

1 Esercizi sulle disequazioni

1. Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false e, nel caso siano false produrre un contro-esempio e, se possibile, una correzione.

- (a) Se $1 \leq x \cdot y$, allora sicuramente $1 \leq x$ e $1 \leq y$,
- (b) Se $x < y < z$, allora sicuramente $xz < yz$,
- (c) Se $16 \leq x^4$, allora sicuramente, $2 \leq x$,
- (d) La soluzione della disequazione $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+5}$ è tutto \mathbb{R} .

2. Determinare le soluzioni (rappresentarle come unione di intervalli, come insiemi descritti da disequazioni elementari ed evidenziarle con colore o tratteggio sulla retta reale) delle disequazioni

- (a) $0 < x^2 - 5x + 6$,
- (b) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$,
- (c) $0 \leq 2x - 5$,
- (d) $0 < x^4 - 11x^3 + 11x^2 - 61x + 30$.

3. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni

- (a) $0 < \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}$,
- (b) $0 \leq \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}$,
- (c) $0 < (x^2 - 2x)(x^2 - 4x + 3)$,
- (d) $0 \leq (x^2 - 2x)(x^2 - 4x + 3)$.

Osservare, in particolare, che gli insiemi delle soluzioni sono a due a due diversi tra loro. Spiegare, in italiano corretto ed in non più di una riga per ciascuna coppia di insiemi, da cosa dipende la differenza?

4. Risolvere le seguenti disequazioni

- (a) $(x^2 + 3x + 2)^{365} \leq (3x^2 - 4x + 5)^{365}$,
- (b) $(x^2 + 3x + 2)^{2016} \leq (3x^2 - 4x + 5)^{2016}$.

Che ruolo svolgono le proprietà di monotonia delle funzioni $t \mapsto t^{365}$ e $t \mapsto t^{2016}$? Potrei sostituire $t \mapsto t^{365}$ con $t \mapsto \log_a t$ oppure $t \mapsto a^t$? Ed in tal caso, che effetto avrebbe la scelta di a sull'insieme delle soluzioni?

2 Esercizi sulla funzione $|x|$

1. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

(a) $|3x - 1| = 6,$

(b) $|x| + 1 = 5,$

(c) $|x + 1| = 0,$

(d) $\frac{3}{|x + 1|} = 5,$

(e) $|10x - 5| = 5x,$

(f) $|2x - 2| - |2x + 1| = 2,$

(g) $|x + 1| = |x|$

Sapresti dare un'interpretazione geometrica di qualcuna delle precedenti equazioni?

2. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti disequazioni

(a) $0 < |x - 1|,$

(b) $|x + 1| \leq 0,$

(c) $|x + 1| < |x + 2|,$

(d) $1 < |x| < 2,$

(e) $|x| - 2 < |x| + 1,$

(f) $0 < |x| + |x + 1| + |x + 2|,$

(g) $2x + 6 < |x + 3| + |2 - x|.$

3. Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} |x - 3| \leq 1, \\ |x - 5| \leq 1. \end{cases}$$

Sapresti dare un'interpretazione geometrica del risultato?

3 Esercizi di trigonometria

1. Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false e, nel caso siano false produrre un contro-esempio e, se possibile, una correzione.

(a) Se $\sin x = \frac{4}{5}$ allora sicuramente $\cos x = \frac{3}{5}$,

(b) se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\cos x = 1/2$ allora sicuramente $\sin x = \sqrt{3}/2$,

(c) $\cos x + \sin x < 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(d) la funzione $\sin x + \cos x$ è periodica,

(e) $\cos \pi/6 = -\cos(-\pi/6)$.

2. Convertire in gradi sessagesimali la misura degli angoli che in radianti misurano $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

3. Determinare il numero di soluzioni reali e distinte dell'equazione

$$\cos x - \sin(2x) = 0$$

contenute nell'intervallo $[0, 6\pi]$.

4. Dire in quale quadrante cade l'estremo di un arco che sottende un angolo α tale che :

(a) $0 < \sin \alpha$ e $\tan \alpha < 0$,

(b) $\cos \alpha < 0$ e $0 < \tan \alpha$,

(c) $\sin \alpha < 0$ e $0 < \cos \alpha$,

(d) $0 < \cos \alpha$ e $\tan \alpha < 0$,

(e) $\cos \alpha < 0$ e $0 < \tan \alpha$,

(f) $\sin \alpha < 0$ e $\tan \alpha < 0$.

5. Utilizzando le relazioni trigonometriche note determinare i possibili valori di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ sapendo che $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{13}$.

6. In un triangolo 2 lati misurano rispettivamente 6 ed 8. L'angolo compreso è di $\frac{\pi}{4}$. Determinare l'area del triangolo.

7. In un triangolo 2 lati misurano rispettivamente 6 ed 8. L'angolo compreso è di $\frac{\pi}{3}$. Determinare la lunghezza del terzo lato..

8. Dopo avere ripassato i metodi per risolvere le equazioni trigonometriche discussi a lezione, risolvere le seguenti equazioni

(a) $3 \sin x + 4 \cos x = 0$,

(b) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$,

(c) $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$,

(d) $\sin x + \cos x = \cos(2x)$,

(e) $\cos x - \sin^2 \frac{x}{2} = 0$.

9. Utilizzando le relazioni trigonometriche note ed i prodotti notevoli verificare le seguenti identità

(a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,

(b) $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha = 1$,

(c) $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha - 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$,

(d) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2,$

(e) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$

10. Calcolare il periodo T delle seguenti funzioni

(a) $\sin nx$ e $\cos nx,$

(b) $\tan nx$ e $\cot nx,$

(c) $\sin \frac{x}{2} + \cos 2x,$

(d) $\cos 4x + \sin 2x,$

(e) $\tan \frac{x}{2} + \tan x,$

(f) $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}.$