Appunti per le lezioni corso MAE lettere D-L, a.a. 2017-2018
Cecilia Mancini
3 ottobre 2017

AVVERTENZA Questi sono gli appunti che uso per condurre la lezione, consistono dunque in flash su quanto intendo dire in classe e sono pieni di abbreviazioni. Penso però che possano essere utili anche per voi studenti, per tenere il filo logico e insieme la sintesi del corso. Resta sottointeso che il libro di testo va usato, e gli esercizi proposti vanno svolti per capire ed interiorizzare le cose.
Ciascuno prenda comunuqe i PROPRI appunti a lezione: questi sono solo di aiuto, ma per interiorizzare i concetti è molto importante scrivere di pungo proprio.
Se trovate errori sarò contenta se me li vorrete segnalare. Buon lavoro!

14/9/2017 LEZIONE 1

ORGANIZZAZIONE DEL CORSO

Sito uffic del corso: http://www.unifi.it, mancini, scheda personale, insegnamenti
e-learning=moodle, potete entrare come ospiti; ci trovate
* il documento "Tutte le info", che contiene info su: prerequisiti, programma, libro di testo, modalità esame
* appunti delle lezioni
* altro materiale di supporto che servirà via via
* esercizi, testi di esami passati

NON MI SCRIVETE MSG sul moodle, ma email

indicherò altri riferimenti biblio (per integrare il libro) via via che serviranno
ricevim stud: su appuntamento, orientativamente lun h 14.30
corso integrativo sui prerequisiti: 8 lezz, A-L, dal 19/9
tutoraggio
date esami 2017 e 2018, strategie

"A che mi serve la matematica?"

* rigore nel ragionamento
* mi consente di ris molti problemi concreti

Pb.1. Sono gestore di un supermercato: prezzo bricchi da 1 lt di una nuova aranciata?
faccio prove:
prezzo 1 Eu, venduti 2000 bricchi in 1 mese, ma costi tali da consentire a regime produzione al max di 1500 bricchi al mese $\Rightarrow$ produz insuff.
prezzo 1.5 Eu, venduti 1750 bricchi in 1 mese, e costi consentivano produzione 2500 bricchi al mese $\Rightarrow$ avanzo, costoso

Esiste un prezzo privilegiato, *prezzo di equilibrio*, a cui tutte richieste soddisfatte e non ho avanzi? come trovarlo?

Devo: capire il comport. del consumatore ed il comport. del produtt. e vedere quando domanda e offerta si incontrano.
Sul piano cartes. $(1, 2000), (1.5, 1750)$ manifestano il comport. del consum.
Per semplific il pb ci accontentiamo di solo questi dati e assumiamo che il consum si comporti in modo lineare. Retta del consumat = l'unica retta per i 2 pti dati: $q = 500(-p + 5)$.
Analogam $(1, 1500), (1.5, 2500)$ manifestano il comport. del produtt., assumiamo che anche il comp del produtt sia lineare. Retta del produtt $q = 500(4p - 1)$

Incontro tra dom e off avverrà al p in cui si intersecano le 2 rette: $\begin{cases} y = 500(-x+5) \\ y = 500(4x-1) \end{cases}$ che ha soluz $(1.2, 1900)$. Quindi il prezzo di equil è 1.2 Eu a bricco, a tale prezzo viene realizzata la vendita di 1900 bricchi/mese.

Come abbiamo proceduto e come si procede in gen?

1) Si FORMALIZZA il pb: si determina un MODELLO per gli elementi coinvolti, si traduce così in FORMULE la questione posta

2) si studia formalmente il modello e si arriva ad una risposta.

Gli strumenti che acquisiremo nel corso ci consentireanno di ris molti altri pb.

Molti problemi hanno spesso la stessa modellizzazione: ad es. se a 1 Eu venduti 1000 bricchi, anziché 2000, opp. venduti 1000 bricchi a 0.90 Eu, e il resto idem, stesso tipo di pb, stessa formalizz

è quindi molto utile saper lavorare su un certo modello *in astratto*: rappresentiamo le quantità con dei simboli, come ad es. prezzi p_1, p_2, anziché con i numeri 1 Eu, 1.5 Eu, quantità q_1, q_2, anziché 2000, 1750 per il consumatore, $\bar{q}_1, \bar{q}_2$, anziché 1500, 2500 per il produttore,

$p_1, p_2, q_1, q_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ si chiamano **parametri** del pb: le incognite sono x,y, mentre $p_1, p_2, q_1, q_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ sono n. fissati, che però non vogliamo precisare

in qs modo dobbiamo trovare 1 sola volta la soluzione, che poi può venir applicata ai diversi casi concreti.

Retta consumatore: per $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$, $y = (x - p_1)\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} + q_1$

Retta produttore: per $(p_1, \bar{q}_1), (p_2, \bar{q}_2)$, $y = (x - p_1)\frac{\bar{q}_2 - \bar{q}_1}{p_2 - p_1} + \bar{q}_1$

prezzo di equil $x = p_1 + \frac{(\bar{q}_1 - q_1)(p_2 - p_1)}{q_2 - q_1 - (\bar{q}_2 - \bar{q}_1)}$ per TUTTI i possibili valori dei parr

A questo punto, se il comport del consumatore è stato $(p_1 = 1, q_1 = 1000), (p_2 = 1.75, q_2 = 750)$ mentre quello del produttore $(p_1 = 1, \bar{q}_1 = 600), (p_2 = 1.75, \bar{q}_2 = 1400)$, basta che io sostituisca i valori di $p_1, p_2, q_1, q_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ nella espressione per x sopra ed ottengo il prezzo di equil $x \approx 1.29$ Eu, $y = 905$

Se i comport fossero identificati da altri numeri, al volo sostituendo troverei cmq la soluz

La formalizzazione è la chiave che consente di far risolvere un pb ad un computer: non conosce l'interpretazione concreta del modello, né serve che la conosca

Per lavorare su un modello dobbiamo conoscere il LINGUAGGIO MATEMATICO e le REGOLE delle deduzioni logiche

ELEMENTI di LOGICA e di LINGUAGGIO MATEMATICO

Rif. Biblio: Zezza, Metodi Matematici per le scienze economiche e aziendali, Carocci ed., 2009

LOGICA=Regole che rendono i passaggi logici corretti nei ragionamenti e nelle dimos matematiche e che consentono di far ris pb ad un computer

LINGUAGGIO: consente la precisa formalizzazione di un pb

Definizione= descrizione precisa di un oggetto che poi andremo a manipolare

proposizione= frase di cui si possa senza ambiguità affermare che è o V o F.

ES. "12 è multiplo di 3"

cosa vuol dire "multiplo"?

Definizione: diciamo che un numero intero positivo n è *multiplo* di un numero intero positivo m se possiamo scrivere $n = km$, con k numero intero positivo, ossia se la divisione n/m non ha resto
NOTA: questa def fa appello ad altri concetti (numero intero, divisione) che pure sono oggetto di definizioni precedenti, e che io qui do per note
EX: E' "12 è multiplo di 3" una prop? 12= 4×3, $n = 12, k = 4, m = 3$
E' "12 è multiplo di 5" una prop?

ES di frase che non è una prop mat: "il numero 3 è bello"

PRINCIPIO della logica mat che usiamo (logica *booleana*): una proposizione o è vera o (esclusivo) è falsa

Teorema (= frase vera).

ES. "12 è multiplo di 6" è un teor.
"12 è multiplo di 5" NON è un teor.

Tipicamente un teor. si presenta nella forma: Premesse (**ipotesi**) $\rightarrow$ conclusioni (**tesi**).

ES. "un multiplo di 6 è anche multiplo di 3" è un teor.?

dobbiamo saper formalizzare e poi verificare

Formalizzazione. *Premessa*: un numero è multiplo di 6.
Conclusione: un numero è multiplo di 3.

Per completare la formalizz ci serve introdurre elementi del ling mat
nell'es sopra poniamo: $a =$ "un numero è multiplo di 6", $b =$ "un numero è multiplo di 3"
possiamo tradurre il teorema come "$a \Rightarrow b$"

• **implicazione logica** " $\Rightarrow$ ": si chiama **connettivo logico**, perché a partire da a, b produce una nuova prop.
"$\Rightarrow$" è il connettivo logico che lega la nostra Premessa a con la Conclusione b.
è un simbolo che assicura che quando SIA "$a \Rightarrow b$" v (ad es. è un teo) CHE a v allora di sicuro b è v

MOLTO IMPORT: quando **non sappiamo se le premesse** a **siano vere**, la verità di $a \Rightarrow b$ nulla garantisce sulla verità di b, ma SE a v ALLORA, essendo corretta $a \Rightarrow b$, è di sicuro vera la concl.
NB: Ciò non coincide con quanto accade nel **linguaggio comune**, dove affermando "$a \Rightarrow b$" si intende implicitamente che a sia vera. ES: "piove, allora non esco", "a è multimplo si 6, allora a è multiplo di 3"
Quindi una deduzione "$a \Rightarrow b$" **è corretta** quando assicura che SE le premesse sono vere devono esserlo anche le conlusioni
Ciò signif che:
* per poter utilizz un teorema DOBBIAMO NECESS PRIMA verif che le ipot a siano v
* per dim un teo dobbiamo assumere che a v e procedere a partire da lì con le deduzioni

Dimostrazione: Premesse $\to$ deduzioni $\to$ conclusioni.

EX: Dimostriamo che l'implicaz "un multiplo di 6 è anche multiplo di 3" dell'es. sopra è v: assumo che sia vera l'IP: SE $n = 6k$, con k intero positivo, posso scrivere $n = 3 \times 2 \times k = 3 \times (2 \times k)$ e vedere che n è anche multiplo di 3.

Per fare le dimos. è CRUCIALE l'utilizzo delle **definizioni**, della **logica mat** ed è MOLTO UTILE, ad accelerare e semplificare, sfruttare le **proprietà** degli oggetti in questione

Uso del teo "n è multiplo di 6 $\Rightarrow$ n è mult di 3":
con $n = 12$ posso usarlo? $12 = 6 \times 2$ rende a v, essendo il teo frase vera, siamo assicurati che 12 è anche mult di 3, infatti $12 = 3 \times 4$.
con $n = 13$ posso aspettarmi che b sia v? no, non sodd le ipot, infatti a F e b F
con $n = 15$ posso aspettarmi che b sia v? no, anche se poi b v, 15 non sodd le ipot, a F

quando "$a \Rightarrow b$" v: a viene detta **condiz. sufficiente**: il verif di a è sufficiente a garantire il verif di b
b viene detta **condiz. necessaria**: se si è verif a di sicuro b avviene; b avviene necessariamente.

18/9/2017 LEZIONE 2

Abbiamo tradotto "un multiplo di 6 è anche multiplo di 3" come "$a \Rightarrow b$"
NB: a e b sono nomi MUTI: posso anche usare P e Q
posso tradurre la frase "un multiplo di 6 è anche multiplo di 3" con nomi diversi: $P =$"n è un multiplo di 6", $Q =$"n è un multiplo di 3". Il teor. diventa "$P \Rightarrow Q$"
quello che conta sono i RUOLI: a (o P) è la premessa, e deve stare a inizio freccia nella traduzione della frase, b (o Q) è la connclusione, e deve stare a fine freccia

ES1: "un multiplo di 6 è anche multiplo di 3" è v? dimostrata l'altra volta.
SE $n = 6k$, con k intero positivo, allora $n = 3 \times 2 \times k = 3 \times (2 \times k)$, allora n è anche multiplo di 3.

ES2: "ogni multiplo di 6 è anche mult di 4" è un'implic vera?

dimostrazione o controesempio? NB la **dim di un enunciato fatto *in generale*** (in questo caso, per un *qualsiasi* n intero positivo) *deve essere fatta in generale,* in astratto, senza legarsi a specifici numeri n scelti come es. Così abbiamo fatto nell'ES1
Invece, per negare che una propr. sia vera in generale, BASTA trovare UN CASO in cui non è verificata, **controesempio.** Così è per l'ES2.

ALTRE **REGOLE** di logica mat:

- connettivo logico "**e**", crea da a, b la nuova prop "a e b"
  "a e b" è v soltanto quando entrambe a, b sono v
  Es. "3 è multiplo di 6" e "4 è multiplo di 2"
- connettivo logico "**o**":
  "a o b" è vera quando almeno una delle due è V ("o" *inclusivo*)
  NB: nel **linguaggio comune** qualche volta la congiunzione "o" assume significato *esclusivo*, per cui a e b entrambe vere non si verifica.
  ES. "o un numero è mult di 2 o non lo è"
  "o mangi la minestra o salti dalla finestra"
  Noi con "*o*" invece intendiamo *inclusivo,* ossia che a e b entrambe vere possa

verificarsi.

Es. "3 è multiplo di 6" o "4 è multiplo di 2" in mat è vera

EX. è un teor. la frase

"se n è multiplo di 3 o è multiplo di 4 $\Rightarrow$ è multiplo di 3"?

- connettivo logico "non": da a crea la nuova prop "non a", che è vera se a è F, ed è F se a v

  ES. non "15 è multiplo di 6" è v

- connettivo logico $\Leftrightarrow$, **equivalenza logica**: crea da a, b la nuova prop "$a \Leftrightarrow b$", che è vera quando a, b hanno lo *stesso* valore di verità (entrambe sono V oppure entrambe sono F), cosicché, quando "$a \Leftrightarrow b$" è V (è un teo), a V assicura b V, ma anche a F assicura b F, cosa che NON ERA ASSICURATA quando $a \Rightarrow b$ è v (a F non assicura alcunché su b)

  a **sse** b

  Es. n è multiplo di 3 sse la somma delle sue cifre è multipla di 3" è frase vera in generale: qualcuno l'ha dim.

  Es. 15 è multiplo di 3 (5+1=6 è divisibile per 3)

  16 non è mult. di 3 (6+1 non è divisibile per 3)

Lista di Proprietà che non dimostro, ma che possiamo usare perché qualcuno le ha verificate

Proprietà "$a \Leftrightarrow b$" = "$a \Rightarrow b$" e "$b \Rightarrow a$"

a è cond nec e suff al verif di b, b è cond nec e suff per a.

Proprietà ("$a \Rightarrow b$" e "$b \Rightarrow c$") $\Rightarrow$ "$a \Rightarrow c$"

è questa concatenazione di deduzioni la **chiave delle dimostrazioni**: spezzettare il cammino verso il raggiung delle conclus in piccoli passi

Proprietà: "non (a e b)"= "non a" o "non b" (DE MORGAN)

"non (a o b)"= "non a" e "non b"

Es. P="a e b" ="n è mult di 3 ed è mult di 4"

"non P" è V quando P è F, il che succede quando

n NON è mult di 3 o (inclusivo) non è mult di 4 (è vera, cioè, "non a o non b")

Proprietà "$a \Rightarrow b$" è equivalente a "non $b \Rightarrow$ non a"

quindi se voglio dim. "$a \Rightarrow b$" sono a posto se in realtà dimostro "non $b \Rightarrow$ non a". Questo tipo di procedimento si chiama **dimostrazione per assurdo.**

RICHIAMO.

Ogni numero n intero positivo pari può essere scritto come $n = 2k$, con un opportuno k intero positivo: $k \geq 1$.

Ogni numero n intero positivo dispari può essere scritto come $n = 2k + 1$, con un opportuno k intero positivo: $k \geq 0$.

Es. $6 = 2 \times 3$ è pari; $7 = 2 \times 3 + 1$ è dispari

Es. di dim. per assurdo. Dimostriamo che "p^2 pari $\rightarrow p$ pari"

Dim per ass: se p disp $\Rightarrow p = 2k + 1 \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p$ non è pari. ■

- "a e non a" è una prop SEMPRE falsa: si chiama **contraddizione**.

Es. "6 è pari" e "6 è dispari"

Proprietà "$a \Rightarrow b$" è equivalente a "a e non $b \Rightarrow$ contraddizione", ossia è equivalente ad "a e non b" è F :
il procedimento "a e non $b \Rightarrow$ contraddizione" è un secondo genere di **dimostrazione per assurdo** della prop. "$a \Rightarrow b$": invece che direttamente dedurre b da a, si nega b e si guardano le conseguenze del convivere di a V e b F, se si arriva ad una contraddizione allora "$a \Rightarrow b$" è dimostrata.

19/9/2017 LEZIONE 3

Es. "Se n intero positivo è multiplo di 6 $\Rightarrow$ n è multiplo di 2".
dim per assurdo con quest'ultimo metodo. Multiplo di 2 significa n pari. Se n fosse invece dispari e multiplo di 6, avrei che $\exists k, q$ interi positivi: $n = 2k + 1 = 6q$, allora $k = \frac{6q-1}{2} = 3q - \frac{1}{2}$, poiché q intero positivo allora k non può essere intero positivo: contraddizione. Segue che la prop. di partenza è vera. $\blacksquare$
[oppure: da $n = 2k + 1 = 6q$ deduco che $6q - 2k = 1$, $2(3q - k) = 1$: se $3q - k > 0$ l'eq è imposs perché avrei un numero pari =1; se $3q - k \leq 0$ l'eq è imposs, perché avrei un numero negativo o 0 uguale a 1. Contraddizione.]

Ex. ("P o Q" e "non P" $\Rightarrow Q$) è v?
è v non appena tutte le volte che premessa v ho concl vera.
Perché sia vera la premessa ("P o Q" e "non P") bisogna che sia vera "P o Q" ma non sia vera P. Ma allora premessa v solo quando Q v, ma allora la conclusione (che è proprio Q) è v.$\blacksquare$

Es. "n è multiplo di 3 opp. di 4" ma "n non è multiplo di 3"$\Rightarrow$ "n è multiplo di 4"

Altri elementi di logica: **predicato** $P(x)$= proposiz. che dipende da una variabile x, ed è V o F a seconda del valore assunto da x.

Es. $P(x) =$ "x è un n. dispari". Se $x = 2$ la prop risultante "2 è un n. dispari" è F, se $x = 3$ la prop risultante "3 è un n. dispari" è V.

quantificatori: $\forall$ = per ogni, $\exists$ = esiste almeno un
Se dentro un predicato sono inseriti quantificatori allora questo diventa una prop, perché diventa decidibile se la frase sia V o F

Es. Con $P(x)$ definita come sopra, consideriamo la frase
"$\exists$ x intero positivo che è dispari "
= "$\exists$ x intero positivo: $P(x)$ è V" = "$\exists x$ intero positivo: $P(x)$"
questa è una prop. V;

Notazione: " : ", "|" signif "tale che";
"$\exists$ x intero positivo: $P(x)$" sottointende "$\exists$ x intero positivo: $P(x)$ vera"

nell'ES. sopra proclamo che *si può trovare UN x*: basta *esibire un esempio*
Es. "$\forall x$ intero positivo, x è dispari"= "$\forall x$ intero positivo, $P(x)$" è una prop. F: *esibisco un controesempio*;
Ex. è vera "$\forall x$ intero positivo $\exists m$ intero positivo: $P(x+m)$"? si: proclamo che una proprietà valga *per ogni x, devo dare una dim. astratta*
dim. Se x pari, prendo m=1; se x dispari, prendo $m = 2$.$\blacksquare$

non commutatività tra $\exists$ e $\forall$: "$\exists x$ intero positivo: $\forall m$ intero positivo: $P(x+m)$" è falsa.

Proprietà: quantificatori e negazione. Vale

- non "$\forall x,\ P(x)$"= "$\exists x:$ non $P(x)$"

  Es. è falso che "ogni persona in questa classe ha la maglietta gialla" = è vero "non (ogni persona in questa classe ha la maglietta gialla)" =
  è vero che "almeno una persona ha la maglietta di colore diverso" =
  è V che "esiste qualcuno con la maglietta non gialla"

  Quindi: negare "$\forall x,\ P(x)$" significa dire che "$\exists x:$ non $P(x)$" è V,
  e per dim che "$\exists x:$ non $P(x)$" è vero basta un es., quindi
  per dim che un "$\forall x,\ P(x)$" è F basta dare un es.

  OSS: non "$\forall x,\ P(x)$"= "$\exists x:$ non $P(x)$" si basa sullo stesso principio della legge di De Morgan "non (a e b)" = "non a" o "non b"
  infatti il non del membro a sinistra nega che siano vere *tutte* contemporaneamente le affermazioni entro parentesi, cioè nega che sia vera (a e b), e ciò succede quando viene negata almeno una delle due tra a e b, cioè ne *esiste* una negata

- non "$\exists x:\ P(x)$"= "$\forall x,$ non $P(x)$"

  OSS: non "$\exists x:\ P(x)$"= "$\forall x,$ non $P(x)$" si basa sullo stesso principio della legge di De Morgan "non (a o b)" = "non a" e "non b"

  Es. è falso che "c'è una persona in questa classe che è in costume da bagno" =
  è vero che "tutti hanno addosso vestiti" =
  è vero che "ogni persona non è in costume da bagno"

  Oss.: in questa classe abbiamo un n. finito di persone, se ne fa la rassegna, si controlla e verifica se ciascuno è vestito, ma se il n. di elementi da controllare è infinito serve una dim astratta

RIASSUMENDO: La dimostrazione di una proposizione del tipo "$\forall x,\ P(x)$" richiede un ragionamento astratto, generale, che valga qualunque sia il valore della x.
Invece la dimostrazione di una proposizione del tipo "$\exists x:\ P(x)$" è completa non appena si trovi un esempio, una x che soddisfa la proprietà $P(x)$.

EX TEST di accesso.
Il regolamento di unifi impone che tutti gli studenti che si presentano agli esami di profitto debbano avere libretto universitario e documento di identità.
Un'indagine a campione ha rivelato che la regola non è stata rispettata.
Si può affermare con certezza che "almeno uno studente si è presentato all'esame senza libretto e senza documento"?
cosa si può affermare?
non (OGNI studente aveva libretto e documento)= almeno uno studente o non aveva libretto o (inclusivo) non aveva docum

Exx di logica sul moodle

TEORIA DEGLI INSIEMI

Def: **insieme**= collezione di oggetti, **elementi**

A meno che non sia scontato, dobbiamo precisare l'ambiente (universo) degli oggetti che siamo interessati a studiare

Def: $U =$ l'**ambiente** (universo)

Es. U= tutti i numeri interi positivi

se A è un ins di (alcuni) elementi di U, $x \in A$ signif che x **appartiene**, è elemento di,

$c \notin A$ signif che c non appartiene

possibili descrizioni di un ins:

1) *elenco.* Ess. $A = \{1, 3, 6\}, B = \{1, 2, a, c\}$, interi positivi $\{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} =$ insieme dei **numeri naturali**.

NB quando si fa un elenco si usano parentesi graffe

2) *proprietà.* Es. $C =$ insieme dei numeri pari, detta Q la proprietà di essere numero pari, $Q(m) =$ "m è numero pari", allora

$C = \{m \in U : \ Q(m) \text{ è vera}\}$;

oppure $C = \{m \in U | \ Q(m) \text{ è vera}\}$;

oppure $C = \{m \in U | \ Q(m)\}$.

Ruolo di m: m scorre (varia) tra tutti gli elem di U ed entra in C solo se $Q(m)$ vera: m= **variabile**; ma anche si dice che è **muta**: indica solo il ruolo, il nome specifico può essere cambiato: C è anche $= \{z \in U | Q(z) \text{ è vera}\}$

Insieme **vuoto**: nessun elem, $\emptyset$.

ES. U è un insieme di numeri naturali e $D := \{x \in U | x \text{ è dispari ed è multiplo di } 4\}$ allora $D = \emptyset$.

Il n. di elem di $\emptyset$ è 0.

inclusione, sottoinsieme. $A \subseteq B$ (o $B \supseteq A$) se *ogni elemento di A è anche elem di B.*

NB: io userò equivalentem la notazione $\subset$, al posto di $\subseteq$.

Es. Sia $A = \{2, 3, 6\}$. Allora si ha $2 \in A$, ma $\{2\} \subset A$, $\{2, 6\} \subset A$, invece $\{1, 2\} \not\subset A$

NB $\emptyset$ è considerato sottoinsieme di qls altro insieme: $\emptyset \subset A$

ES. A= insieme di tutti i multipli di 6; B= insieme di tutti i mult di 3; è allora vera "$x \in A \Rightarrow x \in B$"

in partic $A \subseteq B$

Nel linguaggio degli insiemi, l'implicaz logica è tradotta dalla def. di sottoinsieme

21/9/17 LEZIONE 4

Ex. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è multiplo di } 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$. E' $A \subset B$?

sottoinsieme **proprio**: $A \subsetneqq B$ se $A \subset B$ ma $A \neq B$

Es. Per A definito sopra, $\{2, 6\} \subsetneqq A$

diciamo che due insiemi A, B sono **uguali**, $A = B$, quando hanno *gli stessi elementi*

Es. $A := \{2, 4, 6\} = \{4, 2, 6\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x \text{ è pari e } x \text{ è minore di } 7\}$

Nel linguaggio degli insiemi, l'equivalenza logica è tradotta dalla **uguaglianza** tra insiemi: se $A = \{x : a(x) \text{ è } V\}$, $B = \{x : b(x) \text{ è } V\}$, abbiamo che $A = B$ quando $\forall x, a(x) \Leftrightarrow b(x)$ (oppure $A = B$ quando $x \in A \Leftrightarrow x \in B$).

Es. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : (x - 2)(x - 3) = 0\}$. E' $A = B$? sì, e anche $= \{2, 3\}$.

proprietà: se A, B, C insiemi,

$\star$ $A = B$ sse $(A \subset B \text{ e } B \subset A)$

$\star$ se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$.

Dim la seconda propr. Assumo che $A \subset B$ e $B \subset C$. Signif che $\forall x : \; x \in A \Rightarrow x \in B$ ma anche $\forall x : \; x \in B \Rightarrow x \in C$. Dunque preso qls x, $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$ ma per la proprietà 2 della logica (concatenaz delle implicazz.) ciò signif $x \in A \Rightarrow x \in C$, ossia $A \subset C$. ■

Nel linguaggio della logica queste proprietà corrispondono rispettivamente a
$\star$ $a \Leftrightarrow b =$ "$a \Rightarrow b$" e "$b \Rightarrow a$"
$\star$ concatenazione di implicazioni

Operazioni tra insiemi:

Coppia ordinata di elementi (a, b): $(a, b) \neq (b, a)$
NB parentesi tonde e non graffe
prodotto cartesiano di due insiemi A,B: $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Es. se $A := \{1, 3\}, B := \{2, 3, 5\}$ allora $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5)\}$,
FIGURINA che fa uso del piano cartesiano che richiameremo più avanti
NB $B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 1), (5, 3)\} \neq A \times B$ perché $(1, 2) \neq (2, 1)$, FIGURINA [B sull'asse ascisse!]
$A \times A$ è anche chiamato A^2, FIGURINA

unione: $A \cup B := \{x : \; x \in A$ o $x \in B\}$, NB "o" è *inclusivo*: c può anche appartenere ad entrambi A, B
Es. per $A := \{1, 3\}, B := \{2, 3, c\}$ si ha $A \cup B = \{1, 2, 3, c\} = B \cup A$, FIGURINA

intersezione: $A \cap B := \{x : x \in A$ e $x \in B\}$,
Es. A, B come sopra, $A \cap B = \{3\} = B \cap A$
Es. A=insieme dei multipli di 3, B= ins dei n pari. L'insieme delle x : è v "$x \in A$ e $x \in B$" è $A \cap B = \{x : x \in A$ e $x \in B\} = \{6, 12, 18, ...\}$ multipli sia di 3 che di 2, cioè multipli di $2 \times 3 = 6$

Proprietà: Dati A, B,C insiemi, si ha
$\star$ $(A \cap B) \subset A$,
$\star$ se $C \subset A \Rightarrow C \cup A = A$ e $C \cap A = C$.
dim. la prima: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in A$.■
EX PER CASA. Dim le seconde.

Def. se $A \cap B = \emptyset$, A e B si dicono **disgiunti**
Es. insieme dei n pari, ins dei n disp
differenza: $A - B$ o $A/B := \{a \in A : a \notin B\}$, prendo gli elem di A escludendo quelli che stanno in B, FIGURINA
Es. per $A := \{1, 3\}, B := \{2, 3, c\}$ si ha $A - B = \{1\}$
NB $B - A = \{2, c\} \neq A - B$

complementare di A: $\mathcal{C}A$ o $A^c := \{x \in U : x \notin A\} = U - A$
Es. $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 3\}$, allora $A^c = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

Proprietà: siano A, B, C insiemi, vale che:
$\star$ idempotenza: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
$\star$ commutatività: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
$\star$ associatività: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$\star$ distributività: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dim. ad es. la seconda parte dell'ultima propr.: dobbiamo verificare sia $\subset$ che $\supset$. Vediamo ad es. $\supset$, ossia che tutti gli $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ sono anche $x \in A \cap (B \cup C)$. Se $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ allora o $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$. v.v. (= "voglio vedere") che x appartiene sia ad A che a $B \cup C$. Nel primo caso ($x \in A \cap B$) abbiamo che sia $x \in A$ che $x \in B$, allora sia $x \in A$ che $x \in B \cup C$, e dunque $x \in A \cap (B \cup C)$. Nel secondo caso $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. ■

EX PER CASA. Dimostrare la $\subset$

Ex. E' vera $A \cup B = A \cap B$?

NO, ad es. se $A = \{1,3\}, B = \{1\}$ allora $A \cup B = \{1,3\}$ mentre $A \cap B = \{1\}$. ■

Ex. Dimostrare che $A \cap (A \cup B) = A$.

Sol. $D \doteq A \cup B$ contiene $A \Rightarrow D \cap A = A$.

Altre proprietà: siano A, B insiemi, vale che:

⋆ I legge di de Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
⋆ II legge di de Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
⋆ $(A^c)^c = A$.

corrispondono esattamente alle leggi di de Morgan per e/o e negazione:
dove $A = \{m : P(m) \text{ è } V\}$, $B = \{m : Q(m) \text{ è } V\}$,
dunque $A^c = \{m : \text{non } P(m)\}$, $A \cap B = \{m : \text{"}P \text{ e } Q\text{"}\}$, $A \cup B = \{m : \text{"}P \text{ o } Q\text{" è } V\}$,
$(A \cap B)^c = \{m : \text{non } (P(m) \text{ e } Q(m))\}$, $(A \cup B)^c = \{m : \text{non } (P(m) \text{ o } Q(m))\}$.

PER CASA EXX sul libro:
1.1 p.17 punti 1,3,4,7,10,11
1.3 p.22 punti 1/7
1.4 p.22 punti 1/8
1.5 p.27 punti 3,7, 12
1.8 p.28 punti 8, 15

25/9/2017 LEZIONE 5

I NUMERI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ **naturali** (già detto)

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ **relativi**: contiene in più 0 ed i n. con segno

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ **razionali**: contiene in più i n. con la virgola ed un numero finito di cifre dopo la virgola oppure un n infinito di cifre ma sono periodici

$\mathbb{R}$ **reali:** contiene in più i n. con la virgola ed un numero infinito di cifre dopo la virgola ma sono aperiodici

$\mathbb{C}$ **complessi:** contiene in più le radici dei n. negativi, come $\sqrt{-1}$, ma non lo studieremo.

Vale $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$.

Numeri irrazionali

Abbiamo visto che $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$, in effetti molti n. che incontreremo, $\sqrt{2}$, e, π e molti altri, appartengono ad $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, si dicono perciò **irrazionali**, sono quelli con infinite cifre dopo la virgola e aperiodici.

Teor. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Si esegue una *dim. per assurdo (tipo 2).* L'enunciato ha dei sottointesi. Abbiamo una prop. del tipo $a \Rightarrow b$, dove $a =$"ogni frazione fra numeri interi può essere ridotta ai minimi termini", $b=$"$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$". La dim. consiste nel negare b (assumere che b F) e farlo convivere con a (assumere al contempo che a v), ed arrivare ad una contraddiz.

Dim. Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$ primi tra loro: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2$ pari $\Rightarrow$ (visto) p pari $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : p = 2k \Rightarrow 2 = \frac{4k^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q$ pari $\Rightarrow p, q$ han un fattore comune $\Rightarrow$ contraddiz. ■

Richiami: i numeri reali soddisfano le seguenti proprietà

P1. propr. algebriche (sotto elencate);

P2. propr. di ordinamento (sotto elencate);

P3. propr. di collegamento tra operazioni e ordinamento (sotto elencate).

P1. **Proprietà algebriche:** sull'ins. $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni, **addizione** e **moltiplicazione** tali che:

1) $+$ commutativa: $a + b = b + a, \forall\ a, b \in \mathbb{R}$,

2) $+$ associativa: $(a + b) + c = a + (b + c), \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$,

3) *elemento neutro* per $+$: esiste un numero $x \in \mathbb{R}$ tale che $a + x = a, \forall\ a \in \mathbb{R} : x = 0$,

4) *opposto* per $+$: $\forall\ a \in \mathbb{R}$ esiste uno $z \in \mathbb{R} : a + z = 0$. Si pone $z = -a$,

ES $3 + x = 0$, aggiungo -3 ad entrambi i membri $\Rightarrow -3 + 3 + x = -3 \Rightarrow x = -3 :$ LEGGE DI CANCELLAZIONE

5) $\cdot$ commutativa: $a \cdot b = b \cdot a, \forall\ a, b \in \mathbb{R}$,

6) $\cdot$ associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$,

OSS: abbiamo usato 6) per dire che un multiplo di 6 lo è anche di 3: $n = 6k = (3 \cdot 2) \cdot k = 3 \cdot (2 \cdot k)$.

7) *elemento neutro* per $\cdot$: esiste un numero $x \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot x = a, \forall\ a \in \mathbb{R} : x = 1$,

8) *reciproco* per $\cdot$: $\forall\ a \in \mathbb{R}_\star$ esiste uno $z \in \mathbb{R} : a \cdot z = 1$. Poniamo $z = \frac{1}{a}$,

ES. $a = 3$ ha reciproco $\frac{1}{3}$, perché $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

ES. $3x = 2$ moltiplico ambo i membri per $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Raccordo

9) $\cdot$ distributiva rispetto a $+$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

ES. $\frac{4+3}{2} \neq \frac{\cancel{4}+3}{\cancel{2}} = 2 + 3 = 5!!!!$ $\frac{4+3}{2} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 3) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 3,5$

NB: NON vale la distributiva di $+$ rispetto a $\cdot$

Sono le note proprietà che molto si usano, ad es. nei passaggi per elaborare espressioni

Es. $(x + 1) \cdot 3 - 7 \overset{distrib}{=} 3x + 3 - 7 \overset{associat}{=} 3x - 4$

P2. **Proprietà di ordinamento:** 2 n. reali sono sempre confrontabili, possiamo sempre stabilire quale dei 2 è più grande, cioè esiste una relazione $\leq$, **minore o uguale,** per cui:
1) (antisimmetr.) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$;
2) (transitiva) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
3) (totale) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ vale almeno una tra $a \leq b$ e $b \leq a$.

Oss: dalla 3) segue la proprietà riflessiva: $a \leq a,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$.

Notazione: se $a \leq b$ possiamo anche scrivere $b \geq a$, **maggiore o uguale**

P3: **collegamento** delle proprietà di ordine con le operazioni $+, \cdot$: $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
1) se $a \leq b$ allora $\forall c \in \mathbb{R}$ si ha $a + c \leq b + c$;
2) se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ allora $ab \geq 0$.

Def di **minore**, $<$: diciamo che $a < b$ quando $a \leq b$ ma $a \neq b$.
In tal caso potremo in alternativa dire che $b > a$, ovvero "b è **maggiore** di a"

Osservazione: le altre propr che molto usiamo nei passaggi per risolvere equaz/diseq, si deducono TUTTE dalle P1/P3, ad es.: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
C1) Se $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$ (transitività per $<$)
C2) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
C3) $a > b$ e $c > d \Rightarrow a + c > b + d$
C4) $\begin{cases} \text{se } a > b \text{ e } c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \\ \textbf{se a} > \textbf{b e c} < \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a \cdot c < b \cdot c} \end{cases}$

Es. $3x < 4$: molt per $\frac{1}{3} > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{4}$.
Se moltiplico per $-\frac{1}{3} \Rightarrow -x > -\frac{3}{4}$.

C5) $\begin{cases} \text{se } a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0 \\ \\ \text{se } \mathbf{a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0} \end{cases}$

C6) $a \cdot 0 = 0$
C7) Legge di **annullamento di un prodotto**: se $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o (inclusivo) $b = 0$.
C8) Sia $a \in \mathbb{R}_+$: se $a < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$. [*Se per assurdo fosse* $a > 0$ *allora prendendo* $\varepsilon = \frac{a}{2}$ *dovrei avere* $a < \frac{a}{2}$, *che è impossibile.*]

Oss: **anche $\mathbb{Q}$ soddisfa le P1/P3**, ma $\mathbb{R}$ soddisfa anche l'ulteriore propr P4 di Completezza, che vedremo più avanti, e che $\mathbb{Q}$ non soddisfa
Possiamo sistemare tutti i n. **razionali su una retta**: origine, verso, unità di mis. Ogni $q \in \mathbb{Q}$ è rappres sulla retta da un p. che è estremo del segmento che parte da 0 e ha lunghezza q: estremo dx se $q > 0$, estremo sx se $q < 0$
DISEGNO
però NON tutti i p. sulla retta rappresentano un n. raz:
ad es. $\sqrt{2}$ è la lungh della diag del quadr di lato 1, quindi l'estremo dx del segmento sulla retta avente tale lunghezza è un p. della retta
però $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
invece $\sqrt{2}$ è un n. reale (lo vedremo)
Se rappresento su una stessa linea tutti n. raz. ottengo una **retta piena di buchi**: ogni buco è un p. della retta che non ha rappresentante raz
questi buchi son in n. infinito
Invece se rappresento su una stessa linea i n. reali ottengo TUTTA la retta, senza

buchi: i p. della retta sono tutti rappresentati da un n. reale: i BUCHI della linea dei razionali rappresentano gli IRRAZIONALI

però $\mathbb{Q}$ **denso** in $\mathbb{R}$: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \; \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.

Anche $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$

Def. intervalli: limitati, illimitati, chiusi, aperti, chiusi/aperti solo da una parte

Si notino i significati delle parentesi quadre e tonde; la partentesi su ∞ è SEMPRE tonda: ∞ NON è un n. reale, perché non è finito

Def. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\} = [0, +\infty)$, $\quad \mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$,
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq 0\}$, $\mathbb{R}_{--} = \{x \in \mathbb{R} : \; x < 0\}$.

Ex sul libro: 1.2 punto 14 (usa intervalli)

Ex1 compito 11/6/15 (include 2^x). Variazione: Si consideri l'insieme
$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-8}{x^2-5x+4} < 0\right\}$.
1) Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti.

Soluz.: den ha radici 1,4; num ha radici $\pm 2\sqrt{2}$; $A = (-2\sqrt{2}, 1) \cup (2\sqrt{2}, 4)$.

26/9/17 LEZIONE 6

Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di un imsieme

Notaz. Il nostro universo, da ora in poi, se non diversam specificato, è $\mathbb{R}$.

Def. **Massimo** di un ins. Dato $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che $M = maxA$ se
1) $M \in A$
2) $\forall x \in A$, $x \leq M$.

ES

Def. **min** di un ins

Def **MAGGIORANTE di un insieme**. Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che $K \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per A se $\forall x \in A$, $x \leq K$.

ES

Quindi M è $\max A$ sse
1) $M \in A$
2) M è maggiorante per A.

Def **MINORANTE** $\ell \in \mathbb{R}$

Unicità del max: *se ci fossero due $M_1 \neq M_2 \Rightarrow$ (ordinamento totale) o $M_1 > M_2$ (allora M_2 non è max) o $M_2 > M_1$ (allora M_1 non è max.)*■

idem: MIN unico

ES di ins che NON ha max $[0, 1)$
OSS: 1 è il più piccolo dei maggioranti

Insieme $A \subset \mathbb{R}$ **limitato superiorm**: se A ammette un maggiorante
Insieme $A \subset \mathbb{R}$ **limitato inferiorm**: se A ammette un minorante
Insieme $A \subset \mathbb{R}$ **limitato** se è limitato sia superiorm che inferiorm.

P4 Proprietà di **completezza** dei n. reali. Per qualsiasi ins E (sottointeso: di numeri reali) non vuoto e limitato superiorm, l'insieme dei maggioranti ha un MINIMO, che è un num. reale (quindi finito).

Def. Per E (sottointeso: insieme di numeri reali) non vuoto e limitato superiorm def. **estremo superiore** = il min dei maggior, sup E

Es. $\sup[0,1)$, $\sup[0,1]$

Quindi qualunque sia E ins di num reali non vuoto e superiorm limitato, sup E è un num. reale: $\mathbb{R}$ contiene il sup di ogni suo sottoinsieme non vuoto e super. limitato. In questo consiste la **completezza di $\mathbb{R}$.**

Oss. il **sup è unico** *perché è un min*

Risulta che $\sqrt{2}$ è un il sup di un insieme (e l'inf di un altro insieme):
$\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \leq 2\} = \sup\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \leq 2\}$
ma anche $\sqrt{2} = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \geq 2\} = \inf\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \geq 2\}$.

Quindi $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, per la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$. Invece Q **non è completo**, non contiene necessariamente il sup di ogni suo insieme non vuoto e limitato superiorm, ad es. $\sup\{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \leq 2\} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Per tutti gli **intervalli limitati** I (ap., ch, né ap. né ch.) con estremi $a < b$ ho $\sup I = b, \inf I = a$.

Un ins E non vuoto e limitato inf ha sempre MAX dei minoranti, num. reale finito
Def. **estremo inf**, unico

Oss. Sia $\sup A = s$. Non appena $s \in A$ **allora** $s = \max A$. (analogo per inf e min)

Oss. se $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto **ammette max** $M \Rightarrow \sup A = M$. (analogo per inf e min)

Es. $(0,1]$, $(0,1)$

Per ogni $E \neq \emptyset$, $\inf E \leq \sup E$, perché $\exists x \in E$ e si ha $\inf E \leq x \leq \sup E$.

Se E **NON è limitato sup**: non si possono trovare limitazioni superiori FINITE, ma si pone $\sup E = +\infty$

Es. $\sup \mathbb{N}$, $\sup(a, +\infty)$

se E è ILlimitato inf, si pone $\inf E = -\infty$

Es. $\inf \mathbb{Z}$, $\inf\{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 8\}$

Così OGNI ins non vuoto ha sia sup che inf

Ex1 compito 11/6/15 (include 2^x). Variazione: Si consideri l'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-8}{x^2-5x+4} < 0\right\}$.
1) Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti. (già fatto) $A = (-2\sqrt{2}, 1) \cup (4, 2\sqrt{2})$

2) Si determinino, se esistono, $\sup A$, inf, max, min.

REGOLA D'ORO n.1: Per $a, b > 0$ vale che:

$$a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b.$$

Dim. della $\Rightarrow$: se fosse $a > b$ allora $a \cdot a > a \cdot b$, perché $a > b$ e $a > 0$; ma anche $a \cdot b > b \cdot b$ perché $a > b$ e $b > 0$; ma allora $a^2 = a \cdot a > b \cdot b = b^2$, assurdo.
Dim. della $\Leftarrow$: se $a \leq b$ allora $a \cdot a \leq a \cdot b$, perché $a > 0$, ma anche $a \cdot b \leq b \cdot b$, perché $b > 0$; ma allora $a^2 = a \cdot a \leq b \cdot b = b^2$. ■

2/10/17 LEZIONE 7

EX. $\sup\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
Sol. Si ha $\{1, 4, 9, 16, ...\}$: è illimitato sup, perché $\forall K > 0$ ho $n, K > 0$ e allora vale $n^2 \leq K$ sse $n \leq \sqrt{K}$.
Perciò preso un qls $K > 0$ non è possibile che $n^2 \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per es. il primo intero $m > \sqrt{K}$ è t.c. $m^2 > K$.

OSS: $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ è illimitato perché $\mathbb{N}$ è illimitato.

NB: Per dimostrare che $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ è illimitato abbiamo dimostrato che è vera non "$\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ è limitato " = non "$\exists K \in \mathbb{R} : \forall\ n \in \mathbb{N}$ si abbia $n^2 \leq K$"
= "$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ tale che $n^2 > K$."

Es. $\sup\{-n, n \in \mathbb{N}\}$

Caratterizzazioni di sup e inf:

Prop. Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, limitato superiormente. Sappiamo che il $\sup A$ esiste. Ebbene:

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & s \text{ è maggiorante per } A \\ 2) & \text{come abbasso } s \text{ di poco, } s - \varepsilon \text{ non è più maggiorante per } A: \\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A : x > s - \varepsilon. \end{cases}$$

[*dim* $\Rightarrow$. $s = \sup A$ implica che s è maggiorante, quindi 1) è ok;
[s è però il più piccolo dei maggioranti, quindi $s - \varepsilon$ non può essere maggiorante,
[e allora 2) ok.
[*dim* $\Leftarrow$. Dobbiamo dimostrare che 1) e 2) $\Rightarrow$ s= minimo dei maggioranti.
[Che sia maggiorante è ok. Dobbiamo dim che sia il più piccolo. Se per assurdo
[non lo fosse, vorrebbe dire che ce n'è uno, s', più piccolo (il min dei maggioranti
[esiste): $s' = s - \varepsilon$, ma per 2) $\exists\ x \in A : x > s - \varepsilon$, ma allora s' non è
[maggiornate.■

Ex. Calcolo di $\sup\{\frac{1}{n} : n \in N\}$.

Prop. Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, limitato inferiormente. Sappiamo che $\inf A$ esiste. Ebbene:

$$i = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & i \text{ è minorante per } A \\ 2) & \text{come alzo } i \text{ di poco, } i + \varepsilon \text{ non è più minorante per } A: \\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A : x < i + \varepsilon. \end{cases}$$

REGOLA D'ORO n.2: passaggio ai reciproci.

Quando a, b sono **concordi** si ha

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

infatti usando le conseg. C4, C5 delle propr. dei n. reali:
1) se $a, b > 0$, allora $\frac{1}{a} > 0, \frac{1}{b} > 0$, e allora $a > b$ sse (moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{a}$) $1 > \frac{b}{a}$ sse (moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{b}$) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ (la dis non cambia mai verso);
2) se $a, b < 0$, allora $\frac{1}{a} < 0, \frac{1}{b} < 0$, e allora $a > b$ sse (moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{a}$) $1 < \frac{b}{a}$ sse (moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{b}$) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ (la dis cambia verso 2 volte).

Quando a, b sono **discordi**, si avrà ad es. $a < 0$, $b > 0$, e allora

$$a < b \text{ e } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

infatti usando C5:
se $a < 0, b > 0 \Rightarrow a < b$ e $\frac{1}{a} < 0, \frac{1}{b} > 0$, allora $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Infatti (moltiplicando ambo i membri di $a < b$ per $\frac{1}{a}$)
$1 > \frac{b}{a}$ e (moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{b}$) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$
(la dis. cambia verso una sola volta).
Passando ai reciproci si fanno 2 passaggi in uno, e si velocizza.

Ex. Calcolo di $\inf\{\frac{1}{n} : n \in N\}$.
Per sol.: $\forall n,\ \varepsilon \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon}$

Differenza tra max e sup: un sup non è un max se $\notin A$ opp. $+\infty$
Es. $(0, 1]$, $(0, 1)$, $\sup\{n, n \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Ex x CASA. Calcolo e verifica di sup/inf, max/min di $(0, 2] \cup [3, 4]$; $(-\infty, 1)$.

Ex x CASA: libro 2.7 pag. 38: GIUSTIFICARE le risposte!

Valore assoluto: per OGNI $x \in \mathbb{R}$, si definice *valore assoluto* di x, e si indica $|x|$, il seguente:

$$|x| \begin{cases} = x & \text{se l'ARGOMENTO del val assol } x \geq 0 \\ = -x & \text{se l'ARGOMENTO } x < 0. \end{cases}$$

sciogliere

Proprietà. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ si ha
1. $|x| \geq 0$;
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
   Es. $|-3 \cdot a| = |-3| \cdot |a| = 3|a|$
3. se $x \neq 0$, allora $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$;
   Es. $|\frac{-3}{5}| = \frac{|-3|}{|5|} = \frac{3}{5}$.
4. Fissato $a > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, si ha

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-a, a).$$

dim.

3/10/17 LEZIONE 8

EX. Risolvere $|x| \leq 3$

$$\text{NB!!!} \quad |x-2| \begin{cases} = x-2 & \text{se l'ARGOMENTO del val assol } x-2 \geq 0 \\ = -(x-2) & \text{se l'ARGOMENTO } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{ossia} \quad |x-2| \begin{cases} = x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ = 2-x & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

EX. Risolvere $|x-2| \leq 3$

Radice quadrata **aritmetica** e radice quadr **algebrica**

Def. **radice quadrata aritmetica** di un n. $a \geq 0$: è l'unico n. $x \geq 0$: $x^2 = a$

Es. $a = 4$, rad aritm $\sqrt{4} = 2$.

Oss: anche $(-2)^2 = 4$, ma solo $+2$ è la radice aritmetica, perché $2 > 0$.

Def. **radice quadrata algebrica** di un n. $a \geq 0$: un qualunque n. x : $x^2 = a$

Es. rad algebr: $\sqrt{4} = \{2, -2\} = \pm 2$

Ex. Mostrare che

a. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con la radice aritmetica, $\sqrt[2]{x^2} = |x|$.

Sol. Ho x^2 fissato, e cerco $\sqrt{x^2}$ aritm, ossia cerco gli $z \geq 0 : z^2 = x^2$, x fissato, z incognita. Tutte le soluz dell'eq. sono $\{\pm x\}$ (radice alg), perché al q fan x^2, devo prendere SOLO la sol. ≥ 0.

Se $x \geq 0$ solo la radice x è positiva $\Rightarrow$ è la soluzione, in effetti $|x| = x$.

Se $x < 0$ è $-x$ la soluz positiva $\Rightarrow$ $-x$ è la soluzione, in effetti $|x| = -x$. ■

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dim. Devo dim. che quando b v allora a v, e quando b F allora a F.

Se $x = 0 \Rightarrow$ (per def.) $|x| = 0$.

Se $x \neq 0 \Rightarrow |x| =$ o x, se $x > 0$, opp. $-x$, se $x < 0$. Nel primo caso ho $|x| = x > 0$, che quindi è $\neq 0$; nel secondo caso ho $|x| = -x > 0$, che quindi è $\neq 0$. ■

c. (CASA) Risolvere le diseq.

$$|x-2| < 1$$
$$|x-5| > 3$$

d. Risolvere la diseq.

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| < x + 1.$$

Sol. Radici di $x^2 - 3x + 2$ sono 1,2.

Se $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ si vuole $x^2 - 3x + 2 < x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$: qs ha radici $2 \pm \sqrt{3}$. $\mathcal{S}_1 = (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}) \cap \Big((-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\Big) = (2-\sqrt{3}, 1] \cup [2, 2+\sqrt{3})$.

Se $x \in (1,2)$ si vuole $-(x^2 - 3x + 2) < x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 > 0$: qs NON ha radici, perché $\Delta < 0$. $\mathcal{S}_2 = \mathbb{R} \cap (1,2) = (1,2)$.

Allora $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.■

Ex (CASA). Sciogliere $|x^2 + 2x|$.

EXX sul libro per CASA: (disuguaglianze) 2.10, 2.11, 2.13, 2.18 punti 1,2,3,7,9,12,14,16,21,30

Topologia della retta reale

Sulla retta reale $|x|$ rappres la distanza di x da 0. Invece $|b - a| = |a - b|$ rappres la distanza fra i 2 punti a, b, DISEGNINO
in partic. $|x - a| =$ distanza di x da a, DISEGNINO

Dato $a \in \mathbb{R}$, e dato $\varepsilon > 0$, def **intorno** di a di raggio ε l'ins $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \varepsilon\}$: gli x che sono distanti da a meno di ε
$|x - a| < \varepsilon$ sse $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ (visto, $x - a = z$), ossia sse $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ sse $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, DISEGNINO
$\Rightarrow B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

[Ex. Dim che: fissato x, se $\forall \varepsilon > 0$ si ha $x \in B(b, \varepsilon)$, allora $x = b$
[*Dim.* $0 \leq |x - b| < \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ *(conseguenza C8 delle propr dei n. reali)*
[$|x - b| = 0 \Rightarrow x = b$.

Es. Sia $A = (0, 1)$: un qualunque punto $a \in A$ è tale che $\exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subset A$. DISEGNINO
Dim. $a \in (0, 1)$, allora per $\varepsilon > 0 : \ \varepsilon < a$ ed $\varepsilon < 1 - a$ abbiamo $a + \varepsilon < a + 1 - a = 1$ ed $a - \varepsilon > a - a = 0$, quindi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (0, 1)$: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ è TUTTO CONTENUTO entro $(0, 1)$■

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. $a \in A$ si dice **p.to interno** ad A se $\exists \varepsilon > 0 : \ B(a, \varepsilon) \subset A$.

Ex. Pti interni di $(0, 1)$? di $[0, 1)$? 0 non è interno a $[0, 1)$: per qualunque $\varepsilon > 0$, DISEGNINO, $B(0, \varepsilon) \not\subset A$ perché la parte $(-\varepsilon, 0)$ è tutta fuori di A]

Ex. Ha $\{1, 2, 3\}$ pti interni?

Ex. Ha $\mathbb{Q}$ pti interni?

Def. A è un insieme **aperto** se ogni $x \in A$ è interno
Es. $A = (0, 1)$; con $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $A = (a, b)$, $A = (a, +\infty)$, $A = (-\infty, b)$;
con $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$ $A = (a, b) \cup (c, d)$ è aperto, $A = (a, b) \cap (c, d)$

Propr. L'unione finita di aperti è un ins aperto; l'intersezione finita di aperti è un ins aperto

5/10/17 LEZIONE 9

Def. A è un insieme **chiuso** se A^c è aperto
Es. di ins. ch. $A = [0, 1]$, infatti $A^c = (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$
Ex. Se A, B ch. $\Rightarrow A \cap B, A \cup B$ ch.
Sol. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ è aperto perché $\cup$ finita di ap.;
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è ap perché $\cap$ finita di ap.

Es. Se $A = [0, 1)$ non tutti gli $a \in A$ sono interni: $0 \in A$ non è interno (detto)
Però 0 ha un'altra caratteristica: un qualunque $B(0, \varepsilon)$ contiene infiniti punti di A, DISEGNO

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. $\underline{x_0 \in \mathbb{R}}$ si dice **p.to di accumulazione** per A se in ogni suo intorno cadono INFINITI pti di A. [Serve per la def di limite]

Es. è 0 p. di accum per $(0, 1)$?

quindi non nec se a è di accumulaz per A allora $a \in A$

Se a p. di acc per A, stando su punti di A posso avvicinarmi ad a quanto voglio ($\forall \varepsilon > 0$ trovo degli $x \in A$ diversi da a ma distanza da a minore di ε)

Es. $\{1, 2\} \cup (3, 5)$. E' 2 p.to di accumulazione?
esiste intorno di pti non di A, a parte 2: $B - \{2\} \subset A^c$

Interno vs accumulazione: se a interno ad A $\Rightarrow$ a è anche di accumulaz per A.
NB: la $\Leftarrow$ NON è vera. Es. $a = 0$, $A = (0, 1)$.

Ex. Tutti i p. di accum di $(0, 1)$?
ogni $x < 0$ o $x > 1$ è *lontano* da A

In generale per ogni INTERVALLO (c, d), o $(c, d]$ o $[c, d)$ o $[c, d]$, tutti e soli i punti di acc. sono tutti i p.ti di $[c, d]$.

Proprietà: x è di accumulaz per A sse $\forall \varepsilon > 0$, $B(x_0, \varepsilon)$ contiene almeno un punto di A $\underline{\text{DIVERSO da } x_0}$

Ex. E' 0 p di accumulaz per $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

Sol. NB: $0 \notin A$. [sopra abbiamo visto che $0 = \inf A$]
Dato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, trovo sempre n : $\frac{1}{n} < \varepsilon$, cioè $n > \frac{1}{\varepsilon}$,
dunque $\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon)$, e allora $B(0, \varepsilon) \cap A$ contiene punti di A diversi da 0.

Ex. E' $\frac{1}{2}$ p di accumulaz per A?

Ex. E' 25 p di accumulaz per $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$?

Sup vs accumulazione
se A limitato sup e $\sup A \notin A \Rightarrow \sup A$ è p. di accum per A
perché, per def. di sup, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in A$: $x > s - \varepsilon$, allora
$x \in (s - \varepsilon, s) \subset B(s, \varepsilon) - \{s\}$. ■

NB se $\sup A \in A$ non è necessariamente vero che il $\sup A$ sia di accumulazione per A, ad es. $A = \{1\}$: $\sup A = 1$, ma $\forall \varepsilon > 0$ $B(1, \varepsilon)$ NON contiene infiniti punti di A.

Ex. E' 3 p. interno per $\mathbb{Z}$ ($U = \mathbb{R}$)?
$\forall \varepsilon \in (0, 1)$, $B(3, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Tutti i punti di $\mathbb{Z}$ sono ben lontani tra di loro

Ex CASA. E' 3 p. di acc. per $\mathbb{Z}$? è 2 p.to di accumulazione per $[0, 2)$? è 1 p.to di accumulazione per $(0, 1.2)$?

Ex CASA. Sia $x \in \mathbb{R}$: è x di accum per $\mathbb{Q}$? dimostrarlo
[densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$]

EX CASA sul libro: 2.20, 2.21, 2.22 (trovare SOLO p.ti interni + di accumulaz) 1,2,3,4,5,8,9

[**Ex**. Sia $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dim che tutti i pti $x \notin A$, $x \neq 0$, sono interni a A^c, ossia A è chiuso.

[Se $x < 0$, DISEGNO, allora preso $\varepsilon = |x|$ si ha $x \in B(x, \varepsilon) \subset A^c$ e ok.
[Oss. che $\frac{1}{n} < 1, \forall n$.
[Se $x > 1$ DISEGNO si ragiona analogam a sopra, con $\varepsilon = x - 1$.
[Se $x \in (0, 1)$ e $x \notin A$ DISEGNO avremo $x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$ per un certo n, basta
[allora prendere $\varepsilon > 0 :\ \varepsilon < x - \frac{1}{n}$ ed $\varepsilon < \frac{1}{n-1} - x$.■