{REF} dovrà passare una corrente I tale da mantenere a 0 Volt la tensione all'ingresso $-$, ovvero $IR_{REF} = V$. D'altronde tale corrente dovrà essere la medesima che esce dal Source del Fet e conseguentemente la stessa che entra nel Drain, a meno della piccolissima corrente di saturazione inversa del Gate. Il sistema pertanto, rispetto a qualunque impedenza collegata fra i terminali A e B, è un generatore ideale di corrente I .

Se vogliamo convincerci ancor più direttamente che il sistema funziona davvero da generatore di corrente dobbiamo verificare che la resistenza di uscita del generatore è infinita; pertanto, sostituito il nostro sistema con la sua rete lineare equivalente e applicato un generatore di ddp fra i due terminali di uscita del generatore (A e B) dopo aver cortocircuitato i generatori indipendenti dalla rete lineare, dovremo ottenere un valore nullo per la corrente erogata dal generatore. Procediamo pertanto come detto sopra: la rete lineare equivalente al nostro circuito è riportata nella Fig.31. Le ddp e le correnti sono funzioni del tempo; ammettiamo però che esse varino abbastanza lentamente così da poter ignorare nella trattazione che segue le parti reattive delle impedenze.

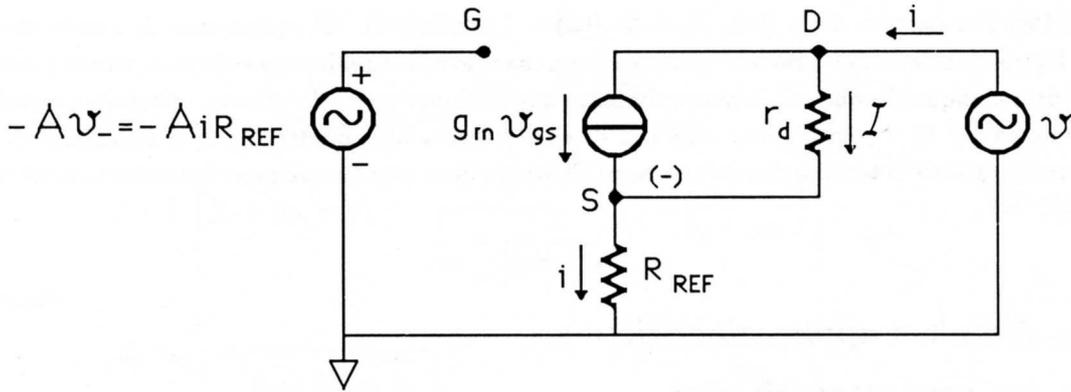


Fig.XVIII.31

Essendo:

$$v_{gs} = v_G - v_S = -AiR_{REF} - iR_{REF} = -iR_{REF}(1 + A) \quad (\text{XVIII.75})$$

la legge dei nodi applicata in D dà:

$$I = i - g_m v_{gs} = i[1 + g_m R_{REF}(1 + A)] \quad (\text{XVIII.76})$$

e conseguentemente

$$v = Ir_d + iR_{REF} = i \{R_{REF} + r_d [1 + g_m R_{REF}(1 + A)]\} \quad (\text{XVIII.77})$$

Otteniamo così :

$$R_o = \frac{v}{i} = R_{REF} + r_d[1 + g_m R_{REF}(1 + A)] \quad (\text{XVIII.78})$$

che per valori realistici ($R_{REF} = 1 \text{ k}\Omega$, $g_m = 5 \text{ mA/V}$, $A = 10^6$, $r_d = 50 \text{ k}\Omega$) dà

$$R_o \approx r_d g_m R_{REF} A \approx 2.5 \cdot 10^{11} \Omega$$

che in molte situazioni può proprio considerarsi a tutti gli effetti come infinita. Quanto alle limitazioni che si possono incontrare nell'utilizzo di questo generatore, esse dipendono dal fatto che se il modulo dell'impedenza su cui è chiuso il generatore è troppo elevato, la ddp fra Drain e Source (cioè massa) diventa così elevata che il Fet può finire in breakdown; viceversa per impedenze Z_L troppo piccole la ddp V_{DS} risulta così limitata che si finisce in una zona delle caratteristiche del transistor a effetto di campo dove tutta l'analisi precedente non è più applicabile, ovvero nella zona dove il Fet più che come un pentodo si comporta come una resistenza variabile.

Infine, sempre nell'ipotesi di mantenere la ddp in uscita entro valori consentiti, si può anche ottenere una regolazione della corrente del generatore, variando R_{REF} . Otteniamo così un generatore di corrente pressoché ideale, con la possibilità di variare anche il valore della corrente erogata.

La stabilità e precisione del valore di I dipendono, supponendo che il guadagno A sia così elevato da poter considerare una ottima schematizzazione quella di ammettere $v_- = 0$, dalla stabilità e precisione di R_{REF} e di V .

Infine, supponendo di variare V , mantenendo R_{REF} costante, abbiamo in uscita una corrente $I(t) = \frac{V(t)}{R_{REF}}$ variabile nel tempo, erogata da un generatore che presenta impedenza di uscita infinita; tutto questo nell'ipotesi che le variazioni di $V(t)$ in funzione del tempo siano abbastanza lente rispetto all'inverso delle frequenze per cui la corretta descrizione del Fet può farsi solo introducendo le capacità interelettrodiche e non secondo il semplice modello adottato nella Fig.31.

10.— Altri tipi di transistori a effetto di campo

Nelle attuali tecnologie costruttive dei circuiti integrati rivestono un ruolo particolarmente importante alcuni tipi di transistori a effetto di campo, i cosiddetti Mosfet (Metal oxide semiconductor Fet). Essi si distinguono in “enhancement” e in “depletion” Mosfet. In entrambi i casi essi sono caratterizzati dal fatto che la conduttività di una porzione di semiconduttore compresa fra gli elettrodi di Source e Drain è controllata, come nel Fet precedentemente descritto, dalla presenza di un campo elettrico. Ciò che li distingue dal Fet è il fatto che Gate e canale non costituiscono più una giunzione contropolarizzata: il Gate è questa volta un elettrodo conduttore separato dal canale da un sottile ($\approx .1\mu m$) spessore di biossido di Silicio (S_iO_2) avente ottime proprietà isolanti.

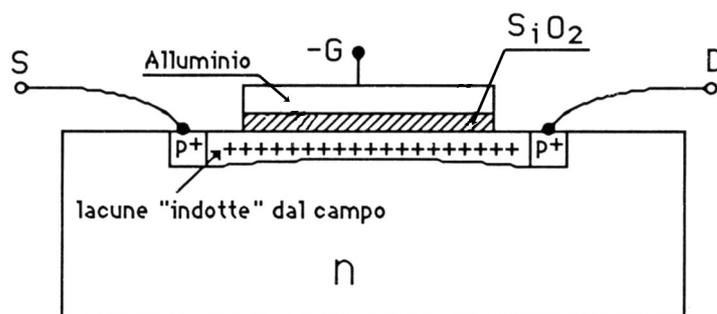


Fig.XVIII.32

Senza entrare minimamente in dettagli, ci limitiamo a dire che in un Mosfet canale-p ad enhancement (Fig.32) la polarizzazione negativa del Gate rispetto al materiale del canale induce la presenza di lacune nel tratto di canale prossimo al Gate, in quantità molto maggiori di quello che si avrebbe in assenza di polarizzazione. Il fenomeno è assai complesso e completamente differente al meccanismo caratteristico del JFet che noi abbiamo studiato. In particolare si noti che il canale p si forma *dinamicamente* partendo da un preesistente materiale n e che i portatori che assicurano la conduzione sono dei minoritari provenienti dalle zone p^+ vicine (Source e Drain sono distanti solo pochi μm). Simile a quello del JFet è viceversa il meccanismo che regola il funzionamento del Mosfet a “depletion”; in questo caso un canale è effettivamente presente del tipo “giusto” di drogaggio (n o p) e il campo elettrico applicato al Gate (isolato da uno strato di S_iO_2) svuota più o meno il canale dei portatori. Le caratteristiche e l’utilizzo dei Mosfet sono estremamente simili a quelle dei Fet; la principale differenza è che la resistenza di ingresso fra Gate e Source (e Drain) è ancora più elevata che nel JFet a causa dello strato isolante di biossido di Silicio e può arrivare fino a $10^{14} \div 10^{15}\Omega$. Riportiamo qui sotto i valori tipici dei parametri del circuito equivalente per piccoli segnali (esattamente identico a quello del Fet) per i Mosfet:

$$\begin{aligned}
 g_m &\approx 0.1 \div 20 \text{ mA/V} & r_d &\approx 1 \div 50 \text{ k}\Omega \\
 C_{ds} &\approx 0.1 \div 1 \text{ pF} & C_{gs}, C_{gd} &\approx 1 \div 10 \text{ pF} \\
 r_{gs} &> 10^{10}\Omega & r_{gd} &> 10^{14}\Omega
 \end{aligned}$$

11.— Misura delle caratteristiche a Source comune

Il circuito di Fig.33 si presta a misurare le caratteristiche a Source comune di un transistoro ad effetto di campo (nell'esempio canale-n).

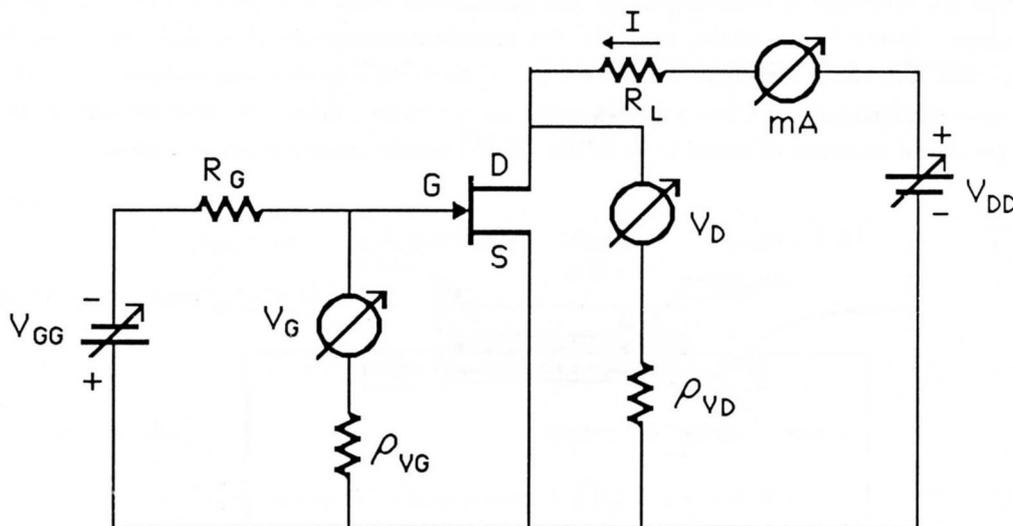


Fig.XVIII.33

Mediante V_{GG} si stabilisce la tensione V_{GS} fra Gate e Source che viene misurata dal voltmetro V_G . La resistenza R_G serve solo a proteggere il diodo Gate-Source qualora si voglia provare ad applicare una tensione leggermente positiva fra Gate e Source e inavvertitamente si superi il valore V_B . Stabilita la ddp V_{GS} , variando V_{DD} si percorre la curva $I_D = I_D(V_{GS}, V_{DS})$; V_{DS} è misurata da un voltmetro che possibilmente abbia una ρ_{VD} la più elevata possibile così che I approssimi al meglio I_D . Si deve aver cura di limitare la dissipazione sul Fet ($= I_D \cdot V_{DS}$) a quanto prescritto dal costruttore; anzi è opportuno mantenersi sufficientemente di sotto di tale valore altrimenti accade che una data curva a $V_{GS} = cost$ non è caratterizzata da una sola temperatura, bensì corrisponde a temperature crescenti all'aumentare di V_{DS} ; in questo modo cambiano anche i parametri r_d e g_m , cioè non sono più univocamente definiti e le curve risultano distorte. Supponendo di aver sufficientemente limitato l'escursione termica del transistoro, tenendo bassa la dissipazione su esso, è possibile con il metodo descritto nel §5, estrarre dalle curve g_m e r_d e quindi μ per vari punti di lavoro. Se si vuole misurare la corrente fra Gate e canale (cioè la debole corrente di saturazione inversa, il metodo ora descritto non è adatto e conviene piuttosto usare uno dei circuiti descritti nel caso dei diodi, usando il Fet come un diodo (fra Gate e Source o Gate e Drain).

Il problema sopradetto della non unicità della temperatura fra le varie curve e all'interno di una singola curva, è in pratica evitato usando un caratteristigrafo, uno strumento che spazzola vari valori di V_{GS} e per ognuno di questi invia una tensione fra Drain e Source che cresce linearmente col tempo: lo strumento presenta sull'asse x di uno schermo oscillografico tale ddp e sull'asse y un segnale proporzionale a I_D . Poiché questo spazzolamento delle curve può essere fatto in tempo assai breve rispetto a quelli caratteristici del riscaldamento e raffreddamento del transistoro, le curve

presentate sullo schermo corrispondono alla stessa temperatura media e non soffrono di deformazioni.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Il Cap.10 di **MI 72** presenta l'argomento in maniera soddisfacente, principalmente per quanto riguarda le caratteristiche del Fet come elemento circuitale. La discussione sulla fisica del dispositivo è abbastanza sintetica. La fisica del Fet è invece trattata estesamente su:

Sze: "Fisica dei dispositivi a semiconduttore"

Tamburini (1973) (Cap.7)

Sevin: "Field Effect Transistor"

Mc Graw-Hill (1965) (Cap.1)

L'articolo originale (e pionieristico) di

Shockley: "A unipolar Field Effect transistor"

P.I.R.E. (1952), **1365**

è assai utile per una comprensione dei fatti fisici fondamentali alla base del funzionamento del Fet, anche se non tutte le conclusioni sono applicabili ai Fet oggi in commercio, poiché essi sono realizzati in geometria profondamente diversa da quella esaminata da Shockley.

XIX

MISURA DI CAMPI MAGNETICI TRAMITE UNA SONDA A EFFETTO HALL

1.- La sonda ad effetto Hall

Consideriamo un nastro conduttore omogeneo, non ferromagnetico, di spessore t , larghezza w e pensiamolo per il momento di dimensione infinita lungo la direzione (x) secondo cui scorre la corrente I (Fig.1).

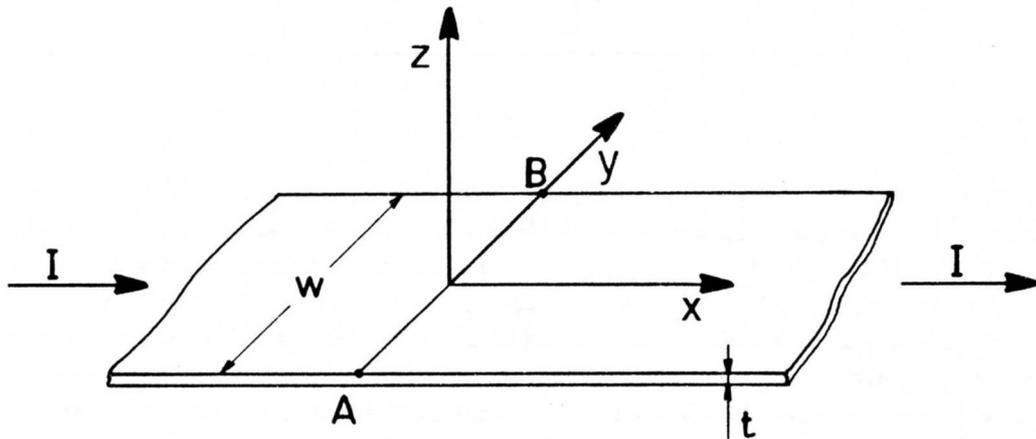


Fig.XIX.1

In assenza di campi magnetici esterni ed altri campi elettrici che non siano quelli responsabili della corrente I , l'omogeneità del nastro assicura che sezioni del conduttore parallele al piano zy siano superfici equipotenziali e pertanto punti come A e B sono allo stesso potenziale; la corrente I sarà data dal flusso del vettore $\vec{j} = j$ vers \vec{x} attraverso le superfici di area tw , vale a dire $I = jtw$. Se q è la carica del singolo portatore e N il numero dei portatori per unità di volume (non necessariamente si tratterà di elettroni, saranno per esempio lacune se si tratta di un semiconduttore p) e v la loro velocità di deriva avremo :

$$\vec{j} = qN\vec{v} \quad (\text{XIX.1})$$

e pertanto

$$I = qNvtw \quad (\text{XIX.2})$$

Supponiamo ora di applicare un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B \text{ vers } \vec{z}$, vale a dire un campo costante e diretto secondo l'asse z e di farlo in maniera brusca, all'istante $t = 0$. I portatori di carica saranno sottoposti alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{XIX.3}$$

che all'istante iniziale, essendo $\vec{v} = v \text{ vers } \vec{x}$, dà luogo ad una forza diretta secondo l'asse y . Il verso è quello dell'asse y negativo, indipendentemente dal segno della carica dei portatori; infatti se q è positivo, \vec{v} ha il segno di *vers* \vec{x} , mentre se q è negativo \vec{v} ha segno opposto. La presenza di un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B \text{ vers } \vec{z}$ ha come conseguenza lo spostamento dei portatori di carica verso la parete destra (volgendo le spalle alla "sorgente" della corrente) del nastro. Il processo continua fino a quando la carica in eccesso addensatasi su questa parete crea all'interno del conduttore un campo elettrico diretto come l'asse y che, sommato al campo della forza di Lorentz, dà risultante nulla lungo l'asse y ; quando si è raggiunta questa condizione di regime (in tempi brevissimi, dell'ordine del riassetamento della carica nei conduttori $\approx 10^{-18}s$) le linee di \vec{j} che si sono temporaneamente distorte, tornano ad essere identiche a come erano precedentemente all'istaurazione del campo magnetico. Ciò oltre a corrispondere a un fatto sperimentale, è anche soddisfacente dal punto di vista intuitivo: tuttavia la giustificazione rigorosa che questa è la effettiva situazione di regime è qui omessa. Notiamo che, mentre \vec{j} è, nelle due condizioni di regime, identico, la distribuzione del potenziale elettrico nel nastro è cambiata e le superfici equipotenziali non sono più piani paralleli al piano $z y$; il campo elettrico provocato dall'alterazione della distribuzione di carica dovuta alla forza di Lorentz vale (*campo di Hall*):

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{qN} \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{IB}{qNtw} \text{vers } \vec{y} \tag{XIX.4}$$

che, avendo assunto $\vec{j} = j \text{ vers } \vec{x}$ anche in presenza di \vec{B} , è un vettore costante diretto come l'asse y . Essendo tale vettore costante, esso dà luogo ad una ddp (*ddp di Hall*) fra due punti come A e B in Fig.1 pari a

$$V_H = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_H \cdot d\vec{y} = \frac{IB}{qNt} \tag{XIX.5}$$

L'insorgere di questa ddp costituisce proprio il cosiddetto *effetto Hall* dal nome del suo scopritore. Le linee equipotenziali formeranno quindi un angolo θ con la direzione dell'asse y . Guardando il nastro dall'alto, avremo la situazione riprodotta in Fig.2

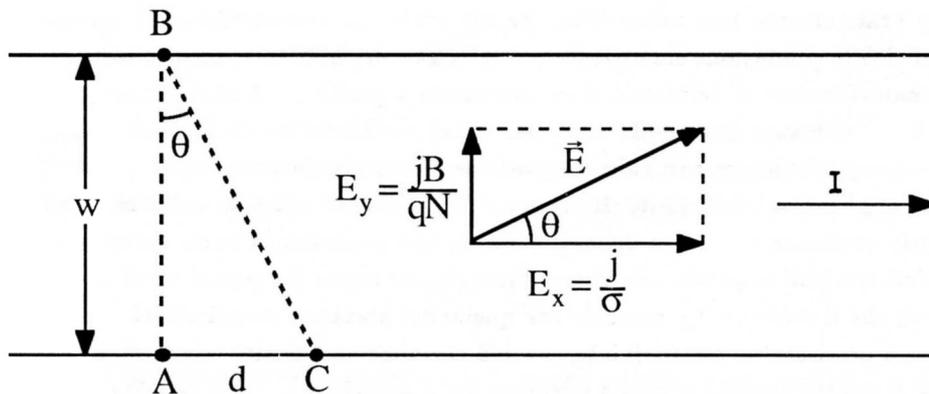


Fig.XIX.2

L'angolo θ si può ricavare direttamente dalla direzione del campo elettrico totale

$$\vec{E} = \rho j \text{ vers } \vec{x} + \frac{jB}{qN} \text{ vers } \vec{y} \quad (\text{XIX.6})$$

Si ottiene allora

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.7})$$

dove ρ è la resistività del conduttore, ovvero $\frac{1}{\sigma}$.

Alternativamente $\tan \theta$ si può calcolare dall'andamento delle superfici equipotenziali, osservando che $\tan \theta = \frac{d}{w}$. Il rapporto $\frac{d}{w}$ si ricava imponendo che il lavoro fatto dal campo elettrico da B a C passando da A pari a $(V_B - V_A) + (V_A - V_C)$, sia nullo. Per far ciò osserviamo che $(V_A - V_C)$ è dovuta alla caduta ohmica della corrente I

$$V_A - V_C = I \frac{\rho d}{tw} \quad (\text{XIX.8})$$

mentre

$$V_B - V_A = -V_H = -\frac{IB}{qNt} \quad (\text{XIX.9})$$

Pertanto

$$-\frac{IB}{qNt} + I \frac{\rho d}{tw} = 0 \quad (\text{XIX.10})$$

da cui segue

$$\frac{d}{w} = \tan \theta = \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.11})$$

Tornando alla ddp che si presenta fra le due facce laterali, ovvero la tensione di Hall data dalla (5), si nota che a parità di \vec{B} , I e t essa è tanto più elevata quanto più piccolo è qN . Il motivo di ciò va ricercato nel fatto che, fissata la geometria e la corrente, la velocità dei portatori è tanto più elevata (e conseguentemente la forza di Lorentz e quindi il campo di Hall) quanto minore è la densità dei portatori, a parità di q . Facciamo un esempio numerico: consideriamo prima una lastrina di rame di spessore 10^{-4} m in cui passi una corrente di 100 mA, in presenza di un campo di induzione magnetica $B = 1$ T; dai dati già introdotti nel Cap. I, §1 abbiamo:

$$(V_H)_{Cu} = 3.7 \cdot 10^{-8} V$$

ovvero una ddp praticamente non misurabile. Se ora viceversa consideriamo un semiconduttore drogato n, in cui cioè la conduzione sia assicurata dagli elettroni, abbiamo, ammettendo drogaggi di $10^{-7} - 10^{-8}$ donatori/atomo di semiconduttore intrinseco, a parità degli altri parametri, delle ddp dell'ordine del Volt e pertanto misurabili anche per valori assai inferiori di \vec{B} . Di fatto i dispositivi ad effetto Hall sono quasi sempre costituiti da piastrine di semiconduttore.

Quanto alle applicazioni dell'effetto Hall una delle principali consiste nella misura di campi magnetici, proprio mediante la misura della ddp V_H in una piastrina di semiconduttore (*sonda di Hall*). Inoltre l'effetto Hall si presta alla determinazione del segno dei portatori di carica: infatti dalla (5) si evince che il segno di V_H coincide con quello dei portatori maggioritari.

Veniamo ora a precisare un punto di interesse più che altro speculativo, riguardo alla situazione che si crea nella sbarretta quando si voglia misurare V_H o addirittura, come talvolta si fa, si voglia sfruttare l'effetto per fare un generatore di fem V_H . Rispetto al caso precedentemente descritto in cui non c'era collegamento fra due superfici laterali, ora dobbiamo considerare la presenza fra di esse di una resistenza R dovuta al collegamento esterno (per esempio la resistenza interna del

voltmetro). Di fatto una sonda di Hall reale è costituita (vedi Fig.3) da una lastrina semiconduttrice avente larghezza di qualche *mm*, spessore di almeno un ordine di grandezza inferiore, dotata di due contatti ohmici assai estesi per permettere l'invio e la raccolta della corrente di controllo *I* e di altri due contatti ohmici sulle pareti laterali, assai più limitati come superficie e il più possibile simmetrici.

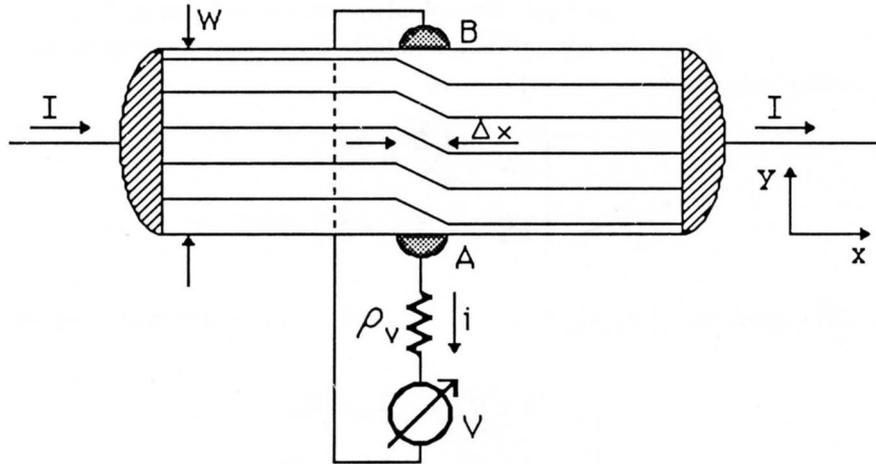


Fig.XIX.3

E' fra questi due contatti A e B che si collega lo strumento di misura per determinare l'entità della tensione di Hall, V_H . In figura sono anche disegnati approssimativamente i tubi di flusso del vettore \vec{j} nell'ipotesi della presenza di un campo di induzione magnetica \vec{B} ortogonale alla sonda (cioè uscente dal piano della pagina). Mentre lontano dai contatti A e B le linee di \vec{j} procedono parallele alla direzione *x* a causa della presenza di una distribuzione di carica sulle pareti laterali che crea il campo elettrico che annulla l'effetto della forza di Lorentz, in corrispondenza dei contatti A e B le linee di \vec{j} risultano distorte poiché i contatti ohmici in A e B consentono il passaggio di portatori di carica nel circuito esterno (il misuratore, che è supposto lontano dall'influenza del campo magnetico \vec{B}) e sulle pareti prossime a A e B si ha un minor accumulo di carica e quindi il campo elettrico possiede una ridotta componente trasversale*. Pertanto supponendo che la situazione all'interno della sonda sia quella riportata in Fig.3, consideriamo uno dei tubi di flusso in figura: all'interno del tratto Δx , come d'altronde in ogni porzione del conduttore, avremo la seguente situazione di forze sul portatore di carica (supposto positivo e con carica *q*) :

$$0 = q\vec{E}_e + q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}_d \quad (\text{XIX.12})$$

Tale condizione corrisponde all'annullarsi della risultante delle forze agenti sul portatore: \vec{E}_e rappresenta il campo elettrostatico, $q\vec{E}_d$ è la forza dissipativa che i portatori incontrano durante il loro moto e che supponiamo al solito viscosa, in accordo con la legge di Ohm:

$$\vec{E}_d = -\frac{\vec{v}}{\mu} = -\rho\vec{j} \quad (\text{XIX.13})$$

* nella Fig.3 la brusca transizione fra un andamento e l'altro delle linee di \vec{j} e il fatto che esso avvenga per lo stesso valore di *x*, indipendentemente dalla coordinata *y*, sono ovviamente delle approssimazioni, tanto più grossolane quanto più grande è la distanza *w* fra i due contatti A e B rispetto alla dimensione Δx di essi.

dove μ rappresenta la mobilità e ρ la resistività del materiale. Conseguentemente la (12) può anche scriversi :

$$\vec{E}_e + \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{qN} - \rho \vec{j} = 0 \quad (\text{XIX.14})$$

La soluzione autoconsistente per la corrente non è proprio banale a trovarsi, non fosse altro perché questa volta la forza di Lorentz non è più diretta solamente lungo l'asse y ; infatti v ha anche una componente lungo l'asse y negativo che provoca una forza che si oppone al moto delle cariche nella direzione x . Scritta in componenti, la (14) diventa :

$$\begin{cases} \rho j_x = \frac{j_y B}{qN} + E_{ex} \\ \rho j_y = -\frac{j_x B}{qN} + E_{ey} \end{cases} \quad (\text{XIX.15})$$

Ponendo $\xi = \frac{B}{q\rho N}$ dalle (15) si ricava:

$$\begin{cases} j_x \rho(1 + \xi^2) = \xi E_{ey} + E_{ex} \\ j_y \rho(1 + \xi^2) = -\xi E_{ex} + E_{ey} \end{cases} \quad (\text{XIX.16})$$

che può anche mettersi nella forma :

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}$$

dove $\hat{\sigma}$ è il tensore :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\rho(1 + \xi^2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ -\xi & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{XIX.17})$$

Non entreremo in ulteriori dettagli che porterebbero troppo lontano: sia sufficiente aver fatto vedere che nonostante l'omogeneità del mezzo, la conducibilità è descrivibile come un tensore a causa dell'anisotropia introdotta da \vec{B} .

Osserviamo che nel caso ora esaminato in cui sia inserito uno strumento di misura con resistenza di ingresso finita, supponendo di mantenere costante la corrente (ovvero il flusso di j_x attraverso una superficie sufficientemente lontana dai contatti A e B) il percorso effettivo della corrente è aumentato e conseguentemente è aumentata la resistenza complessiva incontrata da I ; all'aumento di tale resistenza contribuisce oltre l'effetto puramente geometrico della distorsione delle linee di \vec{j} , anche la presenza del termine $(1 + \xi^2)$, riconducibile alla forza controlettromotrice provocata dall'interazione con il campo \vec{B} della componente del vettore densità di corrente lungo y .

Una domanda che è ragionevole porsi è la seguente : è possibile schematizzare i due terminali A e B come un generatore equivalente di Thévenin e se sì, quale è il valore della resistenza interna di tale generatore ?

La risposta alla prima parte della domanda è solo parzialmente affermativa, nel senso che anche sperimentalmente si trova che non è possibile definire una resistenza interna R_{Th} rigorosamente costante, ma che essa piuttosto dipende dalla corrente i erogata sul circuito esterno: tuttavia, almeno finché la resistenza esterna ρ_v è dell'ordine o più grande di R_{Th} si verifica che l'approssimazione di considerare R_{Th} e \mathcal{E}_{Th} costanti è completamente soddisfacente. Possiamo anche dare una valutazione molto grossolana della resistenza R_{Th} ricorrendo alla solita definizione operativa:

$$R_{Th} = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{i_{cc}} \quad (\text{XIX.18})$$

dove i_{cc} rappresenta la corrente di cortocircuito, cioè con $\rho_v = 0$. Se ρ_v è uguale a zero, ciò significa che i terminali A e B sono equipotenziali e pertanto nell'ambito della solita approssimazione un po' grossolana corrispondente alla (12), (14), (15) e (16) (e quindi al disegno della sonda riportato nella Fig.3) possiamo dire che $E_{ey} = 0$; conseguentemente dalle (16) si ricava:

$$j_{y_{cc}} = -j_x \xi = -j_x \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.19})$$

Essendo t lo spessore della sonda avremo (vedi Fig.3)

$$i_{cc} = -j_{y_{cc}} t \Delta x = j_x \frac{B}{qN\rho} t \Delta x \approx \frac{I}{w} \Delta x \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.20})$$

dove nell'ultimo passaggio si è ricorso al fatto che $I \approx j_x t w$. Tenendo presente la (5) si ha

$$\mathcal{E}_{Th} = \frac{IB}{qNt} \quad (\text{XIX.21})$$

e quindi

$$R_{Th} \approx \frac{\rho w}{t \Delta x} \quad (\text{XIX.22})$$

ovvero la resistenza della striscia di conduttore lunga w e di sezione $t \cdot \Delta x$. Questo risultato, soddisfacente dal punto di vista intuitivo, corrisponde assai bene a quello che si osserva sperimentalmente. Se la sonda viene adoperata per la misura di campi magnetici e non come generatore, allora è facile ricorrere a strumenti con resistenza di ingresso ρ_v sufficientemente elevata in modo da poter considerare la sonda come un generatore ideale di fem pari a \mathcal{E}_{Th} , senza curarsi dei problemi associati a R_{Th} e soprattutto ad una sua non perfetta indipendenza dalla corrente erogata.

2.— Taratura di una sonda di Hall

La tensione di offset

Nella nostra schematizzazione abbiamo supposto che i terminali di misura (A e B) siano disposti simmetricamente, in modo cioè che la ddp presente fra essi sia nulla qualora sia nulla la componente di \vec{B} ortogonale al piano della sonda (in seguito indicata con B_z). In pratica invece, disponendo di una sonda di Hall, la dipendenza della tensione V_u fra i terminali da B_z , è del tipo:

$$V_u = kB_z + V_{off} \quad (\text{XIX.23})$$

dove k , con buona approssimazione, è una costante (a parità di temperatura e di I) e V_{off} , detta *tensione di offset*, misura la ddp presente ai terminali per $B_z = 0$.

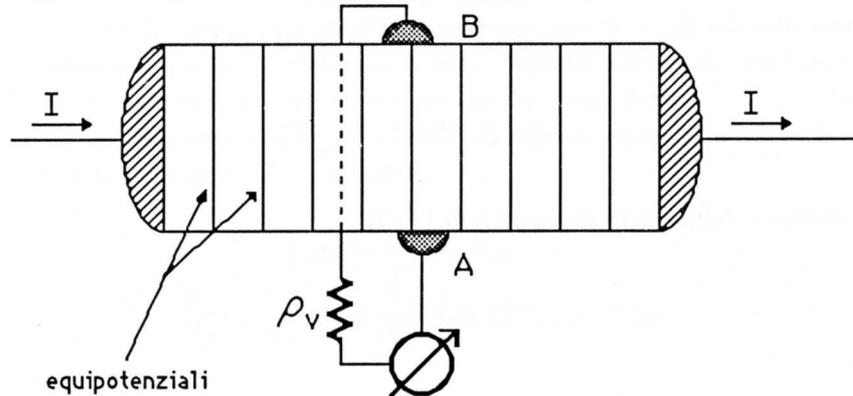


Fig.XIX.4

L'origine di V_{off} va ricercata principalmente nella non perfetta simmetria dei due contatti: infatti se essi non sono perfettamente simmetrici rispetto ai contatti ohmici per la corrente I , risentiranno, in assenza di campo magnetico, della ddp provocata dalla diversa caduta ohmica prodotta da I (vedi Fig.4, dove l'effetto è stato fortemente esaltato):

$$V_{off} = I\Delta R \quad (\text{XIX.24})$$

dove ΔR rappresenta la resistenza del materiale (in genere semiconduttore) compreso fra le due superfici equipotenziali passanti per i terminali A e B.

La taratura di una sonda di Hall consiste pertanto nella determinazione della costante k (eventualmente per vari valori della corrente controllo I) e di V_{off} .

La determinazione di V_{off} è - almeno in linea di principio - più semplice della determinazione di k , poiché richiede di misurare solo V_u con $\vec{B} = 0$ (in realtà basterebbe $B_z = 0$); in pratica il problema è proprio quello di essere sicuri della condizione di annullamento di B_z , ovvero del fatto che B_z sia molto minore del valore che successivamente vogliamo misurare. Pertanto occorre innanzitutto allontanare dalle vicinanze della sonda ogni sorgente di campo magnetico; se vogliamo tarare la sonda allo scopo di effettuare misure di campi di induzione magnetica di intensità molto piccola, anche il campo magnetico terrestre ($\approx 4 \cdot 10^{-5} T$) può essere di ostacolo nella misura di V_{off} e in questo caso occorre o ridurre il campo residuo attorno alla sonda mediante uno schermo magnetico oppure effettuare due misure di V_u una con la sonda in una determinata posizione (V_u^0) e un'altra con la sonda nella posizione che si ottiene ruotandola di π attorno ad un asse giacente nel piano della sonda medesima (V_u^π): avremo allora, chiamando B_z^r la componente z del campo di induzione residuo:

$$\begin{cases} V_u^0 = kB_z^r + V_{off} \\ V_u^\pi = -kB_z^r + V_{off} \end{cases} \quad (\text{XIX.25})$$

e pertanto

$$V_{off} = \frac{V_u^0 + V_u^\pi}{2} \quad (\text{XIX.26})$$

Tenendo presente che il meccanismo che consente la rotazione della sonda non sarà perfetto, la (26) incontrerà alcune limitazioni qualora il gradiente del campo \vec{B}^r e le piccole non riproducibilità di

posizionamento nella rotazione $0 - \pi$ siano tali da portare a differenze nella componente di interesse B_z^r . Sarà quindi opportuno verificare che il campo \vec{B}^r (o almeno la sua componente lungo l'asse z) si mantenga sufficientemente costante in un ambito dell'ordine della riproducibilità di posizionamento della sonda. Quanto all'uso dello schermo magnetico, vi torneremo in un paragrafo successivo.

La determinazione di k che secondo la (5) è data da:

$$k = \frac{I}{qNt} \quad (\text{XIX.27})$$

con I corrente di controllo, q e N carica e densità dei portatori, t spessore della sonda, richiede la disponibilità di un campo di induzione di intensità nota; infatti mentre in linea di principio k è calcolabile in base alla (27), note che siano le quantità in essa contenute, in pratica le uniche di esse che possono essere conosciute con precisione sufficiente sono q ed I . Per ottenere dei campi di induzione noti, si può procedere o usando il campo prodotto da correnti in geometrie definite e note, per esempio una coppia di bobine di Helmholtz, oppure, disponendo di un campo di induzione comunque generato, misurandolo con una sonda di Felici che, come abbiamo visto nel Cap. VI, § 11, dà una misura assoluta del campo \vec{B} . Consideriamo il primo metodo: una coppia di bobine di Helmholtz è costituita da due bobine circolari di ugual raggio R disposte con gli assi coincidenti e a distanza pari ad R l'una dall'altra. Le due bobine sono collegate in serie e in modo che la corrente circoli in esse con lo stesso verso; detta i la corrente in esse (oppure ni se ogni bobina è costituita da n spire), il campo lungo l'asse nella zona centrale è stazionario (entro lo 0.5% su dimensioni dell'ordine di $R/2$) e pari a:

$$B_{BH} = \frac{\mu_0 i}{R(5/4)^{3/2}} \quad (\text{XIX.28})$$

In fase di misura il campo magnetico totale sulla sonda è dato dalla somma di \vec{B}_{BH} e di \vec{B}^r dove \vec{B}^r è il campo magnetico residuo (per esempio quello terrestre) non altrettanto ben noto, anche se presumibilmente assai più piccolo di \vec{B}_{BH} . Per evitare che questo contributo comprometta la qualità della taratura si può determinare k da due misure fatte in geometria identica, ma invertendo la corrente di eccitazione delle bobine, e mantenendola costante in valore assoluto, ovvero con \vec{B}_{BH} e $-\vec{B}_{BH}$. In questo modo, essendo

$$\begin{cases} V_u^I = k(\vec{B}_{BH} + \vec{B}^r) + V_{off} \\ V_u^{II} = k(-\vec{B}_{BH} + \vec{B}^r) + V_{off} \end{cases} \quad (\text{XIX.29})$$

otteniamo

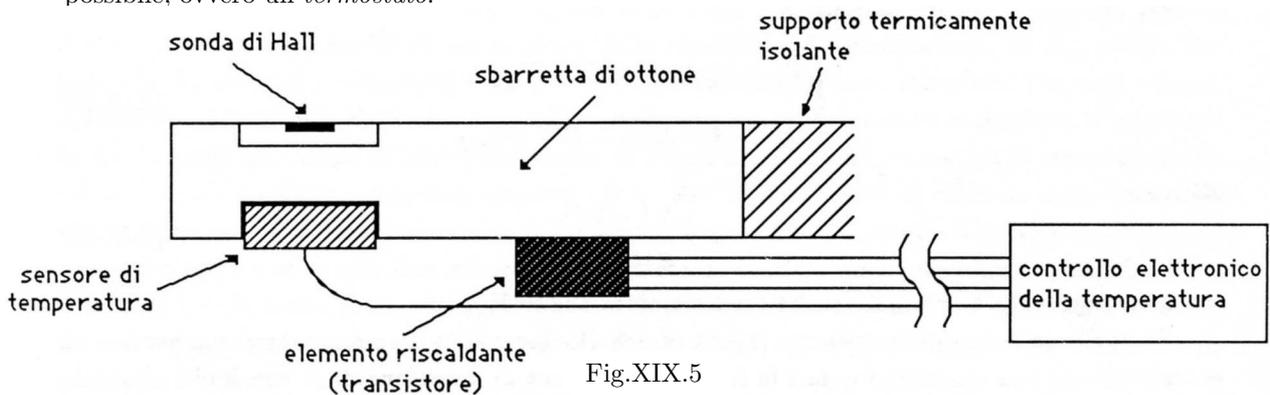
$$k = \frac{V_u^I - V_u^{II}}{2|\vec{B}_{BH}|} \quad (\text{XIX.30})$$

con il vantaggio che è eliminata anche l'indeterminazione su V_{off} .

Se viceversa si usa l'altro sistema (sonda di Felici) adoperando o un magnete permanente o un elettromagnete con espansioni polari in ferro, la procedura di inversione di \vec{B} non è più attuabile. Infatti, nel caso del magnete permanente la difficoltà nasce dal fatto che occorrerebbe invertire tutto il magnete; presumibilmente così si modifica anche il contributo del campo magnetico terrestre che risulta fortemente dipendente dalle masse di materiali ferromagnetici in prossimità della sonda; nel caso dell'elettromagnete non è possibile invertire il campo invertendo semplicemente la corrente perché, come vedremo, il fenomeno dell'isteresi può dar luogo a campi di induzione in valore assoluto diversi. Pertanto in questi casi occorre preventivamente valutare V_{off} e quindi k , misurando con la sonda di Felici il campo \vec{B} cui contribuisce sia il campo del magnete che quello terrestre; la presenza di quest'ultimo non arreca in questo caso alcun disturbo, purché la sonda di Felici e quella di Hall

siano collocate nella medesima posizione. Questo è proprio uno dei punti deboli del metodo; infatti mentre la sonda di Hall può essere un minuto rettangolo (tipicamente *qualche* mm^2) di spessore estremamente limitato ($\ll 1\text{ mm}$), la sonda di Felici difficilmente può essere così miniaturizzata, soprattutto se la si deve adoperare in queste applicazioni dove l'area della superficie deve essere conosciuta con la migliore precisione possibile. Il campo medio nelle due misure sarà lo stesso e quindi la taratura davvero effettuabile, solo se avremo un campo \vec{B} sufficientemente omogeneo su dimensioni dell'ordine della sonda di Felici, ovvero della sonda di maggiore superficie e spessore.

Andando a considerare più da vicino il problema della taratura della sonda si trova che k può considerarsi una costante in funzione di \vec{B} solo in una certa approssimazione (che il costruttore si preoccupa di comunicare), tanto migliore quanto più grande è la resistenza esterna del dispositivo che misura la tensione di Hall; cioè la non linearità va ricercata in effetti simili a quelli già accennati (fine del §1) che non consentono di considerare la sonda come un generatore reale di tensione, caratterizzato solo da una ddp \mathcal{E}_{Th} e una resistenza R_{Th} costanti; tuttavia, se misuriamo V_u con uno strumento avente resistenza interna molto elevata, questo effetto di non linearità è drasticamente ridotto. Quanto alla dipendenza di k e di V_{off} da I e dalla temperatura, la (24) e la (27) ci dicono che sia k che V_{off} dipendono linearmente da I , a parità di T ; almeno per quanto riguarda k conviene crescere il più possibile I ; a causa della resistività finita del materiale semiconduttore, esiste però una corrente massima oltre la quale la potenza dissipata sulla sonda supera i limiti consentiti, tipicamente $I_{max} = 150\text{ mA}$ con una sonda con R totale fra i terminali della corrente controllo I di circa 30Ω . Ovviamente aumentare la corrente, pur mantenendola al di sotto della massima consentita, porta ad un innalzamento della temperatura della sonda, se non si provvede indipendentemente a stabilizzarla. Questa procedura di stabilizzazione della temperatura è opportuna; infatti la dipendenza della densità dei portatori dalla temperatura sappiamo che è forte (almeno la parte che è dovuta alle rottura dei legami per effetto termico) e conseguentemente ogni sua variazione va limitata se si vuole mantenere k il più costante possibile; inoltre anche V_{off} presenta una marcata dipendenza dalla temperatura. Pertanto una sonda di Hall che debba fornire misure di buona accuratezza e stabilità deve essere montata su un supporto mantenuto a temperatura il più costante possibile, ovvero un *termostato*.



La stabilizzazione della temperatura di una sonda si fa generalmente ad una temperatura superiore a quella massima prevedibile per l'aria dell'ambiente: un elemento riscaldante (per esempio un transistore) è accoppiato termicamente alla sonda e ad un sensore di temperatura; quest'ultimo stabilisce se la temperatura misurata è maggiore o minore del valore prestabilito da mantenere costante e regola conseguentemente la potenza da erogare da parte dell'elemento riscaldante. In Fig.5 è mostrato lo schizzo di come è realizzato il supporto termostato della sonda in laboratorio. Le stabilità di temperatura del sistema non sono particolarmente spinte (1-2 decimi di $^{\circ}C$) ma

sufficienti a rendere consistenti fra di loro misure effettuate a temperature ambiente notevolmente diverse. La maggiore incertezza delle misure di campi magnetici piccoli deriva dalla forte dipendenza di V_{off} dalla temperatura e dalle instabilità intrinseche di V_{off} ; queste ultime pongono un limite praticamente invalicabile alla precisione delle misure. Nel paragrafo successivo esamineremo più quantitativamente il valore di questi parametri nel caso reale della sonda presente in laboratorio.

3.— Circuito per l'utilizzo della sonda di Hall nella misura di campi di induzione magnetica

Consideriamo una sonda di Hall dalle caratteristiche abbastanza tipiche

$$k \approx 1V/T \quad (\text{con } I \approx 150mA)$$

$$V_{off} \approx 2mV$$

$$R_S \approx R_H \approx 30\Omega$$

$$\frac{\Delta k}{k}(T) \approx -0.1\%/^{\circ}C$$

$$\frac{\Delta R_S}{R_S} \approx \frac{\Delta R_H}{R_H} \approx 0.1\%/^{\circ}C$$

R_S e R_H rappresentano la resistenza della sonda rispetto ai terminali di corrente e di misura rispettivamente.

Il circuito richiesto per utilizzare questa sonda come misuratore di campi di induzione magnetica è estremamente semplice (si esclude la parte di termostatazione) ed è riprodotto in Fig.6.

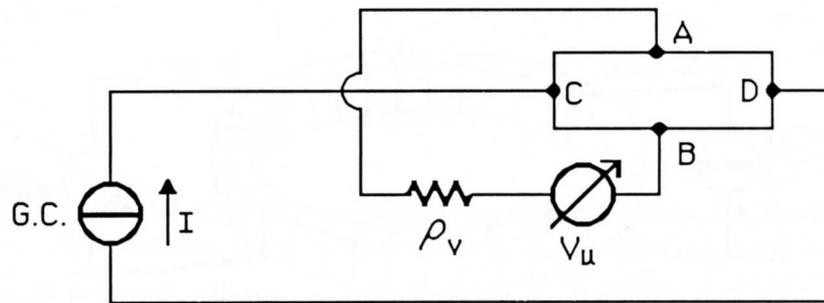


Fig.XIX.6

Il generatore di corrente G.C., che può essere realizzato come visto nel Cap.XVIII,§9, invia nella sonda la corrente di controllo I , di valore il più possibile costante; infatti, secondo la (27), ogni instabilità di I si traduce in una identica instabilità di k . Il misuratore della ddp V_u sarà con resistenza di ingresso la più elevata possibile perché, come abbiamo già visto, ciò migliora la linearità della risposta. Inoltre questo strumento dovrà essere assai sensibile, se si vuole utilizzare la sonda per la misura di campi magnetici di piccola intensità. Ad esempio il campo di induzione magnetica terrestre ha una intensità di circa $4 \cdot 10^{-5}T = 0.4 \text{ Gauss}$ e ciò corrisponde a $V_u \leq 40\mu V$, pertanto uno strumento che possa misurare fino a qualche μV si rende talvolta necessario. La piccolezza di

queste ddp rende inoltre necessarie le precauzioni tipiche di ogni misura di piccole tensioni: assenza di gradienti termici nel circuito di misura e di concatenamenti incontrollati con campi magnetici. Il valore della tensione di offset $V_{off} \approx 2mV$ può disturbare non poco la misura di campi magnetici di piccola intensità, non fosse altro perché costringe ad usare sullo strumento che misura V_u un fondo scala molto più alto del necessario; da questo punto di vista sarebbe conveniente disporre di un sistema che provvedesse a sottrarre automaticamente il contributo di V_{off} dalla tensione $(V_A - V_B)$ in modo tale da misurare direttamente $V_u - V_{off} = kB$ e riportare la misura entro fondo scala adeguati. Dispositivi di questo genere possono essere realizzati in vari modi, ma non verranno qui descritti*. Passiamo piuttosto a descrivere alcune delle misure eseguibili con tali sonde.

4.- Misura della curva di magnetizzazione di un elettromagnete

I materiali ferromagnetici sono caratterizzati da un elevato valore ($10^2 \div 10^5$) della permeabilità magnetica relativa:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \vec{H}} \quad (\text{XIX.31})$$

Tale valore, anche per un dato materiale, non è però costante e dipende sia dal valore di \vec{B} che dalla storia precedente del campione in uso. Come esemplificazione e allo scopo di richiamare alcuni fatti fondamentali, consideriamo un anello toroidale di ferro dolce sul quale siano avvolte N spire di filo di rame smaltato percorse da una corrente I , nonché altre n spire di un secondo circuito chiuso su un integratore di Miller, funzionante da flussometro, ovvero uno strumento che, preventivamente tarato, dà la misura del flusso di \vec{B} attraverso il campione (Fig.7); il secondo circuito è di fatto una Sonda di Felici.

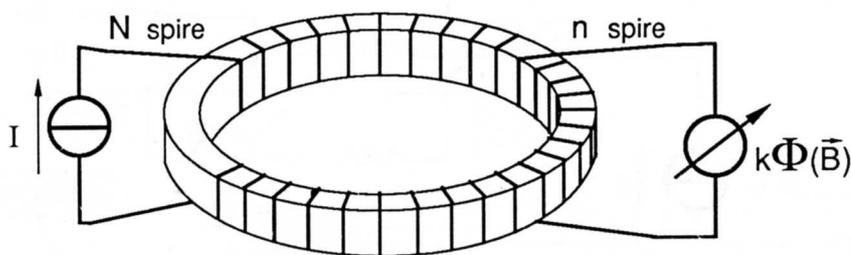


Fig.XIX.7

Se le dimensioni lineari della sezione del toro sono molto minori della lunghezza complessiva del medesimo e se le N spire sono avvolte in maniera uniforme allora il campo \vec{H} (detto anche *forza magnetizzante*) all'interno dell'avvolgimento è perpendicolare al piano delle spire, cioè diretto lungo il toro, e di modulo pari a:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (\text{XIX.32})$$

* allo scopo si presterebbero anche alcuni dei metodi già visti nel Cap.XV per la sottrazione della tensione di offset di ingresso degli amplificatori operazionali.

dove l è la lunghezza complessiva (media) del toro. Le unità di \vec{H} sono $A \cdot \text{spira}/m$. Se riportiamo in grafico $B(H)$, con B ottenuto dalla misura del flusso diviso per la sezione trasversale A del toroide e H ottenuto tramite la (32), non otteniamo una retta come dovrebbe essere se fosse $\vec{B} = \mu \vec{H}$; ciò significa che μ non può considerarsi costante, almeno non in tutto il campo considerato dei valori di \vec{H} . Guardiamo allora l'andamento $B(H)$, supponendo che per $I = 0$ il campione sia perfettamente smagnetizzato ($\vec{H} = 0, \vec{B} = 0$). Aumentiamo la corrente e contemporaneamente registriamo B ; sulla curva (Fig.8) riportiamo anche una freccia per indicare il verso di percorrenza della curva medesima, perché, come abbiamo già detto, la relazione fra \vec{B} e \vec{H} dipende anche da valori assunti precedentemente.

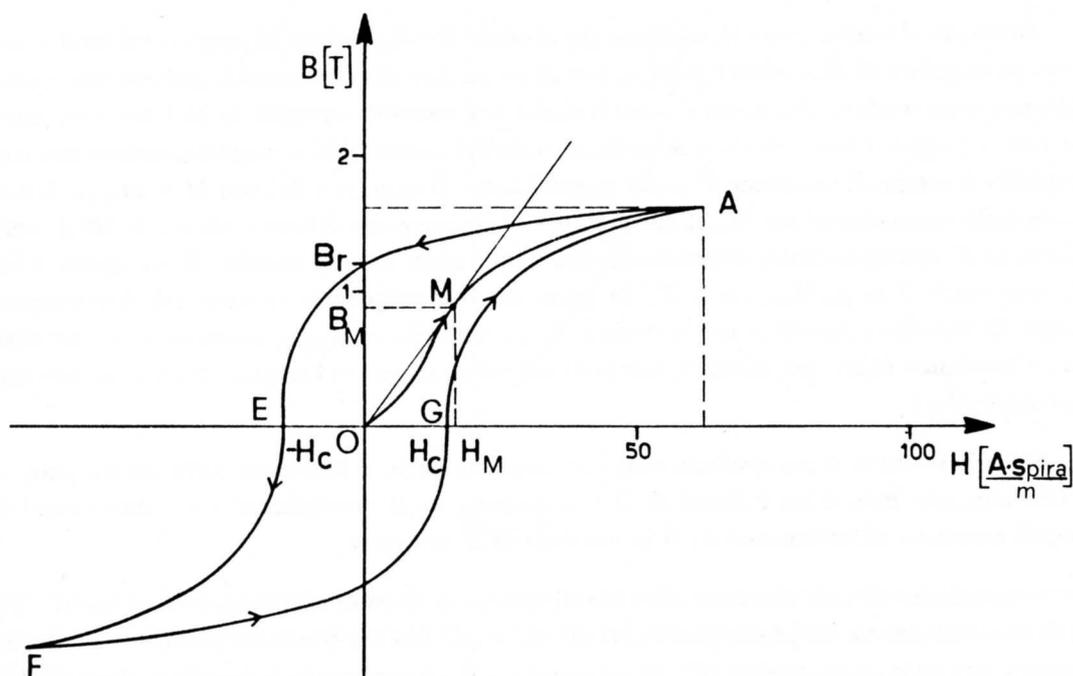


Fig.XIX.8

Ad esempio partendo dal punto O, viene inizialmente percorsa la curva OA, detta *curva di prima magnetizzazione*. Da essa si nota che μ , definito dalla (31), cresce partendo da $H = 0$ fino al punto M dove esso ha un massimo: nel caso riportato in figura $\mu_{max} = \frac{B_M}{H_M} \approx 5 \cdot 10^{-2} T \cdot m/A \cdot \text{spira}$ e pertanto $\mu_{r,max} = \frac{\mu_{max}}{\mu_0} \approx 4 \cdot 10^4$. Tale valore è senz'altro assai elevato e di fatto la curva corrisponde a Ferro puro, un ottimo materiale ferromagnetico. Raggiunto il punto A, diminuiamo la corrente e con essa il campo magnetico \vec{H} ; si osserva che la curva non ripassa per il tratto AO, bensì se ne discosta, a motivo di una sorta di *ritardo* del campo \vec{B} rispetto al campo \vec{H} . E' questo il fenomeno dell'*isteresi* (in greco, appunto, "ritardo"): esso è attribuibile al fatto che i domini magnetici del materiale si sono - per così dire - *fatti posto* nel materiale durante la curva di prima magnetizzazione e per muoversi di nuovo, sotto l'azione di \vec{H} , richiedono una sollecitazione finita. Una prima conseguenza di questo fatto è che anche per $\vec{H} = 0$, il campo di induzione dovuto alla magnetizzazione residua del materiale, mantiene un valore B_r detto *campo residuo*. Solo quando \vec{H} assume il valore $-H_c$ detto *forza coercitiva* (punto E), il campo \vec{B} è tornato a

zero*. Proseguendo la curva E-F-G-A il ciclo (detto *ciclo di isteresi*) si richiude e se proseguito entro gli stessi valori del campo \vec{H} si ripete identico indefinitamente. Il ciclo di isteresi rappresenta un fenomeno tipicamente irreversibile: la irreversibilità è associata al fatto che quando i domini magnetici “incastrati” nel materiale finalmente si ribaltano e assumono una nuova posizione di equilibrio, l’energia potenziale che essi avevano precedentemente al ribaltamento finisce in energia termica e non viene recuperata; corrispondentemente se facciamo percorrere ad un certo campione il proprio ciclo di isteresi ripetutamente, esso si scalda; si può dimostrare che l’energia perduta, ovvero trasformata in calore in ogni ciclo, è proporzionale all’area racchiusa dal ciclo di isteresi medesimo. Non sorprende quindi che per la costruzione di trasformatori e motori in alternata è di importanza primaria utilizzare materiali con area del ciclo di isteresi la più piccola possibile, allo scopo di ottimizzare le efficienze dei dispositivi.

Tornando al nostro esempio, notiamo che le curve $B-H$ tendono ad appiattirsi assai al di sopra di un certo valore di \vec{H} , cosicché $\mu \rightarrow \mu_0$ per $H \rightarrow \infty$. Questo fenomeno di *saturazione* è anch’esso intimamente associato alla natura granulare del fenomeno e corrisponde al fatto che, una volta che tutti i domini si sono orientati secondo \vec{H} , ulteriori aumenti della magnetizzazione non sono più possibili e il campo di induzione \vec{B} al più crescerà come $\vec{B} \approx \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ con $M = M_{max}$. Il massimo valore della magnetizzazione M_{max} che si riesce ad ottenere con il ferro è circa $1.6 \cdot 10^6 A \cdot spira/m$; quanto al B corrispondente, supponendo che, come quasi sempre accade, H sia molto minore di M , esso varrà $B \approx \mu_0 M_{max} \approx 2 T$. In presenza di avvolgimenti su materiali ferromagnetici, il campo di induzione massimo nel materiale \vec{B}_{max} uguaglia $\mu_0 \vec{M}_{max}$, soltanto se gli avvolgimenti hanno resistenza finita; per ottenere campi di induzione superiori bisogna ricorrere ad avvolgimenti superconduttori.

Nelle induttanze o nei trasformatori con nuclei in ferro, il fenomeno della saturazione, ovvero la relazione non lineare fra il flusso di \vec{B} e la corrente negli avvolgimenti per valori elevati di I , è proprio associato all’andamento di \vec{B} in funzione di \vec{H} ora visto.

Supponiamo di aver percorso del ciclo di isteresi e di voler raggiungere nuovamente il punto O, ovvero l’origine da un punto qualunque del ciclo; per fare ciò possiamo procedere in almeno due maniere, una delle quali consiste (Fig.9) nel riportare \vec{B} a 0 applicando la forza coercitiva ($-H_c$ o H_c) e successivamente procedere ancora *un poco* lungo la curva per riportarci poi nell’origine per $H = 0$. L’operazione di *procedere leggermente oltre* i punti E o G, dipende dal fatto che altrimenti mandando \vec{H} a zero dopo che ha assunto il valore H_c , \vec{B} non resta a zero; l’operazione di smagnetizzazione procede comunque per tentativi. Un metodo alternativo e sostanzialmente *automatico* è quello di far compiere al campione dei cicli di isteresi di ampiezza via via decrescente, per esempio inviando una corrente di eccitazione $I = I_0(t) \cos \omega t$ con $I_0(t)$ funzione lentamente (rispetto a ω^{-1}) decrescente di t e con $I_0(t \rightarrow \infty) = 0$. Si hanno così i cicli riportati in Fig.10 che alla fine portano alla smagnetizzazione completa del materiale. Se il campione da smagnetizzare è di piccole dimensioni (per esempio la testina di un registratore magnetico) invece di applicare una corrente alternata di ampiezza decrescente a un circuito avvolto attorno al campione, si può inserire il campione in un campo magnetico alternato prodotto da una sorgente che viene lentamente allontanata e produce così una forza magnetizzante \vec{H} alternata e decrescente.

* in un materiale adatto per essere utilizzato come magnete permanente H_c può avere anche valori $> 4 \cdot 10^4 A \cdot spira/m$ ovvero estremamente elevati.

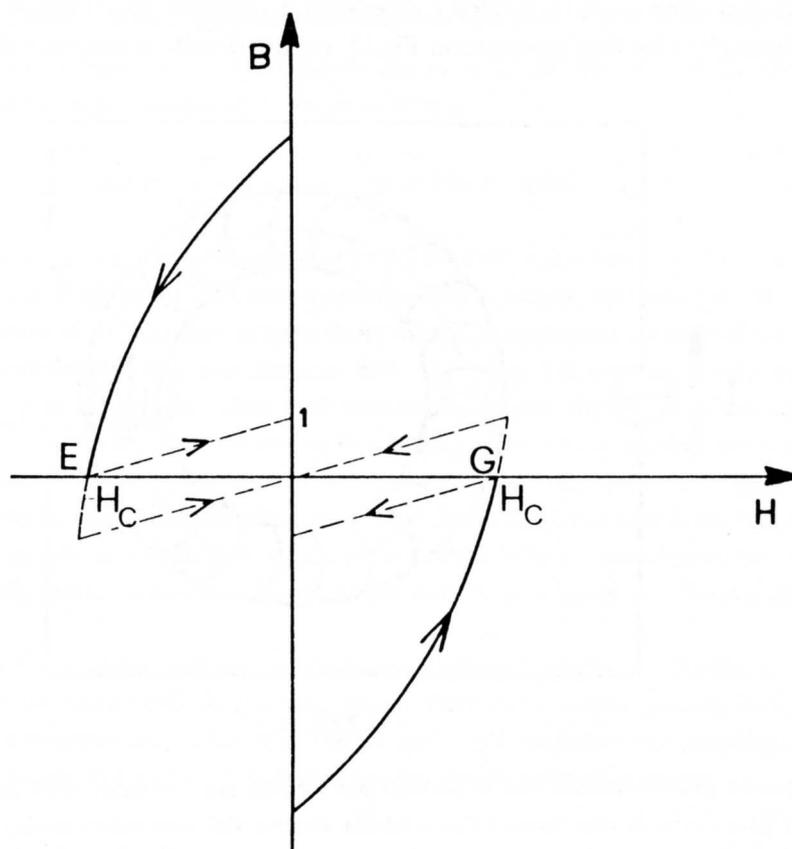


Fig.XIX.9

La sorgente del campo magnetizzante può essere un piccolo solenoide percorso da una corrente alternata (quella di rete va benissimo) avvolto su un nucleo cilindrico di ferro in modo da avere un notevole flusso disperso.

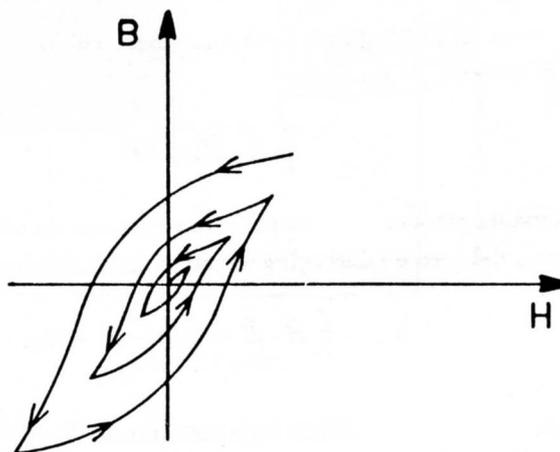


Fig.XIX.10

In quasi tutte le applicazioni, sia nel campo della tecnica che in quello della ricerca, interessa produrre campi magnetici, anche intensi, in aria o nel vuoto, comunque in regioni accessibili; pertanto

circuiti magnetici come quelli toroidali ora descritti non risultano adatti allo scopo. Vanno viceversa meglio configurazioni del tipo riportato in Fig.11, ovvero circuiti magnetici con *traferro*.

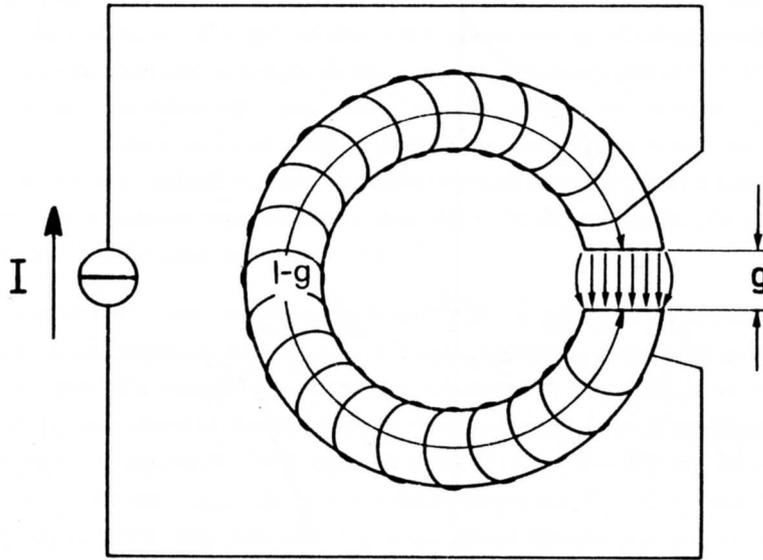


Fig.XIX.11

Supponendo per semplicità che la sezione del toroide sia costante, che l'avvolgimento sia sufficientemente fitto e che le dimensioni lineari della sezione del toro siano molto maggiori dello spessore g del traferro e molto minori della sua lunghezza l , allora \vec{B} , \vec{H}_i e \vec{M} sono paralleli fra di loro all'interno del materiale ferromagnetico e varrà:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}_i = \mu_r \mu_0 \vec{H}_i \quad (\text{XIX.33})$$

Nel traferro, trascurando l'effetto di campo disperso ai bordi, \vec{B} è praticamente lo stesso che dentro il ferro ($\text{div } \vec{B} = 0$) e pertanto $\vec{H}_t = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ sarà molto maggiore di \vec{H}_i , essendo $\mu = \mu_r \mu_0 \gg \mu_0$. D'altronde la circuitazione di \vec{H} lungo un cammino chiuso che percorra tutto il toro una volta sola deve valere, secondo il *teorema di Ampère*:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (\text{XIX.34})$$

dove N sono le spire avvolte omogeneamente sul toro e percorse da una corrente I (data la geometria, H_i è costante all'interno del toro e i dettagli geometrici del cammino sono inessenziali); avremo così

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i(l - g) + H_t g \quad (\text{XIX.35})$$

essendo l la lunghezza media del toro. D'altronde sostituendo $\vec{H}_t = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \mu_r \vec{H}_i$ nella (35), otteniamo

$$NI = H_i[(l - g) + \mu_r g] \quad (\text{XIX.36})$$

La relazione (36), insieme con la conoscenza della curva $B - H$ del ferro usato (Fig.8), ci consente di determinare la corrente e il numero di spire necessarie per avere un certo campo (medio) B (e

$H_t = \frac{B}{\mu_0}$) nel traferro. Ad esempio supponiamo di volere un campo $B = 10^{-1} T$ in un traferro spesso 5 mm , con un toroide di lunghezza 20 cm , sapendo che $\mu_r = 5 \cdot 10^3$ per $B = 0.1 T$ (ricavato cioè dalla curva $B - H$ del materiale adoperato). Avremo allora

$$NI = \frac{B}{\mu_r \mu_0} (l - g) + \frac{B}{\mu_0} g \approx 400 \text{ A} \cdot \text{spira} \quad (\text{XIX.37})$$

ovvero occorre, ad esempio, un avvolgimento costituito da 1000 spire percorse da una corrente di 0.4 A . La presenza del traferro fa innalzare notevolmente il valore del prodotto NI necessario per avere un certo valore di B , rispetto al caso di un circuito magnetico senza traferro: in questo caso infatti avremmo avuto solo il primo termine della (37), con l al posto di $l - g$, ed avremmo così ottenuto $NI \approx 3.2 \text{ A} \cdot \text{spira}$, un valore cioè estremamente più piccolo. Nell'esempio trattato la sezione del circuito magnetico non è stata esplicitamente considerata poiché, essendo costante, non influenza il risultato. Tuttavia teniamo presente che se vogliamo ottenere lo stesso campo \vec{B} praticamente omogeneo su una superficie più vasta, ciò richiede di aumentare la sezione del circuito magnetico ovunque e quindi necessariamente la superficie della bobina: conseguentemente aumenta la lunghezza dell'avvolgimento, e con essa la resistenza del filo e la potenza richiesta al generatore di corrente.

Le configurazioni che si realizzano nei casi reali assomigliano a quella ora descritta, ma di fatto esistono alcune differenze sostanziali che, quanto meno, richiedono alcune precisazioni: con riferimento alla Fig.12, che rappresenta un elettromagnete molto più realistico del precedente, notiamo innanzitutto che l'avvolgimento è confinato in una sezione del circuito magnetico;

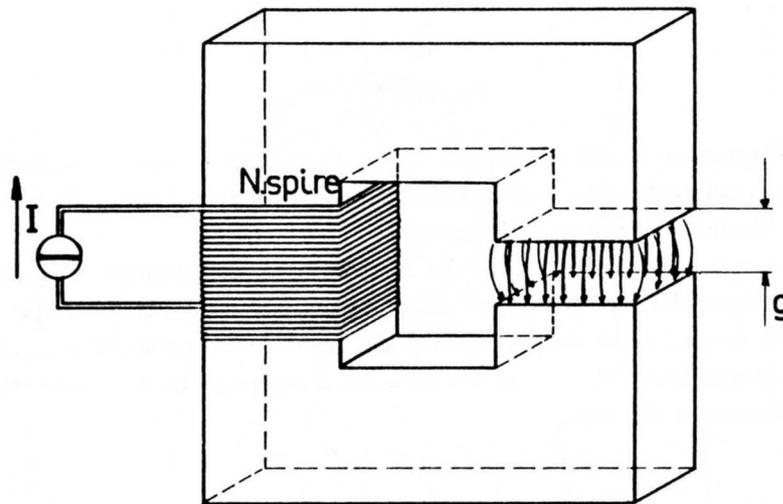


Fig.XIX.12

pertanto mentre la circuitazione $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ resta pari a NI , molto meno evidente è che \vec{H}_i resti costante all'interno del ferro. Di fatto nasce una distribuzione superficiale di cariche di magnetizzazione, dovute al piccolo campo disperso, che oltre a "guidare" le linee di \vec{H}_i dentro il materiale ferromagnetico tende a rendere \vec{H}_i costante in modulo; si trova così che la schematizzazione adottata di un campo \vec{H}_i costante in modulo entro il circuito e diretto sempre lungo di esso è applicabile anche in questo caso. Se lo spessore del traferro è anche questa volta sufficientemente piccolo rispetto alle

dimensioni lineari delle superfici affacciate, il campo disperso può trascurarsi e si possono applicare le considerazioni precedentemente svolte circa la costanza di \vec{B} nel passare dal ferro al traferro. Se lo spessore del traferro g non è piccolo rispetto alle dimensioni lineari delle superfici, la presenza di flusso disperso ai bordi del traferro fa cadere l'ipotesi di costanza di \vec{B} . Una soluzione esatta per l'andamento di \vec{B} (o \vec{H}) nel traferro risulta in genere complicata da ottenere: qualitativamente si trova che il campo \vec{B} nel piano mediano del traferro e sufficientemente lontano dai bordi risulta costante e ortogonale alle superfici del traferro (sempre che esse siano piane e parallele), mentre avvicinandosi ai bordi, ma mantenendosi nel piano mediano del traferro, il campo decresce monotonicamente. Se poi consideriamo il campo \vec{B} su un piano prossimo ad una delle *espansioni polari* (così si chiamano le superfici terminali del materiale ferromagnetico), troviamo che all'interno del traferro la componente ortogonale alle espansioni polari B_z è costante e praticamente pari al valore che ha nel piano mediano, ma avvicinandosi ai bordi essa aumenta fino a raggiungere un massimo (in corrispondenza dello spigolo) e poi diminuisce monotonicamente (Fig.13).

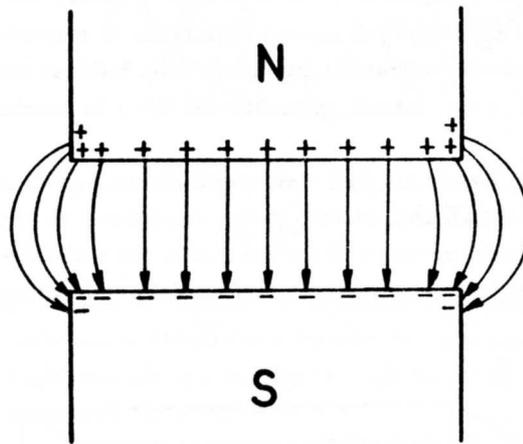


Fig.XIX.13

La presenza del massimo si può spiegare in base all'esistenza di cariche magnetiche non solo sulle facce del traferro ma anche sulle superfici laterali che abbassano il valore di \vec{H}_i all'interno del materiale, ma lo innalzano subito fuori dalle superfici.

Tornando a trascurare questi effetti di bordo, ma continuando a studiare \vec{H} in base alla distribuzione di cariche magnetiche superficiali, nel traferro, lontano dai bordi, il campo \vec{H} può essere descritto come quello di un doppio strato; detta g la dimensione del traferro e σ_m la densità superficiale di cariche magnetiche abbiamo, in analogia con il campo di un condensatore ($\vec{k} = \text{vers } \vec{z}$, coincidente con la normale \vec{n} alle espansioni polari):

$$H_g \vec{k} = \sigma_m \vec{k} = (\vec{M} \cdot \vec{n}) \vec{k} = \vec{M} \quad (\text{XIX.38})$$

e pertanto, nel traferro

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_g = \mu_0 \vec{M} \quad (\text{XIX.39})$$

che non coincide esattamente con il valore all'interno del materiale $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_i + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 \vec{H}_i$ ma ne differisce per il termine $\mu_0 \vec{H}_i \ll \mu_0 \vec{M}$; la differenza dipende dall'aver trascurato le altre sorgenti di H (avvolgimento e eventuali altre masse magnetiche superficiali) che assicurano proprio la presenza di H_i all'interno del circuito.

Una sonda di Hall, date le sue piccole dimensioni, dà una misura assai *puntuale* del campo (la media su dimensioni dell'ordine del mm^2) ed è pertanto estremamente adatta a studiare gli andamenti di \vec{B} (o di \vec{H}) nel traferro di un circuito magnetico quale quello ora descritto. In particolare è

possibile, se la sonda è munita di un sistema di posizionamento $x-y-z$ (con letture della posizione), ricostruire una mappa del campo nella zona e verificare sperimentalmente gli andamenti descritti.

Inoltre, posizionata la sonda fra le espansioni polari, è possibile riportare in grafico B in funzione di I ; avendo avuto cura di smagnetizzare inizialmente l'elettromagnete controllando che la sonda segnali una ddp pari alla tensione di offset, si può, al crescere della corrente, ottenere un grafico corrispondente alla curva di isteresi del materiale impiegato, partendo dalla curva di prima magnetizzazione. In realtà non costruiamo così il ciclo di isteresi poiché per far questo occorrerebbe impiegare un campione di materiale (detto *provino*) toroidale e conoscere il numero di spire dell'avvolgimento, come mostrato all'inizio del paragrafo; tuttavia il grafico $B-I$ è in grado di mostrare ugualmente gli andamenti salienti della curva di magnetizzazione del materiale.

5.— Schermo magnetico

Consideriamo una porzione di spazio ove sia presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}_0 = B_0 \vec{k}$ con B_0 costante. Supponiamo che il mezzo sia aria per cui $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$.

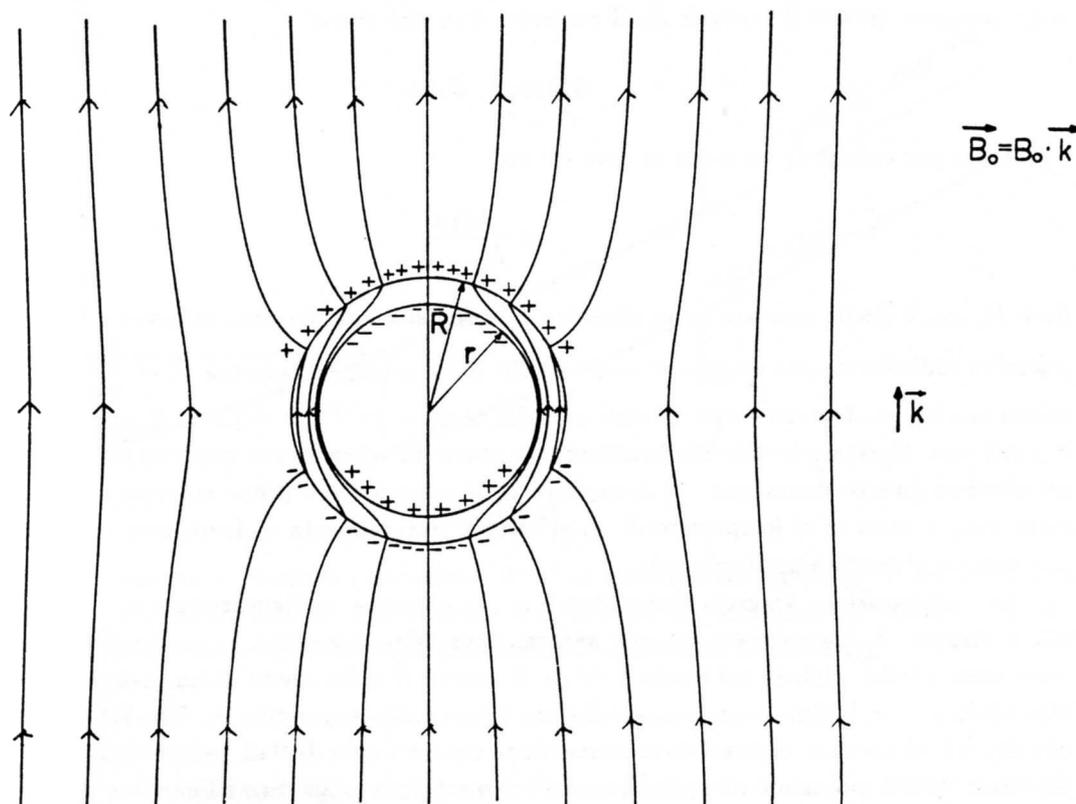


Fig.XIX.14

Se vogliamo liberare una porzione limitata di questo spazio dalle linee di \vec{B}_0 , ovvero ridurre drasticamente il valore del campo all'interno di questa zona, un metodo molto efficace è quello di racchiudere tale zona all'interno di un guscio opportunamente spesso (poi vedremo quanto) di un

materiale ad alta permeabilità magnetica relativa μ_r . Nella Fig.14 è riportato il caso di un guscio sferico di raggi r e R (cioè avente spessore $s = R - r$), visto in sezione. Si noti che le linee di campo esterne al guscio sono *attratte* verso di questo e che esse si addensano all'interno del materiale ferromagnetico: l'attrazione delle linee può essere spiegata notando che l'inserimento del guscio nel campo porta alla sua magnetizzazione e quindi alla presenza di cariche magnetiche superficiali (col segno come in figura); esse creano un campo di induzione magnetica di tipo dipolare che, sommandosi a quello preesistente, porta all'andamento complessivo osservato. In Appendice D è svolto il calcolo esatto per l'andamento del campo e delle cariche di magnetizzazione sulle superfici, sia per il caso di uno schermo sferico che di uno schermo cilindrico. Nello spazio racchiuso dal guscio si ha un campo omogeneo \vec{B}_i avente direzione e verso uguali a \vec{B}_0 , ma $k \mu_r$ volte meno intenso (k dell'ordine del rapporto fra lo spessore del guscio e il suo raggio esterno), almeno per $\mu_r \gg 1$. Pertanto l'efficacia dello schermo è tanto maggiore quanto più alto è il prodotto di μ del materiale impiegato per lo spessore s del guscio. Lo spessore determina anche il limite massimo per il campo di induzione \vec{B}_0 che può essere schermato; infatti se il campo \vec{B}_g entro il guscio raggiunge il valore corrispondente alla saturazione, lo schermo cessa di essere efficace in quanto μ crolla di valore una volta che il materiale è saturato. Per dare una valutazione dello spessore allo scopo di dimensionarlo secondo le nostre esigenze, possiamo ragionare nel modo schematico seguente: lo schermo deforma (vedi Fig.14) il campo omogeneo \vec{B}_0 in modo che - almeno approssimativamente - nel guscio di spessore $s = R - r$ passano tutte le linee di \vec{B} che prima passavano attraverso una superficie circolare avente raggio $\approx 2r$; pertanto, poiché il flusso di \vec{B}_0 si conserva, dovremo avere:

$$B_g 2\pi r s \approx B_0 \pi 4r^2 \quad (\text{XIX.40})$$

e pertanto per evitare la saturazione deve essere:

$$s \geq \frac{2B_0 r}{B_{g,max}} \quad (\text{XIX.41})$$

dove $B_{g,max}$ è quello ricavato dalla relazione $B - H$ del materiale dello schermo e che assicura un μ ancora sufficientemente elevato, ovvero tale che il campo \vec{B}_i nella cavità $\vec{B}_i \approx \frac{\vec{B}_0}{k\mu_r}$ sia sufficientemente piccolo per i nostri scopi. Si vede così che se $B_0 = 10^{-3}T$, $r = 1 \text{ cm}$, $B_{g,max} = 0.1 T$, allora $s \geq 0.2 \text{ mm}$. Notiamo inoltre che la efficacia di una data schermatura migliora di più aggiungendo un ulteriore guscio ferromagnetico di spessore s' all'interno di un primo schermo di spessore s , anziché aumentando di s' lo spessore di quest'ultimo; naturalmente si dovrà aver cura di evitare la saturazione in ognuno degli schermi.

La configurazione a guscio sferico non è la più pratica e configurazioni a mo' di cilindro sono più utilizzate. In questo caso valgono ancora, approssimativamente, le conclusioni di sopra, non fosse altro perché, almeno nel limite $\mu \rightarrow \infty$, il campo \vec{B} nella cavità di un materiale ferromagnetico tende a zero, indipendentemente dalla sua forma (vedi Appendice D). Uno schermo magnetico cilindrico è ad esempio utilizzabile in connessione con un sonda di Hall, per determinare la tensione di offset: infatti montando attorno alla sonda uno schermo magnetico cilindrico è possibile ridurre a valori trascurabili il campo magnetico residuo (per esempio quello terrestre) e così misurare la tensione di offset della sonda. Preventivamente è opportuno procedere alla smagnetizzazione dello schermo: infatti, soprattutto se esso precedentemente è stato usato in presenza di campi magnetici intensi, è possibile che, a causa dell'area finita del ciclo di isteresi del materiale, esso possieda una magnetizzazione residua. Se essa è presente, montato lo schermo attorno alla sonda e ruotandolo lungo il suo asse (Fig.15), l'indicazione della sonda cambia.

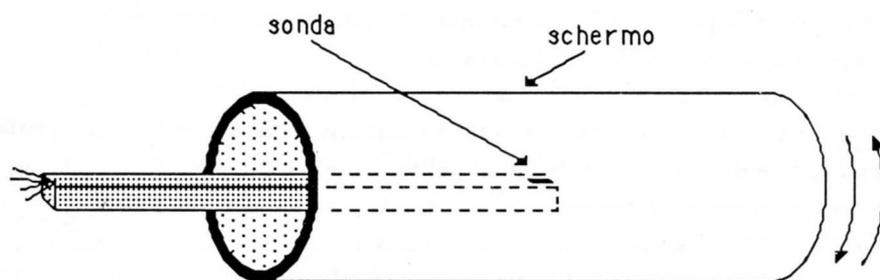


Fig.XIX.15

E' possibile anche, partendo da una condizione di schermo smagnetizzato, misurarne l'efficacia: infatti lo si può prima porre attorno alla sonda, verificare che essa misuri la tensione di offset, e poi inserire il tutto fra le espansioni polari dell'elettromagnete (anch'esso inizialmente smagnetizzato) e quindi registrare il campo sulla sonda all'aumentare dell'eccitazione dell'elettromagnete. Si otterrà una curva del tipo in Fig.16, ovvero campo nullo (entro la sensibilità del metodo) fino ad una certa corrente nell'elettromagnete e successivamente - quando lo schermo è saturato - una curva che si discosta da quella ottenuta in assenza di schermo per una quantità fissa ΔB .

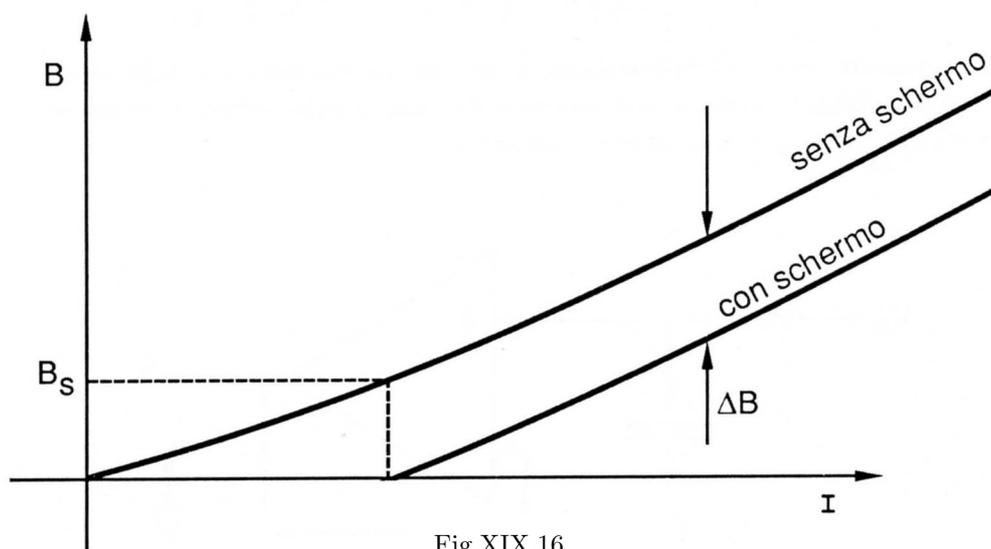


Fig.XIX.16

Se la sonda è tarata, è possibile determinare il valore massimo del campo \vec{B}_s che lo schermo è in grado di eliminare dal suo interno. Per valori $B > B_s$ lo schermo resta *saturo* e pertanto continua a rimuovere dal campo nella cavità soltanto una intensità costante di B pari a B_s .

6.- Un'altra applicazione della sonda di Hall: un wattmetro a stato solido

Oltre all'impiego ora descritto per la misura di campi magnetici, la sonda ad effetto Hall può trovare impiego in molte altre applicazioni e fra queste alcune utilizzano la sonda come *rivelatore di prossimità*. Se, ad esempio, su un corpo in movimento è montato un magnete permanente, una

sonda di Hall è in grado di percepire la vicinanza del corpo - senza per questo venirne in contatto - rivelando il campo magnetico prodotto dal magnete.

Descriviamo ora un'applicazione particolare della sonda, quella cioè di *moltiplicatore analogico* che, come detto nel titolo del paragrafo, consente la realizzazione di uno strumento a valore efficace. Supponiamo di disporre di due correnti funzioni del tempo e periodiche $i_1(t)$ e $i_2(t)$: una di queste (i_1) sia inviata come corrente di controllo in una sonda di Hall, mentre l'altra (i_2) percorra una bobina producendo così nello spazio circostante un campo magnetico $\vec{B}_2(t)$, la cui intensità in ogni punto e in ogni istante risulterà proporzionale a $i_2(t)$; in tale campo si trova immersa la sonda. La tensione V_H misurata ai capi della sonda sarà pertanto (vedi (5)):

$$V_H(t) = \alpha i_1(t) i_2(t) \quad (\text{XIX.42})$$

ovvero essa sarà, istante per istante, proporzionale al prodotto delle due correnti; in questo senso il dispositivo si comporta come un moltiplicatore analogico. Di qui alla realizzazione di uno strumento a valore efficace, ad esempio un wattmetro, il passo è breve: per far ciò basta collegare l'uscita della sonda ad un circuito $R - C$ passa-basso avente una costante di tempo τ tale che $\tau \gg T$ con T periodo della funzione $f(t) = i_1(t)i_2(t)$. Infatti supponendo di sviluppare $f(t)$ in serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right] \quad (\text{XIX.43})$$

tutte le componenti sinusoidali dello sviluppo danno una caduta sostanzialmente nulla sul condensatore (vedi Cap.XII,§2), mentre solo il termine costante a_0 (corrispondente al valore medio di $f(t)$, ovvero a $\langle i_1(t) \cdot i_2(t) \rangle$) dà una tensione non nulla.

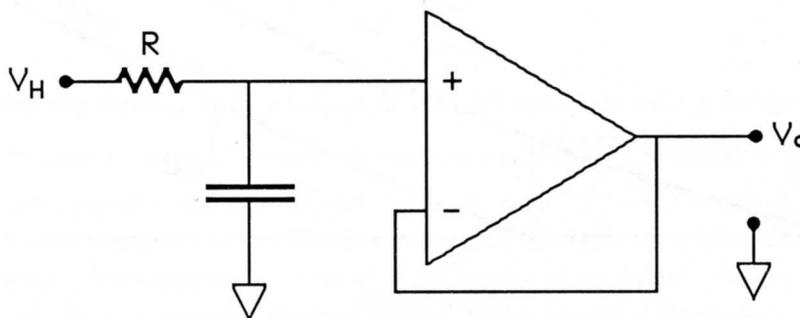


Fig.XIX.17

Con riferimento alla Fig.17, la tensione V_0 sul condensatore riprodotta dal *follower* sarà quindi proporzionale a $\langle i_1(t) \cdot i_2(t) \rangle$. A seconda della configurazione circuitale associata a $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sarà quindi possibile realizzare un wattmetro, un amperometro a valore efficace, un voltmetro a valore efficace; per avere un wattmetro basterà infatti che i_1 sia la corrente che passa su un certo carico Z e i_2 sia proporzionale alla ddp sull'elemento Z (vedi Cap.XI,§2); per avere un amperometro o un voltmetro basterà fare in modo che $i_1 = i_2$ (vedi Cap.XI,§3).

NOTA BIBLIOGRAFICA

Su **KI 76** e **Fr 71** è trattato l'effetto Hall "statico". Una presentazione dell'effetto Hall in condizioni "dinamiche" si può trovare su:

Wieder: "Laboratory notes on electrical and Galvanomagnetic measurements"
Elsevier (1979).

Per le proprietà magnetiche dei materiali (almeno per il livello di approfondimento che ci interessa) si vedano **KR 84**, **FR 71** e il Cap.7 di:

Corson,Lorain: "Electromagnetic Field and waves"
Freeman (1962).

Per il calcolo dell'efficacia di uno schermo magnetico, su **JA 75** si trova impostato e risolto il problema nel caso di un guscio sferico. L'appendice D del testo tratta questo caso e anche quello dello schermo cilindrico indefinito.

LA CONVERSIONE DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA E MECCANICA

1.— Introduzione

Il problema della conversione di energia dalla forma elettrica o magnetica a quella meccanica costituisce senz'altro un campo di interesse oltre che speculativo, anche tecnico e pratico. In questo capitolo ci limiteremo ad illustrare i principi che regolano i meccanismi di conversione dell'energia da una forma all'altra facendo riferimento ad alcuni semplici esempi ed ammettendo che i materiali dielettrici o ferromagnetici si comportino *linearmente*. Questo ultimo punto è indubbiamente una schematizzazione che in molti casi può risultare anche grossolana; essa consente però di capire i meccanismi fisici principali alla base dei fenomeni. Vedremo anche qualche esempio di risoluzione di macchine elettriche e magnetiche mediante bilanci energetici; inoltre tratteremo alcuni casi semplificati di motori in continua e a induzione.

2.— Energia accumulata in un condensatore

Consideriamo il circuito $R - C$ serie di Fig.1 con $v(t)$ funzione generica del tempo.

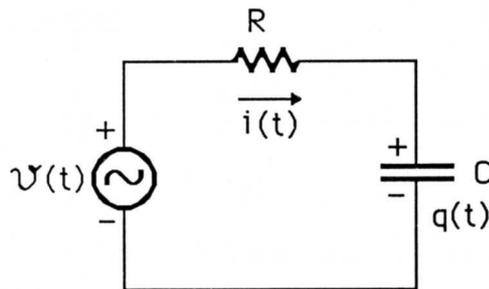


Fig.XX.1

Istante per istante varrà la legge di Kirchhoff (ammettiamo cioè di essere in condizioni quasi-stazionarie):

$$v(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C} \quad (\text{XX.1})$$

Moltiplicando entrambi i membri per $i(t)$ e riordinando i vari termini, otteniamo:

$$v(t)i(t) - i^2(t)R = \frac{q(t)}{C}i(t) \quad (\text{XX.2})$$

Questa espressione può interpretarsi come un *bilancio energetico*: la potenza istantanea fornita dal generatore (vi) meno le perdite per effetto Joule (i^2R) danno l'incremento per unità di tempo dell'energia accumulata sotto forma di campo elettrico fra le armature del condensatore; infatti il membro di destra $\frac{q(t)}{C}i(t)$ può essere interpretato come la derivata temporale della quantità:

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad (\text{XX.3})$$

che, come è noto dall'elettrostatica, misura proprio l'energia associata alle cariche presenti sulle armature del condensatore.

Consideriamo il caso particolare in cui $v(t) = 0$ per $t < 0$, $v(t) = V$ per $t \geq 0$, con $q(0) = 0$, cioè consideriamo il transitorio che si verifica durante la carica del condensatore tramite un generatore reale di tensione (vedi Cap. VI, §2). Sappiamo che per t sufficientemente grande rispetto a $\tau = RC$, su ognuna delle due armature del condensatore è accumulata una carica di valore assoluto pari a $Q_\infty = CV$ e pertanto l'energia accumulata vale $W_E = \frac{1}{2} \frac{Q_\infty^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q_\infty V$. Ricordando l'andamento temporale di $i(t)$ nel transitorio $i(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ è possibile anche, integrando la (2) fra $t = 0$ e $t = \infty$, quantificare le voci che contribuiscono al bilancio energetico del sistema:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{V^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt - \int_0^\infty \frac{V^2}{R^2} R \exp\left(-2\frac{t}{RC}\right) dt = \\ & = \frac{V^2}{R} \left[RC \int_0^\infty \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt - \frac{RC}{2} \int_0^\infty \frac{2}{RC} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt \right] = \frac{1}{2} CV^2 \end{aligned} \quad (\text{XX.4})$$

Si vede così che per accumulare una certa energia nel condensatore il generatore ha dovuto compiere un lavoro esattamente doppio, di cui metà è andato poi disperso come aumento di energia interna del termostato a cui R è accoppiata. Alla fine dell'operazione abbiamo comunque a disposizione dell'energia immagazzinata sotto forma di campo elettrico fra le armature. Stacciamo ora il condensatore dal circuito, facendo in modo che le due armature restino isolate; un modo per ottenere la restituzione dell'energia accumulata è quello di scaricare il condensatore chiudendolo su una resistenza r . Alla fine della scarica, cioè dopo un tempo $t \gg rC$, avremo $Q = 0$ e tutta l'energia sarà stata dissipata per effetto Joule sulla resistenza. Se le armature del condensatore sono mobili, una rispetto all'altra, possono cioè essere avvicinate o allontanate a piacere, allora è possibile ottenere un lavoro meccanico*. Supponiamo allora, mantenendo isolate le armature del condensatore, di lasciarle avvicinare e supponiamo di farlo a velocità costante, magari anche estremamente piccola, così da poter trascurare nel bilancio energetico il contributo dell'energia cinetica associata al moto delle armature stesse. Se le avviciniamo fino a distanza praticamente nulla, abbiamo alla fine una capacità C' molto grande e poiché la carica su ognuna delle due armature non è cambiata (le armature sono isolate) ciò significa che l'energia accumulata sotto forma di campo elettrico fra le armature è passata (Q è costante!) dal valore $W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ al valore $W'_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} \approx 0$ ($C' \gg C$). Pertanto l'energia accumulata sotto forma di campo elettrico è cambiata di

$$\Delta W_E = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (\text{XX.5})$$

Che fine a fatto questa energia? Evidentemente è stato compiuto del lavoro meccanico durante la fase di avvicinamento e infatti per compiere l'avvicinamento a velocità costante abbiamo dovuto

* ovviamente in tutte le argomentazioni precedenti abbiamo supposto $C = \text{cost}$, cioè doveva esistere un vincolo meccanico che teneva fissa la posizione mutua delle armature.

frenare le armature che tendevano ad attrarsi: è stato così ottenuto del lavoro meccanico, ad esempio il sollevamento di un peso come in Fig.2.

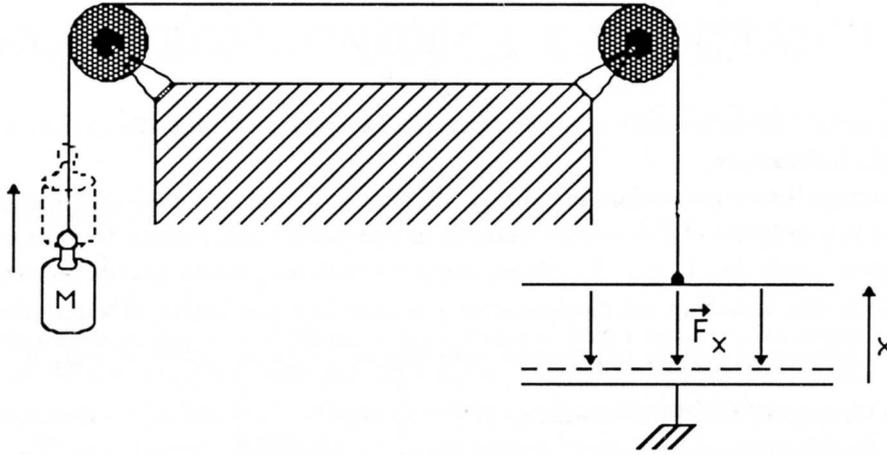


Fig.XX.2

Verifichiamo questo fatto calcolando la forza con cui le armature si attraggono, nell'ipotesi che il condensatore sia a facce piane e parallele (e trascurando la perturbazione del campo ai bordi). Detta S la superficie delle due armature, x la distanza generica fra di esse, abbiamo che il campo elettrico sulla armatura mobile dovuto a quella fissa (vedi Fig.2) vale ($\epsilon_r = 1$):

$$|\vec{E}_x| = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \quad (\text{XX.6})$$

e pertanto la forza che agisce sulla armatura mobile vale:

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (\text{XX.7})$$

Se Q è - come abbiamo supposto - costante, il lavoro che questa forza compie nell'avvicinare le due armature dalla distanza generica d a $x = 0$ è:

$$\int_d^0 F_x dx = -F_x d = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} d = \frac{Q^2}{2C(d)} \quad (\text{XX.8})$$

dove $C(d)$ è il valore della capacità del condensatore quando le due armature distano d . Si è verificato così che l'entità del lavoro ottenuto coincide con la diminuzione dell'energia accumulata (vedi (5)). Nel caso ora esaminato il bilancio fra energia perduta e lavoro fatto non richiede nessun altro tipo di apporto esterno poiché abbiamo considerato il condensatore isolato e non abbiamo fornito né assorbito energia dall'esterno in alcun altro modo. Generalizzando il caso ora esaminato, se le armature del condensatore posseggono un generico grado di libertà geometrico relativo θ , cioè se $C = C(\theta)$, abbiamo che per ogni variazione infinitesima $\Delta\theta$ si ottiene un lavoro meccanico ΔW_{mecc} pari alla diminuzione dell'energia immagazzinata nel condensatore (a Q costante); possiamo cioè scrivere:

$$\Delta W_{mecc} = -\Delta W_E = -\Delta \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(\theta)} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \Delta C(\theta) \Big|_{Q=const} \quad (\text{XX.9})$$

La (9), esprimendo ΔW_{mecc} come $F_\theta \Delta\theta$ e $\Delta C(\theta) = \left. \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|_Q \Delta\theta$, con F_θ forza o momento a seconda che θ sia una coordinata lineare o uno spostamento angolare, ci dice che:

$$F_\theta = - \left. \frac{\partial W_E}{\partial \theta} \right|_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \quad (\text{XX.10})$$

Vedremo più avanti qualche applicazione della (10); per ora limitiamoci ad osservare che essa riproduce l'espressione (7) con $C = \frac{\epsilon_0 S}{x}$; infatti $\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\epsilon_0 S}{x^2}$ e $F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$.

L'entità delle forze che si possono così ottenere è assai piccola; ad esempio supponendo $S = 10 \text{ cm}^2$, $d = 10^{-4} \text{ m}$, si ha $C \approx 88 \text{ pF}$ e per $V = 100 \text{ V}$, $F \approx 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

Ripetiamo ora il nostro esperimento di avvicinamento delle armature, ma questa volta collegando in permanenza il condensatore ad un generatore di ddp V (vedi Fig.3), ammettendo per ora che la resistenza del circuito sia trascurabile.

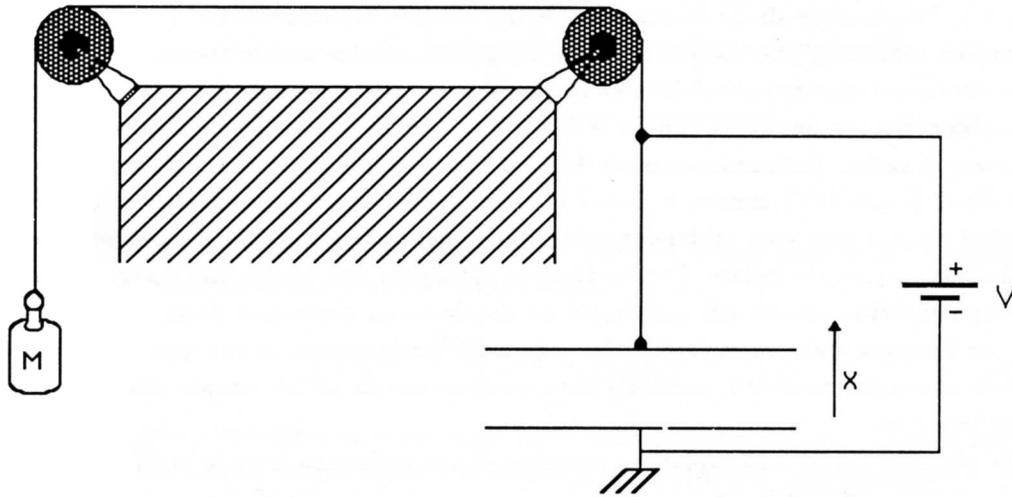


Fig.XX.3

La situazione è assai differente dal caso prima visto; infatti se effettuiamo uno spostamento infinitesimo $-\Delta x$ (cioè lasciamo avvicinare le armature), otteniamo del lavoro, ma ora non a spese dell'energia accumulata nel condensatore (essa aumenta!) bensì a spese del generatore di tensione. In generale, supponiamo che la capacità dipenda da un generico grado di libertà geometrico θ e facciamo compiere uno spostamento infinitesimo $\Delta\theta$ di tale coordinata: avremo un certo lavoro meccanico che esprimeremo nella forma:

$$\Delta W_{mecc} = F_\theta \Delta\theta \quad (\text{XX.11})$$

La capacità del condensatore passa dal valore $C(\theta)$ al valore $C(\theta + \Delta\theta) = C(\theta) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta$ e pertanto l'energia immagazzinata cambia di:

$$\Delta W_E = \frac{1}{2} C(\theta + \Delta\theta) V^2 - \frac{1}{2} C(\theta) V^2 = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta \quad (\text{XX.12})$$

Quanto al lavoro fatto dal generatore, esso si può calcolare notando che la carica $\Delta Q = V \Delta C$ è stata portata al potenziale V :

$$\Delta W_{gen} = V \Delta Q = V^2 \Delta C = V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta \quad (\text{XX.13})$$

Imponendo quindi che il lavoro fatto dal generatore uguagli la somma del lavoro meccanico ottenuto e dell'aumento di energia immagazzinata nel condensatore si ottiene:

$$\Delta W_{mecc} = \Delta W_{gen} - \Delta W_E \quad (V = cost) \quad (XX.14)$$

che in virtù delle (11), (12) e (13) può mettersi nella forma:

$$F_\theta \Delta\theta = V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta - \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta \quad (XX.15)$$

Possiamo sintetizzare il risultando dicendo che per $V = cost$:

$$F_\theta = \left. \frac{\partial W_E}{\partial \theta} \right|_{V=cost} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \quad (XX.16)$$

Rispetto alla (10) in cui veniva affrontato il caso analogo per il condensatore isolato (cioè Q costante e non V), l'espressione di F_θ in funzione di W_E cambia sostanzialmente (questa volta l'energia accumulata aumenta), pur essendo il valore della forza nei due casi lo stesso. Il motivo di questo ultimo risultato è assai semplice: dato un condensatore con una certa carica accumulata su di esso (o alternativamente con una certa ddp fra le armature) la forza dipende solo dal valore della capacità e dallo stato di carica, indipendentemente dal tipo di collegamento esterno delle armature. Tuttavia, fissati C e Q (e quindi V), mentre la forza è la stessa indipendentemente dal circuito esterno, i bilanci energetici nei due casi sono profondamente diversi: nel caso che la carica sia mantenuta costante, cioè il condensatore sia isolato, l'unico apporto di energia può venire dall'energia immagazzinata nel campo elettrico, mentre nel caso in cui sia applicato un generatore di ddp si trova ((14), (15), (16)) che l'energia viene tutta fornita dal generatore e addirittura in una quantità doppia rispetto al lavoro meccanico prodotto, essendo l'altra metà necessaria all'incremento di energia accumulata nel condensatore.

Se avessimo anche contemplato la presenza di una resistenza in serie al circuito, il generatore avrebbe dovuto provvedere anche a rifornire l'energia perduta per effetto Joule durante lo spostamento delle cariche. Il fatto che la (16) e la (10) siano numericamente identiche, non vuol certo dire che partendo da una medesima condizione iniziale, in uno spostamento *finito* il lavoro meccanico ottenibile sia lo stesso: infatti abbiamo visto che dal sistema meccanico corrispondente alla Fig.2, l'avvicinamento delle armature da una distanza $x = d$ a $x = 0$ porta l'ottenimento di un lavoro pari a (vedi (6)):

$$W_{mecc} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(d)} = \frac{1}{2} C(d) V^2(d)$$

dove $V(d)$ rappresenta la ddp quando le armature sono poste a $x = d$. Abbiamo anche visto che la forza con cui le armature si attraggono è indipendente da x e vale:

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

con Q costante. Il caso illustrato in Fig.3 è completamente diverso e il lavoro meccanico che si riesce ad ottenere con il medesimo spostamento da $x = d$ a $x = 0$ è calcolabile integrando fra $x = d$ e $x = 0$ la forza F_x , che questa volta dipende da x ; infatti la (16) ci dice:

$$F_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{x^2} \quad (XX.17)$$

con V costante, cioè una forza che diverge per $x \rightarrow 0$. Fisicamente ciò corrisponde al fatto che il generatore sta rifornendo carica alle armature di un condensatore la cui capacità cresce e pertanto tali cariche si attraggono con una forza crescente. Il lavoro meccanico complessivo vale pertanto:

$$W_{mecc} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_d^{\delta} F_x dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left. \frac{V^2 \epsilon_0 S}{2x} \right|_d^{\delta} \quad (\text{XX.18})$$

che dà luogo ad un lavoro infinito.

Come altra applicazione della (10) (o della (16)) esaminiamo ora il caso di un condensatore in cui possa inserirsi un dielettrico con costante dielettrica $\epsilon_r > 1$ (vedi Fig.4).

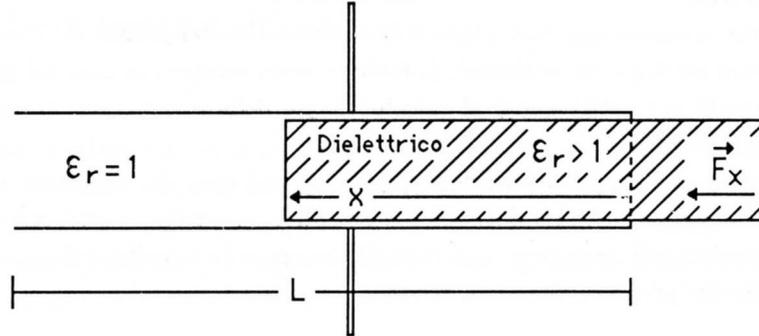


Fig.XX.4

Il valore della capacità in funzione della coordinata x è dato dal parallelo di due condensatori, di cui uno con un dielettrico avente $\epsilon = \epsilon_0$ e l'altro $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$:

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 W (L - x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r W x}{d} \quad (\text{XX.19})$$

dove W è la dimensione perpendicolare al piano del foglio delle armature del condensatore, supposto rettangolare (trascuriamo gli effetti di bordo). In base alla (10) e (16) abbiamo pertanto per la forza F_x :

$$F_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r - 1) \quad (\text{XX.20})$$

vale a dire una forza che attrae il dielettrico dentro le armature. Se compiamo l'avvicinamento (da $x = 0$ fino ad $x = L$) a carica costante, vale a dire con il condensatore isolato, otteniamo per il lavoro ($F_x = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$):

$$\begin{aligned} W_{mecc}(Q = cost) &= \int_0^L F_x dx = \frac{1}{2} Q^2 \int_{C(0)}^{C(L)} \frac{1}{C^2(x)} dC = \\ &= \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 W L} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = \frac{1}{2} V^2 (x=0) C(x=0) \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \end{aligned} \quad (\text{XX.21})$$

Se viceversa lasciamo compiere l'avvicinamento mantenendo il condensatore collegato ad un generatore di ddp pari a V ($= V(x=0)$ della (21)) abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{mecc}(V = cost) &= \int_0^L F_x dx = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r - 1) \int_0^L dx = \\ &= \frac{1}{2} V^2 (x=0) C(x=0) (\epsilon_r - 1) \end{aligned} \quad (\text{XX.22})$$

ovvero un lavoro ϵ_r (> 1) volte maggiore che nel caso precedente. Corrispondentemente si trova che l'energia immagazzinata è aumentata di una quantità pari a:

$$W_E(x=L) - W_E(x=0) = \frac{1}{2} [C(L) - C(0)] V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 W L}{d} (\epsilon_r - 1) V^2 \quad (\text{XX.23})$$

ovvero pari a W_{mecc} ; ciò significa che il generatore - come si può facilmente verificare calcolandolo direttamente - ha fatto un lavoro equivalente al doppio di ognuno di questi due contributi (lavoro meccanico + aumento di energia immagazzinata).

Se volessimo calcolare direttamente la forza che agisce sul dielettrico - così come abbiamo fatto nel caso del condensatore piano con le armature mobili - ci troveremmo di fronte a non poche difficoltà: infatti il calcolo comporterebbe la conoscenza del campo disperso ai bordi delle armature e conseguentemente la conoscenza dettagliata dell'elettrostatica del problema. Il metodo di risoluzione visto prima supera tutti questi problemi; di fatto si cerca sempre, in casi del genere, di ricondursi a calcoli come quelli ora svolti e mai al calcolo diretto delle forze agenti tramite la soluzione del problema elettrostatico.

Un altro esempio di applicazione della (16) si ha nel caso dei voltmetri elettrostatici, di cui descriveremo sommariamente uno dei tipi più semplici: si tratta in sostanza (vedi Fig.5) di un condensatore in aria a più armature; una serie di armature (a lamelle) è fissa, mentre le altre sono sospese ad un filo che presenta elasticità di torsione.

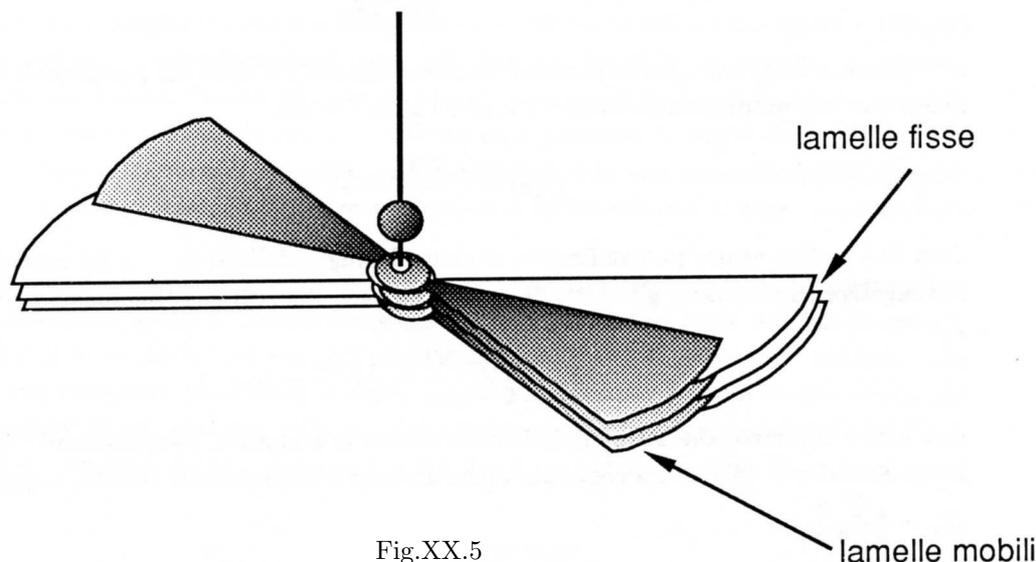


Fig.XX.5

Il valore della capacità del condensatore dipende dal valore dell'angolo θ di cui sono ruotate le armature mobili rispetto a quelle fisse. Detto C_M il valore massimo della capacità, quando cioè le armature sono completamente affacciate le une alle altre ($\theta = \theta_M$) avremo, trascurando gli effetti ai bordi:

$$C(\theta) = C_M \frac{\theta}{\theta_M} \quad (\text{XX.24})$$

$\theta = 0$ denota pertanto l'angolo per cui le armature non presentano più superfici affacciate. Detta E la costante del filo (o la costante della molla di richiamo montata sull'albero di sospensione) l'applicazione di una ddp V ai capi delle due armature provoca una torsione che all'equilibrio vale (vedi la (16)):

$$\theta = \frac{1}{E} \frac{\partial W_E}{\partial \theta} \Big|_{V=const} = \frac{V^2}{2E} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{V^2}{2E} \frac{C_M}{\theta_M} \quad (\text{XX.25})$$

La torsione osservata è pertanto proporzionale al quadrato della ddp applicata alle armature. In *continua* lo strumento presenta una resistenza praticamente infinita e quindi si comporta da *elettrometro*; purtroppo questa ottima prerogativa si accompagna ad una sensibilità assai modesta, sia per la piccolezza della coppia (25) sia perché la costante E risulta abbastanza grande a causa della robustezza del filo necessaria per sostenere la massa del condensatore variabile. Il pregio di uno strumento siffatto è la risposta quadratica che consente di adoperarlo per misurare il valore efficace di una tensione alternata, purché, al solito, la frequenza della tensione alternata sia molto maggiore dell'inverso del periodo proprio di oscillazione dell'elettrometro.

3.— *Energia di un sistema di correnti*

Dal punto di vista pratico l'importanza degli effetti meccanici associati alle correnti elettriche e dei relativi concetti di energia immagazzinata è largamente superiore rispetto agli analoghi casi elettrostatici (effetti meccanici delle cariche elettriche), non fosse altro a causa dell'esistenza dei materiali ferromagnetici; con l'impiego di questi, infatti si riescono ad ottenere da sistemi di correnti interagenti lavori meccanici di entità rilevante.

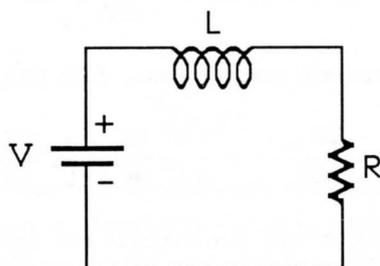


Fig.XX.6

Consideriamo dapprima un circuito costituito da una sola maglia e caratterizzato da una induttanza L e resistenza R (Fig.6); supponendo di applicare al tempo t una ddp $V = cost$ al sistema, sappiamo (Cap.VII, §3) che l'andamento della corrente nel circuito è del tipo:

$$i(t) = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{tR}{L}\right) \right] \quad (\text{XX.26})$$

Per $t \gg \frac{L}{R}$ la corrente è costante e pari a $\frac{V}{R}$. In un istante generico varrà (seconda legge di Kirchhoff):

$$V = L \frac{di}{dt} + iR \quad (\text{XX.27})$$

che, moltiplicando ambo i membri per i , ci dice che istante per istante:

$$Vi - i^2R = Li \frac{di}{dt} \quad (\text{XX.28})$$

Secondo la (28) la potenza fornita dal generatore (meno le perdite per effetto Joule) uguaglia la variazione per unità di tempo della funzione

$$W_M = \frac{1}{2} Li^2 \quad (\text{XX.29})$$

Si sarà riconosciuta in quest'ultima quantità l'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico nell'induttanza. Tale energia, ricordando che per definizione Li rappresenta il flusso Φ del campo \vec{B} concatenato col circuito, può anche mettersi nella forma:

$$W_M = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \quad (\text{XX.30})$$

Confrontando questa espressione con la (3) ci si rende conto che esiste (secondo il solito principio di dualità) una stretta analogia fra le due espressioni; anzi esse sono formalmente identiche a patto che si facciano le seguenti sostituzioni:

$$Q \leftrightarrow \Phi \quad , \quad V \leftrightarrow i \quad , \quad C \leftrightarrow L$$

Pertanto restano valide tutte le conclusioni tratte circa l'energia e il lavoro meccanico ottenibile dalla variazione di assetto geometrico di un condensatore; *mutatis mutandis* si potranno cioè fare le medesime considerazioni su una induttanza L variabile. In particolare, supponendo che il valore di tale induttanza L abbia una dipendenza da un grado di libertà geometrico θ , $L = L(\theta)$, avremo che se la variazione di assetto avviene a flusso Φ costante, il lavoro meccanico ottenibile deve uguagliare la diminuzione di energia immagazzinata nel campo magnetico:

$$\Delta W_{mecc} = F_\theta \Delta\theta = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_{\Phi} \Delta\theta \quad (\text{XX.31})$$

dove il membro di destra potrà esprimersi, tenendo conto della (30), come

$$F_\theta = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{XX.32})$$

Giustificiamo esplicitamente la (31), ovvero dimostriamo che uno spostamento a flusso costante può farsi senza ulteriori apporti di energia dall'esterno salvo quella necessaria per compensare le perdite per effetto Joule, ipotesi sotto le quali è corretto scrivere la (31). Per far ciò notiamo che in un circuito in cui sia montata una induttanza variabile, la (27) va scritta facendo intervenire esplicitamente Φ :

$$V = \frac{d\Phi}{dt} + iR \quad (\text{XX.33})$$

Il primo termine del membro di destra sarà a sua volta costituito da due termini

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} \quad (\text{XX.34})$$

Tuttavia se il flusso Φ non varia, avremo che istante per istante il generatore deve solamente fornire la potenza dissipata per effetto Joule; infatti posto $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ nella (33), si ottiene:

$$Vi - i^2R = 0 \quad (\text{XX.35})$$

Come caso particolare, se assumiamo che il nostro circuito (e in particolare l'induttanza) sia costituito da filo superconduttore, potremo proprio eliminare del tutto il generatore (cioè l'apporto di energia dall'esterno) e il flusso Φ si manterrà costante: la seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito di Fig.6 con $V = 0$, $R = 0$ dà infatti:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (\text{XX.36})$$

La (36) può quindi considerarsi *intrinsecamente* collegata ad una ipotesi di superconduttività della bobina.

Ritornando quindi al nostro caso, abbiamo visto che porre $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ ovvero $\Phi = cost$, significa che l'apporto esterno di energia da parte del generatore è 0 (se il circuito è superconduttore) e quindi il generatore è assente, o è tale da vincere solo le perdite per effetto Joule e quindi dal punto di vista del lavoro meccanico tale apporto è ancora 0. Si noti che V non potrà in questo caso essere un generatore di tensione costante, ma V dipenderà piuttosto dal tempo in quanto i sarà una funzione del tempo determinata dal modo di variare di $L = L(t)$; infatti $\Phi = cost$ comporta (vedi (34)):

$$-L \frac{di}{dt} = i \frac{dL}{dt} = i \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.37})$$

che determina $i = i(t)$, note che siano $\dot{\theta}$ e $\frac{\partial L}{\partial \theta}$.

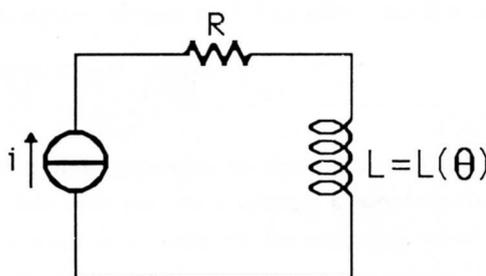


Fig. XX.7

Se supponiamo ora di far avvenire lo spostamento infinitesimo $\Delta\theta$, partendo dalle stesse condizioni di L e Φ e quindi di i , ma con un generatore di corrente inserito in serie nel circuito (Fig.7), che mantiene cioè costante la corrente i e sempre pari al valore iniziale, le considerazioni precedenti non possono più applicarsi; è facile convincersi che questa volta l'apporto di energia non è più nullo e il lavoro meccanico non è più uguale alla diminuzione dell'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico (tant'è vero che per $\frac{\partial L}{\partial \theta} > 0$, l'energia immagazzinata aumenta). Pertanto calcoliamoci esplicitamente i vari contributi di energia. Detta $V = V(t)$ la ddp presente ai capi del generatore di corrente avremo:

$$V = iR + i \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.38})$$

Il termine $L \frac{di}{dt}$ è stato eliminato perché $i = cost$. Moltiplicando per i entrambi i membri abbiamo:

$$Vi - i^2 R = i^2 \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.39})$$

D'altronde, effettuato uno spostamento infinitesimo $\Delta\theta$, la potenza meccanica istantanea - esprimibile come $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{mecc}}{\Delta t} = F_\theta \dot{\theta}$ - sarà uguale alla potenza ceduta dal generatore, meno le perdite per effetto Joule per unità di tempo, meno l'aumento di energia per unità di tempo immagazzinata sotto forma di campo magnetico; in formule:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{mecc}}{\Delta t} = F_\theta \dot{\theta} = Vi - i^2 R - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i \Phi \right) \quad (\text{XX.40})$$

Sostituendo la (39) nella (40) e sviluppando la derivata (tenendo conto che $i = cost$) otteniamo:

$$F_{\theta} \dot{\theta} = i^2 \frac{dL}{dt} - \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.41})$$

che dà per F_{θ} il risultato (32) ottenuto precedentemente, ovvero:

$$F_{\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{XX.42})$$

Si noti, come nel caso del condensatore in cui la tensione veniva mantenuta costante, che per ottenere un certo lavoro infinitesimo

$$F_{\theta} \Delta \theta = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (\text{XX.43})$$

il generatore di corrente deve compiere un lavoro (vedi (39)) che, tolta la parte necessaria a compensare le perdite per effetto Joule, è uguale al doppio di quello che si ottiene sotto forma meccanica. Conseguentemente la forza, o il momento se θ è un angolo, è questa volta esprimibile come

$$F_{\theta} = \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_i \quad (\text{XX.44})$$

in quanto il lavoro meccanico ottenuto è uguale all'aumento di energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico. Analogamente a quanto visto nel caso del condensatore, l'espressione (42) (e quindi la (32)) per la forza associata ad un sistema a induttanza variabile, non dipende dal particolare circuito in cui l'induttanza si trova montata, è indipendente cioè dai particolari vincoli imposti alle grandezze ($\Phi = cost$, $i = cost$).

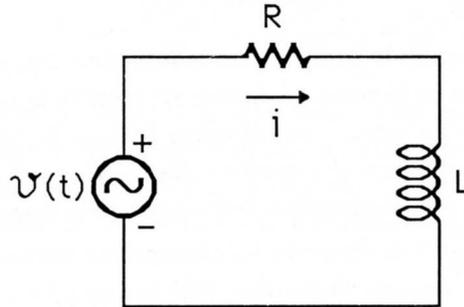


Fig. XX.8

Verifichiamo ciò in generale. In un circuito del tipo di Fig.8 istante per istante varrà:

$$v = iR + \frac{d\Phi}{dt} = iR + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.45})$$

mentre il bilancio energetico (40) potrà ancora esprimersi come

$$\begin{aligned} F_{\theta} \dot{\theta} &= vi - i^2 R - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i \Phi \right) = \\ &= vi - i^2 R - \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} - iL \frac{di}{dt} = vi - i^2 R + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} - iL \frac{di}{dt} - i^2 \frac{dL}{dt} \end{aligned} \quad (\text{XX.46})$$

Moltiplicando entrambi i membri della (45) per i e riordinando i termini dei due membri, si ottiene:

$$vi - i^2 R - iL \frac{di}{dt} = i^2 \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.47})$$

che sostituita nella (46) dà:

$$F_\theta \dot{\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.48})$$

che coincide con la (42). Questo risultato è generale poiché non abbiamo fatto alcun tipo di ipotesi sulla dipendenza di v e i dal tempo. Ovvero, indipendentemente dalla configurazione del circuito nel quale è montata l'induttanza, sarà possibile - se in essa circola una certa corrente i - ottenere una potenza meccanica istantanea data dalla (48). Tutto ciò ovviamente non significa che in uno spostamento finito in cui θ varia fra due valori θ_i e θ_f e conseguentemente L fra $L(\theta_i) = L_i$ e $L(\theta_f) = L_f$, il lavoro in tutti i casi sarà lo stesso; facciamo a questo proposito un esempio.

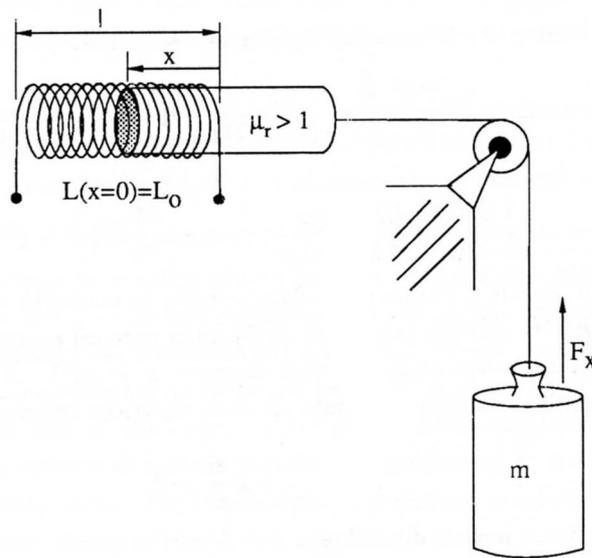


Fig.XX.9

Si tratta (Fig.9) di una induttanza a forma di solenoide, lunga l nella quale può essere inserito un nucleo di materiale ferromagnetico, avente permeabilità relativa $\mu_r > 1$. Per una generica posizione x del nucleo, l'induttanza varrà (si suppone il solenoide così lungo rispetto al diametro, da poter trascurare l'effetto delle masse magnetiche agli estremi del pezzetto di ferro):

$$L(x) = L_0 \left(\frac{l-x}{l} \right) + L_0 \mu_r \frac{x}{l} = L_0 \frac{l-x + \mu_r x}{l} = L_0 \frac{l + (\mu_r - 1)x}{l} \quad (\text{XX.49})$$

dove L_0 è l'induttanza del solenoide in aria (cioè senza alcuna porzione del nucleo inserita). Facciamo allora l'ipotesi di cambiare la posizione x dal valore $x = 0$ al valore $x = l$ e di farlo dapprima lasciando chiusa la bobina su un cortocircuito (supponendo la bobina superconduttrice). In questo caso sappiamo che il flusso di Φ si mantiene costante. Per un generico valore di i l'espressione della forza F_x sarà data dalla (42):

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 L_0 \frac{(\mu_r - 1)}{l} \quad (\text{XX.50})$$

palesemente positiva ($\mu_r > 1$). Il lavoro meccanico che si ottiene lasciando penetrare completamente il nucleo sarà:

$$W_{mecc} = \int_0^l F_x dx = \frac{1}{2} \int_0^l i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \int_{L_0}^{\mu_r L_0} \frac{\Phi^2}{L^2} dL = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right) \quad (\text{XX.51})$$

dove con $\Phi = \Phi(0)$ si è indicato il flusso all'inizio della procedura di avvicinamento e che si mantiene costante durante tutto il moto. Il lavoro fatto dalla induttanza che *risucchia* il ferro dipende solo dal posto; l'andamento di x nel tempo, ovvero la conoscenza dettagliata della dinamica, dipenderà poi dal tipo di sistema meccanico effettivamente impiegato; ad esempio se il sistema è quello di Fig.9 dovremo anche scrivere l'equazione che regola la dinamica e supponendo per semplicità che la massa m del peso sia molto maggiore delle altre inerzie in gioco, avremo:

$$F_x - mg = m\ddot{x} \quad (\text{XX.52})$$

oppure, sfruttando il fatto che il lavoro di F_x dipende solo dalla posizione:

$$\int_0^x F_x dx = \frac{1}{2} \frac{\Phi(0)^2}{L_0} \left(\frac{-l}{l + (\mu_r - 1)x} + 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{\Phi(0)^2}{L_0} \frac{(\mu_r - 1)x}{l + (\mu_r - 1)x} \quad (\text{XX.53})$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} \frac{(\mu_r - 1)x}{l + (\mu_r - 1)x} - mgx = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 - \dot{x}^2(0)] \quad (\text{XX.54})$$

Le condizioni iniziali nonché il valore di m determinano le modalità secondo cui il lavoro fatto dal solenoide si distribuirà fra energia potenziale della forza peso ed energia cinetica della massa. Dalla (54), per separazione delle variabili, si potrà ottenere $x = x(t)$. A questo punto il problema è completamente determinato anche dal punto di vista elettrico: infatti la seconda legge di Kirchhoff ci dice che:

$$i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{XX.55})$$

Avendo integrato la (54), è nota la dipendenza $L = L(x(t))$ e quindi anche la (55) può essere integrata e ci darà $i = i(t)$. Il problema è determinato anche nel caso in cui la costanza di Φ , per una bobina *non* superconduttrice, è ottenuta tramite un opportuno generatore di tensione $V(t)$; infatti avremo che:

$$V(t) = i(t)R \quad (\text{XX.56})$$

ovvero banalmente, $V(t)$ dovrà avere la stessa dipendenza dal tempo di $i(t)$, quella determinata dalla (55).

Se ora colleghiamo l'induttanza ad un generatore di corrente costante $i = \frac{\Phi(0)}{L_0}$ e lasciamo, come prima, penetrare completamente il nucleo otteniamo:

$$W_{mecc} = \int_0^l F_x dx = \frac{1}{2} \int_0^l i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx = \frac{1}{2} i^2 \int_{L_0}^{\mu_r L_0} dL = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} (\mu_r - 1) \quad (\text{XX.57})$$

ovvero un lavoro μ_r volte più grande che nel caso precedente (51); evidentemente il generatore di corrente ha fornito questa energia, oltre a quella associata all'incremento di energia magnetica. Se anche questa volta vogliamo conoscere in dettaglio il moto, dobbiamo scrivere l'equazione che regola la dinamica del sistema (supponiamo che esso sia lo stesso di Fig.9), valutando il lavoro fatto dalla forza F_x :

$$\int_0^x F_x dx = \frac{1}{2} i^2 [L(x) - L_0] = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} (\mu_r - 1) \frac{x}{l} \quad (\text{XX.58})$$

Avremo pertanto:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0 l} (\mu_r - 1) - mg\right) x = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 - \dot{x}^2(0)] \quad (\text{XX.59})$$

Rispetto al caso precedente, essendo $F_x = cost$, si individua una soluzione particolarmente semplice: se cioè $\dot{x}(0) \neq 0$ e se $\frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0 l} (\mu_r - 1) = mg$, ovvero se $F_x = mg$, allora il moto avviene con velocità costante $\dot{x}(0)$; se invece $F_x > mg$ si tratterà di un moto uniformemente accelerato.

Come nel caso precedente la conoscenza di \dot{x} permette di risolvere il problema anche dal punto di vista elettrico, poiché permette di risolvere l'equazione differenziale ottenuta dalla seconda legge di Kirchhoff (consideriamo il caso in cui $R \neq 0$):

$$V(t) = iR + i \frac{dL}{dt} = i \left(R + \frac{dL}{dt} \right) \quad (\text{XX.60})$$

ovvero di trovare la dipendenza di $V(t)$ dal tempo, cioè dalla ddp che si sviluppa ai capi del generatore di corrente costante i . Si noti che se siamo nel caso speciale sopra riportato di $\dot{x} = cost$, allora otteniamo $V = cost$.

Se ora consideriamo il caso in cui una induttanza è collegata ad un generatore di tensione costante con in serie una resistenza R , non riusciamo più a risolvere banalmente il problema del calcolo del lavoro meccanico, poiché questa volta né Φ , né i si mantengono costanti e non è più possibile ricondurre l'integrale del lavoro $\frac{1}{2} \int_0^l i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx$ ad una forma particolarmente semplice. Infatti i dipenderà da x e quindi da t e solo se la sua dipendenza da x o t è nota, è possibile il calcolo di W_{mecc} . La soluzione potrà venire solo dalla risoluzione del sistema che si ottiene scrivendo la seconda legge di Kirchhoff per il circuito e applicando il secondo principio della dinamica al sistema meccanico; le due equazioni non saranno cioè disaccoppiate come nei casi visti prima.

Passiamo a considerare il caso di due circuiti accoppiati induttivamente e per non perdere in generalità supponiamo che in ognuno di essi sia presente un generatore di tensione dipendente dal tempo con in serie una resistenza finita. Per l'insieme dei due circuiti possiamo scrivere:

$$\begin{cases} V_1 = i_1 R_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} \\ V_2 = i_2 R_2 + \frac{d\Phi_2}{dt} \end{cases} \quad (\text{XX.61})$$

con

$$\begin{cases} \Phi_1 = i_1 L_1 + i_2 M \\ \Phi_2 = i_2 L_2 + i_1 M \end{cases} \quad (\text{XX.62})$$

Moltiplicando ambo i membri della prima delle (61) per i_1 e entrambi i membri della seconda delle (61) per i_2 e sommando quindi membro a membro le due equazioni così ottenute, abbiamo:

$$V_1 i_1 + V_2 i_2 = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 + i_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + i_2 \frac{d\Phi_2}{dt} \quad (\text{XX.63})$$

Sostituendo le (62) nella (63) e ammettendo in generale che L_1, L_2 e M dipendano dal tempo, si ottiene:

$$V_1 i_1 + V_2 i_2 - i_1^2 R_1 - i_2^2 R_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_1^2 L_1 + \frac{1}{2} i_2^2 L_2 + i_1 i_2 M \right) + \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{dt} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{dt} + i_1 i_2 \frac{dM}{dt} \quad (\text{XX.64})$$

La (64), anche alla luce delle conclusioni dedotte nel caso di un solo circuito, può essere interpretata nel modo seguente: quello che avanza dalla potenza istantanea fornita dai generatori dopo aver

sottratto le perdite per effetto Joule (primo membro) finisce in aumento dell'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico ($W_M = \frac{1}{2}i_1^2L_1 + \frac{1}{2}i_2^2L_2 + i_1i_2M$) più eventualmente potenza meccanica $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{mecc}}{\Delta t} = \frac{1}{2}i_1^2 \frac{dL_1}{dt} + \frac{1}{2}i_2^2 \frac{dL_2}{dt} + i_1i_2 \frac{dM}{dt}$. Si noti che W_M può anche mettersi nella forma più generale

$$W_M = \frac{1}{2}i_1\Phi_1 + \frac{1}{2}i_2\Phi_2 \quad (\text{XX.65})$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica, perdendo un po' in generalità, ma avvicinandoci ai casi di effettivo interesse pratico, supponiamo che L_1, L_2 siano costanti, ovvero che i due circuiti siano ognuno per conto proprio indeformabili, ma che sia $M = M(\theta)$, ovvero che la posizione mutua dei due circuiti possa cambiare e che dipenda da una coordinata generica θ . In questo caso allora la potenza meccanica ottenibile dal nostro sistema potrà mettersi sempre nella forma:

$$\text{Potenza Meccanica} = F_\theta \dot{\theta} = i_1i_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.66})$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata la (64) (nel caso di L_1, L_2 costanti). La (66) ci dice pertanto che la forza (o il momento) F_θ ottenibile da un sistema come quello ora descritto vale:

$$F_\theta = i_1i_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} \quad (\text{XX.67})$$

La (67), per come è stata dedotta, è di validità assolutamente generale; infatti nessun tipo di ipotesi è stata invocata per i generatori V_1 e V_2 , né tantomeno per le resistenze R_1 e R_2 . Similmente a quanto visto nel caso di un solo circuito, mentre la (67) ha validità generale, l'espressione della forza generalizzata F_θ assume forme diverse (ad esempio in funzione dell'energia immagazzinata W_M) a seconda dei vincoli imposti sui generatori. Ad esempio se facciamo avvenire lo spostamento infinitesimo $\Delta\theta$ a flussi Φ_1, Φ_2 costanti avremo:

$$F_\theta = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_\Phi \quad (\text{XX.68})$$

Se invece pensiamo di tenere le correnti i_1 e i_2 costanti, troviamo, come nel caso di un solo circuito, che il lavoro fornito dai generatori contribuisce in parti uguali al lavoro meccanico e all'aumento di energia immagazzinata magnetica, talché la forza F_θ risulta esprimibile come:

$$F_\theta = + \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_i \quad (\text{XX.69})$$

Il risultato sintetizzato nella (67) può mettersi in una forma che meglio si presta ad essere utilizzata in molti casi concreti, alcuni dei quali saranno incontrati più avanti; per ottenere questa espressione, osserviamo che la derivata parziale $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ implicitamente assume che il tempo rimanga costante e pertanto, non dipendendo né i_1 né i_2 esplicitamente da θ , possiamo scrivere:

$$F_\theta = i_1i_2 \left. \frac{\partial M}{\partial \theta} \right|_t = i_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right|_t = i_2 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right|_t \quad (\text{XX.70})$$

Abbiamo esplicitamente ricordato con il simbolo $\left|_t$ che il tempo deve essere preso costante nell'operazione di derivazione parziale; ricordiamo ancora che la (70) vale in generale, come la (67), purché L_1 e L_2 siano costanti. L'utilità dell'espressione (70) si coglierà poco più avanti quando vedremo che la formula consente di ottenere una espressione della forza (o del momento) anche nel

caso in cui non sia nota l'origine del campo di induzione magnetica \vec{B} , ma si conosca soltanto il valore del flusso di \vec{B} concatenato con il circuito.

Consideriamo ora degli spostamenti finiti della posizione mutua dei due circuiti e supponiamo che la coordinata si riferisca ad una posizione angolare θ del circuito 1 rispetto ad una direzione nello spazio (ammettiamo cioè che il circuito 2 sia fisso rispetto alla direzione di riferimento dell'angolo θ). Guardiamo quindi quali sono le espressioni che si ottengono per il lavoro meccanico e - in genere - per il bilancio energetico. Supponiamo anzitutto che le correnti *siano mantenute costanti* e facciamo compiere una rotazione al circuito 1 da $\theta = \theta_i$ a $\theta = \theta_f$. Se ci chiediamo quale è il lavoro meccanico ottenibile da questo spostamento dobbiamo calcolare ($\tau_\theta = F_\theta$):

$$W_{mecc} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_\theta d\theta = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \quad (\text{XX.71})$$

Si noti che in virtù della (69), la (71) poteva anche calcolarsi direttamente come

$$W_{mecc} = W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \quad (\text{XX.72})$$

Se corrispondentemente vogliamo conoscere il lavoro fatto dai generatori (meno le perdite per effetto Joule), abbiamo dalla (61), con i_1, i_2 costanti:

$$\begin{cases} W_{gen1} = V_1 i_1 - i_1^2 R_1 = i_1 i_2 \int_0^t \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \\ W_{gen2} = V_2 i_2 - i_2^2 R_2 = i_1 i_2 \int_0^t \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \end{cases} \quad (\text{XX.73})$$

Si ritrova così che i generatori mantenendo le correnti costanti, fanno *complessivamente* un lavoro pari al doppio del lavoro meccanico ottenibile (l'altra metà è andata a finire come aumento di energia immagazzinata). Come nell'esempio del solenoide che risucchia una sbarretta di ferro, la soluzione al particolare problema elettromeccanico dipende dal sistema meccanico in cui il circuito si trova ad interagire.

Consideriamo ora il caso in cui non sia compiuto lavoro elettrico (salvo che per compensare le perdite Joule) nel circuito 2, mentre manteniamo come prima costante la corrente i_1 nella bobina mobile. Ciò significa, come abbiamo già visto, che è costante il flusso Φ_2 di \vec{B} nel circuito 2; infatti se $\frac{d\Phi_2}{dt} = 0$ abbiamo:

$$V_2 i_2 - i_2^2 R_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} \cdot i_2 = 0 \quad (\text{XX.74})$$

Questo esempio ha da una parte lo scopo di chiarire una volta di più il meccanismo di trasformazione dell'energia da una forma all'altra e il ruolo che i generatori svolgono, dall'altra di chiarire un aspetto particolarmente importante nello studio dei motori che verrà svolto successivamente. Tenendo presente quindi che i_1 e Φ_2 sono costanti possiamo calcolare il lavoro meccanico per uno spostamento finito $\theta_i \rightarrow \theta_f$, ricordando che l'espressione (67) è comunque valida:

$$W_{mecc} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_\theta d\theta = i_1 \int_{\theta_i}^{\theta_f} i_2(t) dM \quad (\text{XX.75})$$

Abbiamo portato fuori dal segno di integrazione i_1 in quanto costante. Per quanto riguarda $i_2(t)$ essa si può esprimere in funzione di Φ_2 ed M , ricordando che, per definizione:

$$\Phi_2 = i_2(t)L_2 + i_1 M \quad (\text{XX.76})$$

Pertanto

$$i_2(t) = \frac{\Phi_2}{L_2} - i_1 \frac{M}{L_2} \quad (\text{XX.77})$$

che, inserita nella (75), dà, essendo Φ_2 ed i_1 costanti:

$$W_{mecc} = i_1 \frac{\Phi_2}{L_2} [M(\theta_f) - M(\theta_i)] - i_1^2 \frac{[M^2(\theta_f) - M^2(\theta_i)]}{2L_2} \quad (\text{XX.78})$$

Calcolando la (76) per $t = t_i$ e sostituendola nella (78), otteniamo:

$$W_{mecc} = i_1 i_2(t_i) [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \left[1 - \frac{i_1 [M(\theta_f) - M(\theta_i)]}{2i_2(t_i)L_2} \right] \quad (\text{XX.79})$$

Quanto alla variazione di energia magnetica fra lo stato iniziale e quello finale abbiamo:

$$W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) = \frac{1}{2} i_1^2 L_1 + \frac{1}{2} i_2^2(t_f) L_2 + i_1 i_2(t_f) M(\theta_f) - \frac{1}{2} i_1^2 L_1 - \frac{1}{2} i_2^2(t_i) L_2 - i_1 i_2(t_i) M(\theta_i) \quad (\text{XX.80})$$

Esprimendo $i_2(t_f)$ in funzione di $i_2(t_i)$, in base alla relazione (76) che ci dice

$$\Phi_2 = i_2(t_i) L_2 + i_1 M(\theta_i) = i_2(t_f) L_2 + i_1 M(\theta_f) \quad (\text{XX.81})$$

otteniamo:

$$W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) = -i_1^2 \frac{[M^2(\theta_f) - M^2(\theta_i)]}{2L_2} \quad (\text{XX.82})$$

Quanto ai generatori, l'unico che, oltre a vincere le perdite, fa lavoro è quello del circuito 1; infatti dalla prima delle (61), tenendo presente che $i_1 = cost$, abbiamo:

$$W_{gen} = \int_{t_i}^{t_f} (V_1 i_1 - i_1^2 R_1) dt = i_1 \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (i_2(t) M) dt \quad (\text{XX.83})$$

Otteniamo così

$$W_{gen} = i_1 [i_2(t_f) M(\theta_f) - i_2(t_i) M(\theta_i)] \quad (\text{XX.84})$$

che, sfruttando la (81), può mettersi nella forma:

$$W_{gen} = i_1 i_2(t_i) [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \left(1 - \frac{i_1 M(\theta_f)}{i_2(t_i) L_2} \right) \quad (\text{XX.85})$$

Possiamo verificare la correttezza dei calcoli controllando che il lavoro dei generatori (cioè del solo generatore 1) corrisponde alla somma dell'aumento di energia magnetica e del lavoro meccanico fatto:

$$W_{gen}(\theta_i \rightarrow \theta_f) = W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) + W_{mecc}(\theta_i \rightarrow \theta_f) \quad (\text{XX.86})$$

E' facile verificare che è effettivamente così, usando le (79), (82) e (85).

Anche in questo ultimo caso esaminato il lavoro meccanico associato ad uno spostamento finito della posizione della bobina dipende solo dalla geometria; tuttavia il valore è diverso rispetto al caso in cui entrambe le correnti erano state mantenute costanti. Ciò si può fare confrontando la (79) con la (72), supponendo che per t_i , le condizioni geometriche ed elettromagnetiche siano identiche, in particolare che $i_2(t_i)$ sia uguale al valore costante i_2 del caso a cui la (72) si riferisce. La (79) ci mostra anche che la differenza fra i due casi è tanto più piccola quanto più grande è il contributo a Φ_2 derivante dal termine di autoinduzione ($i_2 L_2$) rispetto a quello di mutua induzione ($i_1 M$), cosa d'altronde assai ovvia in quanto nel caso in cui $i_1 M \ll i_2 L_2$ (per ogni t e θ) la costanza di Φ_2 si

riduce in una sostanziale costanza di i_2 ed inoltre il lavoro meccanico compiuto dal sistema è una piccola variazione dell'energia magnetica del circuito 2. Si noti che nel caso attuale non è più vero che il lavoro fatto dai generatori si equipartisce fra le due forme meccanica e magnetica come nel caso in cui i_1 e i_2 venivano mantenute costanti.

Applichiamo ora queste conclusioni su qualche esempio concreto, tenendo inoltre presente che le tecniche sviluppate in questo paragrafo si possono adoperare per lo studio dettagliato degli strumenti elettrodinamici (per esempio il wattmetro studiato nel Cap.XI), per i quali l'espressione della coppia è molto più facilmente calcolabile mediante la (70) che non tramite il calcolo diretto, partendo dalle leggi di Laplace.

4.- Un esempio di conversione di energia elettromagnetica - meccanica

Supponiamo di avere un elettromagnete come in Fig.10, e nel traferro di questo poniamo un circuito costituito da una o più spire piane che possano ruotare attorno ad un asse giacente su un piano parallelo alle espansioni polari dell'elettromagnete.

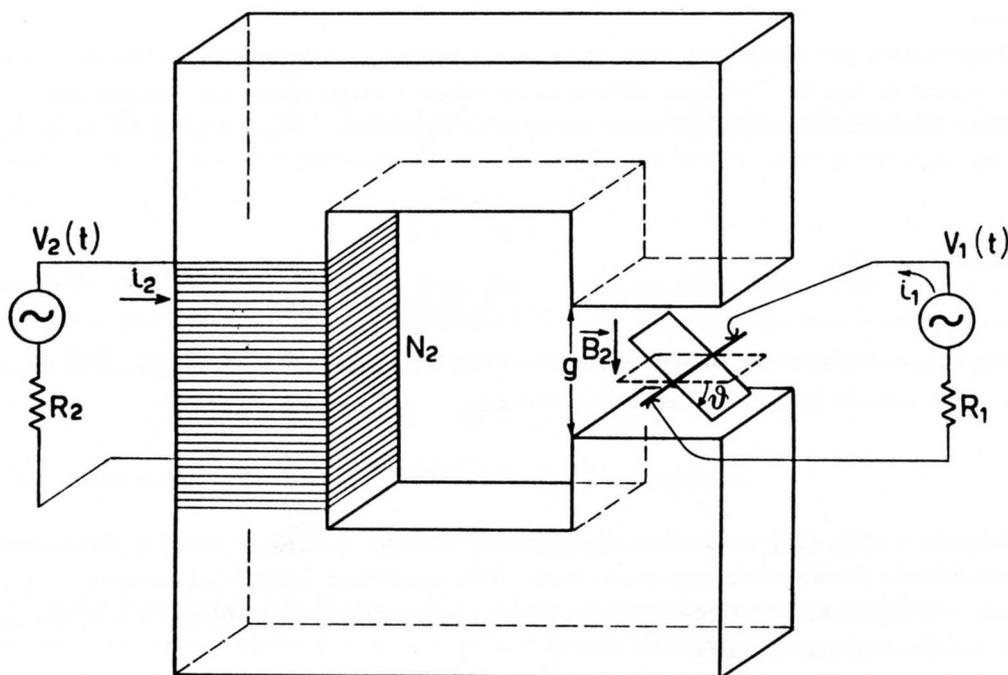


Fig.XX.10

Detta μ_r la permeabilità del ferro (supposto lineare), N_2 il numero di spire dell'avvolgimento dell'elettromagnete, l la lunghezza del circuito magnetico, σ_2 la sua sezione, g la dimensione del traferro, il teorema di Ampère (trascurando gli effetti ai bordi) assicura che:

$$N_2 i_2 = \frac{B_2 l}{\mu_r \mu_0} + \frac{B_2 g}{\mu_0} \quad (\text{XX.87})$$

ovvero:

$$B_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N_2 i_2}{l + \mu_r g} \quad (\text{XX.88})$$

Il coefficiente di autoinduzione L_2 del circuito 2 vale quindi:

$$L_2 = \frac{B_2 N_2 \sigma_2}{i_2} = \frac{\mu_r \mu_0 N_2^2 \sigma_2}{l + \mu_r g} \quad (\text{XX.89})$$

Per calcolare il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti possiamo calcolare il flusso di \vec{B}_2 attraverso il circuito 1, supposto piano, di sezione σ_1 e immerso in una zona in cui \vec{B}_2 possa ritenersi costante; detto N_1 il numero delle spire, avremo (θ è l'angolo di cui è ruotata la bobina rispetto alla direzione parallela alle facce delle espansioni polari):

$$M = \frac{B_2 N_1 \sigma_1 \cos \theta}{i_2} = \frac{\mu_r \mu_0 N_1 N_2 \sigma_1}{l + \mu_r g} \cos \theta = M_0 \cos \theta \quad (\text{XX.90})$$

Pertanto il momento τ_θ che viene esercitato sul circuito 1, vale istante per istante (vedi (67)):

$$\tau_\theta = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta \quad (\text{XX.91})$$

Siamo ora in grado di risolvere alcuni problemi di carattere *elettromeccanico* associati al nostro sistema.

Supponiamo per semplicità che i_1 e i_2 siano costanti, che la bobina mobile del circuito 1 abbia momento di inerzia \mathcal{I} attorno all'asse di rotazione e supponiamo che nessuna altra coppia sia applicata al nostro sistema meccanico. La seconda equazione cardinale della dinamica consente di scrivere:

$$\mathcal{I} \ddot{\theta} = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta \quad (\text{XX.92})$$

Ovvero, integrando:

$$\frac{1}{2} \mathcal{I} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_i^2) = i_1 i_2 M_0 (\cos \theta - \cos \theta_i) \quad (\text{XX.93})$$

La (93), che poteva ottenersi direttamente dalla (72), nient'altro è che *il principio della conservazione dell'energia*, avendo introdotto l'energia potenziale:

$$U = -i_1 i_2 M_0 \cos \theta \quad (\text{XX.94})$$

L'indice i nella (93) si riferisce alla posizione iniziale. La (93) è identica all'equazione di un pendolo fisico e pertanto con opportuna scelta delle condizioni iniziali (ad esempio $\theta_i \ll 1$, $\dot{\theta}_i = 0$) avremo un moto sostanzialmente armonico attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$, con un periodo per le piccole oscillazioni pari a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{i_1 i_2 M_0}} \quad (\text{XX.95})$$

Se consideriamo ora una rotazione completa della spira diciamo da $-\pi$ a π , la (93) ci assicura che il lavoro complessivo compiuto dalla spira sarà nullo e ciò corrisponde al fatto che nel primo mezzo giro avremo un lavoro positivo ($2i_1 i_2 M_0$) e un pari aumento dell'energia cinetica della spira; avremo viceversa un lavoro negativo nel secondo mezzo giro e la spira ritornerà nella posizione iniziale con l'energia cinetica che aveva all'inizio del moto; nel frattempo l'energia magnetica sarà passata da un minimo alla fine del primo mezzo giro e sarà necessariamente tornata al valore iniziale alla fine del moto, come deve accadere essendo $i_1 i_2$ costanti e la geometria finale identica a quella iniziale.

Come altro esempio di sistema meccanico interagente con la spira supponiamo di montare sull'asse della spira una carrucola di raggio r , mediante la quale possiamo sollevare un peso m (vedi Fig.11).

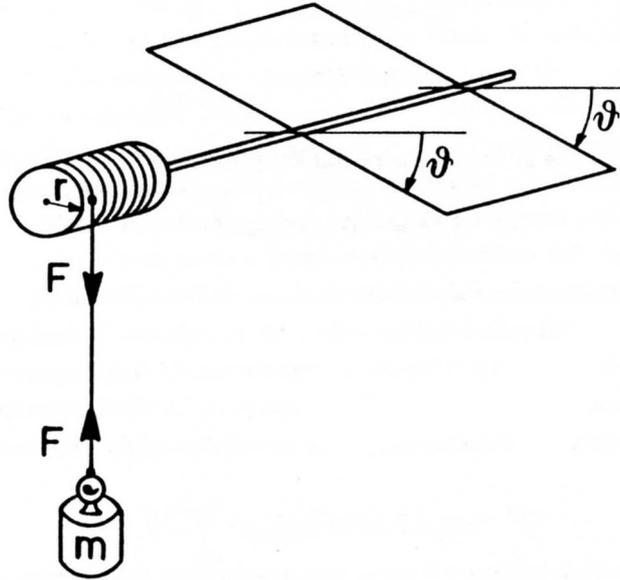


Fig.XX.11

Supponiamo di trascurare questa volta il momento di inerzia della spira, nonché della carrucola. Considerando il peso m , abbiamo pertanto, detta y la coordinata diretta come la verticale (positiva ascendente):

$$m\ddot{y} = -mg + \frac{\tau_\theta}{r} \quad (\text{XX.96})$$

con τ_θ dato dalla (91). La (96) deriva dal fatto che, avendo supposto trascurabile il momento di inerzia del meccanismo rotante la somma dei momenti ad esso applicati deve essere nullo e pertanto $F \cdot r = \tau_\theta$. La (96) è equivalente a scrivere la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_i^2) + mgr(\theta - \theta_i) - i_1 i_2 M_0 (\cos \theta - \cos \theta_i) = 0 \quad (\text{XX.97})$$

Partendo per esempio con le condizioni iniziali $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_i = 0$ abbiamo:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - i_1 i_2 M_0 \cos \theta = 0 \quad (\text{XX.98})$$

che determina l'andamento di $\dot{\theta}$ in funzione di θ . Anche in questo caso se non prendiamo qualche provvedimento opportuno, passato $\theta = 0$, la coppia si inverte di segno e si innescano delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio (sempre che $\dot{\theta}_i = 0$, altrimenti è possibile avere un moto aperiodico).

Riconsideriamo i due casi ora descritti, facendo un esempio numerico e ammettendo che la corrente i_2 nell'elettromagnete sia la stessa della corrente i_1 sulla bobina; questa condizione è molto semplice da ottenersi collegando i due circuiti in serie. Sia la sezione σ_2 dell'elettromagnete pari a 100 cm^2 e ammettiamo che la permeabilità magnetica relativa del ferro dell'elettromagnete sia $\mu_r = 5 \cdot 10^2$. Se $l = 30 \text{ cm}$, $g = 5 \text{ cm}$ e vogliamo avere un campo \vec{B}_2 dell'ordine di 0.1 T abbiamo (vedi (87)):

$$N_2 i_2 = \frac{l + \mu_r g}{\mu_r \mu_0} 0.1 \text{ T} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{spira}$$

Supponendo di disporre di un generatore di corrente costante di 1 A, ciò significherà $N_2 = 4 \cdot 10^3$ (può non essere banale dissipare la potenza prodotta per effetto Joule sull'avvolgimento). Supponiamo ora che la bobina mobile sia costituita da 100 spire quadrate di lato 4 cm. Abbiamo allora (vedi (89) e (90)):

$$L_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N_2^2 \sigma_2}{l + \mu_r g} \approx 4 \text{ H}$$

$$M_0 = \frac{\mu_r \mu_0 N_1 N_2 \sigma_1}{l + \mu_r g} \approx 16 \text{ mH}$$

Calcoliamoci ora la coppia che si può ottenere dal sistema; essa, secondo la (91), è data da:

$$\tau = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta$$

che, al massimo, in valore assoluto vale $1.6 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$. Riferendoci al primo dei due esempi fatti, possiamo dalla (94) valutare il valore del periodo delle piccole oscillazioni purché si conosca \mathcal{I} . Se per \mathcal{I} ammettiamo un valore di $4 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, magari ottenuto aggiungendo alla bobina un piccolo volano, troviamo per T un valore attorno al secondo e pertanto facilmente misurabile.

Quanto al secondo esempio si trova che per $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$ la coppia vale, come d'altronde abbiamo già visto:

$$\tau(\theta = -\frac{\pi}{2}) = i_1 i_2 M_0 = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pertanto, affinché sia possibile sollevare il peso, esso dovrà essere tale da opporre una coppia inferiore a τ . Per esempio un peso da 20 g posto su una carrucola di raggio $r = 5 \text{ cm}$ dà

$$mgr \approx 9.8 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

e pertanto viene sollevato. Il sistema si presta anche a misurare la coppia τ_θ : infatti appesa alla carrucola una massa m , la spira si posizionerà ad un angolo θ (supponiamo che le oscillazioni si siano smorzate) tale per cui si avrà l'equilibrio fra la coppia della forza peso e quella elettromeccanica; avremo allora:

$$mgr = \tau_\theta = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta \quad (\text{XX.99})$$

La misura del periodo T (nel primo esempio) e di θ (nel secondo) consentono quindi - noti che siano o \mathcal{I} o mr rispettivamente - di risalire al valore di M_0 , sempre che $i_1 = i_2$ siano misurate.

Se al posto dell'elettromagnete si usa ora un magnete permanente che produca un campo omogeneo \vec{B} (diretto perpendicolarmente alle facce delle espansioni polari, supposte parallele), non potremo più sfruttare la schematizzazione adottata nel caso dell'elettromagnete, definendo un coefficiente di mutua induzione $M(\theta)$. Potremo però, coerentemente con quanto fatto vedere nel paragrafo precedente (vedi(70)) fare comparire esplicitamente nell'espressione della coppia la derivata parziale del flusso Φ_1 :

$$\tau_\theta = i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \quad (\text{XX.100})$$

calcolando Φ_1 come (usando le solite notazioni):

$$\Phi_1 = i_1 L_1 + B N_1 \sigma_1 \cos \theta \quad (\text{XX.101})$$

Si osserva che l'unico contributo alla derivata parziale proviene dal secondo termine della (101) e che esso vale: $-B N_1 \sigma_1 \sin \theta$; pertanto:

$$\tau_\theta = -i_1 B N_1 \sigma_1 \sin \theta \quad (\text{XX.102})$$

Tutte le conclusioni svolte precedentemente, sia a proposito del periodo T che della coppia τ , continuano a valere purché si sostituisca a $i_2 M_0$, $BN_1 \sigma_1$. Abbiamo così la possibilità di misurare il campo di induzione magnetica \vec{B} tramite misure di tempo e di angoli. Si noti che le misure sono *assolute*.

Nel caso del magnete permanente continuano a valere le espressioni di T e τ ricavate nell'ipotesi di presenza di generatori in entrambi i circuiti, poiché si tratta in sostanza di misure *statiche*, in cui interviene il valore di τ_θ calcolato per un certo θ e non entro un campo finito di valori di θ ; per la seconda misura (peso attaccato alla carrucola) ciò è ovvio perché effettivamente si tratta di una misura statica; per quanto riguarda la misura di T ciò è meno palese, ma se si ricorda che si tratta di piccole oscillazioni attorno ad una posizione in cui M è massimo, il fatto è nuovamente del tutto comprensibile. Tutte le considerazioni svolte nel paragrafo precedente sulla distinzione fra il caso a correnti costanti o a corrente e flusso costanti servono nel caso in cui gli spostamenti siano finiti. Se ad esempio le oscillazioni non sono più piccole e se si vuole studiare l'andamento della velocità angolare della spira o lineare del pesino per variazioni finite di θ , allora le formule (93) e (98) rispettivamente sono corrette solo se le correnti sono mantenute costanti; altrimenti esse andrebbero modificate, poiché in genere non sarà più possibile definire una energia potenziale (cioè funzione solo del punto) associata alla coppia elettromeccanica, ma il lavoro di τ_θ dovrà esplicitamente essere calcolato come:

$$- \int_{\theta_i}^{\theta_f} i_1(t) i_2(t) M_0 \sin \theta d\theta$$

Infine una considerazione sul magnete permanente: può essere assai complicato schematizzare correttamente il comportamento di un magnete permanente quando interagisce con un circuito mobile come negli esempi sopra descritti. Infatti a cosa equivale un magnete permanente? Ad un solenoide percorso da corrente costante, ad un solenoide che lavora a flusso costante o a nessuna di questi due schematizzazioni? L'ultima risposta è ovviamente la più corretta e per descrivere correttamente il sistema dovremmo innanzitutto conoscere la dinamica, andare a calcolare i campi magnetici prodotti dal movimento del circuito e, tenendo anche conto delle cariche *smagnetizzanti* presenti sulle facce delle espansioni polari, andare a valutare \vec{B} nel posto occupato dal circuito 1. Questa procedura che, si badi bene, dovrebbe teoricamente applicarsi tutte le volte che in un sistema magnetico è presente del ferro, è estremamente laboriosa e complicata. In molti casi, in particolare quelli in cui l'energia immagazzinata nel magnete permanente sotto forma di campo magnetico è molto grande rispetto all'energia meccanica sviluppata nel moto (ovvero quando si verificano condizioni del tipo visto precedentemente nel caso di flusso Φ_2 costante, formule (79), (82), (85)), una buona approssimazione consiste nell'assimilare il magnete permanente ad un solenoide percorso da corrente costante, ovvero un sistema che mantiene \vec{B} costante. Vedremo nel seguito che questa è ad esempio l'approssimazione che viene comunemente fatta nel caso del moto del galvanometro.

5.— Un generatore di tensione alternata

Consideriamo il primo esempio di sistema elettromeccanico del paragrafo precedente e supponiamo che la bobina sia collegata mediante due contatti striscianti ad un circuito esterno (circuito 1) che per semplicità supponiamo puramente resistivo. Nessun generatore esterno è collegato in serie a questo circuito. Supponendo che il campo \vec{B}_2 esterno sia mantenuto costante (o mediante

un magnete permanente o mediante un circuito, come in Fig.10, dotato di eccitazione con corrente costante), mettiamo in rotazione per mezzo di un motore la bobina e facciamo in modo di mantenere costante la velocità angolare $\dot{\theta}$.

Cerchiamo di determinare l'andamento in funzione del tempo di $i_1(t)$. Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff al circuito 1:

$$-\frac{d\Phi_1}{dt} = i_1 R_1 \quad (\text{XX.103})$$

con

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + B_2 N_1 \sigma_1 \cos \theta \quad (\text{XX.104})$$

(vedi (90)). Se ammettiamo che $\dot{\theta} = \omega = \text{cost}$ allora dalle (103) e (104) abbiamo:

$$B_2 N_1 \sigma_1 \omega \sin(\omega t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 \quad (\text{XX.105})$$

ovvero nel nostro circuito si trova ad agire una forza elettromotrice $B_2 N_1 \sigma_1 \omega \sin \omega t$ sinusoidale con pulsazione ω . Sappiamo allora che la soluzione per i_1 sarà del tipo:

$$i_1 = i_{10} \sin(\omega t + \alpha) \quad (\text{XX.106})$$

cioè sinusoidale, con pulsazione ω . Dalla teoria delle reti lineari in regime sinusoidale, sappiamo anche che α è compreso tra $\pm \frac{\pi}{2}$, a seconda del tipo di carico del circuito 1; noi abbiamo ammesso che il carico esterno sia puramente resistivo per cui $\alpha = \text{atan} -\frac{\omega L_1}{R_1}$. Abbiamo così realizzato un generatore di ddp sinusoidale - estremamente semplificato per la verità - in grado di erogare nel circuito di utilizzo (R_1 , la serie della resistenza interna della bobina con la resistenza di carico vera e propria) una certa potenza. Se ci chiediamo chi fornisce questa potenza, la risposta è ovvia: è il motore che fa girare la spira. E' tuttavia interessante verificare ciò direttamente, mediante un bilancio energetico, anche per comprendere meglio il ruolo che gioca il campo B_2 . Per fare il bilancio energetico è utile considerare un periodo completo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ in modo da avere la bobina nella stessa posizione sia all'inizio che alla fine dell'intervallo, nonché lo stesso valore della corrente i_1 ; è comodo considerare il lavoro in un periodo T anche perché sarà semplice confrontarlo poi con la potenza media dissipata nel circuito. Quanto al lavoro meccanico abbiamo (vedi (70)):

$$\Delta W_{mecc}^T = \int_0^T \tau_\theta \dot{\theta} dt = \int_0^T i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega dt \quad (\text{XX.107})$$

Ricavando $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}$ dalla (104) e sostituendola nella (107), otteniamo:

$$\Delta W_{mecc}^T = -B_2 N_1 \sigma_1 \omega \int_0^T i_{10} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t) dt \quad (\text{XX.108})$$

che in genere avrà un valore (negativo poiché $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) non nullo. Il fatto che tale lavoro risulti negativo sta a significare che esso è *ricevuto* dalla bobina. Consideriamo ora la potenza dissipata nel circuito 1. Ricordiamo che la (105) può scriversi nella forma:

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 \quad (\text{XX.109})$$

e pertanto la potenza dissipata sul carico complessivo R_1 si può ottenere come:

$$i_1^2 R_1 = -i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega - L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \quad (\text{XX.110})$$

Per ottenere l'energia complessiva dissipata in un periodo dobbiamo integrare la (110):

$$\int_0^T i_1^2 R_1 dt = - \int_0^T i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega dt - \int_0^T L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt \quad (\text{XX.111})$$

Il secondo integrale a secondo membro è manifestamente nullo in quanto $i_1^2(T) = i_1^2(0)$ poiché i_1 è periodica con periodo T . Abbiamo così (vedi (107)):

$$\int_0^T i_1^2 R_1 dt = - \int_0^T i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega dt \quad (\text{XX.112})$$

Essa ci dice che l'energia dissipata in un ciclo, pari al lavoro fatto dal generatore di fem $-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega$, coincide col lavoro meccanico ricevuto dalla spira ($-\Delta W_{mecc}^T$) in un periodo, ovvero col lavoro fatto dal motore per mantenere la spira a velocità ω costante; delle quattro voci che abbiamo finora considerato per valutare il bilancio energetico (1): la potenza dissipata sulla resistenza R_1 , 2): il lavoro elettrico fatto dal generatore di fem $-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega$, 3): il lavoro meccanico fatto dalla spira e 4): quello del motore), i contributi 2) e 3) si compensano esattamente, cioè la spira fa da puro tramite per il trasferimento di energia dal motore al carico. Poiché il bilancio è soddisfatto, le altre voci devono dare contributo nullo. Infatti, l'energia accumulata sotto forma di campo magnetico non cambia fra $t = 0$ e $t = T$ poiché ad essa contribuiscono termini che sono o costanti (\vec{B}_2) o prodotto di termini periodici (con periodo T):

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + i_1 B_2 N_1 \sigma_1 \cos \omega t + W_{B_2} \quad (\text{XX.113})$$

dove W_{B_2} indica il termine di energia immagazzinata nel campo \vec{B}_2 (se si tratta di un solenoide avvolto su ferro dolce, questo termine è esprimibile come $\frac{1}{2} L i_2^2$, mentre se si tratta di un magnete permanente l'espressione dell'energia immagazzinata avrà una forma diversa, ma comunque costante). Se il campo \vec{B}_2 è prodotto da un magnete permanente non vi sono altre possibili forme di energia da considerare. Se viceversa \vec{B}_2 è prodotto da un generatore di corrente costante i_2 , dovremo considerare anche il lavoro fatto da questo generatore per mantenere costante entro tutto il periodo i_2 : per il circuito 2 possiamo scrivere la seconda legge di Kirchhoff, indicando con $V_2(t)$ la ddp ai capi del generatore di corrente:

$$V_2(t) = i_2 R_2 + \frac{d\Phi_2}{dt} = i_2 R_2 + \frac{d(M i_1)}{dt} \quad (\text{XX.114})$$

Il lavoro che il generatore deve quindi compiere in un periodo T vale:

$$\int_0^T V_2(t) i_2 dt = \int_0^T i_2^2 R_2 dt + \int_0^T i_2 \frac{d(M i_1)}{dt} dt \quad (\text{XX.115})$$

Il secondo integrale del membro di destra è nullo a motivo del fatto che sia i_1 che M sono periodici con periodo T e i_2 è costante. Abbiamo così che il generatore si deve solo preoccupare di vincere le perdite Joule nel suo circuito e quindi non interagisce di fatto col resto del sistema.

Concludendo, il nostro generatore *trasforma* l'energia meccanica fornita dal motore che mantiene costante la velocità angolare della bobina, in energia elettrica. Il campo di induzione magnetica \vec{B}_2 *consente* questa *trasformazione* di energia, ma in media *non assorbe né cede lavoro*.

Infine si osservi che, usando il metodo simbolico, la spira si comporta come un generatore di fem pari a $B_2 N_1 \sigma_1 \omega \exp j(\omega t - \frac{\pi}{2})$ con una impedenza interna pari a $\mathcal{Z}_i = R_i + j\omega L_1$, con R_i resistenza

dell'avvolgimento (in genere si cerca di fare in modo che il modulo di Z_i sia piccolo rispetto al modulo dell'impedenza del carico).

6.— Galvanometro e bilancio energetico

Modificando leggermente il sistema elettromeccanico di Fig.10, otteniamo la configurazione caratteristica di un galvanometro (Fig.12).

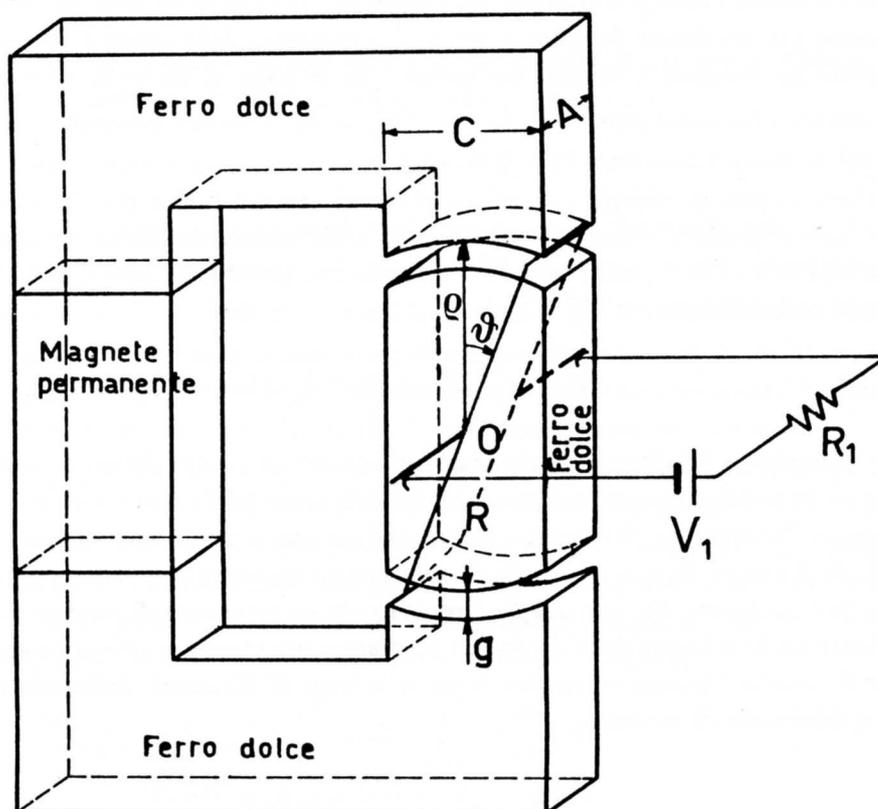


Fig.XX.12

Il circuito magnetico è costituito in modo tale da avere due traferri molto sottili (g) e sagomati in modo che le facce polari siano superfici cilindriche aventi l'asse coincidente con l'asse di rotazione della spira rettangolare libera di muoversi nello spazio delle due espansioni polari. Il pezzo di ferro dolce fra le due espansioni polari è tenuto in posizione da un supporto amagnetico non mostrato in figura. Le dimensioni della bobina (N spire) siano $2R$ ed a , con a lunghezza dei lati che si muovono fra le espansioni polari. Se il raggio R è molto maggiore dello spessore del traferro g , allora il campo \vec{B}_r nel traferro, tutto diretto verso l'asse, è, con approssimazione molto buona, costante in modulo. Il flusso di \vec{B}_r concatenato con la spira mobile varrà (vedi Cap. II, §4):

$$\Phi(\vec{B}_r) = B_r \cdot N2R\theta A = B_r N S' \theta \quad (\text{XX.116})$$

dove si è indicata esplicitamente la superficie S' efficace a raccogliere le linee di flusso di \vec{B}_r ; θ denota l'angolo indicato in figura e vale 0 per la direzione secondo il lato lungo del circuito magnetico. Si noti che la differenza fra S e S' deriva dal fatto che solo la lunghezza pari a A del tratto a è interessata al flusso.

Dettagli della geometria delle espansioni polari possono alterare la dipendenza di $\Phi(\vec{B}_r)$; se però l'unico grado di libertà è θ , ovvero la rotazione della spira attorno ad un asse fisso, allora, indipendentemente dalla struttura (da cui dipenderà però G), avremo comunque:

$$\Phi(\vec{B}_r) = G\theta \quad (\text{XX.117})$$

cioè Φ proporzionale a θ . A questo punto, partendo da certe condizioni iniziali, siamo in grado di risolvere la dinamica del moto della nostra bobina, supposta avere momento di inerzia \mathcal{I} attorno all'asse fisso di rotazione e ammettendo che esista una coppia elastica di richiamo che tende a riportare θ a 0 ($\tau_e = -E\theta$) e un attrito di tipo viscoso ($\tau_v = -C\dot{\theta}$). La seconda equazione della dinamica ci dice:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -E\theta - C\dot{\theta} + i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \quad (\text{XX.118})$$

L'ultimo termine rappresenta la coppia τ_θ cui è sottoposta la bobina a causa della corrente i_1 che vi circola (70). D'altronde abbiamo:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + \Phi(\vec{B}_r) = L_1 i_1 + G\theta \quad (\text{XX.119})$$

con L_1 coefficiente di autoinduzione della bobina e quindi

$$\tau_\theta = i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = G i_1 \quad (\text{XX.120})$$

Ritroviamo così il risultato che è stato ricavato nel Cap.II, calcolando esplicitamente la coppia τ_θ , facendo ricorso alla seconda legge di Laplace. La (118) allora si può scrivere:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta = G i_1 \quad (\text{XX.121})$$

Resta ora da esprimere i_1 in funzione dei parametri del circuito e definire le condizioni iniziali. Supponiamo che per $t = 0$ venga chiuso un tasto in serie al nostro circuito e ammettiamo che il sistema per $t = 0$ sia a riposo: $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Se supponiamo che nel circuito sia presente un generatore di tensione V_1 (non necessariamente costante), la seconda legge di Kirchhoff ci assicura che per $t > 0$:

$$V_1 = i_1 R_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} \quad (\text{XX.122})$$

che a causa della (119) può anche porsi nella forma:

$$V_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.123})$$

Si osservi che nella derivata di Φ_1 rispetto al tempo si è ammesso che B_r (e quindi G) rimanga costante. Ciò in pratica corrisponde ad ammettere che le variazioni di \vec{H} prodotte dalla corrente i_1 e dal moto della bobina, non alterino il valore del campo \vec{B}_r all'interno del magnete permanente; questo, se $H \ll H_c$ forza coercitiva (vedi Cap.XIX,§4), è senz'altro una ottima approssimazione. Abbiamo quindi un sistema di due equazioni differenziali:

$$\begin{cases} V_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \\ \mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta = G i_1 \end{cases} \quad (\text{XX.124})$$

Se ricaviamo i_1 dalla seconda in funzione di θ e delle sue derivate e sostituiamo queste espressioni nella prima, otteniamo:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} + \left(C + \frac{G^2}{R_1}\right)\dot{\theta} + E\theta + \frac{L_1}{R_1} \frac{d}{dt}(\mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta) = \frac{GV_1}{R_1} \quad (\text{XX.125})$$

Rispetto al Cap.II, §4, l'equazione differenziale che regola il moto è differente a causa del termine $\frac{L_1}{R_1} \frac{di_1}{dt}$; esso a sua volta deriva dall'aver *correttamente* considerato, nello scrivere la seconda legge di Kirchhoff, anche il termine di autoinduzione che viceversa era stato trascurato nel Cap.II. Nei casi pratici, per V_1 costante, tale termine è effettivamente trascurabile; per rendersene conto proviamo a fare un ragionamento di autoconsistenza. Ammettiamo cioè che tale termine sia trascurabile; la soluzione è allora quella a suo tempo trovata (Cap.II, formule (15), (16) e (17)) e si tratterà di un moto oscillatorio o no a seconda del valore di R_1 , maggiore o minore della resistenza critica R_c , comunque con asintoto pari a $\theta_f = \frac{GV_1}{R_1 E}$. In ogni caso è possibile calcolare $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ nonché ovviamente θ . Sostituendo i valori così trovati nella (125), si può valutare l'influsso del termine trascurato $\frac{L_1}{R_1} \frac{d}{dt}(\mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta)$. Si trova allora che l'approssimazione fatta è tanto migliore quanto più

$$\frac{L_1}{R_1} \Omega \ll 1 \quad , \quad \Omega = \sqrt{\frac{E}{\mathcal{I}}} \quad (\text{XX.126})$$

Cerchiamo di interpretare questa limitazione: la fem che istante per istante è applicata al nostro circuito consiste, secondo la (123) e trascurando il termine di autoinduzione, di due termini, di cui uno (V_1) costante e l'altro ($G\dot{\theta}$) approssimativamente sinusoidale (nel caso di moto oscillatorio) con periodo $\omega \approx \Omega = \sqrt{\frac{E}{\mathcal{I}}}$. La (126) ci dice quindi che se ωL_1 (l'impedenza associata alla induttanza L_1 alla frequenza ω) è molto minore di R_1 , allora potremo calcolarci i_1 dimenticandoci del contributo all'impedenza derivante da L_1 . Nei casi reali - ammettendo che R_1 sia comunque dell'ordine di qualche Ohm - e $\omega \approx 1 \text{ s}^{-1}$, per valori di L_1 anche dell'ordine del mH (ma spesso l'induttanza L_1 sarà minore) l'approssimazione che si fa considerando nullo il valore di L_1 risulta più che buona (correzione dell'ordine dello 0.1%).

Finora non è molto chiaro quale sia stato il vantaggio, sempre che esista, nell'aver usato l'approccio attuale anziché quello svolto a suo tempo; oltretutto la soddisfazione di aver trovato un termine che ci era sfuggito nell'analisi del Cap.II è molto mitigata dal fatto che si tratta di un termine quasi sempre trascurabile, di cui oltretutto ci saremmo potuti accorgere anche con l'altra procedura, scrivendo correttamente la seconda legge di Kirchhoff. Il vantaggio del metodo svolto in questo capitolo è quello di consentire una valutazione abbastanza immediata del bilancio energetico del nostro sistema elettromeccanico. Per far ciò consideriamo quindi il galvanometro nella condizione iniziale e finale ($\theta_i = 0$, $\theta_f = \frac{GV_1}{R_1 E}$, $i_1(0) = 0$ e $i_1(\infty) = \frac{V_1}{R_1}$) e valutiamo le varie voci che contribuiscono al bilancio.

Lavoro effettuato dal generatore meno le perdite Joule (vedi (123)):

$$\begin{aligned} W_{gen_1} &= \int_0^\infty (V_1 i_1 - i_1^2 R_1) dt = \int_0^\infty L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt + \int_0^\infty i_1 G \dot{\theta} dt = \\ &= \frac{1}{2} L_1 [i_1^2(\infty) - i_1^2(0)] + G [i_1(\infty) \theta_f - i_1(0) \theta_i] - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{2} L_1 \frac{V_1^2}{R_1^2} + \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt \end{aligned} \quad (\text{XX.127})$$

Variazione dell'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico:

$$\Delta W_M = \frac{1}{2} L_1 [i_1^2(\infty) - i_1^2(0)] + G [i_1(\infty)\theta_f - i_1(0)\theta_i] = \frac{1}{2} L_1 \frac{V_1^2}{R_1^2} + \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} \quad (\text{XX.128})$$

Per ricavare la (128) abbiamo usato la (65) e la (119), tenendo conto che un termine pari a $\frac{1}{2} G i_1 \theta$ proviene dall'interazione del campo \vec{B}_r con il campo prodotto dalla corrente i_1 , mentre il termine di interazione di \vec{B}_r con se stesso resta costante.

Lavoro fatto dalla bobina (70):

$$\begin{aligned} W_{mecc} &= \int_0^\infty \tau \dot{\theta} dt = \int_0^\infty G i_1 \dot{\theta} dt = G [i_1(\infty)\theta_f - i_1(0)\theta_i] - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt = \\ &= \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt \end{aligned} \quad (\text{XX.129})$$

Sembrirebbe che avessimo considerato tutte le voci che possono contribuire al bilancio energetico del nostro sistema, ma non è così tant'è vero che se proviamo a comporre questo bilancio:

$$W_{gen_1} = \Delta W_M + W_{mecc} \quad (\text{XX.130})$$

troviamo che manca, fra le voci attive, cioè nel membro di sinistra, un termine pari a $\frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E}$. Questo contributo effettivamente manca e deriva da una voce "subdolamente" sfuggita, cioè dal magnete permanente, o meglio dal quel *modello* di magnete permanente che ci siamo creati. Infatti abbiamo supposto che il modulo del campo \vec{B}_r si mantenesse costante durante tutto il moto, e se ciò avviene, questo *richiede* un lavoro. Di fatto, se avessimo ottenuto lo stesso risultato (B_r costante) mediante un solenoide avvolto sul giogo di ferro al posto del magnete permanente, avremmo dovuto mantenere la corrente (i_2) su questo avvolgimento costante e il generatore ivi montato avrebbe dovuto compiere un lavoro (meno le perdite Joule) pari a:

$$W_{gen_2} = \int_0^\infty (V_2 i_2 - i_2^2 R_2) dt = i_2 \int_0^\infty \frac{d}{dt} (M i_1) dt = i_1 i_2 M \quad (\text{XX.131})$$

ottenibile dalla seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito 2: $V_2 = i_2 R_2 + \frac{d}{dt} (M i_1)$. D'altronde il coefficiente di mutua induzione M si può calcolare in base alla (119) e ricordando che per definizione: $\Phi(\vec{B}_r) = i_2 M = G \theta$. Sostituendo $M = \frac{G \theta}{i_2}$ nella (131) otteniamo:

$$W_{gen_2} = G i_1(\infty) \theta_f = \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} \quad (\text{XX.132})$$

proprio il termine mancante al bilancio (130) che correttamente (e già lo sapevamo, per la verità) andava scritto:

$$W_{gen_1} + W_{gen_2} = \Delta W_M + W_{mecc} \quad (\text{XX.133})$$

Ora secondo il nostro modello di magnete permanente (B_r costante) tale lavoro deve essere fatto da qualche agente; non si tratterà di un generatore - che non esiste all'interno del magnete - ma comunque dell'energia verrà sottratta a quella congerie di domini magnetici che costituisce il magnete permanente. Ci consoli il fatto che, in genere, questa richiesta di energia è modesta, rispetto a quella immagazzinata sotto forma di campo di induzione magnetica \vec{B}_r corrispondente al termine $\frac{1}{2} L_2 i_2^2$ se \vec{B}_r fosse prodotto da una corrente e che noi non abbiamo mai fatto intervenire nel bilancio proprio

perché costante. Ci consoli anche di più il fatto che, togliendo l'eccitazione alla bobina mobile e lasciando tornare il sistema alle condizioni iniziali, restituiamo al magnete quella energia sottratta nella fase di eccitazione come ci si può facilmente rendere conto scrivendo il bilancio energetico per la fase in cui si cortocircuita il generatore di tensione e si lascia tornare la bobina nella condizione iniziale.

Queste ultime considerazioni saranno utili quando considereremo - nel paragrafo successivo - praticamente lo stesso sistema elettromeccanico ora studiato (galvanometro di Deprez - d'Arsonval), ma con alcune piccole, ma sostanziali, modifiche che ne fanno un *motore in corrente continua*.

7.- Un motore in continua

Ridisegniamo nella Fig.13 il particolare della bobina mobile del sistema di Fig.12. La bobina è riportata in due posizioni ($-\theta_M, \theta_M$) che supponiamo essere quelle *limite* per le quali il campo \vec{B}_r è ancora costante in modulo e tutto radiale.

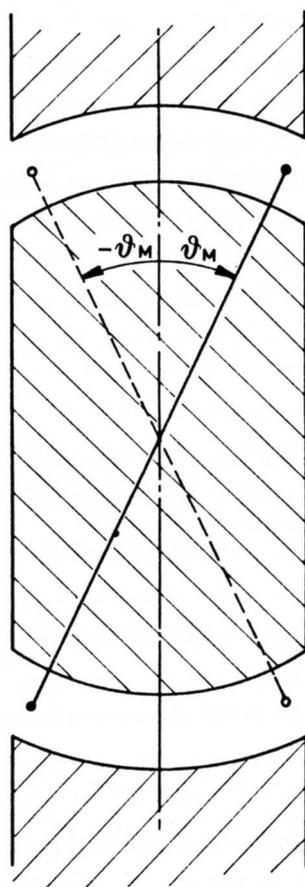


Fig.XX.13

In base alle conclusioni tratte nel paragrafo precedente sappiamo che, detto \mathcal{I} il momento di inerzia dell'equipaggio rotante e detta $-K$ la coppia resistente (con K positivo) associata al lavoro

meccanico che vogliamo produrre (nel caso del galvanometro $-K = -E\theta - C\dot{\theta}$) avremo:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -K + \tau \quad (\text{XX.134})$$

con τ dato dalla (120) ovvero $\tau = Gi_1$. La potenza meccanica istantanea prodotta dal nostro sistema vale allora:

$$P_{mecc} = \frac{d}{dt}(W_{mecc}) = \tau \cdot \dot{\theta} = \mathcal{I}\dot{\theta}\ddot{\theta} + K\dot{\theta} \quad (\text{XX.135})$$

In quasi tutte le applicazioni pratiche un sistema come quello descritto è poco adatto a produrre lavoro meccanico: in genere è infatti richiesto un movimento rotatorio continuo di un albero al quale, tramite cinghie o ingranaggi, sia possibile accoppiare i sistemi da porre in movimento. Una semplice modifica al nostro sistema consente di ottenere un moto rotatorio (sempre nello stesso verso) dell'albero: su di questo non sia montata una sola bobina ma una *stella* di n bobine tutte uguali fra loro, ma sfasate ognuna rispetto all'altra di un angolo $\varphi_B \leq 2\theta_M$ e tali che $n\varphi_B = \pi$. Nella Fig.14 è mostrata la sezione dell'insieme delle bobine (detto *rotore*) in un piano perpendicolare all'asse.

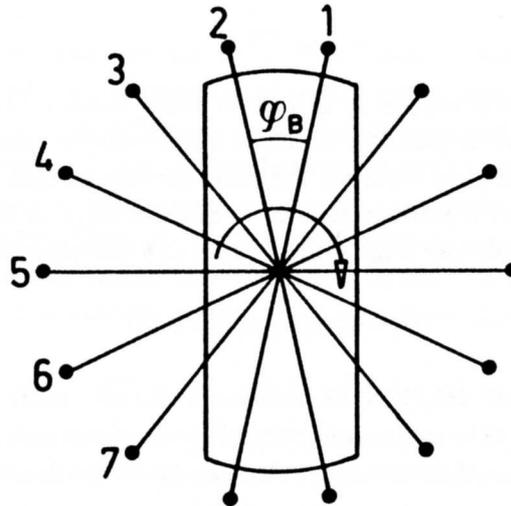


Fig.XX.14

Inoltre sull'albero esiste un sistema di contatti (detto *collettore*), posti in serie ad ognuna delle n bobine che provvede a inserire, mediante collegamenti striscianti (*spazzole*), una sola per volta le bobine in serie ai terminali del generatore; precisamente il sistema è tale che collega al generatore sempre e soltanto quella bobina che si trova a passare fra le espansioni polari; non appena che essa tende - ruotando solidalmente con l'albero - ad uscire dalle espansioni polari, ovvero prima ancora di superare l'angolo critico θ_M ($\varphi_B < 2\theta_M$), la spira successiva è già entrata all'altro estremo dell'espansione e il collettore provvede automaticamente a aprire il collegamento con la bobina uscente e a collegare quella entrante (nella Fig.14 si tratterebbe delle spire 1 e 2). Un sistema per realizzare il collettore è riportato nella Fig.15 nel caso semplificato di solo 2 spire (caso che richiederebbe delle espansioni polari con apertura $\theta_M > 90^\circ$).

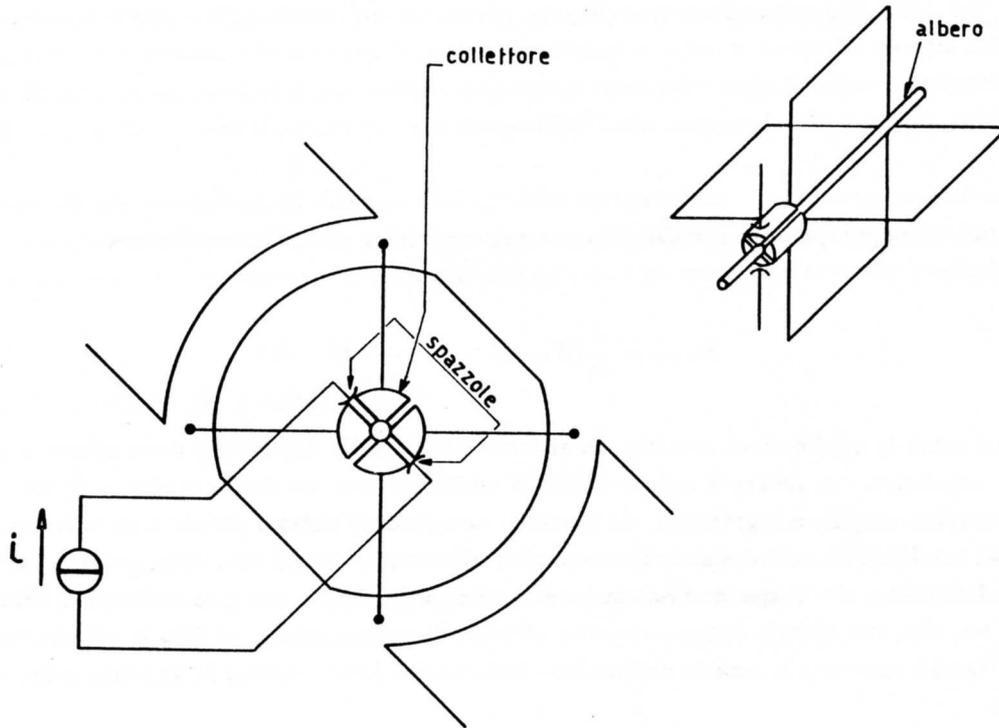


Fig.XX.15

Con questo accorgimento la coppia ha sempre lo stesso segno e pertanto abbiamo a che fare con un vero e proprio motore. A parte gli istanti in cui avviene la commutazione fra una bobina e l'altra (che studieremo meglio nel seguito), il generatore vede sempre lo stesso circuito (tutte le bobine sono identiche fra loro) e potremo scrivere la seconda legge di Kirchhoff per una posizione generica del circuito (escludendo per il momento i valori di θ per cui avviene la commutazione):

$$V_1 - i_1 R_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.136})$$

La validità della (136) discende dal fatto che abbiamo ammesso - come nel paragrafo precedente - che il modulo di \vec{B}_r (il campo di induzione nel traferro) rimanga costante e che per ogni bobina (la s -esima) in quell'istante collegata al generatore, la derivata totale del flusso di \vec{B} con essa concatenato valga:

$$\frac{d}{dt} \Phi_s = L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.137})$$

dove con θ abbiamo al solito indicato l'angolo che una direzione solidale al rotore forma con una direzione fissa nello spazio. Similmente la coppia τ applicata al rotore vale per ogni valore di θ :

$$\tau = i_1 \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} = G i_1 \quad (\text{XX.138})$$

dove i_1 è la corrente che sta circolando nella bobina inserita.

Consideriamo ora il motore alimentato a corrente costante i_1 : se la corrente è mantenuta costante dal generatore V_1 , anche la coppia $\tau = G i_1$ sarà costante. La conoscenza della coppia resistente $-K$ consentirà di determinare la velocità di regime $\dot{\theta}_R$ che il sistema raggiunge (che si raggiunga una velocità di regime è cosa ovvia, non fosse altro perché un contributo alla coppia $-K$ certamente deriva dagli attriti). Una volta raggiunta tale velocità limite possiamo studiare in dettaglio il bilancio di energia del nostro sistema, anche tenendo conto delle fasi di commutazione. Ammettendo

che la costanza di B_r sia assicurata da un generatore di corrente i_2 sull'avvolgimento del circuito magnetico, consideriamo il lasso di tempo durante il quale la bobina s -esima percorre il tratto fra le espansioni polari ed è quindi collegata al generatore V_1 ; la variazione angolare da considerare è quindi $-\frac{\varphi_B}{2} \div \frac{\varphi_B}{2}$. Il lavoro fatto dal generatore 1 (meno le perdite Joule) ammonta a:

$$W_{gen_1}\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = \int_{t_i}^{t_f} (V_1 i_1 - i_1^2 R_1) dt = i_1 \int_{t_i}^{t_f} G \dot{\theta} dt = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.139})$$

dove si è sfruttata la (136), tenendo conto che $\frac{di_1}{dt} = 0$.

Quanto al generatore 2 (vedi (131) e (132)), tenendo conto che i_1 e i_2 sono costanti:

$$W_{gen_2}\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = \int_{t_i}^{t_f} (V_2 i_2 - i_1^2 R_2) dt = i_1 i_2 \int_{t_i}^{t_f} \frac{dM}{dt} dt = i_1 \int_{t_i}^{t_f} G \dot{\theta} dt = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.140})$$

Quanto alla variazione di energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico, essendo i_1 e i_2 costanti avremo:

$$\Delta W_M\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.141})$$

Quanto al lavoro fatto verso l'esterno, esso vale:

$$W_{mecc}\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = \int_{t_i}^{t_f} \tau \dot{\theta} dt = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.142})$$

A questo punto interviene la commutazione del circuito 1 dalla bobina s -esima alla bobina $s + 1$ -esima che supponiamo avvenga in un tempo infinitamente breve: in questa commutazione possono intervenire cambiamenti di energia nelle varie voci e tali cambiamenti, se esistono, sono repentini quanto la commutazione; tuttavia l'energia complessiva non può cambiare perché i generatori sono chiusi su resistenze finite e conseguentemente possono erogare quantità finite di energia solo in un tempo finito e non in uno infinitesimo. Durante la commutazione l'energia accumulata sotto forma di campo magnetico cambierà in quanto la commutazione dalla bobina s -esima alla $(s + 1)$ -esima in pratica riporta una spira identica alla s -esima nella condizione iniziale a $-\frac{\varphi_B}{2}$ e ciò modifica il termine $i_1 i_2 M$ di

$$\Delta W_M(t_f^- \rightarrow t_f^+) = i_1 i_2 \left[M(t_f^+) - M(t_f^-) \right] = -i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.143})$$

ovvero riporta W_M al valore che aveva quando la spira s -esima occupava la posizione attualmente occupata dalla spira $(s + 1)$ -esima (t_f^- rappresenta l'istante immediatamente precedente la commutazione e t_f^+ quello immediatamente successivo). Contemporaneamente il generatore 2 riceve dal sistema un lavoro proprio pari a $\Delta W_M(t_f^- \rightarrow t_f^+)$, ovvero quella parte di energia che era stata immagazzinata sotto forma di campo magnetico viene restituita al generatore: infatti, considerando il circuito 2, ovvero quello di eccitazione del magnete permanente accoppiato induttivamente con le due spire s e $(s + 1)$ sulle quali scorrono le correnti i_s e i_{s+1} rispettivamente ($i_s + i_{s+1} = i_1 = cost$):

$$W_{gen_2}(t_f^- \rightarrow t_f^+) = i_2 \int_{t_f^-}^{t_f^+} \frac{d}{dt} (M_s i_s + M_{s+1} i_{s+1}) dt = i_2 (M_s i_s + M_{s+1} i_{s+1}) \Big|_{t_f^-}^{t_f^+} = -i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.144})$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $i_s(t_f^+) = i_{s+1}(t_f^-) = 0$ e $i_s(t_f^-) = i_{s+1}(t_f^+) = i_1$ e $M_{s+1}(t_f) = M_s(t_i) = -M_s(t_f) = -\frac{G \varphi_B}{i_2 2}$.

Quanto alle altre due voci del bilancio (compensandosi fra loro le (143) e (144)), esse dovranno essere o entrambe nulle o di segno opposto poiché - come abbiamo detto - l'energia totale del sistema

non può cambiare in un tempo che almeno virtualmente può essere estremamente piccolo (a meno di effetti di cui diremo fra poco). Si trova che il lavoro fatto dal generatore 1 e il lavoro meccanico sono anch'essi infinitesimi durante il tempo infinitesimo della commutazione. Cominciamo a considerare dapprima il lavoro meccanico: basterà mostrare che la coppia τ non diverge nell'intorno dell'istante t_f per affermare che il lavoro $\tau\Delta\theta$ è infinitesimo ($\Delta\theta$ rappresenta l'incremento infinitesimo dell'angolo θ durante la commutazione); considerando entrambe le spire s e $(s+1)$ che si trovano ad essere percorse dalla corrente durante la commutazione, abbiamo:

$$\tau(t_f^- < t < t_f^+) = i_s \frac{\partial M_s}{\partial \theta} + i_{s+1} \frac{\partial M_{s+1}}{\partial \theta} = (i_s + i_{s+1})G = i_1 G \quad (\text{XX.145})$$

ovvero non solo τ rimane finito, ma è sempre pari al valore stazionario. Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che la somma delle due correnti nelle spire s e $(s+1)$ resta costante e uguale a i_1 . Pertanto, durante la commutazione fra le due spire, il lavoro meccanico è nullo (o meglio infinitesimo con $\Delta\theta$). A questo punto di necessità anche il lavoro fatto dal generatore 1 deve essere nullo e potremo fare a meno di calcolarlo. Tuttavia una valutazione esplicita può rassicurare sul risultato e forse anche chiarire il meccanismo fisico del bilancio energetico. Durante la fase di commutazione entrambe le bobine - come abbiamo d'altronde già ammesso nella (145) - si trovano ad essere percorse da corrente e il lavoro elettrico associato alle due correnti i_s e i_{s+1} è dato da (oltre a quello necessario a fornire l'energia persa per effetto Joule):

$$\begin{cases} W_{gen_1}(s) = L_1 \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_s \frac{d}{dt} i_s dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_s i_2 \frac{d}{dt} M_s dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_s M_{s,s+1} \frac{d}{dt} i_{s+1} dt \\ W_{gen_1}(s+1) = L_1 \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_{s+1} \frac{d}{dt} i_{s+1} dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_{s+1} i_2 \frac{d}{dt} M_{s+1} dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_{s+1} M_{s,s+1} \frac{d}{dt} i_s dt \end{cases} \quad (\text{XX.146})$$

dove $M_{s,s+1}$ rappresenta il coefficiente di mutua induzione (costante) fra le due spire. Il lavoro totale fatto dal generatore 1 nella fase di commutazione, essendo dato dalla somma dei due contributi vale

$$\left(\frac{dM_s}{dt} = \frac{dM_{s+1}}{dt} = \frac{G\dot{\theta}}{i_2} \right)$$

$$\begin{aligned} W_{gen_1}(t_f^- \rightarrow t_f^+) &= \\ &= \frac{L_1}{2} \left(i_s^2 \Big|_{t_f^-}^{t_f^+} + i_{s+1}^2 \Big|_{t_f^-}^{t_f^+} \right) + G \int_{t_f^-}^{t_f^+} \dot{\theta} (i_s + i_{s+1}) dt + M_{s,s+1} \cdot \int_{t_f^-}^{t_f^+} \frac{d}{dt} (i_s \cdot i_{s+1}) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{XX.147})$$

Il lavoro è stato posto uguale a zero perché: il primo termine è nullo in quanto $i_s^2(t_f^+) = i_{s+1}^2(t_f^-) = 0$ e $i_s^2(t_f^-) = i_{s+1}^2(t_f^+) = i_1^2$; il secondo termine è nullo poiché $(i_s + i_{s+1}) = i_1$ e può essere portato fuori dal segno di integrazione e quindi l'integrale vale $i_1 G \Delta\theta$ con $\Delta\theta$ variazione infinitesima di θ durante la commutazione; infine l'ultimo termine è zero poiché l'integrale vale $M_{s,s+1} i_s \cdot i_{s+1} \Big|_{t_f^-}^{t_f^+}$ che si annulla ai due estremi t_f^- e t_f^+ . Abbiamo così verificato che il generatore 1 compie un lavoro totale nullo durante la commutazione.

Pertanto durante il moto *in media* il generatore 2 e l'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico rimangono costanti e il lavoro meccanico è tutto a carico del generatore 1. Questo fatto ci assicura anche su un altro aspetto: che se al posto del solenoide di eccitazione vi è un magnete permanente, le cose continuano - almeno in media - a funzionare lo stesso, perché non è richiesta energia né al campo magnetico né alle sue sorgenti.

Ovviamente tutto ciò rappresenta una schematizzazione: in particolare non è detto che il funzionamento del collettore sia così *regolare* da consentire lo scambio da una bobina all'altra senza perdite: se ad esempio durante la fase di commutazione il generatore risulta momentaneamente sconnesso da entrambe le spire, allora il generatore di corrente - proprio per mantenere la corrente costante - aumenta a dismisura la tensione e il suo funzionamento non è più regolare; in ogni caso, durante le commutazioni, si hanno repentine variazioni di tensione e se i contatti del commutatore non sono particolarmente curati e la continuità non è assicurata, possono scoccare scintille (dovute alle forti fem contro elettromotrici $L_1 \frac{di_s}{dt}$ e $L_1 \frac{di_{s+1}}{dt}$) che ovviamente mandano all'aria tutto il nostro bilancio e aumentano le perdite che si vanno a sommare a quelle Joule. Inoltre è opportuno fare osservare che un lavoro negativo del generatore rappresenta sì un lavoro ricevuto, ma questo non significa un effettivo vantaggio energetico. Perché lo sia, occorre che il generatore sia del tipo reversibile, per esempio un accumulatore ricaricabile come un pila al Pb o al NiCd: in queste una corrente in senso contrario a quella normale di erogazione, cioè un lavoro negativo, provoca effettivamente una *ricarica* del generatore e quindi l'energia è, almeno temporaneamente, immagazzinata. Se però si utilizza un generatore qualsiasi ciò non è più vero e un lavoro negativo in pratica non serve di fatto a recuperare alcunché. Si noti oltretutto che nel nostro esempio stiamo utilizzando dei generatori di corrente e pertanto si tratterebbe di fare generatori di corrente (e non di tensione come sono le batterie) reversibili e il discorso sarebbe ancora un po' più complicato.

La coppia che il motore in continua può applicare si può aumentare, facendo il più numerose possibili le spire che contemporaneamente si trovano a passare fra le espansioni polari; esse pertanto sono generalmente assai estese, magari a scapito della costanza della coppia (che interessa nel caso di un galvanometro, ma non allo stesso livello per un motore). Generalmente, a meno che non si voglia un motore con momento di inerzia ridotto al minimo, il nucleo interno di ferro è solidale al rotore; ciò oltretutto assicura una maggiore robustezza meccanica al rotore medesimo, necessaria per trasferire la coppia τ dalle spire all'albero (vedi Fig.16).

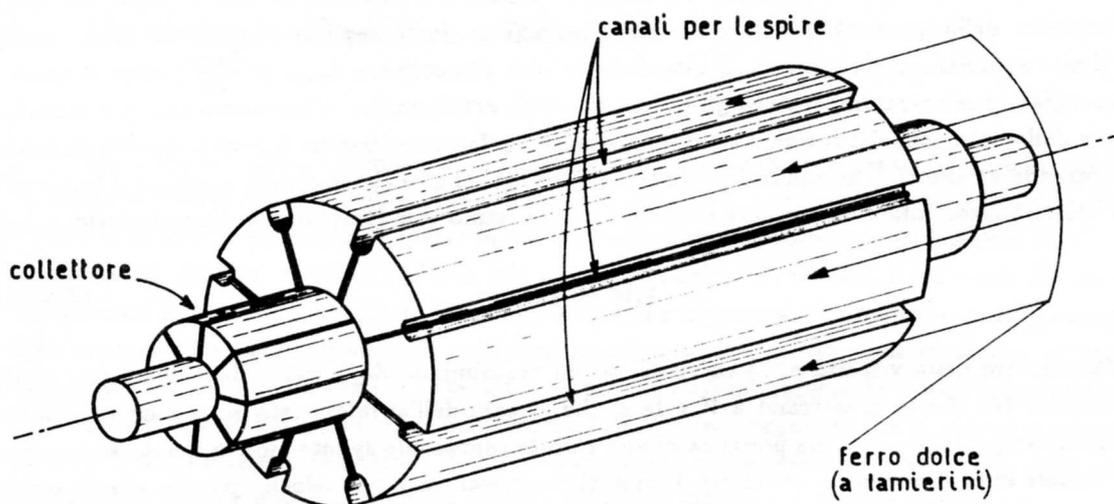


Fig.XX.16

Molto spesso i motori in continua vengono eccitati non come abbiamo visto ora con correnti costanti, bensì, almeno sul rotore, con un generatore di tensione costante V , il cui valore può essere variato dell'esterno: nel caso di corrente costante abbiamo visto che la coppia sviluppata $\tau = i_1 G$ è

costante; dovendo essa essere necessariamente superiore a quella resistente $-K$, la velocità di regime crescerà fino a quando gli attriti produrranno l'ulteriore coppia necessaria per ottenere $\sum_k \tau_k = 0$. Ciò significa che la velocità di regime del motore può anche essere estremamente elevata e così la potenza erogata dal generatore. Con un generatore di tensione V , a parità di coppia resistente, viene raggiunta una velocità limite quasi indipendente dagli attriti; infatti, riprendendo la (136), abbiamo (trattando qui il caso di una sola bobina, ma l'estensione a un rotore a n bobine è banale):

$$V = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.148})$$

che comporta una velocità di regime $\dot{\theta}_R$ tale che ($\frac{di_1}{dt} = 0$ a regime):

$$V - G\dot{\theta}_R = i_1 R_1 \quad (\text{XX.149})$$

Ovvero a seconda della coppia resistente $-K$ da vincere (a regime $\ddot{\theta} = 0$), avremo diverse velocità; infatti la (149) può porsi nella forma ($\tau - K = 0$ allora $i_1 = \frac{K}{G}$):

$$V - G\dot{\theta}_R = \frac{KR_1}{G} \quad (\text{XX.150})$$

che ci dice che fissata una certa coppia resistente $-K$ la velocità di regime è tale che la differenza fra la fem costante applicata (V) e la forza controelettromotrice (proporzionale alla velocità: $G\dot{\theta}_R$) risulta proporzionale alla coppia resistente. Pertanto lo stesso motore eccitato con tensione V costante andrà tanto più veloce quanto più piccola sarà la coppia resistente; oppure, visto diversamente, se vogliamo mantenere costante la velocità del nostro motore all'aumentare della coppia resistente (col che aumenta la potenza meccanica richiesta), dobbiamo aumentare la tensione V fino a portarla a quel valore tale per cui continua a valere la (150). Ovviamente a tutto ciò vi è un limite: infatti così facendo si aumenta la corrente nel rotore e poiché la resistenza di esso è finita, ciò porta all'aumento della quantità di calore dissipato per effetto Joule negli avvolgimenti. Esiste quindi un limite superiore alla coppia τ_{max} ottenibile (e cioè alla corrente $i_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$) oltre il quale si danneggiano per sovratemperatura gli isolamenti degli avvolgimenti. Guardiamo un altro aspetto a favore dell'eccitazione del rotore a tensione costante: se facciamo partire il nostro motore da fermo, trascurando gli effetti di autoinduzione (cioè L_1), la (148) ci dice che la coppia massima si ha proprio per velocità zero. Infatti la corrente a motore ancora fermo vale (trascurando l'autoinduzione L_1)

$$i_1(\dot{\theta} = 0) = \frac{V}{R_1} \quad (\text{XX.151})$$

All'aumentare della velocità $\dot{\theta}$, la corrente va via via diminuendo a causa della forza controelettromotrice $G\dot{\theta}$ che va a sottrarsi a V e fa sì che ai capi dell'avvolgimento sia applicata una fem complessiva pari a $V - G\dot{\theta}$. La presenza di una *elevata coppia allo spunto* motiva il non raro impiego del motore in continua quale avviatore di motori che presentano, per velocità piccole, coppie o nulle o molto minori rispetto a quelle necessarie per raggiungere, senza danneggiarsi per sovracorrente, la velocità nell'intorno della quale sviluppano la loro coppia massima; è questo il caso dei grossi motori sincroni, descritti nel paragrafo successivo.

Ci potremmo a questo punto chiedere cosa accade delle considerazioni fatte prima sul bilancio energetico e sulla *ripartizione* del lavoro quando l'eccitazione è fatta a tensione costante e non a corrente costante. Ebbene si trova che, nel caso di corrente i_2 costante, anche questa volta tutto il lavoro meccanico risulta a carico del generatore della bobina mobile e il generatore di corrente sullo

statore (l'avvolgimento fisso) in media non fa lavoro. Si tenga poi presente che spesso nei motori in continua lo stesso generatore (generalmente di tensione) serve ad alimentare sia lo statore che il rotore in configurazioni che a seconda dei casi sono costituite dalla serie o dal parallelo dei due avvolgimenti. In questi casi è oltremodo evidente che essendo il generatore unico e ritornando ad ogni giro il motore nelle stesse condizioni dal punto di vista dell'energia magnetica immagazzinata, tutto il lavoro meccanico prodotto è a carico del generatore a comune fra i due avvolgimenti e ha poco, se non alcuno, interesse sapere come esso venga ripartito fra i due avvolgimenti.

Occorre ora richiamare l'attenzione su un punto di notevole interesse pratico: tutte le volte che abbiamo calcolato il lavoro dei generatori, lo abbiamo fatto al netto delle perdite Joule. Ciò non significa che in un motore le perdite Joule non abbiano importanza, anzi: al contrario quello che è di interesse dominante in un sistema come un motore, è il suo *rendimento* definito come rapporto fra il lavoro medio meccanico ottenuto diviso il lavoro totale fatto dal generatore, ivi compresa quella parte che finisce nel riscaldamento, alla quale contribuiscono le perdite Joule e le perdite nel ferro (per isteresi e correnti parassite). Le resistenze degli avvolgimenti le più basse possibili, l'utilizzo di ferro con piccola area del ciclo di isteresi e la struttura magnetica a lamierini per interrompere le correnti parassite indotte, consentono nei motori in continua buoni rendimenti, attorno al 90% nei casi migliori.

Per concludere il paragrafo notiamo che un motore in continua in cui statore e rotore siano eccitati in serie, funziona altrettanto bene se il generatore di fem (o corrente) è in continua o in alternata. Infatti ciò che provoca il moto è l'interazione fra le correnti delle spire e il campo e, almeno per quanto riguarda il segno, tale interazione resta la stessa se la corrente e il campo vengono entrambi invertiti; quello che cambia è la struttura temporale "fine" della coppia entro il periodo di eccitazione alternata, ma il suo valor medio sarà in entrambi i casi uguale, purché il valore efficace della corrente alternata uguagli il valore della corrente continua.

8.— *Un esempio di motore a induzione*

Si spera che il lettore, nei meandri delle formule dei paragrafi precedenti, sia riuscito a intuire una semplice interpretazione dell'origine della coppia che si sviluppa quando un circuito percorso da corrente si muove in una zona di spazio in cui è presente un campo magnetico: ovvero che il moto spontaneo del circuito, e quindi la forza o la coppia che agisce su di esso, è nel verso che tende a massimizzare il flusso del campo di induzione magnetica attraverso il circuito, ovvero il campo di induzione prodotto dalla bobina tende a disporsi parallelamente rispetto a quello esterno, e pertanto nella condizione di minima energia potenziale. Il moto è cioè interpretabile come l'orientazione del dipolo (o dell'insieme dei dipoli magnetici associati alla *lamina magnetica* che si appoggia sul nostro circuito) secondo il campo \vec{B} esterno. Tutto ciò è contenuto nell'espressione matematica della coppia (supponiamo che il grado di libertà sia la solita rotazione attorno ad un asse fisso):

$$\tau = i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \quad (\text{XX.152})$$

con i_1 corrente nel circuito mobile e Φ_1 flusso totale di induzione magnetica concatenato con il circuito 1; in particolare dalla (152) risulta evidente che per valori di Φ_1 massimi la coppia è nulla.

Supponiamo ora di disporre di una bobina che per semplicità supponiamo piana e montata su un asse fisso, nella quale circoli una corrente i_1 . Se, con qualche dispositivo opportuno, riusciamo

ad ottenere un campo di induzione \vec{B} omogeneo in un sistema di riferimento che ruoti con velocità angolare costante ω_0 attorno all'asse della bobina, il flusso Φ_1 di \vec{B} attraverso la bobina varierà in funzione del tempo e provocherà una rotazione della bobina stessa; su di essa infatti agirà una coppia del tipo (152) che porterà la bobina a inseguire il campo rotante (vedi Fig.17).

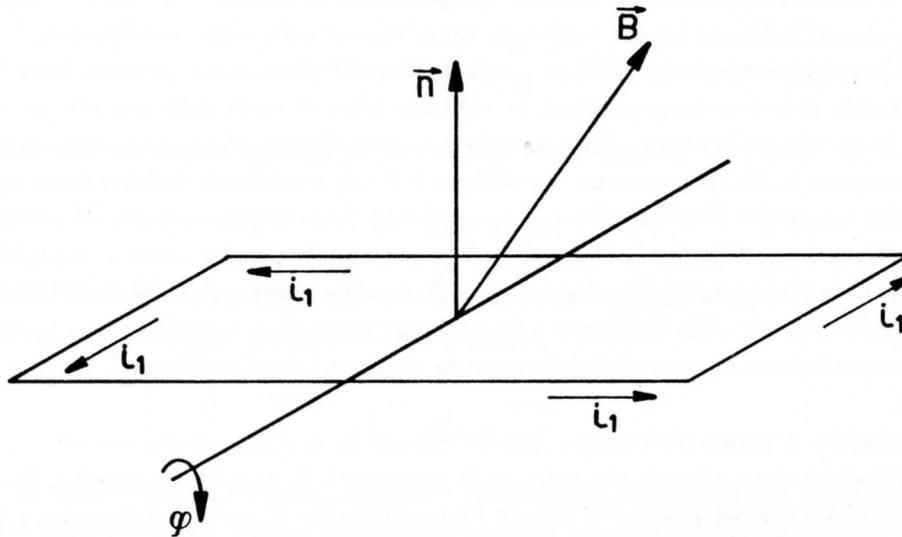


Fig.XX.17

Se la corrente i_1 è costante, la dinamica del moto dipenderà, sempre che si mantenga costante la velocità angolare ω_0 di \vec{B} , dalla inerzia della bobina e dall'eventuale coppia resistente applicata all'albero. Se ammettiamo che la coppia resistente $-K$ sia costante, allora una soluzione di regime è molto facilmente trovata: detta S la superficie della singola spira e n il numero di spire, il flusso totale Φ_1 concatenato col circuito 1 vale:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + nSB \cos \theta \quad (\text{XX.153})$$

dove θ rappresenta l'angolo fra la normale al circuito secondo la regola della mano destra (rispetto alla corrente i_1) e la direzione istantanea di \vec{B} . Pertanto la coppia τ applicata alla bobina vale:

$$\tau = i_1 nSB \sin \theta \quad (\text{XX.154})$$

Il segno della (154) in apparente contraddizione con la (152) deriva dal fatto che nell'esempio in esame la bobina è fissa e \vec{B} ruota: la (152) dà la coppia che verrebbe esercitata sul circuito mobile che crea \vec{B} , e pertanto la coppia che agisce sul circuito 1 è uguale e di segno opposto, secondo il principio di azione e reazione. Supponendo che esista una soluzione di regime per la bobina con $\dot{\varphi}_R = \omega_0$ dobbiamo avere:

$$0 = \mathcal{I} \ddot{\varphi} = \tau - K \quad (\text{XX.155})$$

ovvero

$$\sin \theta = \frac{K}{i_1 nSB} \quad (\text{XX.156})$$

La spira ruota quindi con velocità angolare uguale a ω_0 e la sua normale forma con la direzione istantanea di \vec{B} un angolo θ dato dalla (156), cioè essa è sfasata rispetto al campo rotante di un

angolo fisso. La (156) ci dice anche che se la coppia resistente è nulla lo sfasamento è nullo e viceversa se $K = K_{max} = i_1 nSB$ allora la bobina è sfasata di $-\frac{\pi}{2}$ rispetto al campo rotante. Se $K > K_{max} = i_1 nSB$ allora non si riesce più a soddisfare la (156) e la bobina "si sgancia" cioè la soluzione a regime $\dot{\varphi} = \omega_0 = cost$ non è più ottenibile.

Se ci chiediamo chi fa il lavoro, nel caso di $K < K_{max}$, la risposta dipende da come è realizzato il campo rotante: se lo otteniamo facendo ruotare un magnete permanente la potenza sarà quella - meccanica - necessaria a mantenere in rotazione costante \vec{B} : sul magnete agirà infatti una coppia $-\tau = -i_1 nSB \sin \theta$ e ruotando il magnete con velocità angolare ω_0 la potenza da fornire sarà proprio $\tau \cdot \omega_0$ uguale a quella necessaria per vincere la coppia resistente K (vedi (155)). Se il campo rotante \vec{B} è ottenuto con qualche altro procedimento (che vedremo fra poco) allora anche il metodo di rifornire la potenza cambierà.

L'esempio ora fatto descrive il principio di funzionamento di un motore elettrico detto *sincrono*; l'origine di questo nome discende dal fatto che la velocità angolare del rotore è uguale a quella del campo rotante, la stessa qualunque sia la coppia resistente (purché inferiore a K_{max}). Poiché questo tipo di motori è in grado di vincere una coppia resistente solo se la loro velocità è quella sincrona, occorre, mediante un dispositivo ausiliario, portarli in rotazione affinché *si aggancino* al campo rotante.

Supponiamo ora di sopprimere il generatore che forniva corrente alla bobina e sostituiamolo con un cortocircuito. Se facciamo come prima ruotare il campo \vec{B} a velocità costante ω_0 troviamo che la bobina si mette ugualmente in moto. Ciò significa che una coppia agisce ancora su di essa; ciò d'altronde non deve sorprendere in quanto nella spira circola comunque una corrente $i_1(t)$ indotta dalla variazione del flusso Φ_1 concatenato con essa. Infatti, supponiamo che la bobina sia mantenuta fissa: allora il flusso Φ_1 sarà sempre determinato dalla (153) con $i_1 = i_1(t)$ e per il circuito della bobina potremo scrivere la seconda legge di Kirchhoff che sarà (r resistenza totale della bobina, l autoinduttanza)

$$i_1 \cdot r = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -l \frac{di_1}{dt} + nSB\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (\text{XX.157})$$

dove è stato posto $\theta = \omega_0 t$. La soluzione di regime per i_1 che soddisfa la (157) è del tipo sinusoidale:

$$i_1 = i_0 \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (\text{XX.158})$$

con

$$i_0 = \frac{nSB\omega_0}{\sqrt{r^2 + \omega_0^2 l^2}} \quad \psi = -\text{atan} \frac{\omega_0 l}{r} \quad (\text{XX.159})$$

Il nostro sistema si comporta come un generatore di fem sinusoidale esattamente come il sistema descritto nel §5; e difatti in quel caso \vec{B} era fisso e si ruotava la spira con velocità costante, mentre in questo esempio si tiene ferma la spira e si ruota il campo \vec{B} ; la corrente nella spira dipende solo dal moto relativo e quindi i due risultati necessariamente coincidono. Tornando alla coppia che agisce sulla bobina abbiamo:

$$\tau = -i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = i_1 nSB \sin \theta = i_0 nSB \sin(\omega_0 t + \psi) \sin(\omega_0 t) \quad (\text{XX.160})$$

Tale coppia è una funzione sinusoidale del tempo con una pulsazione pari a $2\omega_0$, più un termine costante. Possiamo ottenere una coppia costante aggiungendo una seconda bobina, anch'essa solidale con l'albero, montata a 90° rispetto alla precedente (Fig.18).

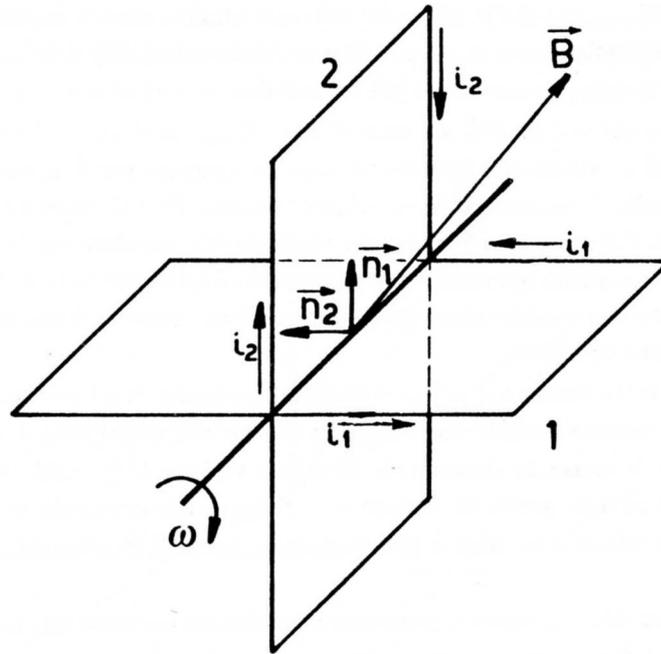


Fig.XX.18

Se cerchiamo la soluzione per la corrente in questa seconda bobina, dovremo ancora usare la (157), salvo tener conto dello sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla bobina 1; avremo così ($\Phi_2 = li_2 + nSB \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$):

$$i_2 r = -l \frac{di_2}{dt} + nSB\omega_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -l \frac{di_2}{dt} + nSB\omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (\text{XX.161})$$

che dà per i_2 :

$$i_2 = i_0 \cos(\omega_0 t + \psi) \quad (\text{XX.162})$$

Le due correnti non interagiscono induttivamente l'una con l'altra perché il loro coefficiente di mutua induzione è nullo essendo le bobine fra loro ortogonali. La coppia totale che agisce sull'albero dovuta all'interazione delle correnti i_1 e i_2 con il campo rotante \vec{B} vale, tenendo conto del segno:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - i_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial (\theta + \frac{\pi}{2})} = i_0 nSB [\sin \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \psi) + \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \psi)] \quad (\text{XX.163})$$

La somma a secondo membro si riduce a $\cos \psi$ e pertanto (vedi (159)):

$$\tau = \frac{n^2 S^2 B^2 \omega_0}{\sqrt{r^2 + \omega_0^2 l^2}} \cos \psi = \frac{n^2 S^2 B^2 \omega_0}{r^2 + \omega^2 l^2} \cdot r \quad (\text{XX.164})$$

Il risultato ora ottenuto vale nel caso in cui B sia mantenuto costante e sia mantenuta costante anche la sua velocità di rotazione. Ripensando al procedimento seguito, è ovvio che se avessimo supposto la bobina rotante con velocità costante $\omega < \omega_0$, il risultato (164) continuerebbe a valere, sostituendo al posto di ω_0 , $(\omega_0 - \omega)$. In queste ipotesi abbiamo così:

$$\tau = \frac{n^2 S^2 B^2 (\omega_0 - \omega)}{r^2 + (\omega_0 - \omega)^2 l^2} \cdot r = \frac{n^2 S^2 B^2 r}{\frac{r^2}{(\omega_0 - \omega)} + l^2 (\omega_0 - \omega)} \quad (\text{XX.165})$$

La (165) ci dice che se disponiamo di un campo magnetico rotante con velocità angolare ω_0 e se al nostro motore è applicata una coppia resistente costante $-K$, allora la bobina (detta *rotore*) a regime possiede una velocità angolare ω concorde con ω_0 tale per cui vale la (165), con K al posto di τ . Se $K = 0$ allora si trova che $\omega = \omega_0$ e la velocità angolare della bobina coincide con quella del campo rotante. Si noti la differenza rispetto al caso in cui nella bobina scorreva una corrente continua i_1 : in quel caso la condizione a regime corrispondeva ad avere una velocità del rotore *comunque* uguale a quella del campo \vec{B} e uno sfasamento fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ che aumentava all'aumentare della coppia. Nel caso in cui nella bobina circola la sola corrente indotta, vi è piuttosto una *differenza nelle velocità angolari* del campo e del rotore, collegata alla coppia e non uno sfasamento angolare. Si introduce la grandezza *scorrimento o slittamento* $s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$, misurata generalmente in percento, per denotare il punto di lavoro di un motore del tipo ora descritto (*motore a induzione*).

Prima di vedere come in pratica si può realizzare un campo rotante, osserviamo che la coppia τ data dalla (165) ha un andamento in funzione della velocità angolare del tipo riportato in Fig.19.

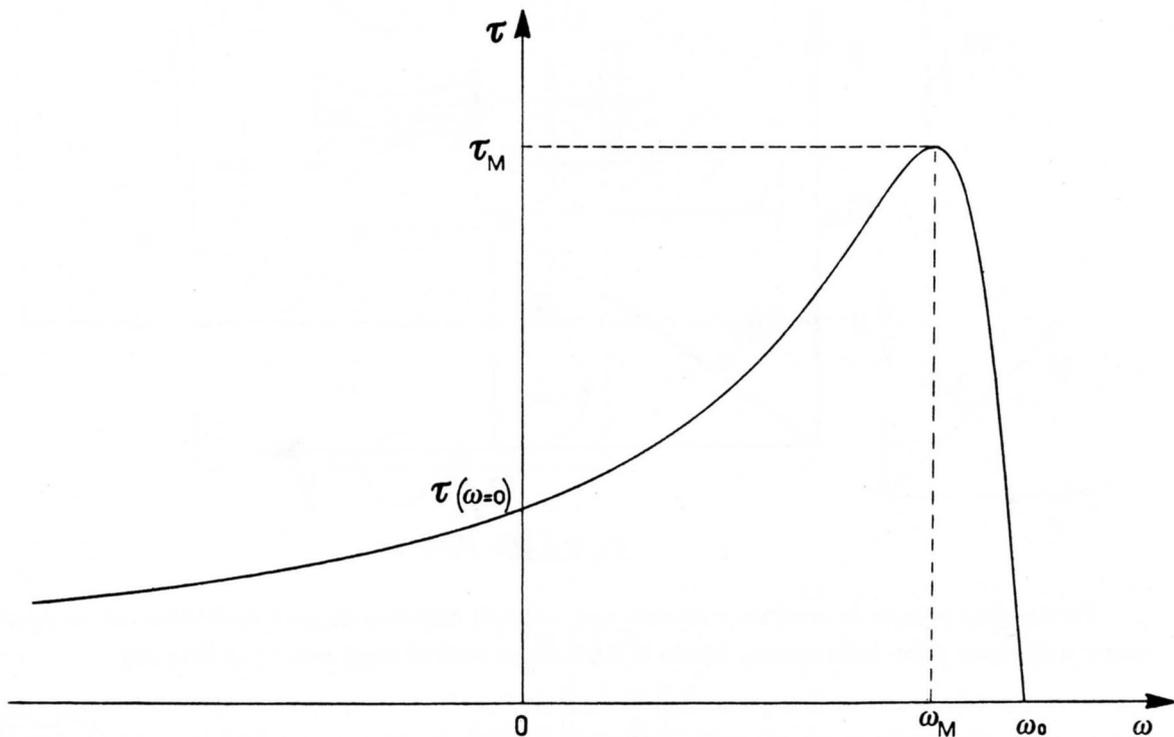


Fig.XX.19

E' importante osservare la presenza di un massimo τ_M in corrispondenza di un valore di ω_M , ricavabile dalla (165), pari a:

$$\omega_M = \omega_0 \left(1 - \frac{r}{\omega_0 l}\right) \quad (\text{XX.166})$$

con

$$\tau_M = \frac{n^2 S^2 B^2}{2l} \quad (\text{XX.167})$$

Viceversa per $\omega = 0$ cioè con il rotore fermo la coppia vale:

$$\tau(\omega = 0) = \frac{n^2 S^2 B^2 r \omega_0}{r^2 + \omega_0^2 l^2} = \tau_M \frac{2r}{\omega_0 l} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\omega_0^2 l^2}} \quad (\text{XX.168})$$

Poiché nei casi pratici si cerca di ridurre al massimo le perdite facendo r piccola rispetto a $\omega_0 l$, ciò significa che ω_M è in genere assai vicino a ω_0 e che $\tau(\omega = 0)$ è assai più piccolo di τ_M . In un motore di questo genere, la bassa coppia da fermo talvolta richiede l'avviamento tramite un motore ausiliario con alta coppia allo spunto, quale un motore in continua eccitato in tensione (vedi paragrafo precedente).

Con riferimento alla Fig.19 immaginiamo di partire da una condizione di regime in cui la coppia resistente sia molto piccola e dovuta unicamente agli attriti dei cuscinetti dell'albero del rotore e alla viscosità dell'aria: allora la velocità ω_R del rotore sarà assai prossima a ω_0 . Se ora aumentiamo il valore assoluto della coppia resistente $-K$ il motore andrà via via rallentando (ma assai poco dato l'andamento della curva in Fig.19) e corrispondentemente la coppia andrà adeguandosi al valore necessario per equilibrare $-K$. Quando però K supera il valore τ_M , la bobina si *sgancia* (in gergo: "stacca") e cessa di funzionare.

Guardiamo ora come si può realizzare un campo \vec{B} rotante con velocità angolare $\omega_0 = \text{cost}$.

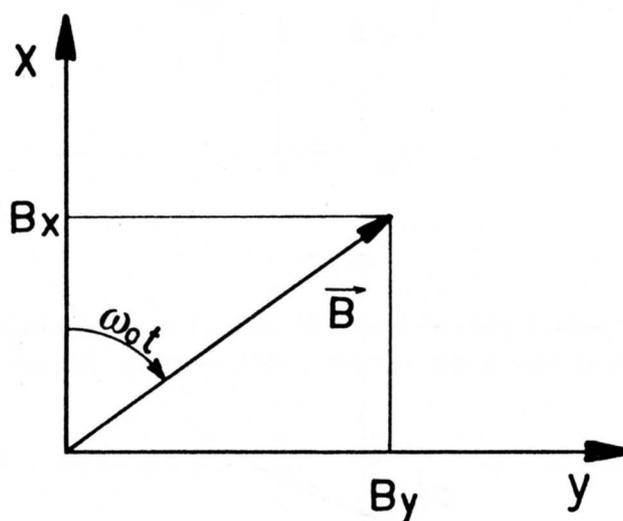


Fig.XX.20

Un campo costante in modulo e rotante con velocità angolare ω_0 può proiettarsi su un riferimento cartesiano fisso nello spazio, dando le seguenti proiezioni sugli assi x e y (Fig.20)

$$\begin{cases} B_x = B \cos \omega_0 t \\ B_y = B \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (\text{XX.169})$$

Tale risultato può reinterpretarsi nel seguente modo: se facciamo in modo che in una regione dello spazio siano presenti due campi di induzione magnetica ortogonali fra loro, aventi ampiezza uguale, oscillanti con pulsazione ω_0 e sfasati l'uno rispetto all'altro di $\frac{\pi}{2}$, allora ciò equivale ad avere nella medesima regione di spazio un campo costante in modulo e rotante con velocità angolare ω_0 . Il sistema riportato nella Fig.21 crea quindi nella zona dei traferri un campo rotante. Si tratta di un circuito magnetico costituito da due avvolgimenti identici in cui circolano correnti sfasate di $\frac{\pi}{2}$ l'una rispetto all'altra e che creano due campi omogenei diretti come i due assi x e y . Non sfugga la presenza del nucleo centrale anch'esso di ferro dolce che serve a ridurre la *riluttanza magnetica** del circuito e soprattutto ad omogenizzare il campo nei traferri.

* la riluttanza di un circuito magnetico è l'equivalente della resistenza di un circuito elettrico, una volta che si stabilisca una corrispondenza fra il flusso del campo di induzione magnetica e la corrente elettrica e fra la forza magnetomotrice $N \cdot i$ e la forza elettromotrice \mathcal{E} .

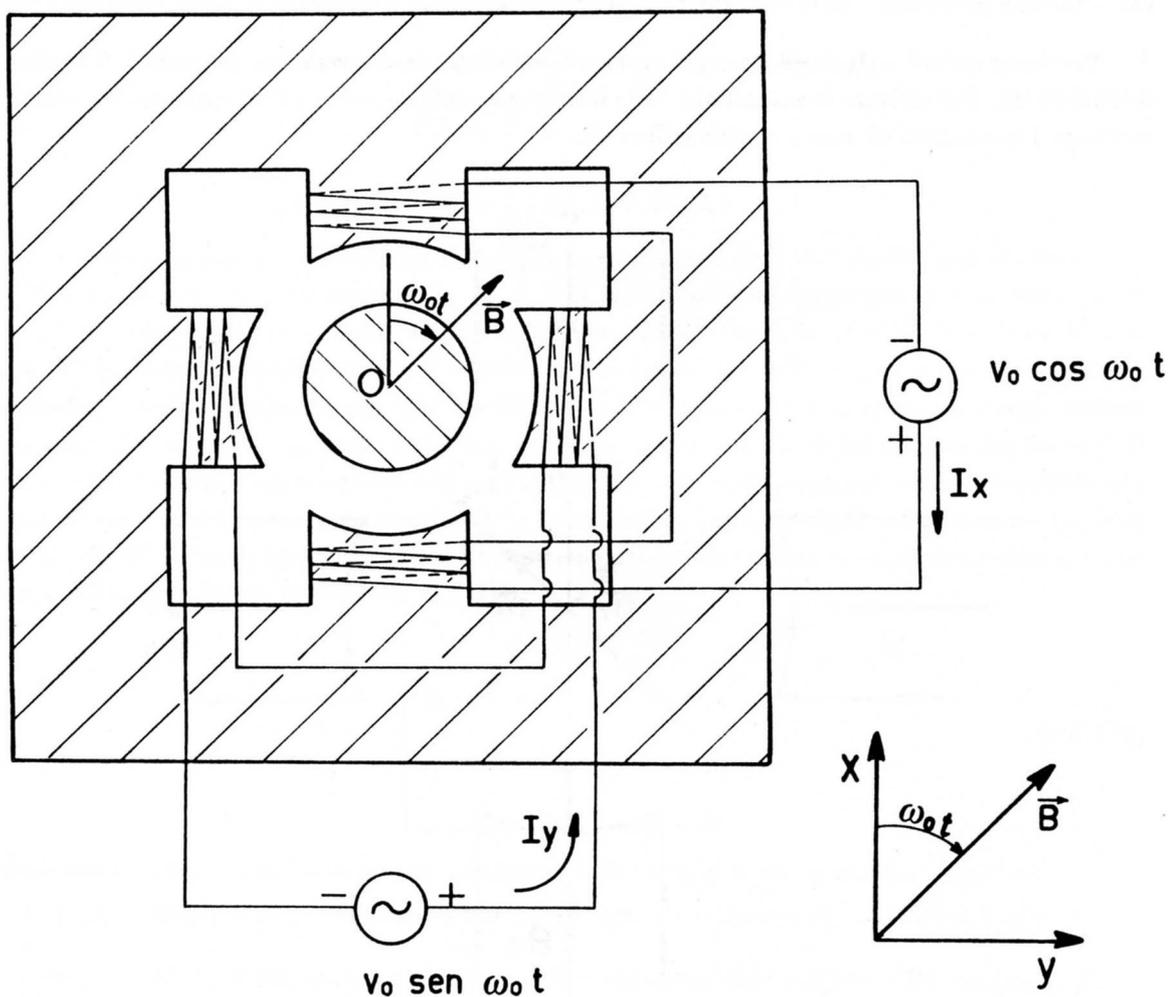


Fig.XX.21

Se montiamo su un asse perpendicolare al foglio e passante per il punto O le due bobine a $\frac{\pi}{2}$ descritte prima, abbiamo realizzato un esempio molto realistico (anche se certamente non ottimizzato da molti punti di vista) di motore ad induzione. Il motore in questione si chiama propriamente *asincrono bifase*. *Asincrono* poiché la velocità di rotazione del motore, come abbiamo visto, non è sincrona con quella di \vec{B} , *bifase* poiché il campo magnetico rotante è ottenuto mediante due tensioni sfasate di $\frac{\pi}{2}$ l'una rispetto all'altra e tale sistema di tensioni è detto appunto di *tensione bifase*). Le bobine sono costituite da poche (spesso 1) spire di rame in cortocircuito di sezione estremamente elevata, caratterizzate quindi da un piccolo rapporto $\frac{r}{\omega_0 l}$. Poiché in genere la eccitazione dell'elettromagnete è ottenuta dalla energia elettrica della rete, ω_0 vale $314 \text{ rad/s} = 3000 \text{ giri/minuto}$. Nella pratica il campo rotante non si realizza quasi mai con due tensioni sfasate di 90° (eccitazione bifase), ma con tre tensioni sfasate fra loro di 120° (eccitazione trifase) il che ovviamente comporta strutture diverse da quella di Fig.21. Tornando al nostro esempio, per produrre un campo \vec{B} rotante e di modulo costante occorre che i generatori inviino correnti di ampiezza costante negli avvolgimenti del cosiddetto induttore: solo in queste ipotesi la parte del campo \vec{B} prodotta dall'induttore

ha modulo costante. Se viceversa l'eccitazione avviene con generatori di tensione le ampiezze delle correnti verranno a dipendere dalla velocità del rotore (il cosiddetto *indotto*): infatti la sua rotazione provocherà delle variazioni di flusso nell'induttore e quindi delle forze elettromotrici.

Proviamo quindi a risolvere il nostro problema ammettendo di avere due generatori di tensione sull'induttore. Per scrivere le equazioni è bene introdurre esplicitamente gli accoppiamenti induttivi mediante i coefficienti di auto e mutua induzione.

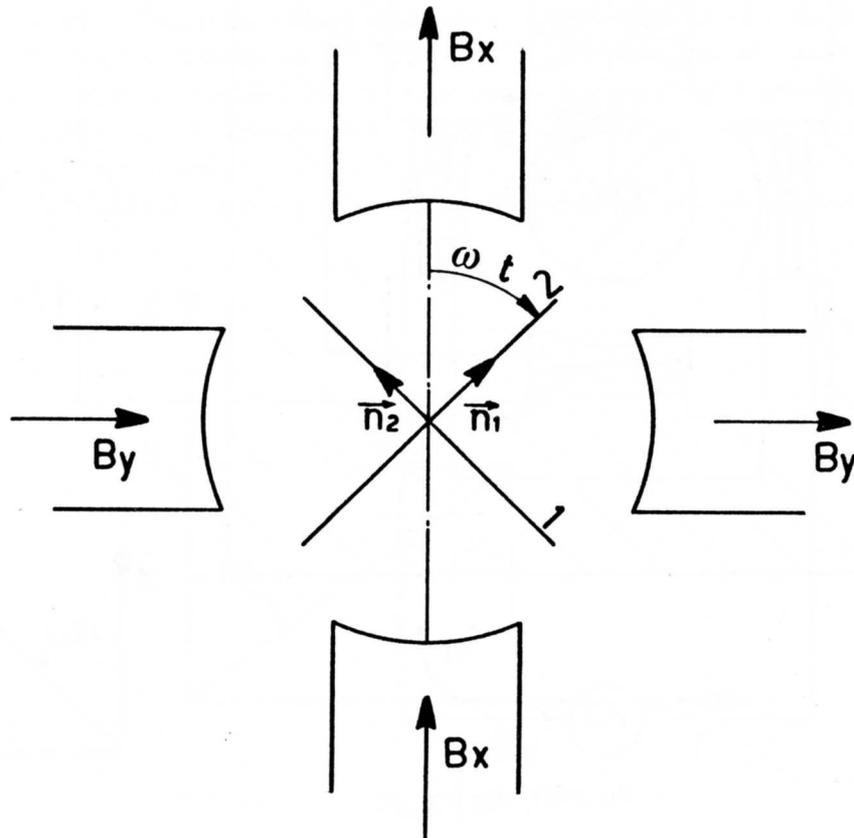


Fig.XX.22

Con riferimento alla Fig.22 abbiamo (M_{1x} rappresenta l'accoppiamento fra la spira 1 e lo avvolgimento che produce il campo B_x e così via):

$$\begin{cases} M_{1x} = \mathcal{M} \cos \omega t \\ M_{1y} = \mathcal{M} \sin \omega t \\ M_{2x} = \mathcal{M} \sin \omega t \\ M_{2y} = -\mathcal{M} \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{XX.170})$$

con $\mathcal{M} = \sqrt{Ll}$, essendo L il coefficiente di autoinduzione degli avvolgimenti del circuito magnetico; ammettiamo cioè di lavorare nel limite di accoppiamento stretto, a causa della presenza del nucleo

di ferro, non riportato nella Fig.22. Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ai quattro circuiti:

$$\begin{cases} V_0 \cos \omega_0 t = I_x R + \frac{dI_x}{dt} L + \frac{d}{dt} (M_{1x} i_1 + M_{2x} i_2) \\ V_0 \sin \omega_0 t = I_y R + \frac{dI_y}{dt} L + \frac{d}{dt} (M_{1y} i_1 + M_{2y} i_2) \\ 0 = i_1 r + \frac{di_1}{dt} l + \frac{d}{dt} (M_{1x} I_x + M_{1y} I_y) \\ 0 = i_2 r + \frac{di_2}{dt} l + \frac{d}{dt} (M_{2x} I_x + M_{2y} I_y) \end{cases} \quad (\text{XX.171})$$

Data la geometria scelta, altri termini di accoppiamento mutuo fra i vari circuiti non esistono.

Il problema consiste nel ricavare I_x , I_y , i_1 e i_2 in funzione del tempo per ω e ω_0 costanti. Si tratta cioè di trovare le soluzioni di regime del sistema (171) con R, L, r, l costanti e i vari M dati dalla (170). Prima di avvilupparci nei calcoli occorre notare che nelle pagine precedenti abbiamo già risolto il problema almeno per i_1 e i_2 , ammettendo semplicemente di avere un campo rotante \vec{B} con velocità angolare ω_0 ; quel risultato ci consente di dire che gli ultimi termini dei membri di destra delle due ultime equazioni del sistema (171) hanno una dipendenza dal tempo sinusoidale con pulsazione $(\omega_0 - \omega)$; precisamente sappiamo che le correnti i_1 e i_2 sinusoidali con pulsazione $(\omega_0 - \omega)$ sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$ l'una rispetto all'altra. La soluzione del nostro sistema la cercheremo allora, anche questa volta, nella forma (vedi (158) e (162)):

$$\begin{cases} I_x = I_0 \cos (\omega_0 t + \alpha) \\ I_y = I_0 \sin (\omega_0 t + \alpha) \\ i_1 = i_0 \sin [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \\ i_2 = i_0 \cos [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \end{cases} \quad (\text{XX.172})$$

Calcoliamoci prima i termini di mutua induzione; dalle (172) si trova, posto $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$:

$$\begin{cases} M_{1x} i_1 + M_{2x} i_2 = M i_0 \{ \cos \omega t \sin [\Delta\omega t + \beta] + \sin \omega t \cos [\Delta\omega t + \beta] \} = M i_0 \sin (\omega_0 t + \beta) \\ M_{1y} i_1 + M_{2y} i_2 = M i_0 \{ \sin \omega t \sin [\Delta\omega t + \beta] - \cos \omega t \cos [\Delta\omega t + \beta] \} = -M i_0 \cos (\omega_0 t + \beta) \\ M_{1x} I_x + M_{1y} I_y = M I_0 \{ \cos \omega t \cos [\omega_0 t + \alpha] + \sin \omega t \sin [\omega_0 t + \alpha] \} = M I_0 \cos [\Delta\omega t + \alpha] \\ M_{2x} I_x + M_{2y} I_y = M I_0 \{ \sin \omega t \cos [\omega_0 t + \alpha] - \cos \omega t \sin [\omega_0 t + \alpha] \} = -M I_0 \sin [\Delta\omega t + \alpha] \end{cases} \quad (\text{XX.173})$$

Sostituendo nelle (171) abbiamo quindi:

$$\begin{cases} V_0 \cos \omega_0 t = I_0 R \cos (\omega_0 t + \alpha) - \omega_0 I_0 L \sin (\omega_0 t + \alpha) + M i_0 \omega_0 \cos (\omega_0 t + \beta) \\ V_0 \sin \omega_0 t = I_0 R \sin (\omega_0 t + \alpha) + \omega_0 I_0 L \cos (\omega_0 t + \alpha) + M i_0 \omega_0 \sin (\omega_0 t + \beta) \\ 0 = i_0 r \sin [\Delta\omega t + \beta] + \Delta\omega i_0 l \cos [\Delta\omega t + \beta] - M I_0 \Delta\omega \sin [\Delta\omega t + \alpha] \\ 0 = i_0 r \cos [\Delta\omega t + \beta] - \Delta\omega i_0 l \sin [\Delta\omega t + \beta] - M I_0 \Delta\omega \cos [\Delta\omega t + \alpha] \end{cases} \quad (\text{XX.174})$$

Usando i numeri complessi i calcoli si semplificano. Moltiplichiamo ad esempio entrambi i membri della seconda delle (174) per l'unità immaginaria j e sommiamo membro a membro con la prima delle (174); facciamo lo stesso con la terza e la quarta delle (174). Abbiamo allora:

$$\begin{cases} V_0 = (R + j\omega_0 L) I_0 \exp j\alpha + M i_0 \omega_0 \exp j\beta \\ 0 = [r + j(\omega_0 - \omega)l] i_0 \exp j\beta - M I_0 (\omega_0 - \omega) \exp j\alpha \end{cases} \quad (\text{XX.175})$$

dove abbiamo eliminato nella prima il fattore a comune $\exp j\omega_0 t$ e nella seconda $\exp j(\omega_0 - \omega)t$. Dalla seconda delle (175) si ricava:

$$i_0 = \frac{\mathcal{M}I_0(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + (\omega_0 - \omega)^2 l^2}} \quad (\text{XX.176})$$

e

$$\text{Im} \left[\exp j(\beta - \alpha) \left(1 + j(\omega_0 - \omega) \frac{l}{r} \right) \right] = 0 \quad (\text{XX.177})$$

La (177) ci consente di scrivere:

$$\alpha - \beta = \text{atan} \frac{(\omega_0 - \omega)l}{r} \quad (\text{XX.178})$$

Ponendo $\alpha - \beta = \gamma$ e $\frac{l}{r} = \lambda$ possiamo scrivere:

$$\gamma = \text{atan} \frac{(\omega_0 - \omega)l}{r} = \text{atan} (\omega_0 - \omega)\lambda \quad (\text{XX.179})$$

Dalla (175), sfruttando i risultati (176) e (179) e tenendo conto che stiamo considerando il caso di accoppiamento stretto, otteniamo ($\Lambda = \frac{L}{R}$):

$$\begin{aligned} V_0 &= I_0 \exp j\beta \left[\frac{\mathcal{M}^2 \omega_0 (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + (\omega_0 - \omega)^2 l^2}} + (R + j\omega_0 L) \exp j\gamma \right] = \\ &= \frac{I_0 \exp j\beta}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2}} R [1 + j(\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda)] = \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2}} R \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]^2} \exp j\{\beta + \text{atan} [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]\} \end{aligned} \quad (\text{XX.180})$$

Dalla (180) otteniamo finalmente:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2}{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]^2}} \quad (\text{XX.181})$$

$$\beta = -\text{atan} [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda] \quad (\text{XX.182})$$

e quindi, inserendo la (181) nella (176):

$$i_0 = \frac{\mathcal{M}(\omega_0 - \omega)V_0}{Rr\sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]^2}} \quad (\text{XX.183})$$

Possiamo ora calcolarci la coppia totale che agisce sul nostro rotore come:

$$\tau = i_1 \left[I_x \frac{\partial M_{1x}}{\partial(\omega t)} + I_y \frac{\partial M_{1y}}{\partial(\omega t)} \right] + i_2 \left[I_x \frac{\partial M_{2x}}{\partial(\omega t)} + I_y \frac{\partial M_{2y}}{\partial(\omega t)} \right] \quad (\text{XX.184})$$

La (184) sfruttando le (170) e (172) dà:

$$\begin{aligned} \tau &= i_0 I_0 \mathcal{M} \{ \text{sen} [(\omega_0 - \omega)t + \beta] [-\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{sen} \omega t + \text{sen}(\omega_0 t + \alpha) \cos \omega t] + \\ &\quad + \cos [(\omega_0 - \omega)t + \beta] [\cos(\omega_0 t + \alpha) \cos \omega t + \text{sen}(\omega_0 t + \alpha) \text{sen} \omega t] \} = \\ &= i_0 I_0 \mathcal{M} \{ \text{sen} [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \text{sen} [(\omega_0 - \omega)t + \alpha] + \cos [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \cos [(\omega_0 - \omega)t + \alpha] \} = \end{aligned}$$

$$= i_0 I_0 \mathcal{M} \cos(\alpha - \beta) = i_0 I_0 \mathcal{M} \cos \gamma \quad (\text{XX.185})$$

Nella (185) possiamo sostituire i risultati (179), (181) e (183) per ottenere finalmente:

$$\tau = \frac{V_0^2 \mathcal{M}^2 (\omega_0 - \omega)}{R^2 r} \frac{1}{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2} = \frac{V_0^2}{R} \frac{\lambda \Lambda (\omega_0 - \omega)}{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2} \quad (\text{XX.186})$$

E' comodo far comparire direttamente lo slittamento $s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ e abbiamo così:

$$\tau = \frac{V_0^2}{R} \frac{\Lambda \lambda \omega_0 s}{1 + \omega_0^2 (\Lambda + s \lambda)^2} \quad (\text{XX.187})$$

La (187) corrisponde alla (165), solo che adesso è calcolata in funzione dei parametri elettrici dei circuiti utilizzati nell'induttore e nell'indotto. Se vogliamo ora calcolare la potenza istantanea sviluppata dal motore dobbiamo solo moltiplicare la coppia τ per ω , velocità angolare del rotore:

$$P_{mecc} = \tau \cdot \omega = \frac{V_0^2}{R} \frac{\omega_0 \omega \lambda \Lambda s}{1 + \omega_0^2 (\Lambda + s \lambda)^2} = \frac{V_0^2}{R} \frac{\omega_0^2 s (1 - s) \Lambda \lambda}{1 + \omega_0^2 (\Lambda + s \lambda)^2} \quad (\text{XX.188})$$

Tale potenza deve corrispondere alla potenza media erogata dal generatore meno la potenza media perduta per effetto Joule sui due avvolgimenti, con le medie fatte su un periodo di tempo pari ad un multiplo intero sia del periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ che del periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega}$ (il che equivale ad un tempo $t \gg T$): calcolando così le medie, il contributo di energia magnetica scompare poiché ciclicamente essa torna ad assumere gli stessi valori e pertanto non dà contributo.

La potenza elettrica media si può calcolare come (i generatori sono due):

$$P_{elett} = (V_{eff} I_{eff} \cos \alpha) \cdot 2 = V_0 I_0 \cos \alpha \quad (\text{XX.189})$$

Quanto a $\cos \alpha$ esso vale (vedi (178), (179), (182)):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\gamma + \beta) = \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta = \frac{1 + (\omega_0 - \omega) \lambda [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2} \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2}} \\ &= \frac{1 + s \lambda \cdot \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2} \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2}} \end{aligned} \quad (\text{XX.190})$$

Abbiamo così (vedi (181)):

$$P_{elett} = \frac{V_0^2}{R} \frac{1 + \omega_0^2 s \lambda [\Lambda + s \lambda]}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} \quad (\text{XX.191})$$

Quanto alle potenze dissipate per effetto Joule abbiamo:

$$P_{Joule} = 2 \cdot (I_{eff}^2 R + i_{eff}^2 r) = \frac{V_0^2}{R} \frac{1 + \omega_0^2 s^2 \lambda^2}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} + \frac{V_0^2}{R} \frac{\omega_0^2 s^2 \Lambda \lambda}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} \quad (\text{XX.192})$$

Se ora sommiamo la (192) e la (188) otteniamo:

$$\begin{aligned} P_{mecc} + P_{Joule} &= \frac{V_0^2}{R} \frac{[1 + \omega_0^2 s^2 \lambda^2 + \omega_0^2 s^2 \Lambda \lambda + \omega_0^2 s (1 - s) \Lambda \lambda]}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} = \\ &= \frac{V_0^2}{R} \frac{1 + \omega_0^2 s \lambda [\Lambda + s \lambda]}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} = P_{elett} \end{aligned} \quad (\text{XX.193})$$

Abbiamo così verificato il risultato prima anticipato e se vogliamo calcolare il rendimento di questo motore trascurando (in pratica ciò non sarà affatto lecito) le perdite nel ferro, avremo:

$$\eta = \frac{P_{mecc}}{P_{elett}} = \frac{\omega_0^2 s(1-s)\Lambda\lambda}{1 + \omega_0^2 s\lambda[\Lambda + s\lambda]} \quad (\text{XX.194})$$

Rendimenti elevati corrispondono a basse perdite per effetto Joule, ovvero resistenze degli avvolgimenti piccole rispetto alle relative reattanze: $\frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \Lambda \gg 1$ e $(\omega_0 - \omega) \frac{l}{r} = \omega_0 s\lambda \gg 1$; avere lo stesso parametro di qualità alle frequenze di lavoro nei due circuiti significa avere per l'indotto un parametro di qualità Q ($\omega_0 = \omega$) $= \omega_0 \lambda$ maggiore che nell'induttore per un fattore circa $\frac{1}{s}$, ovvero il rotore avrà pochissime - anche solo 1 - spire di rame con sezione molto più grossa del filo dell'induttore. Con queste condizioni possiamo trascurare la unità a denominatore della (194):

$$\eta \approx \frac{(1-s)}{1 + s\frac{\lambda}{\Lambda}} \quad (\text{XX.195})$$

che dà una indicazione sulle caratteristiche dell'indotto e dell'induttore:

$$1 + s\frac{\lambda}{\Lambda} \approx \frac{(1-s)}{\eta} \rightarrow \frac{\lambda}{\Lambda} \approx \frac{1-s-\eta}{s\eta} \quad (\text{XX.196})$$

L'analisi fin qui svolta, pur illustrando correttamente il principio di funzionamento di questi motori, presenta alcune schematizzazioni che impediscono un confronto quantitativo con motori reali; fra queste val la pena di citare sia il fatto di avere ammesso accoppiamento stretto fra induttore e indotto, sia l'aver trascurato le perdite nel ferro che, come quelle per effetto Joule, riducono il rendimento. Inoltre i motori reali presentano accorgimenti costruttivi che - fondamentali per l'ottimizzazione della robustezza e del rendimento - complicano notevolmente un'analisi quantitativa.

Quanto alle applicazioni, i motori *asincroni polifase* (in genere trifase) a induzione sono senza dubbio i più usati negli impieghi di media potenza e le principali qualità che li rendono di così larga diffusione sono la robustezza, l'assenza di spazzole e collettore (quindi la piccolezza degli attriti) e l'alto rendimento. A titolo di esempio diciamo che un motore con potenza erogata dell'ordine di 10 kW, può avere un rendimento dell'85% con uno scorrimento a pieno carico s_{max} del 4%. Ciò significa che la velocità angolare del motore alla potenza massima vale (la frequenza di rete è di 50 *periodi/s*) 2880 *giri/minuto*. Questi dati inseriti nella (196) consentono di avere una stima del rapporto $\frac{\lambda}{\Lambda}$; si trova $\frac{\lambda}{\Lambda}$ dell'ordine di 3. Un punto importante che abbiamo considerato, ma sul quale non abbiamo insistito, è che la produzione di lavoro meccanico corrisponde sempre, sul circuito che effettivamente produce lavoro, ad una potenza elettrica media positiva; in un circuito in alternata come nell'esempio attuale, sappiamo che ciò equivale ad avere una caduta di potenziale reale sul circuito alla quale non corrisponde un resistore reale, anzi si cerca di fare piccole le resistenze degli avvolgimenti. Allora da dove proviene questo termine reale alla ddp? Se ripercorriamo i calcoli fatti troviamo che tale termine proviene dalla derivata temporale dei termini del tipo $(M \cdot i)$; essa contiene contributi in fase con la corrente nel circuito, proprio i termini di forza controelettrica associati alla variazione di assetto del circuito; nel caso del motore in continua avevamo già incontrato questo fatto, quando abbiamo visto (vedi (150)) che alla presenza di una coppia resistente $-K$ corrisponde una fem $G\dot{\theta}_R$ sul rotore, associata alla derivata del coefficiente di mutua induzione.

Torniamo ora sull'interpretazione fisica della coppia che insorge in un motore ad induzione, riprendendo l'esempio estremamente semplificato che ci aveva portato al risultato (165). Avevamo allora trovato che in presenza di un campo rotante con velocità angolare ω_0 , tenendo fisse le bobine, in

esse - per induzione - si ottenevano correnti sinusoidali con pulsazione ω_0 , sfasate di 90° l'una rispetto all'altra (vedi (158) e (162)); alla luce di quanto visto nel seguito, queste due bobine a loro volta producono un campo di induzione magnetica rotante anch'esso con velocità angolare ω_0 , ovvero quel campo che sarebbe prodotto da una unica bobina percorsa da una corrente costante i_0 che ruotasse con la *stessa* velocità angolare del campo rotante \vec{B} . Questo risultato, valido ovviamente anche nel caso in cui le bobine ruotino con velocità ω e che in esse siano indotte correnti con pulsazione pari alla differenza ($\omega_0 - \omega$), ci mostra che nonostante notevoli differenze fra i motori asincroni e quelli sincroni, in entrambi i casi la coppia è riconducibile alla presenza di due campi di induzione magnetica uno prodotto dalle correnti dell'indotto, l'altro dalle correnti dell'induttore, rotanti con *uguale* velocità angolare, semplicemente sfasati l'uno rispetto all'altro.

NOTA BIBLIOGRAFICA

I principi della conversione dell' energia elettromagnetica si possono trovare ad esempio in

Seeley: "Electromechanical energy conversion"

International Student Edition (1962),

e nel Cap.7 di **FA 60**, nei Capp.8 e 17 del Vol.II di **FE 63**.

Esempi di macchine e motori elettrici si trovano su Seeley (op.cit.); motori e generatori sono trattati in dettaglio in

Fitzgerald,Kinsley,Umans: "Electric Machinery"

International Student Edition (1983)

Si tratta comunque di una impostazione principalmente dedicata alle applicazioni e non tanto ai fatti fisici fondamentali.

APPENDICE A

L'approssimazione balistica

Innanzitutto riportiamo qui alcune relazioni utili nel seguito (i simboli sono quelli usati nel Capp.II e VI):

$$\sigma_1 = \frac{\left[\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right]}{2\mathcal{J}} \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{4E\mathcal{J} - \left(\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right)^2}}{2\mathcal{J}}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{E}{\mathcal{J}} \quad T = \frac{2\pi}{\sigma_2}$$

Per studiare il moto del galvanometro eccitato da un impulso di corrente $I(t)$ occorre risolvere l'equazione differenziale

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right) \dot{\varphi} + E\varphi = GI(t) \quad (\text{A.1})$$

con le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. I simboli sono quelli del testo.

$I(t)$ rappresenta il termine forzante che nel caso generale è una funzione del tempo non identicamente nulla. Nei casi in cui $I(t) = 0$ per $t > t_o$ si può, integrando la (1), trovare $\dot{\varphi}(t_o)$ e $\varphi(t_o)$ e quindi risolvere l'equazione differenziale omogenea rappresentante il moto libero:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right) \dot{\varphi} + E\varphi = 0 \quad t > t_o \quad (\text{A.2})$$

con $\varphi(t_o)$, $\dot{\varphi}(t_o)$ ricavate dalla soluzione della (1).

La (2) costituisce il punto di partenza per la soluzione del moto del Galvanometro Balistico quando cioè l'impulso di corrente è pensato durare un tempo $t_o \rightarrow 0$, ammettendo al contempo che la carica Q passata nel Galvanometro sia finita (il che ovviamente corrisponde a una ampiezza dell'impulso di corrente $\rightarrow \infty$; impulso a "δ di Dirac"); abbiamo visto nel Cap.VI che la soluzione *balistica* si ottiene integrando la (2) con le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \end{cases}$$

La soluzione assume allora la forma (nel seguito tutte le grandezze che si riferiranno a questa soluzione saranno indicate con l'indice "B"):

$$\varphi_B(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t) \text{sen } \sigma_2 t \quad (\text{caso sovracritico}) \quad (\text{A.3})$$

Per il valore dell'ampiezza del primo massimo e del tempo a cui tale massimo si verifica:

$$\begin{cases} \varphi_{MB} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \text{atan } \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \\ t_{MB} = \frac{1}{\sigma_2} \text{atan } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} . \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Consideriamo ora le risposte del Galvanometro nei casi reali in cui l'impulso di corrente dura un tempo finito t_o e confrontiamo i valori dell'ampiezza del primo massimo così ottenuti con le corrispondenti grandezze nel caso balistico, allo scopo di comprendere meglio il tipo di approssimazione fatta.

Facciamo per primo il caso in cui l'impulso di corrente abbia la seguente struttura (Fig.1):

$$I(t) = \bar{I} \quad t \leq t_o \quad , \quad I(t) = 0 \quad t > t_o$$

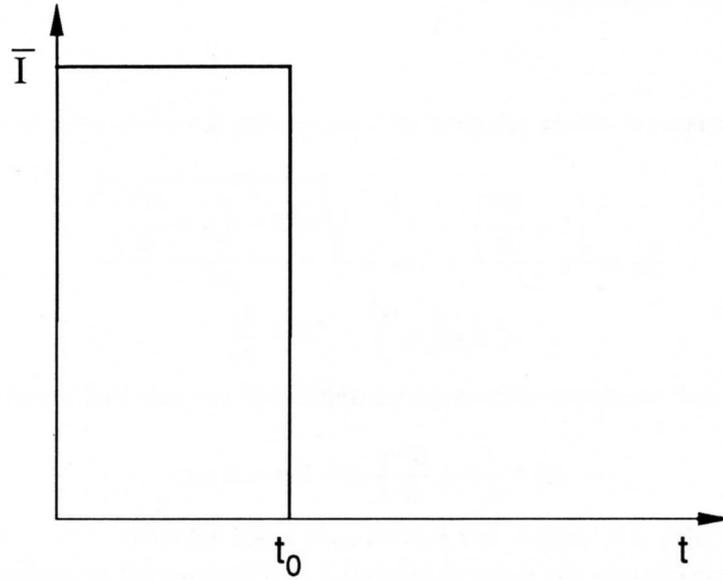


Fig. A.1

Per $t \leq t_o$ la soluzione per φ sarà (nel caso sovracritico):

$$\varphi(t) = \frac{G\bar{I}}{E} - \frac{G\bar{I}}{E} \exp(-\sigma_1 t) \left(\cos \sigma_2 t + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sin \sigma_2 t \right) \quad t \leq t_o \quad (\text{A.5})$$

come abbiamo imparato nel caso della risposta del galvanometro a una corrente costante (vedi Cap.II).

Dalla (5) si ricava:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{G\bar{I}}{E} \exp(-\sigma_1 t) \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) \sin \sigma_2 t \quad t \leq t_o \quad (\text{A.6})$$

Dalla (5) e (6) si possono ricavare i valori di $\varphi(t_o)$ e $\dot{\varphi}(t_o)$ da assumere poi come condizioni iniziali per la soluzione $t > t_o$ che può essere messa sotto la forma

$$\varphi(t) = \exp[-\sigma_1(t - t_o)] [A \cos \sigma_2(t - t_o) + B \sin \sigma_2(t - t_o)] \quad t > t_o$$

Imponendo le condizioni iniziali $\varphi(t_o)$ e $\dot{\varphi}(t_o)$ si trovano i valori per le costanti A e B:

$$\begin{cases} A = \varphi(t_o) \\ B = \frac{\dot{\varphi}(t_o) + \sigma_1 \varphi(t_o)}{\sigma_2} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

ottenendo così per $\varphi(t)$ e $\dot{\varphi}(t)$ per $t > t_o$:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \exp[-\sigma_1(t - t_o)] \left\{ \varphi(t_o) \cos \sigma_2(t - t_o) + \left[\varphi(t_o) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2} \right] \sin \sigma_2(t - t_o) \right\} \\ \dot{\varphi}(t) = \exp[-\sigma_1(t - t_o)] \left\{ \dot{\varphi}(t_o) \cos \sigma_2(t - t_o) - \left[\varphi(t_o) \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) + \dot{\varphi}(t_o) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right] \sin \sigma_2(t - t_o) \right\} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Richiedendo l'annullamento della seconda della (8) si trova la condizione di stazionarietà dell'ampiezza φ :

$$-\sin \sigma_2(t_M - t_o) \cdot \left[\varphi(t_o) \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dot{\varphi}(t_o) \right] + \cos \sigma_2(t_M - t_o) \cdot \dot{\varphi}(t_o) = 0$$

Si trova così :

$$\cot \sigma_2(t_M - t_o) = \frac{\varphi(t_o)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} = x \quad (\text{A.9})$$

Prendendo il valore principale dell'arcocotangente, si ha il primo massimo:

$$t_{M1} - t_o = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\varphi(t_o) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} \right] \quad (\text{A.10})$$

Il valore dell'ampiezza del primo massimo si ottiene ovviamente calcolando la prima delle (8) con il valore $t_{M1} - t_o$.

Ricordando che se $y = \operatorname{acot} x$ allora $\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\varphi(t_o) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} \right] \right\} \cdot \\ \left\{ \varphi(t_o) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \left[\varphi(t_o) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2} \right] \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

dove

$$x = \frac{\varphi(t_o)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left[1 + \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right]$$

Ponendo $\mathcal{E} = \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)}$, esprimiamo la (11) in termini di \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) &= \exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \cdot \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \left(1 + \mathcal{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right)^2}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \mathcal{E} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left[1 + \mathcal{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right] + \mathcal{E} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2} \right\} = \\ &= \exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \cdot \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \left(1 + \frac{\mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2} + 2\mathcal{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right)}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} + \mathcal{E} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2} \right\} = \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \frac{1}{\sigma_2} \cdot \dot{\varphi}(t_o) [2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 1]}{\frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 2\mathcal{E}\sigma_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} = \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \cdot \dot{\varphi}(t_o) [1 + 2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} = \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \dot{\varphi}(t_o) \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \end{aligned}$$

e pertanto si ha:

$$\varphi(t_{M1}) = \frac{\exp \left\{ -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} \right] \right\}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \dot{\varphi}(t_o) \sqrt{1 + 2 \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \sigma_1 + \left(\frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (\text{A.12})$$

La (12) contiene tutta l'informazione che ci interessa per confrontare il valore del massimo con il valore balistico, a parità di carica passata nel galvanometro. Ciò si può fare facilmente per i vari valori di t_o , numericamente. E' però molto più istruttivo svolgere i calcoli facendo l'ipotesi che il tempo t_o sia piccolo rispetto a $\frac{1}{\sigma_1}$ e $\frac{1}{\sigma_2}$ e sviluppando le espressioni di interesse in serie di potenze di grandezze $\ll 1$ ($t_o \cdot \sigma_1$, $t_o \cdot \sigma_2$); in particolar modo le condizioni iniziali $\varphi(t_o)$ e $\dot{\varphi}(t_o)$ espresse dalle (5) e (6) diventano, arrestandosi al secondo ordine e ricordando che

$$\begin{aligned} Q &= \bar{I} \cdot t_o \\ \exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varphi(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} - \frac{G\bar{I}}{E} \left(1 - \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} - \frac{\sigma_1^3 t_o^3}{6} \right) \left(1 - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} + \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 t_o^3}{6} \right) \\ \dot{\varphi}(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left(1 - \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \left(t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^3}{6} \right) \\ \varphi(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} - \frac{G\bar{I}}{E} \left(1 - \sigma_1^2 t_o^2 + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} + \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 t_o^3}{2} + \frac{\sigma_1^3 t_o^3}{2} - \frac{\sigma_1^3 t_o^3}{6} - \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 t_o^3}{6} \right) \\ \dot{\varphi}(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t_o \left(1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \\ \varphi(t_o) \simeq \frac{GQ}{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2} t_o \left[1 - \frac{2}{3} \sigma_1 t_o \right] \\ \dot{\varphi}(t_o) \simeq \frac{GQ}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} &\simeq \frac{t_o \left[1 - \frac{2}{3} \sigma_1 t_o \right]}{2 \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right]} \simeq \frac{t_o}{2} \left[1 - \frac{2}{3} \sigma_1 t_o \right] \left[1 + \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} + \sigma_1^2 t_o^2 \right] \simeq \\ &\simeq \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} - \frac{2}{3} \sigma_1^2 t_o^2 + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] = \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} \right] \end{aligned}$$

Pertanto arrestandosi al secondo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} &= \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} \right] \quad (\text{A.13}) \\ \dot{\varphi}(t_o) &= \frac{GQ}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Ricordando poi che $\frac{E}{\mathcal{J}} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ si ha

$$\dot{\varphi}(t_o) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \quad (\text{A.14})$$

Possiamo ora riprendere le espressioni (10) e (12) e valutarle in funzione di $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$:

$$t_{M1} - t_o = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \varphi(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} \right]$$

e, ricordando che:

$$\operatorname{acot}(x + \delta) \simeq \operatorname{acot} x - \frac{1}{1+x^2} \delta + \frac{x}{(1+x^2)^2} \delta^2$$

si ha

$$t_{M1} - t_o \simeq \frac{1}{\sigma_2} \left[\operatorname{acot} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \sigma_2 \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} + \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \right)^2 \right]$$

Usando la (13) si ottiene:

$$t_{M1} - t_o \simeq \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} \right] + \frac{\sigma_1 t_o^2}{4} = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{t_o}{2} + \frac{\sigma_1 t_o^2}{12} \quad (\text{A.15})$$

Ricordando che $t_{MB} = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$:

$$t_{M1} = t_{MB} + \frac{t_o}{2} + \frac{\sigma_1 t_o^2}{12} \quad (\text{A.16})$$

cioè lo spostamento del massimo è dello stesso ordine di t_o .

La (12) usando la (14) e la (15) diviene:

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) &= \frac{\exp[-\sigma_1(t_{M1} - t_o)]}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \dot{\varphi}(t_o) \cdot \sqrt{1 + \frac{2\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \sigma_1 + \frac{\varphi^2(t_o)}{\dot{\varphi}^2(t_o)} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \simeq \\ &\simeq \frac{\exp \left[-\sigma_1 \left(\frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{t_o}{2} + \frac{\sigma_1 t_o^2}{12} \right) \right]}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \frac{GQ}{\mathcal{J}} \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \cdot \\ &\cdot \sqrt{1 + \frac{2\sigma_1 t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} \right] + \frac{t_o^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \simeq \\ &\simeq \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \frac{GQ}{\mathcal{J}} \left(1 + \frac{\sigma_1 t_o}{2} - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{12} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{8} \right) \left(1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \sqrt{1 + \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{4} + 7 \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{12}} \end{aligned}$$

Ricordando che $(1 + \epsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots$

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) &\simeq \varphi_{MB} \left(1 + \frac{\sigma_1 t_o}{2} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{24} \right) \left(1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{\sigma_1 t_o}{2} + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{8} + \frac{7}{24} \sigma_1^2 t_o^2 - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{8} \right) \simeq \\ &\simeq \varphi_{MB} \left[1 - \left(\frac{\sigma_1^2 t_o^2 + \sigma_2^2 t_o^2}{24} \right) \right] \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\varphi_M = \varphi_{MB} \left(1 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{24} t_o^2 \right) \quad (\text{A.17})$$

La (17) ci dice che l'ampiezza del primo massimo nel caso di un *impulso rettangolare di corrente* cambia, rispetto al caso balistico, solo al secondo ordine in $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$. Si noti anche il fattore $\frac{1}{24}$ che deprime ulteriormente la differenza fra i due casi.

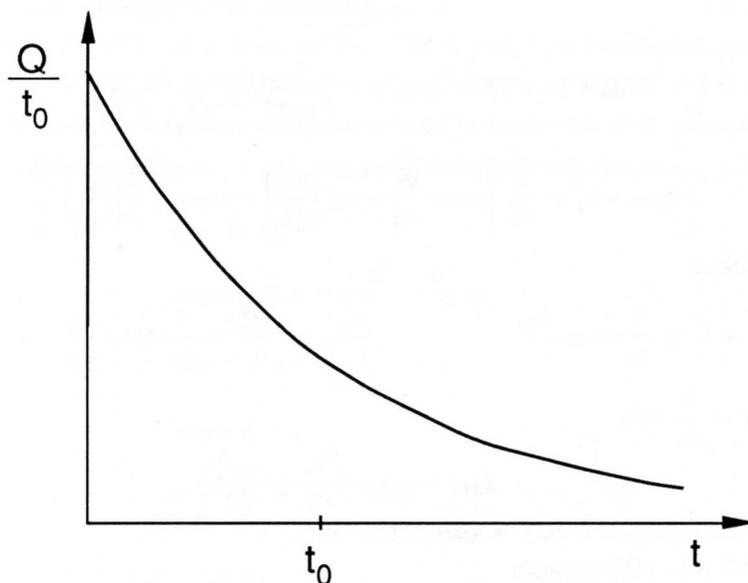


Fig. A.2

Consideriamo ora il caso in cui $I(t)$ abbia la forma di un esponenziale decrescente con costante di tempo t_o (Fig.2):

$$I(t) = \frac{Q}{t_o} \exp -t/t_o \quad Q = \int_0^{\infty} I(t) dt$$

L'equazione differenziale da risolvere è pertanto:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(C + G^2/R)}{\mathcal{J}} \dot{\varphi} + \frac{E}{\mathcal{J}} \varphi = \frac{GQ}{\mathcal{J}t_o} \exp(-t/t_o) \quad (\text{A.18})$$

con $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

La soluzione dell'equazione omogenea associata può al solito ricercarsi nella forma:

$$\varphi_o = \exp(-\sigma_1 t) (\mathcal{A} \cos \sigma_2 t + \mathcal{B} \sin \sigma_2 t)$$

Una soluzione particolare della (18) è:

$$\varphi_p = \frac{GQ}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} t_o \exp(-t/t_o)$$

La soluzione generale avrà perciò la forma

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_p + \varphi_o = \frac{GQ}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} t_o \exp(-t/t_o) + \exp(-\sigma_1 t) (\mathcal{A} \cos \sigma_2 t + \mathcal{B} \sin \sigma_2 t) \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Si trova quindi :

$$\varphi(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} \left\{ t_o \exp(-t/t_o) - \exp(-\sigma_1 t) \left[t_o \cos \sigma_2 t - \left(\frac{1 - \sigma_1 t_o}{\sigma_2} \right) \text{sen } \sigma_2 t \right] \right\} \quad (\text{A.20})$$

Annuliamo la derivata per ottenere la condizione di stazionarietà:

$$0 = -\exp(-t_M/t_o) + \exp(-\sigma_1 t_M) \left[\cos \sigma_2 t_M + \frac{t_o \sigma_2^2 + \sigma_1^2 t_o - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M \right]$$

Quindi la condizione di massimo è:

$$\exp(-t_M/t_o) = \exp(-\sigma_1 t_M) \left[\frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + \cos \sigma_2 t_M \right]$$

Inserendo questa condizione nella (20):

$$\begin{aligned} \varphi(t_M) &= \frac{GQ \exp(-\sigma_1 t_M)}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t_o^2]} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - t_o \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + t_o \cos \sigma_2 t_M - t_o \cos \sigma_2 t_M + \frac{(1 - \sigma_1 t_o)}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M \right\} = \\ &= \frac{GQ \exp(-\sigma_1 t_M)}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} \left\{ \frac{t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 1 - 2\sigma_1 t_o}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M \right\} \end{aligned}$$

e pertanto

$$\varphi(t_M) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t_M) \cdot \text{sen } \sigma_2 t_M \quad (\text{A.21})$$

Si vede così che i massimi giacciono tutti sulla curva della risposta balistica (vedi (3)).

Cerchiamo ora di valutare t_M nel caso in cui t_o sia piccolo rispetto a $1/\sigma_1$ e $1/\sigma_2$ e quindi a t_M . Si tratta di esprimere t_M in serie di potenze di $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$ partendo da:

$$\exp(-t_M/t_o) = \exp(-\sigma_1 t_M) \left[\frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + \cos \sigma_2 t_M \right]$$

Se $t_o \rightarrow 0$, $\exp(-t_M/t_o) \rightarrow 0$ più rapidamente di t_o^n per qualunque n ; pertanto, volendoci arrestare al secondo ordine, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + \cos \sigma_2 t_M &\simeq 0 \\ \cot \sigma_2 t_M &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - t_o \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} \\ t_M &\simeq \frac{1}{\sigma_2} \text{acot} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} \right] \end{aligned}$$

Ricordando lo sviluppo dell' arcotangente, si ha:

$$t_M \simeq \frac{1}{\sigma_2} \left[\text{atan } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + t_o \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 t_o^2 \right]$$

Pertanto si ottiene:

$$t_M = t_{MB} + t_o + \sigma_1 t_o^2 \quad (\text{A.22})$$

Si vede così che nel caso di un impulso di corrente esponenzialmente decrescente con costante di tempo $t_o \ll \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}$ lo spostamento del massimo è proprio uguale (al primo ordine) a t_o .

Ricordando che:

$$\exp[-(x + \epsilon)] \simeq \exp(-x) - \epsilon \cdot \exp(-x) + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot \exp(-x) = \exp(-x) \left[1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \right]$$

$$\sin(x + \epsilon) \simeq \sin x + \cos x \cdot \epsilon - \sin x \cdot \frac{\epsilon^2}{2} = \sin x \left[1 + \cot x \cdot \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} \right]$$

e sostituendo la (22) nella (21) si ottiene il valore del massimo:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp[-(\sigma_1 t_{MB} + \sigma_1 t_o + \sigma_1^2 t_o^2)] \sin(\sigma_2 t_{MB} + \sigma_2 t_o + \sigma_1 \sigma_2 t_o^2) \simeq \\ &\simeq \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t_{MB}) \left[1 - \sigma_1 t_o - \sigma_1^2 t_o^2 + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \sin \sigma_2 t_{MB} \left[1 + \cot \sigma_2 t_{MB} (\sigma_2 t_o + \sigma_1 \sigma_2 t_o^2) - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Ricordando che $\cot \sigma_2 t_{MB} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t_{MB}) \cdot \sin \sigma_2 t_{MB} \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \left[1 + \sigma_1 t_o + \sigma_1^2 t_o^2 - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} \right] \simeq \\ &\simeq \varphi_{MB} \left[1 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} t_o^2 \right]. \end{aligned}$$

Da cui si vede che nel caso di un impulso di corrente esponenziale decrescente con costante di tempo $t_o \ll \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}$, l'ampiezza del primo massimo dipende ancora solo al secondo ordine dai termini $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$; tuttavia il coefficiente numerico $\left(\frac{1}{2}\right)$ è 12 volte più grande del caso in cui l'impulso, avente la stessa carica, sia distribuito uniformemente in un tempo t_o (vedi (17)).

APPENDICE B

Il regime transitorio in due circuiti accoppiati induttivamente

Consideriamo il circuito in Fig.1 e studiamo l'andamento delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ a partire dall'istante in cui viene chiuso il tasto T , ovvero supponiamo che sia applicato un gradino di tensione al circuito 1.

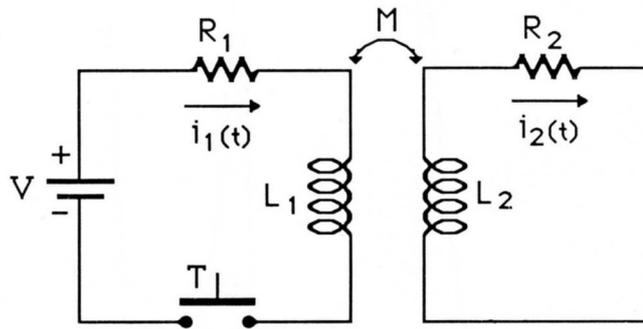


Fig. B.1

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = V & \text{a)} \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Ricavando $\frac{di_2}{dt}$ dalla (1a) e sostituendola nella (1b) si può quindi, derivando la relazione ottenuta, ricavare $\frac{di_2}{dt}$ in funzione della sola $i_1(t)$; sostituendo questa espressione di $\frac{di_2}{dt}$ nella (1a) si ottiene una relazione fra $i_1(t)$ e le sue derivate. Procedendo similmente con $\frac{di_1}{dt}$ ricavata dalla (1b) si ottengono finalmente due equazioni differenziali separate in $i_1(t)$ e $i_2(t)$:

$$\begin{cases} i_1 + \frac{di_1}{dt} \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right) + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \left(\frac{L_1 L_2}{R_1 R_2} - \frac{M^2}{R_1 R_2} \right) = \frac{V}{R_1} & \text{a)} \\ i_2 + \frac{di_2}{dt} \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right) + \frac{d^2 i_2}{dt^2} \left(\frac{L_1 L_2}{R_1 R_2} - \frac{M^2}{R_1 R_2} \right) = 0 & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Detti $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$ e $\theta^2 = \frac{M^2}{R_1 R_2}$ le (2) possono anche scriversi come:

$$\begin{cases} i_1 + i_1'(\tau_1 + \tau_2) + i_1''(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = \frac{V}{R_1} \\ i_2 + i_2'(\tau_1 + \tau_2) + i_2''(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = 0 \end{cases}$$

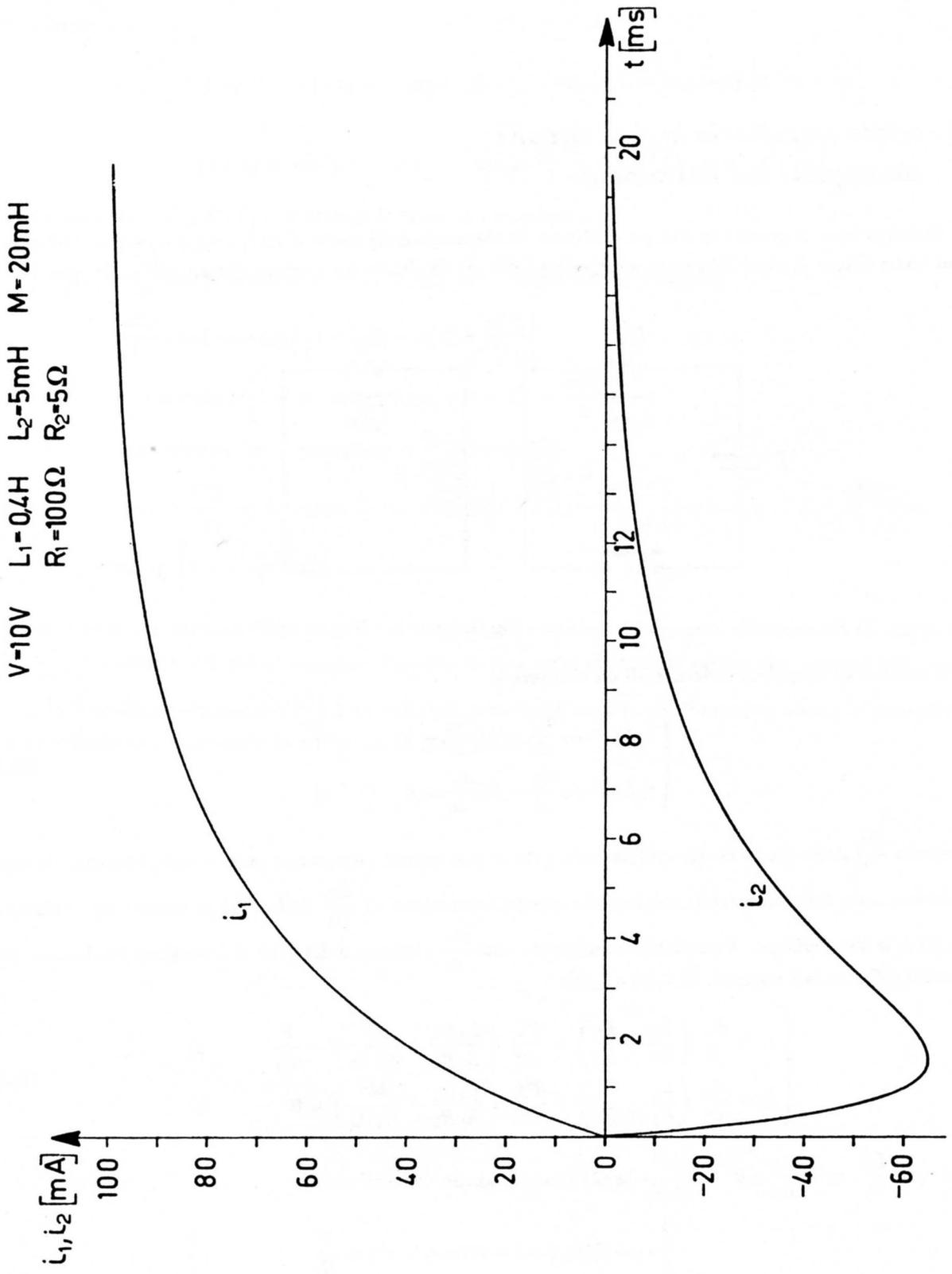


Fig. B.2a

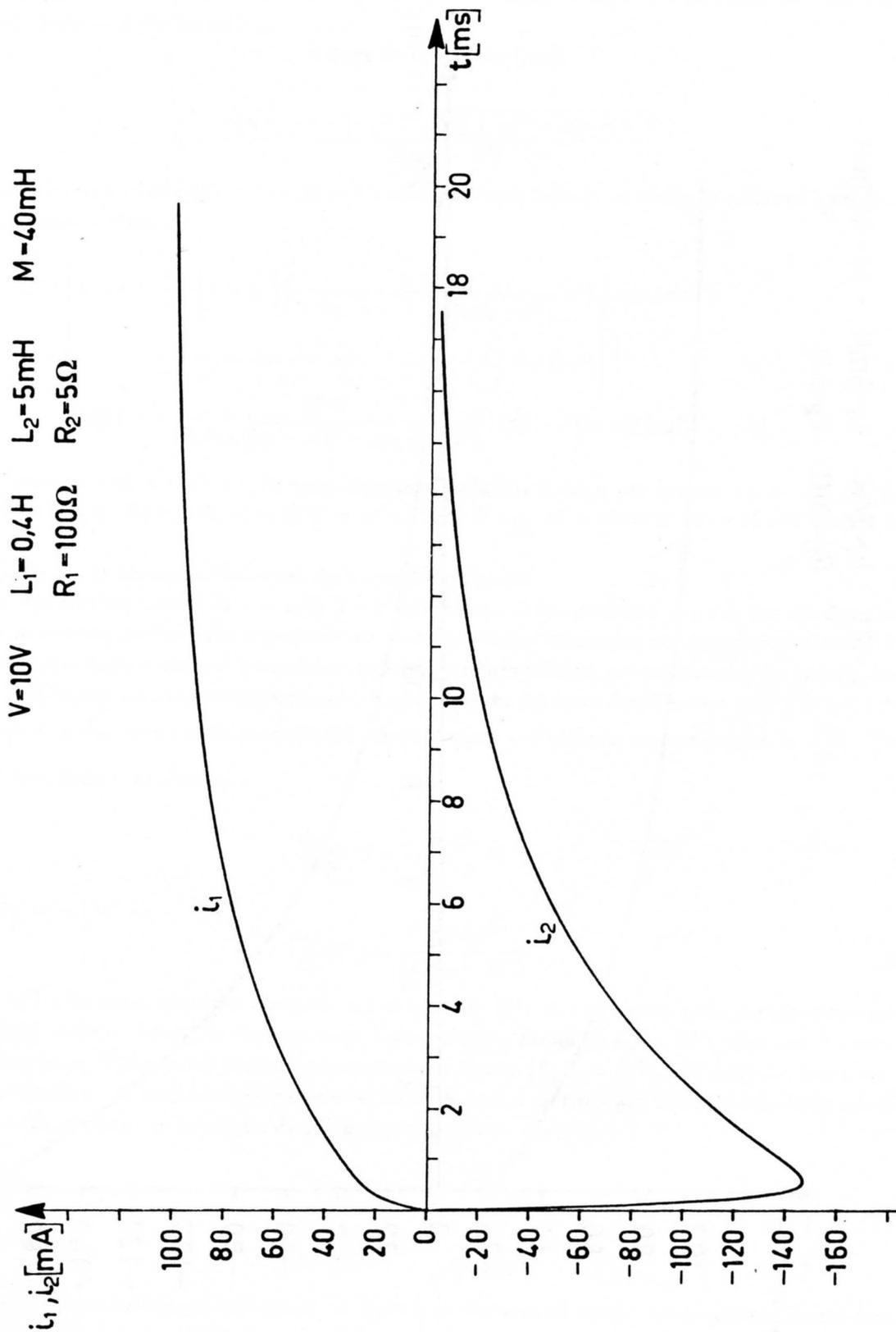


Fig. B.2b

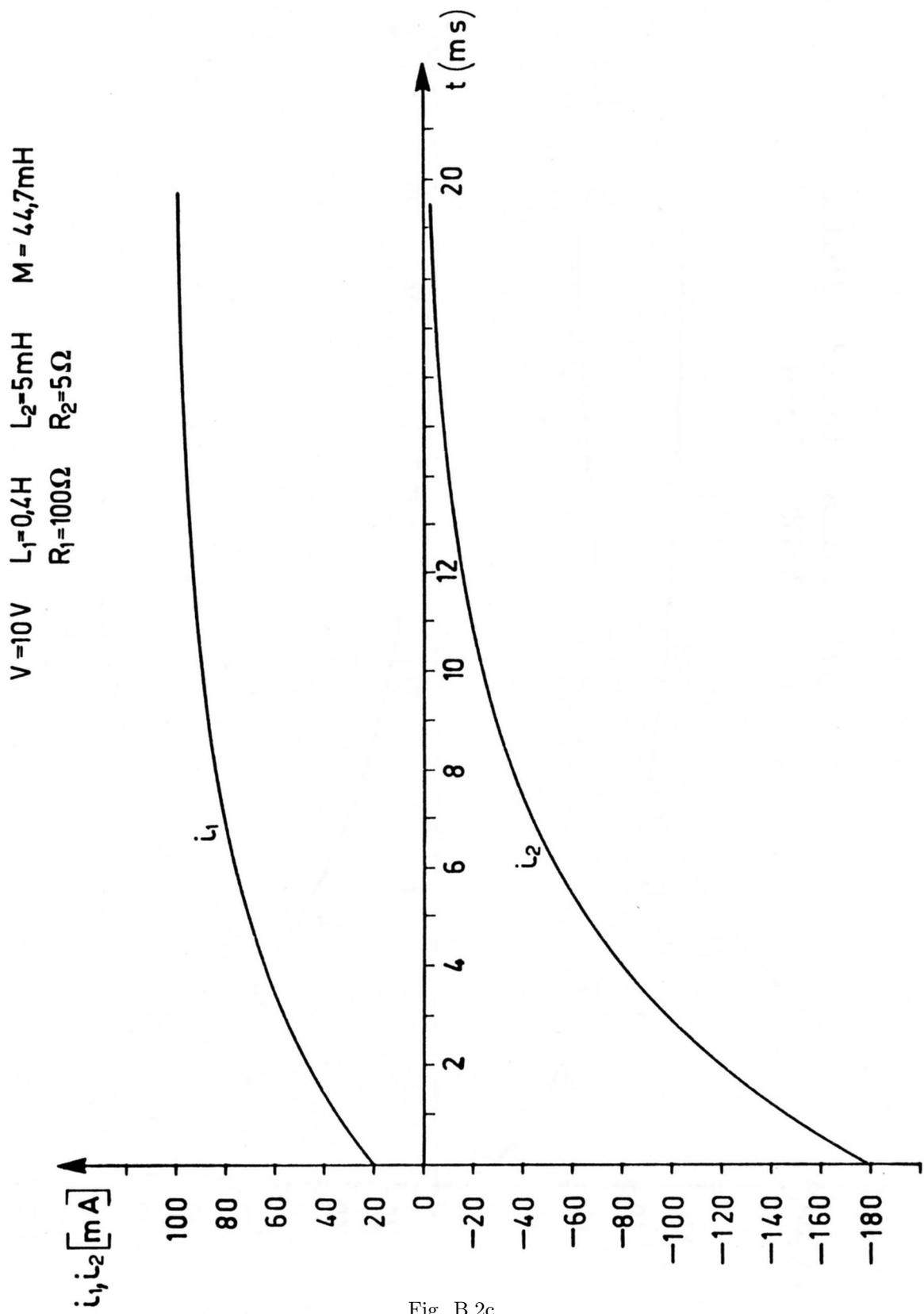


Fig. B.2c

Sia i_1 che i_2 obbediscono alla medesima equazione differenziale omogenea e pertanto tale soluzione per entrambe va ricercata nella forma

$$i = A \exp(\rho_1 t) + B \exp(\rho_2 t) \quad (\text{B.3})$$

con

$$\rho_i = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) + (-1)^{i+1} \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}}{2(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)} \quad (\text{B.4})$$

Fissate le condizioni iniziali $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$ e tenendo conto delle (1) si hanno le soluzioni complete per i_1 e i_2 nella seguente forma:

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{V}{R_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} + 1 \right) \exp(\rho_1 t) + \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} - 1 \right) \exp(\rho_2 t) \right] \right\} & \text{a)} \\ i_2(t) = -\frac{VM}{R_1 R_2 \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} (\exp(\rho_1 t) - \exp(\rho_2 t)) & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Le curve corrispondenti a $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono riportate nella Fig.2 a,b,c per il caso $L_1 = 0.4 H$, $L_2 = 0.005 H$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $V = 10 V$, e $M = 0.020 H$ (a), $M = 0.040 H$ (b) e $M = 0.044721 H = \sqrt{L_1 L_2}$ (c).

Riconsideriamo ora in dettaglio l'influenza delle condizioni iniziali.

Prima della chiusura del tasto $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$; la presenza di una corrente finita in uno dei due circuiti significa un campo magnetico finito e pertanto un accumulo finito di energia; siccome il generatore V ha in serie una resistenza finita e non può pertanto erogare una potenza infinita, ovvero una energia finita in tempo zero, anche nell'istante immediatamente successivo alla chiusura del tasto dovrà essere $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. L'inserimento di queste due condizioni nelle (1) calcolate per $t = 0$ porta a una condizione su $\frac{di_1}{dt}(0^+)$ e su $\frac{di_2}{dt}(0^+)$. Infatti dalla (1b) si ottiene:

$$\frac{di_2}{dt}(0^+) = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}(0^+) \quad (\text{B.6})$$

che sostituita nella (1a) dà:

$$\frac{di_1}{dt}(0^+) = \frac{VL_2}{(L_1 L_2 - M^2)} \quad (\text{B.7})$$

La (6) e la (7) (che sono già state sfruttate nel dedurre le (5)) ci confortano nella nostra osservazione sulla continuità delle i : infatti le derivate sono finite, almeno finché $L_1 L_2 > M^2$, cioè per il cosiddetto *accoppiamento lasco*. Tuttavia nel limite di accoppiamento stretto ($L_1 L_2 = M^2$), tali derivate divergono. La ragione "matematica" di questo comportamento è molto semplice da ritrovare direttamente dalla soluzione (5) e corrisponde al fatto che nel limite di accoppiamento stretto (vedi 4):

$$\begin{aligned} \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} \rho_1 &= -\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \\ \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} \rho_2 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 - \theta^2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

e uno dei due esponenziali ($\exp(\rho_2 t)$) tende ad avere una costante di tempo estremamente breve, mentre l'altra assume il valore $\tau_1 + \tau_2$. E' facile verificare che la (6) e la (7) divergono proprio a causa della derivata di $\exp(\rho_2 t)$, cioè della derivata della componente a costante di tempo breve. Nella Fig.2b e 2c sono riportate

le curve $i_1(t)$ e $i_2(t)$ per $V = 10 \text{ V}$, $L_1 = 0.4 \text{ H}$, $L_2 = 0.005 \text{ H}$, $R_1 = 100 \text{ } \Omega$, $R_2 = 5 \text{ } \Omega$, $M = 0.040 \text{ H}$ (b) e $M = 0.044721 \text{ H} = \sqrt{L_1 L_2}$ (c). Si noti che, approssimandosi alla condizione di accoppiamento stretto, le curve tendono a spostarsi verso l'origine proprio a causa del fatto che una delle due componenti (quella veloce: $\exp(\rho_2 t)$) si addensa sempre di più ai tempi brevi. Questo *ritrarsi* delle curve verso l'origine corrisponde proprio alla divergenza delle derivate per $t = 0$. Nel limite $L_1 L_2 - M^2 = 0$, pertanto la presenza di derivate infinite per $t = 0^+$ porta a valori finiti di $i_1(\Delta t)$ e $i_2(\Delta t)$ con Δt molto piccolo. Tali valori si possono ottenere semplicemente come limite per $\rho_2 \rightarrow \infty$ dalle (5a) e (5b), e calcolandole poi per un Δt tendente a zero. Si ottiene così :

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{V}{R_1} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \exp[-t/(\tau_1 + \tau_2)] \right) \\ i_2(t) &= -\frac{VM}{R_1 R_2 (\tau_1 + \tau_2)} \exp[-t/(\tau_1 + \tau_2)] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e per i limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} i_1(\Delta t) &= \frac{V}{R_1} \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{V}{R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2} \\ \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} i_2(\Delta t) &= -\frac{V}{R_1} \frac{M}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} = -\frac{V \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{R_2 + \frac{L_2}{L_1} R_1} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

L'apparente contraddizione consistente nel prendere la soluzione ottenuta con condizioni iniziali $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ per fare un limite che dà $i_1(\Delta t) \neq 0$ e $i_2(\Delta t) \neq 0$, si rimuove pensando che queste seconde condizioni si riferiscono a un tempo Δt infinitesimo sì, ma molto maggiore rispetto a $(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)/(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{1}{\rho_2}$.

Matematicamente tutto sembra a posto, ma come la mettiamo col fatto di trovarsi in un tempo infinitesimo con due correnti finite nei due circuiti partendo da correnti nulle? Avevamo infatti premesso che non era possibile accumulare nel campo magnetico una energia finita in un tempo zero, disponendo di una erogazione finita di potenza (generatore con resistenza non nulla in serie) e ciò sembra essere in netta contraddizione con quanto visto nel caso di accoppiamento stretto. Anche in questo caso la contraddizione è solo apparente: calcoliamo il flusso di \vec{B} concatenato col circuito 1 e concatenato col circuito 2 per valori qualunque di $i_1(t)$ e $i_2(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= i_1 L_1 + i_2 M \\ \Phi_2 &= i_2 L_2 + i_1 M \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e applichiamo le (11) al nostro caso, cioè all'istante immediatamente dopo la chiusura del tasto, usando per i_1 e i_2 i valori dati dalle (10). Troviamo allora:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\Delta t) &= \frac{V}{R_1} \frac{L_1 L_2}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{V}{R_1} \frac{M^2}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \\ \Phi_2(\Delta t) &= -\frac{V}{R_1} \frac{L_2 M}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{V}{R_1} \frac{L_2 M}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

che nel limite di accoppiamento stretto ($L_1 L_2 = M^2$), danno entrambe valore nullo, ovvero campo magnetico nullo poichè le superfici dei due circuiti sono ammesse essere finite. Essendo il campo magnetico nullo, anche l'energia ad esso associata è nulla. Ciò poteva essere derivato direttamente ricordando che, dati due circuiti

accoppiati induttivamente, l'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico può porsi nella forma (Cap. XX, §3, (65)):

$$W_M = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (\text{B.13})$$

Ritornando al caso in cui $\tau_1 \tau_2 > \theta^2$ (accoppiamento lasco), consideriamo quello che si verifica quando è rimossa l'eccitazione del circuito 1 dopo che si è stabilita una situazione stazionaria: $i_1(0^-) = \frac{V}{R_1}$, $i_2(0^-) = 0$ (con $t = 0^-$ si indica l'istante di tempo immediatamente precedente alla nostra origine).

Supponiamo dapprima che per $t = 0$, V venga sostituito un cortocircuito, ovvero che la tensione applicata dal generatore vada bruscamente a zero. Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

con le condizioni iniziali $i_1(0) = \frac{V}{R_1}$, $i_2(0) = 0$. La soluzione è:

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{V}{2R_1} \left[\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} + 1 \right) \exp(\rho_1 t) + \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} - 1 \right) \exp(\rho_2 t) \right] \\ i_2(t) = \frac{VM}{R_1 R_2 \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} (\exp(\rho_1 t) - \exp(\rho_2 t)) \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

dove i simboli sono quelli introdotti precedentemente. Confrontando le (15) con le (5) è immediato verificare che $i_2(t)$ ha esattamente lo stesso andamento (salvo il segno) che aveva quando V passava da 0 a V e che $i_1(t)$ ritorna a zero esattamente con lo stesso andamento col quale aveva raggiunto l'asintoto $\frac{V}{R_1}$. Anche qui, in base alle considerazioni di continuità sull'energia accumulata abbiamo supposto che $i_1(0) = i_1(0^-)$ e $i_2(0) = i_2(0^-)$. Tuttavia anche in questo caso se andassimo a considerare il limite per accoppiamento stretto ($\tau_1 \tau_2 \rightarrow \theta^2$) troveremmo che nell'istante in cui V passa bruscamente a 0, il regime delle correnti ha una brusca *ridistribuzione* e per Δt infinitesimo $i_1(\Delta t)$ passa dal valore $\frac{V}{R_1}$ al valore $\frac{V}{R_1} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}$ e $i_2(\Delta t)$ dal valore zero al valore $\frac{VM}{R_1 R_2 (\tau_1 + \tau_2)}$ come è possibile verificare facendo il limite per $\tau_1 \tau_2 \rightarrow \theta^2$ e poi calcolando i valori per Δt infinitesimo, ma comunque molto maggiore di $-1/\rho_2$.

In pratica, per realizzare circuiti che approssimino al meglio questi andamenti, si può procedere nel modo di Fig.3.

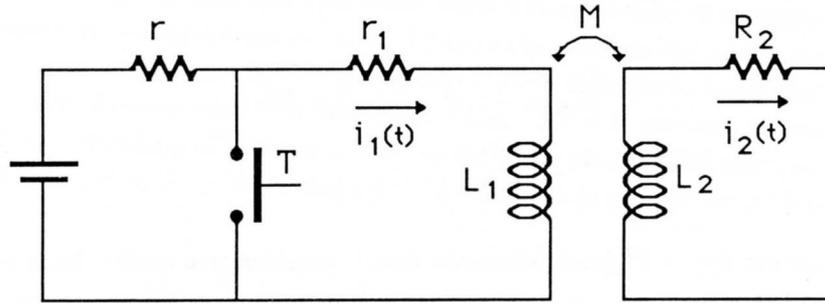


Fig. B.3

Quando T è chiuso la ddp applicata all'induttore del circuito 1 è nulla, mentre tale ddp passa al valore V quando il tasto viene aperto: si ha cioè la transizione brusca della tensione applicata. Gli andamenti delle correnti saranno quelli descritti dalle (5) con $R_1 = r + r_1$, $R_2 = R_2$.

Quando T viene chiuso la ddp va a zero e questa volta gli andamenti sono quelli descritti dalle (15) con $R_1 = r_1$, $R_2 = R_2$. Pertanto le costanti di tempo degli esponenziali non saranno le stesse in apertura e in chiusura di T , essendo effettivamente diversi i due circuiti.

Una maniera assai più diretta per interrompere l'eccitazione nel primario (circuito 1), è quella di adottare lo schema di Fig.1 e di aprire il tasto T (dopo che si è raggiunta la situazione stazionaria); ciò corrisponde a mandare a zero bruscamente la corrente nel circuito 1. Se andassimo a fare una analisi dettagliata di quello che succede all'apertura del tasto troveremmo non poche complicazioni associate alle schematizzazioni che ci troveremmo costretti ad adottare per descrivere il tasto dal punto di vista elettrico. Possiamo però *simulare* il comportamento del circuito in queste condizioni supponendo di avere nel circuito 1 una resistenza complessiva in serie R_1 molto elevata ed un generatore di tensione V anch'esso di valore sufficientemente elevato in modo che il rapporto $\frac{V}{R_1} = I_o$ si mantenga comunque finito. Con un circuito di questo tipo abbiamo realizzato un generatore di corrente I_o (con approssimazione tanto migliore quanto più R_1 è grande) e quando spengiamo (cioè cortocircuitiamo) il generatore di tensione, mandiamo a zero tale corrente con una costante di tempo molto piccola. E' questa brusca transizione che simula l'azione del nostro tasto in apertura. Per vedere analiticamente di descrivere il fenomeno dobbiamo fare il limite delle (15) per $R_1 \rightarrow \infty$, con $\frac{V}{R_1} = I_o$ costante. Se calcoliamo questi limiti troviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow \infty} i_1(t) &= I_o \cdot \exp \left[-t / \left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) \right] \\ \lim_{R_1 \rightarrow \infty} i_2(t) &= I_o \cdot \frac{M}{L_2} \left\{ \exp(-t/\tau_2) - \exp \left[-t / \left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

che ci fanno vedere come effettivamente la corrente i_1 va a zero tanto più rapidamente quanto più R_1 è grande e la corrente i_2 raggiunge il massimo in tempi assai brevi (gli stessi per cui i_1 è decaduta) e decade poi con costante di tempo τ_2 .

Supponendo che l'accoppiamento sia lasco, per cui $\left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) > 0$ indipendentemente da R_1 , abbiamo

che per R_1 sufficientemente grande è possibile avere tempi θ che soddisfano alla condizione $\left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) \ll \theta \ll \tau_2$ e per i quali:

$$\begin{aligned} i_1(\theta) &\simeq 0 \\ i_2(\theta) &\simeq I_o \frac{M}{L_2} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Osserviamo allora che l'energia immagazzinata prima dello spengimento di V valeva $W_M(0^-) = \frac{1}{2}L_1I_o^2$, mentre per $t = \theta$ vale $W_M(\theta) = \frac{1}{2}I_o^2\frac{M^2}{L_2}$. Manca cioè dell'energia $\Delta W = \frac{1}{2}I_o^2\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$. Se ci chiediamo dove è finita questa energia, la risposta non può che essere una (almeno nella nostra schematizzazione): sarà finita in quantità di calore prodotto per effetto Joule sulle resistenze dei circuiti dalle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Infatti, tenendo conto delle condizioni su θ , dalle (16) abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{Joule} &= \int_0^\theta i_1^2(t)R_1 dt + \int_0^\theta i_2^2(t) dt = \\ &\approx I_o^2R_1 \int_0^\theta \exp[-2t/(\tau_1 - M^2/R_1L_2)] dt - I_o^2\frac{M^2}{L_2}R_2 \int_0^\theta dt \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Nell'ultimo passaggio, per il secondo integrale, abbiamo sfruttato la condizione $\left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1L_2}\right) \ll \theta \ll \tau_2$ che consente di porre $\exp(-t/\tau_2) \simeq 1$ e trascurare il contributo dell'integrazione dell'altro esponenziale; per quanto riguarda il primo integrale, essendo $\theta \gg (\tau_1 - M^2/R_1L_2)$ possiamo calcolarlo come se $\theta = \infty$, ottenendo così:

$$W_{Joule} = \frac{I_o^2R_1}{2} \left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{M^2}{R_1L_2} \right) - I_o^2\frac{M^2}{L_2} \cdot \frac{\theta}{\tau_2} \quad (\text{B.19})$$

Nel nostro caso ($R_1 \rightarrow \infty$ e $\theta \ll \tau_2$) solo il primo dei due termini a secondo membro dà un contributo finito pari a $W_{Joule} = \frac{1}{2}I_o^2\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$ proprio uguale alla quantità di energia mancante.

Le cose tornano così bene perchè noi abbiamo "addolcito" il problema eliminando la discontinuità sulla corrente ovvero il tasto in apertura e lo abbiamo sostituito con lo spegnimento di un generatore di ddp molto elevata con in serie una grossissima resistenza. La soluzione ottenuta ci dice che a tale variazione, l'induttanza reagisce con una ddp anch'essa estremamente elevata, poiché sulla resistenza R_1 (molto grossa) continua a scorrere una corrente finita $i_1(t)$ che decade poi rapidamente. Usando un tasto in apertura tutta la ddp prodotta dall'induttanza comparirebbe ai capi del tasto dove è concentrata tutta la resistenza serie (grandissima se il tasto è buono) del circuito e non si avrebbe unicamente dissipazione per effetto Joule, ma molto più probabilmente scoccherebbe una scintilla (portandosi via parte dell'energia mancante).

Guardando ancor più nel dettaglio la faccenda, ci rendiamo anche conto che se l'accoppiamento è stretto, molti dei problemi scompaiono: infatti in questa ipotesi $L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 0$ e conseguentemente la transizione di $i_1(t)$ da I_o a 0 avviene in tempo zero; inoltre, e questo è il fatto da rimarcare, ciò avviene senza "energia mancante", ovvero *prima* della transizione e *dopo* la transizione l'energia associata al campo magnetico è la stessa. Tutto questo ha come conseguenza che in un sistema in accoppiamento stretto, anche l'interruzione brusca della corrente non provoca (purché il secondario sia chiuso su una resistenza finita) alcuna divergenza nella ddp del primario contrariamente al caso di accoppiamento lasco (non si hanno cioè scintille fra i contatti dell'interruttore); infatti non vi è da *smaltire* alcun eccesso di energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico che non possa essere sostenuta da una corrente nel secondario.

APPENDICE C

L'equazione di moto di uno strumento elettrodinamico, nel caso di eccitazione periodica.

Abbiamo visto nel Cap.XI,§2 che l'equazione di moto di uno strumento elettrodinamico è regolata da un'equazione differenziale del tipo

$$\mathcal{J}\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + E\alpha = C(\alpha) \cdot g(t) \quad (\text{C.1})$$

dove \mathcal{J} , D ed E sono costanti mentre $C(\alpha)$ è una funzione limitata di α , con derivata rispetto ad α limitata e $g(t)$ una funzione periodica del tempo $g(t+T) = g(t)$, a media in genere non nulla. Vogliamo dimostrare che se il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ della funzione $g(t)$ è sufficientemente piccolo, allora la soluzione di regime $\alpha(t)$ della (1) è approssimata da $\alpha_m(t)$, con $\alpha_m(t)$ soluzione di regime dell'equazione differenziale:

$$\mathcal{J}\ddot{\alpha}_m + D\dot{\alpha}_m + E\alpha_m = C(\alpha_m) \langle g(t) \rangle \quad (\text{C.2})$$

essendo $\langle g(t) \rangle$ il valor medio di $g(t)$.

Prima di passare alla dimostrazione notiamo che la procedura delineata all'inizio del Cap.XI,§2 non può essere seguita poiché l'equazione non è lineare e pertanto non vale più il principio della sovrapposizione delle soluzioni. Occorre quindi una procedura differente per dimostrare l'assunto.

Dato un integrale del tipo:

$$I(t) = \int_0^t f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \quad (\text{C.3})$$

con $f(\theta)$ continua, si ha (*Lemma di Riemann-Lebesgue*):

$$I(t) \approx 0 \quad \text{per } \omega \text{ sufficientemente grande} \quad (\text{C.4})$$

Diamo una dimostrazione della (4) supponendo f dotata di una certa regolarità. Preciseremo così il significato della locuzione "per ω sufficientemente grande", facendo intervenire direttamente il confronto fra il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ della funzione *seno* e i tempi caratteristici in cui $f(t)$ varia; ovvero dimostreremo che $I(t)$ è tanto più vicina a zero quanto più $|f'(t)| \cdot T = |f'(t)| \cdot \frac{2\pi}{\omega} \ll f(t)$.

L'integrale (3) può sempre scomporsi come la somma di $N + 1$ integrali, con N dato dalla parte intera di $\frac{t}{T}$:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT}^{(n+1)T} f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta + \\ &+ \int_{NT}^t f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \end{aligned}$$

Usando per $f(\theta)$ la formula di Taylor applicata all'estremo inferiore di integrazione di ognuno degli $N + 1$ integrali, avremo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \simeq \int_{nT}^{(n+1)T} [f(nT) + f'(nT) \cdot \theta + f''(nT) \cdot \frac{\theta^2}{2} + \dots] \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta$$

Il primo dei termini fra parentesi quadra è costante e pertanto l'integrale ad esso corrispondente dà zero. Quanto agli altri, se T è sufficientemente piccolo (ovvero ω sufficientemente grande) per cui $\forall \theta, f'(\theta) \cdot T \ll f(t)$, allora potremo arrestare lo sviluppo al primo ordine, ottenendo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \simeq \frac{f'(nT)}{\omega^2} \int_{nT}^{(n+1)T} \omega^2 \theta \cdot \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d(\theta)$$

Maggioriamo $|f'(nT)|$ con $|f'_{max}|$, il massimo dei valori che $|f'|$ assume nell'intervallo $[0 - t]$; abbiamo allora:

$$\left| \int_0^t f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \right| \leq \frac{|f'_{max}|}{\omega^2} \cdot \left| \int_0^{\omega t} \omega \theta \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d(\omega\theta) \right| \leq \frac{|f'_{max}|}{\omega} \left(t + \frac{1}{\omega} \right) \approx \frac{|f'_{max}|}{\omega} t$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il risultato $|\int_0^x y \operatorname{sen}(y + \varphi) dy| \leq x + |\operatorname{sen} \varphi| \leq x + 1$ e il fatto che stiamo considerando valori grandi di ω rispetto a $1/t$.

L'ultimo risultato può mettersi nella forma:

$$\left| \int_0^t f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \right| \leq \int_0^t f(\theta) d\theta \cdot \frac{|f'_{max}|}{\langle f \rangle \omega} \tag{C.5}$$

dove $\langle f \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta$. Questa forma si presta direttamente a far vedere che, data una funzione periodica $g(t)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$g(t) = g_o + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{con } g_o = \langle g \rangle,$$

se ω è sufficientemente grande, si ha:

$$\int_0^t f(\theta) g(\theta) d\theta \approx g_o \int_0^t f(\theta) d\theta$$

Infatti, poiché:

$$\int_0^t f(\theta) g(\theta) d\theta = g_o \int_0^t f(\theta) d\theta \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \int_0^t f(\theta) \operatorname{sen}(n\omega\theta + \varphi_n) d\theta}{\int_0^t f(\theta) d\theta} \right]$$

abbiamo che per $\omega \gg \frac{|f'_{max}|}{\langle f \rangle}$ il termine n -esimo della sommatoria risulta, in virtù della (5), in valore assoluto minore di:

$$\left| \frac{g_n}{g_o} \right| \frac{|f'_{max}|}{\langle f \rangle n\omega}$$

quindi tanto più trascurabile quanto più ω è maggiore di $\frac{|f'_{max}|}{|\langle f \rangle|}$. Se $|f'|$ è limitata, è sempre possibile trovare un $\omega \gg \frac{|f'_{max}|}{|\langle f \rangle|}$ tale che:

$$\int_0^t f(\theta)g(\theta)d\theta = \langle g \rangle \int_0^t f(\theta)d\theta \quad (\text{C.6})$$

Ricordiamo ora che, secondo Lagrange, la soluzione di regime della (1) soddisfa alla seguente equazione:

$$\alpha(t) = -\alpha_{10}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{20}(\theta)C(\alpha)g(\theta)}{W(\theta)}d\theta + \alpha_{20}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{10}(\theta)C(\alpha)g(\theta)}{W(\theta)}d\theta \quad (\text{C.7})$$

dove $\alpha_{10}(\theta)$ e $\alpha_{20}(\theta)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata alla (1): $\alpha_{10}(\theta) = \exp(\rho_1\theta)$, $\alpha_{20}(\theta) = \exp(\rho_2\theta)$ (con ρ_1 e ρ_2 soluzioni di $\mathcal{J}\rho^2 + D\rho + E = 0$); $W(\theta)$ rappresenta il Wronskiano delle due soluzioni:

$$W(\theta) = \alpha_{10}(\theta) \cdot \alpha'_{20}(\theta) - \alpha_{20}(\theta) \cdot \alpha'_{10}(\theta) = \exp(\rho_1 + \rho_2) \cdot \theta \cdot (\rho_2 - \rho_1) \quad (\text{C.8})$$

Per verificare la validità della (7) basta sostituire nella (1) $\alpha(t)$ e le sue derivate ricavate dalla (7).

Calcoliamo ora $\alpha(t)$ tramite la (7): notiamo che, essendo \mathcal{J} , D ed E tutti positivi e $C(\alpha)$ limitata, la funzione integranda $f(\theta) = \frac{\alpha_{1(2)0}(\theta)C(\alpha(\theta))}{W(\theta)}$ risponde ai requisiti richiesti per la validità della (4). Inoltre anche $|f'(\theta)|$ risulta limitata, essendo $\frac{dC(\alpha)}{d\alpha}$ limitata e $\alpha'(\theta)$ limitata, come si può direttamente verificare dalla (7). Pertanto il risultato (6) consente di porre la soluzione $\alpha(t)$, per ω sufficientemente grande (ovvero per $\omega \gg \frac{|f'_{max}|}{|\langle f \rangle|}$), nella forma:

$$\alpha(t) = -\alpha_{10}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{20}(\theta)C(\alpha)}{W(\theta)}g_o d\theta + \alpha_{20}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{10}(\theta)C(\alpha)}{W(\theta)}g_o d\theta$$

Essendo $g_o = \langle g(t) \rangle$, tale soluzione per $\alpha(t)$ corrisponde proprio alla relazione (7) scritta per la soluzione dell'equazione differenziale (2), ovvero:

$$\alpha(t) = \alpha_m(t)$$

APPENDICE D

Calcolo dell'efficacia di uno schermo magnetico

Supponiamo che in una regione di spazio (caratterizzata da $\mu_r = 1$) sia presente un campo di induzione magnetica omogeneo $\vec{B}_o = B_o \vec{k}$, con \vec{k} versore dell'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Se ora introduciamo in tale regione di spazio un guscio sferico di materiale ferromagnetico ($\mu_r \gg 1$) di spessore $s = R - r$ (Fig.1), con centro nell'origine degli assi, il campo risulterà distorto sia all'esterno del guscio che all'interno del materiale e nella cavità. Vogliamo trovare i campi in queste regioni, con particolare interesse per quello all'interno del guscio.

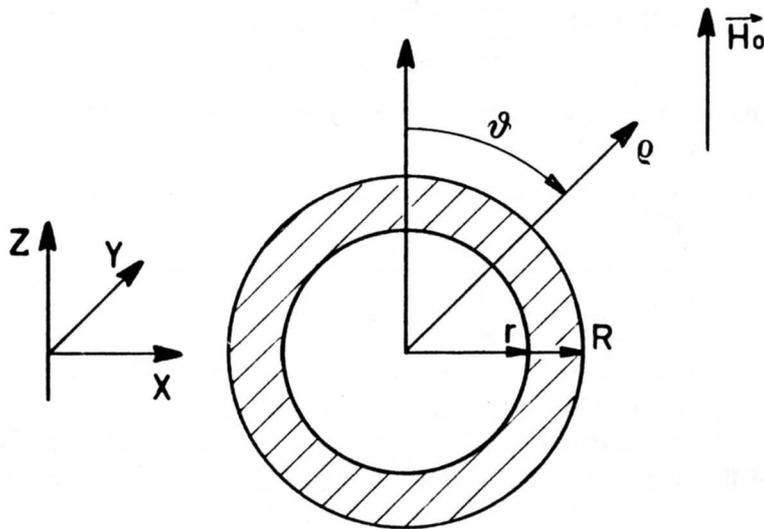


Fig. D.1

Data la simmetria del problema un sistema di coordinate sferiche (ρ, θ, φ) con origine nel centro della sfera è senz'altro il più opportuno (nella Fig.1 è disegnata la sezione massima del guscio che giace sul piano $\varphi = 0$). Inoltre, notando che sono assenti correnti macroscopiche, il campo magnetico statico \vec{H} in qualunque punto dello spazio sarà derivabile da un potenziale scalare $\Psi_M(\rho, \theta, \varphi)$ che soddisfa all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \Psi_M = 0 \tag{D.1}$$

in ogni punto dello spazio, eccetto le superfici di separazione fra i mezzi. Infatti in tutto lo spazio la densità di carica magnetica è nulla, salvo eventualmente le superfici di separazione fra i mezzi, là dove le condizioni al contorno consentiranno di trovare il raccordo fra le soluzioni per il campo nelle varie regioni.

Intanto notiamo che ogni dipendenza da φ è da escludersi data la completa simmetria attorno all'asse z . La soluzione generale, indipendente da φ , che soddisfa l'equazione (1) è del tipo

$$\Psi_M = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l \rho^l + B_l \rho^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.2})$$

dove A_l e B_l sono delle costanti da determinare in base alle condizioni al contorno e $P_l(\cos \theta)$ è il polinomio di Legendre di ordine l .

Nelle varie regioni dello spazio alcune delle soluzioni contenute nella (2) possono escludersi. Intanto notiamo che un campo costante $\vec{H} = \frac{\vec{B}_o}{\mu_o}$ diretto come in figura, nello spazio privo di cariche di magnetizzazione può farsi discendere da un potenziale $\Psi_{M_o} = -H_o \rho \cos \theta$; infatti, detto \vec{u} il versore diretto come ρ e \vec{v} quello associato a θ , abbiamo

$$\vec{H}_o = -\vec{\nabla} \Psi_{M_o} = -\frac{\partial \Psi_{M_o}}{\partial \rho} \cdot \vec{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{M_o}}{\partial \theta} \cdot \vec{v} \quad (\text{D.3})$$

che dà appunto $\vec{H}_o = H_o \cos \theta \vec{u} - H_o \sin \theta \vec{v}$.

Pertanto, tenendo conto delle (2) e del fatto che per $\rho \rightarrow \infty$ la soluzione deve coincidere con Ψ_{M_o} , per $\rho > R$ abbiamo necessariamente:

$$\Psi_M = -H_o \rho \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l \rho^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad \rho > R \quad (\text{D.4})$$

Per $r < \rho < R$ non possiamo per il momento escludere nessuno dei termini contenuti nella (2) e continuiamo a scrivere:

$$\Psi_M = \sum_{l=0}^{\infty} (C_l \rho^l + D_l \rho^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad r < \rho < R \quad (\text{D.5})$$

mentre per $\rho < r$ avremo

$$\Psi_M = \sum_{l=0}^{\infty} E_l \rho^l P_l(\cos \theta) \quad \rho < r \quad (\text{D.6})$$

altrimenti avremmo divergenze per $\rho \rightarrow 0$.

Le condizioni al contorno sono la continuità della componente di \vec{H} tangente alla superficie di separazione dei mezzi e la continuità della componente di \vec{B} normale alla medesima superficie. Avremo quindi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_\theta(R^+) = H_\theta(R^-) & \text{a)} \\ H_\theta(r^+) = H_\theta(r^-) & \text{b)} \\ \mu_o H_\rho(R^+) = \mu_r \mu_o H_\rho(R^-) & \text{c)} \\ \mu_r \mu_o H_\rho(r^+) = \mu_o H_\rho(r^-) & \text{d)} \end{array} \right. \quad (\text{D.7})$$

dove gli indici θ e ρ indicano le componenti di \vec{H} dirette tangenzialmente e normalmente alle superfici e +, - si riferiscono all'esterno e all'interno delle superfici di separazione rispettivamente. Ricordando che:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta} \\ H_\rho = -\frac{\partial \Psi_M}{\partial \rho} \end{array} \right.$$

otteniamo

$$-H_o \operatorname{sen} \theta - \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^{-(l+2)} \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} = - \sum_{l=0}^{\infty} [C_l R^{l-1} + D_l R^{-(l+2)}] \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{D.8a})$$

$$- \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^{l-1} + D_l r^{-(l+2)}] \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} = - \sum_{l=0}^{\infty} E_l r^{l-1} \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{D.8b})$$

$$\begin{aligned} H_o \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l (l+1) R^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) = \\ = \mu_r \left\{ - \sum_{l=0}^{\infty} [C_l l R^{l-1} - D_l (l+1) R^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.8c})$$

$$\mu_r \left\{ - \sum_{l=0}^{\infty} [C_l l r^{l-1} - D_l (l+1) r^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \right\} = - \sum_{l=0}^{\infty} E_l l r^{l-1} P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.8d})$$

Applicando le relazioni di ortonormalità dei $P_l(\cos \theta)$ si trova che tutti i coefficienti con $l \neq 1$ devono essere nulli; ricordando poi che $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, otteniamo le seguenti 4 equazioni in B_1 , C_1 , D_1 , e E_1 :

$$\begin{cases} B_1 - C_1 R^3 - D_1 = H_o R^3 \\ -C_1 r^3 - D_1 + E_1 r^3 = 0 \\ -2B_1 - \mu_r C_1 R^3 + 2\mu_r D_1 = H_o R^3 \\ -\mu_r C_1 r^3 + 2\mu_r D_1 + E_1 r^3 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

che hanno come soluzioni:

$$\begin{cases} B_1 = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} (R^3 - r^3) H_o \\ C_1 = \frac{-3(2\mu_r + 1)}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \\ D_1 = \frac{-3(\mu_r - 1)r^3}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \\ E_1 = \frac{-9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Consideriamo ora il potenziale all'interno della cavità:

$$\Psi_M = \frac{-9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \rho \cos \theta \quad \rho < r \quad (\text{D.11})$$

che dà per il campo magnetico nella cavità:

$$\vec{H}_{cav} = \frac{9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o (\cos \theta \vec{u} - \operatorname{sen} \theta \vec{v}) \quad (\text{D.12})$$

ovvero un campo omogeneo diretto come \vec{H}_o . L'intensità del campo per $\mu_r \rightarrow \infty$ decresce come $\{9/[2\mu_r(1 - r^3/R^3) + 5 + 4(r^3/R^3)]\}H_o \approx \{3/[3 + 2s(\mu_r - 2)/R]\}H_o$ (s è lo spessore del guscio, ammesso molto minore di r) e quindi tende a zero purché il prodotto $\mu_r \cdot s$ si mantenga molto maggiore di R ; in questo senso il guscio funge da *schermo magnetico*.

Calcoliamoci le componenti del campo \vec{H} nelle varie zone:

$$\rho > R \quad \begin{cases} H_{\rho_{ext}} = \left(H_o + 2\frac{B_1}{\rho^3}\right) \cos \theta \\ H_{\theta_{ext}} = \left(-H_o + \frac{B_1}{\rho^3}\right) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.13a})$$

$$r < \rho < R \quad \begin{cases} H_{\rho_{int}} = \left(-C_1 + 2\frac{D_1}{\rho^3}\right) \cos \theta \\ H_{\theta_{int}} = \left(C_1 + \frac{D_1}{\rho^3}\right) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.13b})$$

$$\rho < r \quad \begin{cases} H_{\rho_{cav}} = -E_1 \cos \theta \\ H_{\theta_{cav}} = E_1 \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.13c})$$

Se vogliamo cercare l'origine "fisica" (ma qualcuno potrebbe obiettare assai su questo punto e forse non a torto) di questi campi, possiamo calcolarci le densità di cariche di magnetizzazione sulle superfici di discontinuità; infatti la variazione della componente di \vec{H} normale alla superficie uguaglia la densità di carica sulla superficie medesima:

$$\begin{cases} H_{\rho_{ext}}(R) - H_{\rho_{int}}(R) = \left[H_o + C_1 + \frac{2}{R^3}(B_1 - D_1)\right] \cos \theta = \sigma_M(R) & \text{a)} \\ H_{\rho_{int}}(r) - H_{\rho_{cav}}(r) = \left[E_1 - C_1 + 2\frac{D_1}{r^3}\right] \cos \theta = \sigma_M(r) & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

Utilizzando le (10) si ottengono le espressioni di $\sigma_M(R)$ e $\sigma_M(r)$ in funzione di quantità note:

$$\begin{aligned} \sigma_M(R) &= \frac{3H_o(\mu_r - 1) \left[2\mu_r + 1 - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)\right] \cos \theta}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} \\ \sigma_M(r) &= -\frac{9H_o(\mu_r - 1) \cos \theta}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Si vede così che mentre per $\mu_r \rightarrow \infty$ la densità di carica esterna tende ad un valore finito

$$\sigma_M(R) \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 3H_o \cos \theta$$

quella sulla superficie interna tende a 0; ciò non deve sorprendere affatto poiché corrispondentemente è facile verificare che, anche all'interno del materiale, \vec{H} va a zero e quindi anche la discontinuità della componente normale tende a diventare nulla.

Un punto interessante da studiare è il valore del flusso di \vec{B} attraverso il guscio sferico, per esempio nella sezione massima, ovvero per $\theta = \pi/2$. Esso vale:

$$\begin{aligned} \Phi_{int}(B) &= -2\pi\mu_r\mu_o \int_r^R H_{\theta_{int}} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \cdot \rho \, d\rho = \\ &= -2\pi\mu_r\mu_o \int_r^R \left(C_1\rho + \frac{D_1}{\rho^2}\right) \, d\rho = \\ &= -2\pi\mu_r\mu_o \left[\frac{C_1}{2}(R^2 - r^2) + D_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Per $\mu_r \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\Phi_{int}(B) \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 3\pi R^2 \mu_o H_o$$

che giustifica l'affermazione fatta nel testo (Cap.XIX,§5) di supporre che tutte le linee di campo comprese in una superficie dell'ordine di $\pi(2R)^2$ fossero "catturate" dal guscio (era quindi una valutazione per eccesso, ma dato lo scopo per cui era fatta, tanto meglio). Nella Fig.XIX.13 è riportato l'andamento delle linee di campo nella sezione maggiore della sfera cava.

Se consideriamo il caso di uno schermo magnetico costituito da un cilindro cavo (raggi r e R) di lunghezza molto maggiore del diametro esterno, costituito di materiale con permeabilità μ inserito in un campo costante diretto ortogonalmente all'asse, conviene scegliere un sistema di coordinate cilindriche che abbiano l'asse z diretto come l'asse del cilindro: in questo caso, avendo supposto la lunghezza del cilindro sostanzialmente infinita, il problema diventa quello di risolvere l'equazione di Laplace per una sezione retta del cilindro, ovvero in un sistema di riferimento di coordinate cilindriche (Fig. 2).

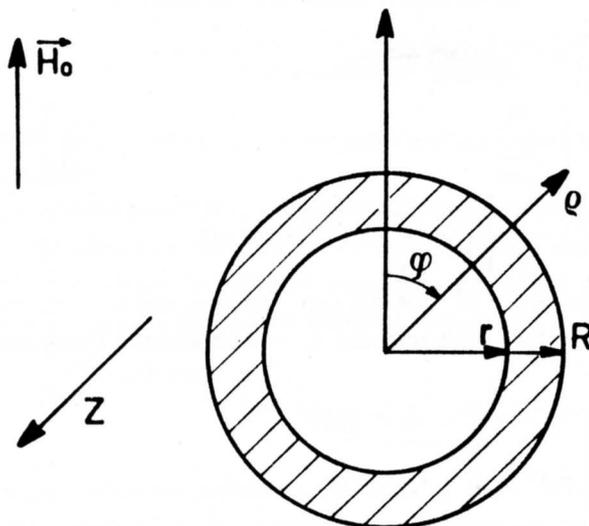


Fig. D.2

La soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche è del tipo

$$\Psi_M = b_o \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \rho^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + b_n \rho^{-n} \cos(n\varphi + \beta_n)] \quad (D.17)$$

L'espressione effettiva di questo campo nelle tre zone ($\rho > R$, $R > \rho > r$, $\rho < r$) dipende oltre che dalle condizioni al contorno sulle superfici, anche dagli andamenti asintotici; ad esempio poiché la soluzione per $\rho > R$ all'infinito deve dare il potenziale $-H_o \rho \cos \varphi$ associato al campo $\vec{H}_o = H_o \cos \varphi \vec{u} - H_o \sin \varphi \vec{v}$ (vedi (3)) avremo:

$$\Psi_M = -H_o \rho \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \cos(\varphi + \beta_n) \quad \rho > R$$

La fase β_n deve essere 0 per ogni n poiché la soluzione deve essere simmetrica attorno alla direzione individuata dalla direzione di \vec{H}_o . Per $R > \rho > r$, avremo in genere una espressione come la (17), cioè completa,

ma con le fasi anche qui poste uguali a zero.

Per $\rho < r$ la soluzione potrà contenere solo le potenze con esponente positivo di ρ poiché non vi possono essere divergenze nell'origine (e le fasi dovranno ancora essere nulle).

Pertanto avremo

$$\rho > R \quad \Psi_M(\rho, \varphi) = -H_o \rho \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \cos n\varphi \quad (\text{D.18a})$$

$$r < \rho < R \quad \Psi_M(\rho, \varphi) = f_o \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \cos n\varphi \quad (\text{D.18b})$$

$$\rho < r \quad \Psi_M(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \rho^n \cos n\varphi \quad (\text{D.18c})$$

Imponendo la continuità della componente tangenziale di \vec{H} lungo le superfici e della componente normale di \vec{B} otteniamo:

$$\begin{aligned} -H_o \sin \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n R^{-n-1} n \sin n\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} n(c_n R^{n-1} + d_n R^{-n-1}) \sin n\varphi \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(c_n r^{n-1} + d_n r^{-n-1}) \sin n\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n r^{n-1} n \sin n\varphi \\ H_o \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n R^{-n-1} \cos n\varphi &= \mu_r \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cdot n(c_n R^{n-1} - d_n R^{-n-1}) - \frac{f_o}{R} \right] \\ \mu_r \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cdot n(c_n r^{n-1} - d_n r^{-n-1}) - \frac{f_o}{r} \right] &= -\sum_{n=1}^{\infty} e_n r^{n-1} n \cos n\varphi \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Data l'ortogonalità di $\sin n\varphi$ con $\sin m\varphi$ e di $\cos n\varphi$ con $\cos m\varphi$ con $n \neq m$, le (19) devono valere *indipendentemente* per ogni n . In particolare ciò porta che $f_o = 0$ ed esclude l'andamento logaritmico del potenziale. Per $n = 1$ le (19) diventano

$$\begin{cases} b_1 - c_1 R^2 - d_1 = H_o R^2 \\ c_1 r^2 + d_1 - e_1 r^2 = 0 \\ -b_1 - \mu_r c_1 R^2 + \mu_r d_1 = H_o R^2 \\ -\mu_r c_1 r^2 + \mu_r d_1 + e_1 r^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

mentre per $n \neq 1$ si ottiene un sistema che, per essere soddisfatto, richiede l'annullamento di tutte le costanti b_n, c_n, d_n, e_n . Pertanto risolvere il sistema (20) significa risolvere il problema complessivo. Le (20) danno:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{H_o(\mu_r - 1)(\mu_r + 1) \cdot (R^2 - r^2)}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2}(\mu_r - 1)^2 \right]} \\ c_1 &= \frac{-2H_o(\mu_r + 1)}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2}(\mu_r - 1)^2 \right]} \\ d_1 &= \frac{-2H_o(\mu_r - 1)r^2}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2}(\mu_r - 1)^2 \right]} \\ e_1 &= \frac{-4H_o\mu_r}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2}(\mu_r - 1)^2 \right]} \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Si noti la somiglianza delle (21) con le (10). In particolare il campo nella cavità risulta essere un campo diretto come \vec{H}_o , avente però intensità che per $\mu_r \rightarrow \infty$ tende a zero come $4H_o/[\mu_r(1 - r^2/R^2)]$. Potremmo calcolarci anche in questo caso le densità di carica di magnetizzazione ed otterremmo risultati assai simili alle (15). E' forse più istruttivo calcolare il valore che il flusso di \vec{B} assume attraverso lo schermo, per avere una idea di quanto questo distorce il campo all'esterno e per controllare, anche in questo caso, la bontà dell'approccio seguito per calcolare lo spessore dello schermo (vedi Cap.XIX,§5).

Calcoliamoci quindi il flusso di \vec{B} attraverso lo schermo per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (per unità di lunghezza lungo z):

$$\begin{aligned}\Phi_{int}(B) &= -2\mu_r\mu_o \int_r^R H_{\theta int}(\rho, \frac{\pi}{2}) \cdot d\rho = \\ &= -2\mu_r\mu_o \int_r^R \left(c_1 + \frac{d_1}{\rho^2} \right) d\rho = \\ &= -2\mu_r\mu_o \left[c_1(R-r) + d_1 \frac{(R-r)}{rR} \right]\end{aligned}\tag{D.22}$$

Facendo il limite per $\mu_r \rightarrow \infty$, tenendo conto delle (21) si trova

$$\Phi_{int}(\vec{B}) = 4R\mu_o H_o\tag{D.23}$$

che ci dice che il flusso attraverso lo schermo è esattamente quello attraverso una sezione pari a 2 volte il diametro esterno del cilindro.

Dimostriamo ora la proprietà generale di un materiale ferromagnetico con una cavità, ovvero che all'interno di questa il campo magnetico va a zero per $\mu_r \rightarrow \infty$. Per far ciò supponiamo innanzitutto che il materiale si mantenga lineare e non saturi (condizione necessaria per avere un μ elevato), ovvero che il campo \vec{B} all'interno del materiale si mantenga finito e continui a sussistere la relazione di proporzionalità fra \vec{H} e \vec{B} ; essendo allora $\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu_r\mu_o}$, abbiamo:

$$\vec{H}_{int} \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 0$$

Conseguentemente il potenziale magnetostatico di tutto il corpo sarà costante: si tratta allora di dimostrare che anche nella cavità il potenziale ha il valore che possiede nel corpo; se è così, anche nella cavità \vec{H} è nullo. Per dimostrare ciò notiamo che attraverso la superficie che delimita la cavità, il potenziale resta continuo, in particolare vale $\Psi_{M int}$, ovvero il valore, costante, che possiede entro il corpo: abbiamo allora che il volume della cavità è racchiuso in una superficie sulla quale il potenziale è costante; inoltre nel volume deve valere l'equazione di Laplace $\nabla^2\Psi_M = 0$, poiché la cavità è priva di cariche magnetiche. Ciò comporta che il potenziale non può avere né un massimo né un minimo all'interno del volume (infatti per un massimo $\nabla^2\Psi_M < 0$, per un minimo $\nabla^2\Psi_M > 0$), pertanto è costante e quindi nella cavità $\vec{H} = 0$; conseguentemente la densità di carica magnetica sulla superficie di demarcazione fra materiale e cavità deve essere identicamente nulla (per $\mu_r \rightarrow \infty$) (il teorema di Gauss applicato a una superficie tutta contenuta nel corpo ci dice solo che la carica complessiva è nulla, ma lascia aperta la possibilità di avere una distribuzione non identicamente nulla di cariche). Per dimostrare l'identico annullarsi della densità basta notare che, essendo $\vec{H} = 0$ sia nel materiale che nella cavità, esiste continuità anche nella componente normale alla superficie che comporta appunto $\sigma_M = 0$ ($[\vec{H}_{int} - \vec{H}_{cav}] \cdot \vec{n} = \sigma_M$).

Il risultato ora ottenuto ($\vec{H}_{cav} \rightarrow 0$) sarà tanto più vicino al caso reale quanto più accuratamente sarà soddisfatta l'ipotesi di partenza della linearità del materiale e dell'elevato valore di μ_r : ciò in pratica significa, anche per i materiali più adatti allo scopo (per esempio le leghe tipo "Permendur"), confinare il campo di valori di B entro limiti precisi. La presenza poi di un ciclo di isteresi con area finita non altera sostanzialmente

l'efficacia dello schermo nel rimuovere le linee del campo dalla cavità, sempre che ci si collochi in un punto favorevole della curva $B-H$; tuttavia un campo residuo nella cavità, indipendente da quello esterno che si vuole schermare e dovuto piuttosto all'utilizzo precedente del dispositivo, può essere presente e una procedura di smagnetizzazione dello schermo si può rendere necessaria.

INDICE ANALITICO

- Accettori, 357
AC-input, 187
Accoppiamento lasco, 157, 511-4
Accoppiamento stretto, 157, 511-4
Alimentatore stabilizzato, 382-6
Alternate –correnti e tensioni, 194-215
ALternate: vedi Oscillografo
Ammetenza, 204, 275, 419-22
Ampère– Teorema di, 442, 467
Amperometro in continua, 62-8
Amperometro in alternata, 252-5
Amplificatore:
 a *Source* comune, 407-16
 differenziale, 308, 343
 ideale di tensione, 307-11
 in continua, 264
 integrato, 311-2
 operazionale: vedi Operazionale
 reale di tensione, 308, 413
 verticale, 186-9
Approssimazioni successive: vedi Convertitore
Armoniche, 195, 205, 235, 283
Asincrono –motore, 487-97
Attenuatore di ingresso, 187, 297
Autoinduzione –coefficiente di, 155-9
Autozero, 349
Ayrton –shunt di (o universale), 64-6, 140
Avvolgimento –ottimizzazione dello, 53-9
- Balistica–ipotesi, 140-1, 499-506
Banda passante, 170, 256-70, 308
Barriera –potenziale di, 359-63
Barriera di giunzione, 359
Base –elettrodo, 386
Base dei tempi, 189-90
Beam finder, 192
B-H curva, 438-45, 525
Bias–corrente, 329-35
Bifase –sistema di tensioni, 491
Bilancio energetico, 451, 474-8, 480-3
Bistabile, 343-5
Blanking, 190
Bobina mobile –strumenti a, 60-78
Bobine di *Helmholtz*, 435
Breakdown –tensione di, 363, 369-70, 398, 404
Burden voltage, 298, 306
Buffer vedi Inseguitore
- Caduta di tensione, 7, 203
Campionamento, 193
Campione –Pila, 104-5
Campioni:
 di capacità, 219-21
 di impedenza, 216-8
 di induttanza, 221-2
 di resistenza, 79-83, 218-9
Campo magnetico rotante, 486-7, 490
Canale del *Fet*, 393
Cannone elettronico, 172-83
Capacità –campioni di: vedi Campioni
Capacità distribuita, 158, 222
Capacità parassite, 216, 236
Caratteristica–curva, 9, 364, 388, 397-8, 426
Caratteristigrafo, 389, 426-7
Carica spaziale, 176-82
Carico, 308, 381
Cathode Ray Tube: vedi Oscillografo
Cavi schermati, 238-9, 266-7
Cella fotovoltaica, 42
Child–Langmuir legge di, 176-82
CHOPped: vedi Oscillografo
Circuito(i):
 accoppiati induttivamente, 163-5
 definizione, 18
 equivalente, 34-5, 312-3, 410-2
 L–R serie, 160-2
 oscillante: vedi R–L–C serie
 passa alto, 128, 257-9
 passa banda, 262-4
 passa basso, 128, 259-61
 R–C serie, 126-9
 risonante parallelo, 276-80, 283-4
 risonante serie, 271-6, 282-3
 R–L–C serie, 287-9
Classe di uno strumento, 61
Clock, 342
Codice binario, 295, 343-5
Codici mancanti, 303
Coefficiente di auto induzione, 155-65
Coefficiente di mutua induzione, 155-69, 291-3
Coefficiente di temperatura: vedi Temperatura
Coefficiente di merito: vedi Parametro
Coercitiva –forza, 440
Collegamento:
 in serie, 13-5
 in parallelo, 15-6
 a stella, 16-8
 a triangolo, 16-8
Collettore, 479

- Collettore –elettrodo, 386
 Comparatore, 343
 Compensato–Partitore: vedi Partitore
 Compensazione –Teorema: vedi Teorema
 Componenti reali in alternata, 207-11
 Comune –Terminale, 36, 323-4
 Condensatore, 124
 Condensatore in alternata, 208-9
 Condizionatore di segnale, 296-300
 Condizione di risonanza, 271, 278, 280-1
 Condizioni iniziali, 511-5
 Condizioni stazionarie, 3, 127, 195-6
 Conducibilità, 4
 Conduttanza, 9
 Conduzione ohmica, 4-9
 Conduzione –elettroni di, 6, 173-6, 353-4
 Contatore binario, 343-5
 Contatti striscianti, 471
 Contatto –ddp di: vedi Forza
 Contatto ohmico, 362, 393, 431
 Contatto –resistenza di: vedi Resistenza
 Conversione dell’energia, 451-97
 Convertitore:
 ad approssimazioni successive, 350-2
 analogico–digitale, 295-6, 342-52
 a pesiera, 350-2
 a rampa duale, 347-50
 a rapporto, 325, 347, 349
 corrente–tensione, 317
 Dual Slope Converter, 347-50
 digitale–analogico, 350
 tensione–frequenza, 346-7
 Coppia antagonista, 47, 475
 Coppia del galvanometro, 47, 50, 475
 Coppia allo spunto, 484
 Coppia di un motore a induzione, 485, 494-5
 Coppia di un motore in continua, 480, 484
 Corrente continua –motore in, 478-85
 Corrente di *Bias*, 329-35
 Corrente di magnetizzazione, 212
 Corrente di saturazione inversa, 361, 363, 388, 395
 Correnti alternate, 194-215
 Correnti di Maglia: vedi Maglia
 Correnti parassite, 159, 215
 Costantana, 5-6
 Costante Balistica, 131
 Costante dielettrica, 124, 455
 Costante di tempo, 128, 161
 Costante reometrica, 48, 151-3
 Costanti concentrate, 195-6, 267
 Costanti distribuite, 267
Crossover, 182
 Cuffia telefonica, 233-4
 Cursore, 82, 102
 Curva caratteristica: vedi Caratteristica
 Curva di isteresi, 439-41
 Curva di magnetizzazione, 438-45
 Curva di prima magnetizzazione, 439, 445

D factor: vedi Fattore di dissipazione
Decibel (dB), 256
DC-input, 187
 Decremento logaritmico, 134-6
Deflection sensitivity: vedi Sensibilità
 Densità dei livelli, 173-5
 Densità di corrente, 2, 179-81, 428-33
 Densità dei portatori, 2
 Densità di carica, 3, 178-182
 Densità spettrale di rumore, 336
 Dente di sega (*saw tooth*), 189
Depletion Mosfet, 425
 Deriva, 167, 334-5
 Derivatore matematico, 321
de Sauty: vedi Ponti
 Diagramma di ampiezza, 257-67
 Diagramma di fase, 257-67
 Dielettrica –costante: vedi Costante
 Differenza di potenziale di contatto: vedi Forza
 Differenziale –amplificatore: vedi Amplificatore
 Differenziale –linearità: vedi Linearità
 Digitalizzatore (oscillografo), 191-3
 Dimezzamento (metodo del), 153
 Diodo a giunzione o a semiconduttore:
 capacità di transizione, 368
 caratteristica dinamica, 371
 caratteristica diretta, 363-5
 corrente di saturazione inversa, 361, 363
 curva di trasferimento, 373
 di precisione, 389-92
 elemento circuitale, 370-3
 fisica del dispositivo, 362-8
 "piecewise model", 373-6
 raddrizzatore, 376-82
 resistenza diretta, 365
 retta di carico, 371
 tensione di soglia, 365
 Zener, 369-0
 zona di svuotamento, 365-8
Display, 294-5
Dissipation factor: vedi Fattore di dissipazione
 Distorsione, 341, 409
 Distribuite –costanti: vedi Costanti
 Divisione della corrente (*Splitting rule*), 26-7
 Divisione della tensione (Regola del Partitore), 31-2
 Divisore di tensione di *Kelvin–Varley*, 110-4

- Donatori, 357
 Doppia traccia, 192
 Doppio Ponte di *Thomson*, 97-9
 Domini magnetici, 159
Drain –elettrodo, 393 di
 Drogaggi, 357-8
 Dualità –Principio di, 32
Dual slope converter: vedi Convertitore
Dushman-Richardson legge di, 175
- Effetto *Hall*: vedi *Hall*
 Effetto termoionico, 172-6
 Elettrodi di focheggiamento: vedi Fuoco
 Elettrodi di estrazione: vedi Griglia
 Elettrodi di post accelerazione: vedi Oscillografo
 Elettrodinamici: vedi Strumenti
 Elettrodinamico –smorzamento, 51-2
 Elettrometro, 456-7
 Elettroni di conduzione, 6, 173-6, 353-4
 Elettroni di valenza, 353
 Elettronici –Multimetri, 294-306
 Ellisse –metodo per la determinazione della risonanza, 80-4
 Emittitore –elettrodo, 386
 Emissione termoionica, 172-86
 Energia di legame, 354
 Energia elettrostatica, 450-7
 Energia magnetica, 457-67, 512
Enhancement MosFet, 425
 Equivalenza di due reti, 34-5
 Errore di linearità, 105-8, 110, 300-3
 Errore di quantizzazione, 294
 Espansioni polari, 444
 Estrinseci –semiconduttori, 357
- Faraday –legge sull'induzione, 44
 Fase, 194
 Fase di un numero complesso, 198-9
 Fase iniziale, 194
 Fattore di amplificazione, 307, 414
 Fattore di dissipazione, 208-9, 219, 244
 Fattore di merito: vedi Parametro
 Fattore di potenza, 242, 247
Felici –sonda di, 150-1, 435, 438
 Fem: vedi forza elettromotrice
Fermi –livello di, 173
 Ferro mobile: vedi Strumenti in alternata
 Ferromagnetici –materiali, 159, 457
Fet (Field Effect Transistor):
 amplificatore a *source* comune, 407-16
 caratteristiche a *source* comune, 396-404, 426-7
 fisica del dispositivo, 394-404
 generatore di corrente, 423-4
 interruttore elettronico, 342-3, 404-7
 modello per piccoli segnali in alta frequenza, 418-23
 modello per piccoli segnali in bassa frequenza, 410-13
 polarizzazione, 413
 resistenza di drain, 410
Source follower, 416-8
 tensione di *pinch-off*, 395
 tranconduttanza, 404, 410
- Filtro passa alto: vedi Circuito
 Filtro passa basso: vedi Circuito
 Fluorescenza, 186
 Flusso del campo di induzione magnetica, 150-1, 212, 464, 474, 486
Follower: vedi Inseguitore
 Forza elettromotrice:
 campione, 104-5
 con grosse resistenze in serie, 149
 di contatto, 95, 122, 359
 generatore, 4, 9-13
 generatore elettrochimico, 12
 generatore sinusoidale, 200, 471-4
 parassite, 95-6
 termoelettrica, 95-6
- Fosforescenza, 186
 Fosfori, 186-7
Foucault –correnti di: vedi Correnti parassite
Fourier –sviluppo in serie, 195
 Frequenza:
 definizione, 194
 di risonanza, 271, 280-2
 di taglio inferiore, 258
 di taglio superiore, 260
- Frequenzimetro, 282
 Fuoco –elettrodo di, 182-3
 Fuoco –controllo di, 183
- Galvanometro a vibrazione, 233
 Galvanometro di *Deprez-d'Arsonval*:
 bilancio energetico, 474-8
 dinamica, 49-53
 portate, 84
 principio di funzionamento, 44-5
 statica, 45-9
- Galvanometro Balistico:
 con smorzamento finito, 132-3
 con smorzamento nullo, 129-31
 misure con il, 124-54
 taratura, 141-4
- Gate* –elettrodo di, 393
 Generatore:
 controllato, 413

- di *Thévenin*, 28-31
- ideale di corrente, 32-3
- ideale di tensione, 3-4, 9-13
- reale di corrente, 33-4, 423-4
- reale di tensione, 4, 9-13
- sinusoidale di tensione, 200, 471-4
- Ginocchio del diodo *Zener*, 383
- Giunzione p-n, 359-63
- Griglia acceleratrice, 182
- Griglia di controllo, 182
- Guadagno, 307, 413
- Guardia –morsetto di, 216-8

- Hall* –effetto, 428-33
- Hall* –sonda di, 428-49
- Hall* –misuratori di valore efficace a effetto, 447-9
- Hay*: vedi Ponti
- Heaviside* –condizioni di, 89
- Hole*: vedi lacune

- Impedenza:
 - Campioni di, 216-8
 - definizione, 200-7
 - di ingresso, 214, 420
 - di reazione, 319
 - di uscita, 214, 421
 - misuratore vettoriale di, 89-91
 - riflessa, 214
- Impulso di corrente, 131
- Indotto, 492
- Induttanza:
 - misura con un circuito risonante, 282-7
 - resistenza interna, 210
- Induttore, 155-65
- Induttore in alternata, 209-10
- Induzione completa, 124
- Induzione –motore a, 485-97
- Inseguitore di tensione, 262, 321-2, 340-1
- Integratore operativo o di *Miller*, 167-9, 320, 332-5
- Intensità –controllo di, 182-3
- Interruttore elettronico, 342-3, 404-7
- Intrinseci –semiconduttori, 356
- Isteresi, 159, 438-45

- Joule* effetto, 37

- Kelvin*– *Varley*: vedi Divisore
- Kirchhoff* –Prima legge di, 20, 195-6
- Kirchhoff* –Seconda legge di, 20, 195-6

- Lacune, 354-8
- Lamierini, 159
- Langmuir*: vedi *Child*
- Laplace* –Prima legge di, 248, 467
- Laplace* –Seconda legge di, 44, 248, 467
- Legge di azione di massa, 357
- Legge di *Ohm*, 1-9
- Legge di *Ohm* per le impedenze, 202-4
- Lente elettrostatica, 182-3
- Leva ottica: vedi *Poggendorf*
- Level (*Trigger*), 191
- Linearità differenziale, 301-3
- Linearità integrale, 300-2
- Lorentz* –Forza di, 429
- LSB* (*Least Significant Bit*), 301-3, 345

- Maglia, 18
- Maglia –Metodo delle correnti di, 22-3
- Maglie –legge delle: vedi *Kirchhoff*
- Magnete permanente, 60, 440, 473, 477-8
- Magnetica –riluttanza, 490
- Magnetico –campo terrestre, 434
- Magnetizzante –forza, 438
- Magnetizzazione –curva di: vedi Curva
- Magnetomotrice –forza, 490
- Manganina, 5-6
- Massa virtuale, 168, 316
- Maxwell*: vedi Ponti
- Maxwell*–*Wien*: vedi Ponti
- Memoria di un oscillografo digitalizzatore, 193
- Metodo delle correnti di Maglia: vedi Maglia
- Metodo delle tensioni dei Nodi: vedi Nodi
- Metodo potenziometrico: vedi Potenzimetro
- Metodo del dimezzamento: vedi Dimezzamento
- Metodo simbolico, 198-207
- Microvoltmetro, 322-3, 337
- Miller* –integratore di: vedi Integratore
- Miller* –Teorema di: vedi Teorema
- Misuratore vettoriale di impedenza: vedi Impedenza
- Mobilità dei portatori, 4, 355-6, 403
- Modulo di in numero complesso, 198-9
- Moltiplicatore analogico, 448
- Monostabile, 345
- Mosfet*, 343, 425
- Motore:
 - a induzione, 485-97
 - asincrono, 487-97
 - in corrente continua, 478-85
 - rendimento, 485, 496
 - sincrono, 485-87
- MSB* (*Most Significant Bit*), 345
- μ : vedi Fattore di amplificazione

- Multimetro analogico, 76-9
 Multimetro digitale, 294-306
 Mutua induzione: vedi Coefficiente
- Negative Feedback*: vedi Reazione
 Nodi –legge dei: vedi *Kirchhoff*
 Nodi –Metodo delle tensioni dei, 32
 Nodo, 18
 Non-linearità –errore di, 105-8, 300-3
Norton teorema di: vedi Teorema
Null detector: vedi Rivelatore
 Numeri complessi: vedi Metodo simbolico
- Offset* tensione di:
 in un amplificatore, 300, 326-35
 in una sonda di *Hall*, 433-7
- Ohm/Volt*, 70, 78
 Ohmetro, 71-4
 Operazionale –Amplificatore:
 configurazione invertente, 312-21
 configurazione non invertente, 321-2
 tensione di *offset*, 326-35
 corrente di *bias*, 329-35
 rumore, 335-9
 applicazioni alla strumentazione, 322-6
- Oscillografo o oscilloscopio:
 a doppia traccia (*ALT* e *CHOP*), 192
 amplificatore verticale, 187-9
 base dei tempi, 189-91
 canale X, 189
 canale Y, 187
Cathode Ray Tube (CRT), 171-87
 digitalizzatore, 192-3
 funzionamento in X-Y, 170, 280-2, 285, 389
 impedenza di ingresso, 187
 placchette defiettrici, 183-87
 posizione X e Y, 192
 postaccelerazione, 187
probe (sonda), 267-70
 schermo, 186-7
 sonda, 267-70
 tensione di postaccelerazione, 187
 tubo a raggi catodici, 171-87
trigger, 189-91
- Parametro di qualità, 158, 210, 221, 244, 273, 278
 Parassite –capacità: vedi Capacità
 Parassite –correnti: vedi Correnti
 Parassite –fem: vedi Forza
 Partitore –regola del, 31-2
 Partitore compensato, 268-9
- Pendenza duale –convertitore a: vedi Convertitore
 Perdite dielettriche, 208-9
 Perdite per isteresi, 214-5
 Periodo del galvanometro, 53
 Permeabilità magnetica, 156, 215, 221, 461, 519-25
Permendur, 525
 Persistenza dell'immagine, 186
 Pesiera –convertitore a: vedi Convertitore
 "Piecewise Model": vedi Diodo
 Picoamperometro, 324-5, 332, 337
 Pila Campione, 104-5
 Placchette defiettrici: vedi Oscillografo
Poggendorf:
 metodo della leva ottica, 48-9
 metodo potenziometrico: vedi Potenzimetro
- Polarizzazione del *Fet*: vedi *Fet*
 Ponte di *Wheatstone*:
 campo di valori di *R* misurabili, 87
 condizioni di *Heaviside*, 89-90
 errori nella misura, 84-5
 principio della misura, 83-4
 procedura di azzeramento, 84-5
 sensibilità col galvanometro, 85-91
 sensibilità col microvoltmetro, 91-3
- Ponti in alternata:
 con braccio a rapporto di trasformatore, 239
 di *de Sauty* parallelo, 225
 di *de Sauty* serie, 223
 di *Hay*, 227
 di *Maxwell* LC, 227
 di *Maxwell* LL, 226
 di *Maxwell-Wien*, 227
 di *Wien*, 225
 errori nella misura, 235-9
 messa a terra, 235-9
 principio della misura, 222-3
 procedura di azzeramento, 228-9
 rivelatore di zero, 233-5
 sensibilità, 230-3
 sintonizzazione del rivelatore, 235
- Portatori maggioritari e minoritari, 358
 Posizione–controllo X e Y: vedi Oscillografo
- Postaccelerazione: vedi Oscillografo
 Potenza nei circuiti elettrici:
 in corrente alternata, 241-55
 in corrente continua, 37-40
 massimizzazione del trasferimento in continua, 38-40
 massimizzazione del trasferimento in alternata, 245

- Sincrono –motore, 485-7
 Sintonia del Rivelatore di zero: vedi Ponti
 Slittamento, 489-96
Slope (Trigger), 191
 Smagnetizzazione, 440-1
 Smorzamento elettrodinamico, 51-2
 Soglia (del *Trigger*), 191
 Sonda a effetto *Hall*: vedi *Hall*
 Sonda di *Felici*, 150-1, 435, 438
 Sonde: vedi Oscillografo
Source –elettrodo, 393
Source Follower: vedi *Fet*
 Sovrapposizione –Principio di, 24.7
 Spazzole, 479
 Stabilità dei componenti in un CAD, 349
Standard Cell: vedi Pila campione
 Statore, 485
 Stazionarietà –condizioni di: vedi Condizioni
 Strumenti a bobina mobile, 60-78
 Strumenti elettrodinamici, 245, 53
 Strumenti elettronici digitali, 294-306
 Strumenti in alternata, 252.5
 Strumenti universali a bobina mobile, 76-8
 Superconduttori, 440, 458-9
 Sviluppo in serie di *Fourier*, 195
 Svuotamento –zona di, 365-8, 394-5
- Tasto –rimbalzi del, 168-9
 Tasto triplo, 104
 Temperatura –coefficiente di, 5-6, 80, 104, 436-7
 Tempo di conversione, 305, 349
 Tensione: vedi Forza elettromotrice
 Tensione di *breakdown*: vedi *Breakdown*
 Tensione di *offset*: vedi *Offset*
 Tensione di *pinch-off*: vedi *Fet*
 Teorema di Compensazione, 28
 Teorema di *Norton*, 35
 Teorema di *Miller*, 36-7, 420
 Teorema di Reciprocità, 27
 Teorema di *Thévenin*, 28-31
 Terminale comune o di riferimento: vedi Comune
 Terminale di Terra: vedi Terra
 Termoelettriche –fem: vedi Forza
 Termoionica –emissione, 172-6
- Terra:
 –Terminale di, 36, 323-4
 di *Wagner*: vedi *Wagner*
Tester: vedi Multimetro
Thévenin –Teorema di: vedi Teorema
Thomson doppio Ponte di, 97-9
 Traferro, 442
 Transistore bipolare, 386-7
 Transistore a effetto di campo: vedi *Fet*
 Transitorio, 126-9, 160-5, 507-15
 Trasformatore:
 principio di funzionamento, 211-15
 nei raddrizzatori, 376, 382
 schermo elettrostatico, 158
 Trasformazioni stella–triangolo, 16-18
True Root Mean Square (TRMS), 392
Trigger: vedi Oscillografo
 Tubo a raggi catodici: vedi Oscillografo
- Universale –*shunt*: vedi *Shunt*
- Valenza –elettroni di, 353
 Valore efficace, 194
 Velocità degli elettroni nei metalli, 6-7
 Velocità di scrittura di un oscillografo, 186-7
 Vettori rotanti: 197-8
 Virtuale –massa: vedi Massa
 Voltmetri analogici, 69-71
 Voltmetri elettronici (vedi anche Convertitore), 297
- Wagner* –messa a terra di, 238
 Wattaggio, 37, 81
 Wattmetro elettrodinamico, 245-52, 516-8
 Wattmetro a stato solido (a effetto *Hall*), 447
Weston: vedi Pila Campione
Wien: vedi Ponti
Work function (Potenziale di estrazione), 174
- Zener* –diode, 369-70, 382-6
 Zero –rivelatore di: vedi Rivelatore
Zero-Ohm –controllo, 74, 76

| Simbolo | Strumento | Simbolo | Strumento |
|---|--|--|--|
|  | Elettrodinamico |  | Elettrodinamico come misuratore di rapporto |
|  | A magnete fisso e bobina mobile (magnetoelettrico) |  | A magnete fisso e bobina mobile come misuratore di rapporto |
|  | A ferro mobile |  | A ferro mobile come misuratore di rapporto o strumento differenziale |
|  | A induzione |  | A induzione come misuratore di rapporto o strumento differenziale |
|  | Elettrodinamico con ferro (ferrodinamico) |  | Elettrodinamico con ferro come misuratore di rapporto |
|  | Termico a filo caldo |  | Termico a lamina bimetallica |
|  | Elettrostatico |  | A lamine vibranti |
|  | A bobina mobile a termocoppia incorporata |  | A bobina mobile con raddrizzatore incorporato |
| Circuiti nei quali può essere inserito | | | |
| Simbolo | Circuito | Simbolo | Circuito |
|  | A corrente continua |  | A corrente continua ed alternata |
|  | A corrente alternata | | |
| Disposizione dello strumento | | | |
| Simbolo | Disposizione | Simbolo | Disposizione |
|  | Strumento da usare con quadrante verticale |  | Strumento da usare con quadrante inclinato |
|  | Strumento da usare con quadrante orizzontale |  | Angoli di inclinazione |
| Tensione di prova | | | |
| Simbolo | Tensione | Simbolo | Tensione |
|  | Tensione di prova 500 V |  | Tensione di prova 2000 V |

FINITO DI ASSEMBLARE
NEL MESE DI AGOSTO 2012