Università degli Studi di Firenze – Scuola di Scienze

Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

***Analisi Matematica I* (A.A. 2017/18)**

Insiemi, linguaggio delle proposizioni, principio di induzione, estremi superiore e inferiore di insiemi – 26 Sett. 2017

1. Elencare esplicitamente gli elementi degli insiemi seguenti, rendendo chiaro quando essi non sono in numero finito:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \colon n = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}\}\,;$$
$$E = \{x \in \mathbb{R} \colon x = (-1)^n\,,\ n \in \mathbb{Z}\}\,;$$
$$F = \{k \in \mathbb{Z} \colon \exists h \in \mathbb{Z} \colon k = 6h\}\,.$$

2. Siano $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Scrivere la negazione delle seguenti frasi:

   i) $\exists y \in \mathbb{R} \colon x \leq y \quad \forall x \in A$;

   ii) $\forall x \in B\ \exists y, z \in B \colon y < x < z$;

   iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+\ \exists z \in C \colon xz > y$.

   Fornire se possibile esempi di insiemi A, B, C che rendono vere (rispettivamente, false) le frasi in i), ii), iii).

3. Dimostrare le leggi di de Morgan per una coppia di insiemi; formularne il corrispettivo nel linguaggio delle proposizioni, in relazione a congiunzione e disgiunzione.

4. (Esercizio svolto in molti testi: misurarsi comunque con la dimostrazione) Provare la validità della *disuguaglianza di Bernoulli*:

$$\forall h > -1\,, \quad (1+h)^n \geq 1 + n\,h \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

5. Utilizzando il principio di induzione, provare che $2^n \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

6. Mostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

7. Per quali $n \in \mathbb{N}$ vale $6^n \geq 4^n + 5^n$?

8. Data la successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita (*per ricorrenza*) da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \in (0,1) \\ a_{n+1} = a_n - a_n^3\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

   si chiede di provare che $a_n \in (0,1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

9. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{\lambda + a_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

ove $\lambda > 0$ è dato. Provare che $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (si dice che a_n è una successione monotòna *decrescente*).

10. Dimostrare che se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono n numeri positivi tali che $x_1\, x_2 \cdots x_n = 1$, si ha $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$).
OSSERVAZIONI: i) La dimostrazione utilizza in maniera cruciale la disuguaglianza $a\, b \leq a + b - 1$, valida per ogni coppia di numeri a, b, con $a \geq 1$ e $b \leq 1$.
ii) Si noti che il risultato è un caso particolare della (e segue immediatamente dalla) disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica, valida per ogni n-upla di numeri positivi $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

È importante ricordare che la disuguaglianza diventa un'uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

11. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, specificando se si tratta di massimi o di minimi:

$$\left\{\frac{2x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \left\{x + \frac{1}{x} : x > 0\right\};$$

$$\left\{\frac{(-1)^k}{k} : k \in \mathbb{N}, k > 0\right\}, \qquad \{x^2 - y^2 : 0 < x < y < 4\}\,.$$

©2017 Francesca Bucci