

Spunti di riflessione sui numeri reali e le loro proprietà

- Dimostrare che:

1. se $0 < a \leq b$ allora $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$;
2. se $a + b \leq 0$ ed $0 < a$ allora $b < 0$;
3. $\forall r \in \mathbb{R}^+, \exists x_r \in \mathbb{R}^+$ tale che $x_r^2 = r$;
4. se $1 < a$ ed $0 < S$ allora $Sa^{-1} < S$;
5. se $1 < a$ allora l'insieme $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato dall'alto;
6. se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ allora $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$;
7. la funzione $x \mapsto x^x$ è strettamente crescente su $[1, +\infty)$, invece non è crescente su $\mathbb{R}^+$.

- Per ogni numero $n \in \mathbb{N}$ sia $r(n)$ il resto della divisione $n : 5$. Si consideri l'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ con le operazioni di somma $\oplus$ e prodotto $\odot$ definite come segue:

$$a \oplus b = r(a + b), \text{ e } a \odot b = r(a \cdot b).$$

1. Mostrare che sono soddisfatti tutti gli assiomi algebrici di un campo (quelli di $\mathbb{R}$).
2. Mostrare l'ordinamento usuale non soddisfa gli assiomi dell'ordinamento dei reali.
3. È possibile definire una relazione d'ordine che soddisfi gli stessi assiomi dell'ordinamento dei reali?