

E' facile verificare (cfr. esercizio 6.3) la convenienza dell'algoritmo (6.2.25) per il calcolo delle  $A_k$  rispetto alla seconda delle (6.2.20).

Una volta calcolate le  $A_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , è possibile calcolare il valore di  $N_n(f, x)$ , dato dalla relazione

$$(6.2.19)_1 \quad N_n(f; x) = f_0 + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \omega_k(x),$$

per un assegnato valore  $\bar{x}$  di  $x$ , mediante il seguente algoritmo:

1. Sono assegnati i valori  $\bar{x}$ ,  $A_i$ ,  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ;
2.  $P = A_n$ ;
3. per  $i = n-1, n-2, \dots, 0$ 
  1.  $P = P \times (x - x_i) + A_i$ ;
4.  $N_n(f; x) = P$ .

Il polinomio interpolante di Newton, costruito mediante gli algoritmi (6.2.25) - (6.2.26), presenta, oltre ai vantaggi illustrati all'inizio di questo paragrafo, anche una notevole convenienza per quanto riguarda le quantità di calcolo (cfr. 6.2.h)).

#### e) Errore nelle formule di interpolazione.

Assegnate le  $(n+1)$  coppie di valori

$$(6.2.27) \quad (x_i, f_i), \quad x_i \in [a, b], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_i \neq x_j, \quad \text{per } i \neq j,$$

siano  $f_i$  i valori assunti, per  $x = x_i$ , da una funzione  $f(x)$  definita su  $[a, b]$ :  $f_i = f(x_i)$ . Per quanto già detto è importante dare una valutazione dell'errore che viene commesso in un punto  $x \in [a, b]$ ,  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , considerando in luogo di  $f(x)$  il polinomio  $\mathcal{L}_n(f; x)$  che interpola i dati (6.2.27); si tratta, in altri termini, di valutare, per  $x \neq x_i$ , la funzione errore

$$(6.2.28) \quad e(x) = f(x) - \mathcal{L}_n(f; x).$$

Poichè  $\mathcal{L}_n(f; x)$  interpola  $f(x)$  nei punti  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , dalla (6.2.28) e dalla (6.2.6) segue

$$(6.2.29) \quad e(x) = \omega_{n+1}(x) R(x).$$

Nel caso che  $f(x)$  ammetta, in  $[a, b]$ , derivate fino a quella di ordine  $n+1$  è possibile dare una valutazione di  $R(x)$ . Si consideri, a tale scopo, la funzione

$$F(t) = f(t) - \mathcal{L}_n(f; t) - \omega_{n+1}(t) R(x).$$

e siano  $\xi_1 = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, x\}$ ,  $\xi_2 = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, x\}$ .

$F(t)$  si annulla per  $t = x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , e per  $t = x$ . Per il teorema di Rolle applicato ripetutamente esistono, allora, almeno  $n+1$  punti interni all'intervallo  $]\xi_1, \xi_2[$  in cui si annulla  $F'(t)$ , almeno  $n$  punti, nello stesso intervallo, in cui si annulla  $F''(t)$ , ..., almeno un punto  $\zeta \in ]\xi_1, \xi_2[$  in cui si annulla  $F^{(n+1)}(t)$ . Ma

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! R(x)$$

e pertanto

$$(6.2.30) \quad R(x) = f^{(n+1)}(\zeta) / (n+1)!.$$

Se,  $\forall x \in [a, b]$ , è  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , allora dalla (6.2.30) segue

$$(6.2.30)_1 \quad |R(x)| \leq M / (n+1)!.$$

Si considerino, ad esempio, quali punti fondamentali dell'interpolazione i valori  $0, \pi/4, \pi/2, \pi$ , e, corrispondentemente, i valori assunti in essi dalla funzione  $\sin(x)$ ,  $0, \sqrt{2}/2, 1, 0$ ; si voglia valutare

$$e(x) = \sin(x) - \mathcal{L}_3(\sin(x); x).$$

Per le (6.2.30) si ha

$$|R(x)| = |f^{(4)}(\zeta)| / 4! = |\sin(\zeta)| / 24 \leq 1/24,$$

e, per la (6.2.29),

$$|e(x)| \leq |x(4x - \pi)(2x - \pi)(x - \pi)| / 192.$$

Se si vuole valutare l'errore commesso, ad esempio, calcolando il valore  $\sin(3\pi/4)$  utilizzando il polinomio interpolante  $\mathcal{L}_3(\sin(x); x)$  si ha:

$$|e(3\pi/4)| \leq \frac{\pi^4}{1024} \approx 0.095.$$

Per  $x = \pi/10$  si ha

$$|e(\pi/10)| \leq 9\pi^4 / (4 \times 10^4) \approx 0.022.$$

Gli errori effettivi che vengono commessi nei due casi considerati sono, rispettivamente, dell'ordine di 0.085 e 0.018.

Una valutazione di  $e(x)$  può essere data anche se  $f(x)$  non ammette le derivate fino alla  $(n+1)$ -esima. Assegnati, infatti, gli  $n+1$  punti (6.2.27) si consideri l'ulteriore punto  $(x_{n+1}, f_{n+1})$ , con  $x_{n+1} = x$ ,  $f_{n+1} = f(x)$ ,  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . La (6.2.21), con  $m = 1$ , porta a

$$\mathcal{L}_{n+1}(f; t) = \mathcal{L}_n(f; t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(t);$$

*Suddivisione dell'intervallo in sottointervalli*

La (6.2.36) mette in risalto il fatto che se l'intervallo  $[a, b]$  non è sufficientemente piccolo il contributo dell'errore dovuto ai punti fondamentali può essere anche rilevante. In questo caso può risultare utile una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  in sottointervalli e la conseguente costruzione di una approssimante polinomiale a tratti, avente in  $[a, b]$  opportune caratteristiche di regolarità (cfr. 6.8).

Osservazione. Per dimostrare la (6.2.34) si osservi che (cfr. (0.3.11) e (0.3.13)), poichè  $|T_{n+1}(x)| \leq 1$  e  $T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} +$  termini di grado inferiore, deve essere

$$|\tilde{T}_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \tilde{T}_{n+1}(x) = x^{n+1} + \text{termini di grado inferiore};$$

inoltre essendo gli zeri di  $T_{n+1}(x)$  tutti reali e tutti in  $[-1, 1]$ , tali sono anche gli zeri di  $\tilde{T}_{n+1}(x)$ ; pertanto  $|\tilde{T}_{n+1}(x)|$  assume  $n+2$  volte in  $[-1, 1]$  il suo valore massimo  $1/2^n$  e, precisamente, nei punti

$$(6.2.37) \quad x'_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Sia ora  $p(x)$  un polinomio di grado  $(n+1)$ , con il coefficiente di  $x^{n+1}$  uguale ad 1 e tale che

$$(6.2.38) \quad \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| < \frac{1}{2^n};$$

il polinomio di grado  $n$

$$Q(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) - p(x)$$

assume nei punti  $x'_i$  (6.2.37) il segno di  $\tilde{T}_{n+1}(x)$  e, pertanto, cambia di segno  $(n+2)$  volte. Questo significa che  $Q(x)$  si annulla in almeno  $(n+1)$  punti ed essendo un polinomio di grado  $n$  deve essere  $Q(x) \equiv 0$ . Ma

$$\frac{1}{2^n} = \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| = \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| < \frac{1}{2^n},$$

e la (6.2.38) non può essere vera; allora deve essere vera la (6.2.34).

f) Rappresentazione del polinomio interpolante mediante differenze finite.

Poichè nella pratica risultano molto usati polinomi interpolanti costruiti su punti fondamentali equidistanti  $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n$ , è opportuno dare la loro rappresentazione esplicitamente ed introdurre, a tale scopo, alcuni operatori lineari.

Dati l'intervallo  $[a, b]$ , il numero reale positivo  $h (< b-a)$  ed  $x \in [a, b]$ , si

per  $t = x$  si ha

$$\mathcal{L}_{n+1}(f; x) = f(x) = \mathcal{L}_n(f; x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\omega_{n+1}(x),$$

e pertanto

$$(6.2.31) \quad e(x) = f(x) - \mathcal{L}_n(f; x) = \omega_{n+1}(x)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x].$$

Se  $f(x)$  ammette derivate, in  $[a, b]$ , fino a quella di ordine  $n+1$ , dalle (6.2.29), (6.2.30) e (6.2.31) si ha, se  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$  sono distinti,

$$(6.2.32) \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!, \quad \xi \in ]\xi_1, \xi_2[$$

dove  $\xi_1$  e  $\xi_2$  hanno il solito significato.

Il termine  $R(x)$  della (6.2.29) dipende sia dalla natura della  $f(x)$  che dai punti fondamentali dell'interpolazione  $\{x_i\}$ . D'altra parte valutazioni di  $R(x)$  del tipo (6.2.30) mostrano come si possa pensare l'errore  $e(x)$  formato da due fattori:  $R(x)$ , dipendente dalla natura della  $f(x)$ , e  $\omega_{n+1}(x)$ , dipendente dalla distribuzione dei punti  $\{x_i\}$ . Ha significato, allora, porsi il problema di determinare i punti  $\{x_i\}$  in modo che risulti minimo, qualunque sia  $x$ ,  $|\omega_{n+1}(x)|$ , ovvero che risulti minima la quantità

$$(6.2.33) \quad \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Ora, se  $[a, b] \equiv [-1, 1]$ , il polinomio

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

on  $T_n(x)$  polinomio di Chebyshev di grado  $n$ , soddisfa alla proprietà (cfr. osservazione che segue)

$$(6.2.34) \quad \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{P}_{n+1}(x)|,$$

ove  $\tilde{P}_{n+1}(x)$  indica un qualunque polinomio di grado  $(n+1)$  avente il coefficiente di  $x^{n+1}$  uguale ad 1; perciò la scelta degli zeri del polinomio di Chebyshev sui punti fondamentali dell'interpolazione permette di minimizzare la (6.2.33). e  $[a, b] \equiv [-1, 1]$  la trasformazione

$$(5.2.35) \quad y_k = 0.5(a + b + (b-a)x_k),$$

ove i valori  $x_k$  sono gli zeri di  $T_{n+1}(x)$ , permette di minimizzare  $\max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$

Scegliendo quali punti fondamentali i (6.2.35) si ottiene

$$(6.2.36) \quad \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)| = 2 \left[ \frac{b-a}{4} \right]^{n+1}.$$

*Se il più facile trovare che può annullare*

*R(x) non dipende da nulla*

*ha n+1 zeri*

*Pol. interpolanti su punti equidistanti*

$x$	-0.1	0.1	0.2	0.3
$y$	0.9048	$0.1105 \cdot 10^1$	$0.1221 \cdot 10^1$	$0.1350 \cdot 10^1$

(i valori  $y_i$  sono i valori, arrotondati alla 4<sup>a</sup> cifra, di  $\exp(x_i)$ ) si vuole determinare il valore  $\bar{x}$  per cui è  $\bar{y} = 1$ .

In base a quanto sopra esposto si costruisce il polinomio interpolante (nella forma di Newton) tale che:

$$N_3(g; y_i) = x_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

La tabella delle differenze divise relativa ai valori assegnati, operando arrotondamenti sulla 4<sup>a</sup> cifra, è la seguente:

$y_i$	$x_i$	$g^{[1]}$	$g^{[2]}$	$g^{[3]}$
0.9048	-0.1	0.9990		
0.1105 <sub>1</sub>	0.1	0.8621	-0.4330	
0.1221 <sub>1</sub>	0.2	0.7752	-0.3547	0.1759
0.1350 <sub>1</sub>	0.3			

dove, per comodità di scrittura

$$g^{[1]} = g[x_i, x_{i+1}],$$

$$g^{[2]} = g[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$$

$$g^{[3]} = g[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$$

ed il polinomio  $N_3(g; y)$  assume la forma:

$$\begin{aligned} N_3(g; y) = & -0.1 + 0.9990(y - 0.9048) - \\ & -0.4330(y - 0.9048)(y - 0.1105 \cdot 10^1) + \\ & + 0.1759(y - 0.9048)(y - 0.1105 \cdot 10^1)(y - 0.1221 \cdot 10^1). \end{aligned}$$

Per  $y = 1$  si ha  $N_3(g; 1) = -0.1783 \cdot 10^{-3}$ .

### 6.3. Approssimazione uniforme: teorema di Weierstrass.

a) Il teorema di Weierstrass.

Assegnati l'intervallo  $[a, b]$ ,  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $(n+1)$  punti distinti  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ed i valori  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , è già stato studiato

(cfr., in particolare, 6.2.e) e 6.2.i)) come il polinomio  $\mathcal{L}_n(f; x)$  ( $\mathcal{H}_{2n+1}(f; x)$ ), interpolante tali valori, possa essere utilizzato per calcolare, in  $\bar{x} \neq x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , un'approssimazione del valore  $f(\bar{x})$ .

In relazione ai problemi posti nel capitolo 2 del volume 1. è naturale chiedersi se, fissato  $\epsilon > 0$ , è possibile costruire  $\mathcal{L}_n(f; x)$  ( $\mathcal{H}_{2n+1}(f; x)$ ), di grado opportuno, in modo che risulti

$$(6.3.1) \quad \begin{aligned} |f(\bar{x}) - \mathcal{L}_n(f; \bar{x})| &< \epsilon, \quad \forall \bar{x} \in [a, b], \\ |f(\bar{x}) - \mathcal{H}_{2n+1}(f; \bar{x})| &< \epsilon, \quad \forall \bar{x} \in [a, b]. \end{aligned}$$

Il problema potrebbe essere risolto cercando di costruire, per opportune scelte dei punti fondamentali dell'interpolazione  $\{x_i^{(n)}\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , con  $x_i^{(n)} \neq x_j^{(n)}$  per  $i \neq j$ ,  $x_i^{(n)} \in [a, b] \forall i, n$ , una successione di polinomi interpolanti  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$  ( $\{\mathcal{H}_{2n+1}(f; x)\}$ ) che converga, uniformemente in  $[a, b]$ , alla funzione  $f(x)$ .

Questo problema, che ha impegnato per lungo tempo matematici di notevole valore, si presenta assai difficile. Riteniamo perciò utile richiamare brevemente alcuni dei principali risultati conseguiti in questo campo rimandando, per una più completa trattazione, a [6.14], [6.26]. Ci limiteremo al caso  $[a, b] \equiv [-1, 1]$ ; come già osservato tale limitazione non è restrittiva.

i) La successione dei polinomi interpolanti  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$  costruita per la funzione  $f(x) = |x|$ , su punti equidistanti di  $[-1, 1]$ , con  $x_0^{(n)} = -1$ ,  $x_n^{(n)} = 1$ , converge a  $|x|$  solo per  $x = -1, x = 0, x = 1$ . Per ogni altro valore  $x \in ]-1, 1[$  la successione  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$  non è limitata.

ii) Esiste una funzione  $f(x) \in C[-1, 1]$  per la quale la successione dei polinomi interpolanti  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$  costruita sugli zeri del polinomio di Chebyshev  $T_{n+1}(x)$  risulta non limitata  $\forall x \in [-1, 1]$ .

iii) Qualunque sia il sistema di punti fondamentali in  $[-1, 1]$  è possibile determinare una funzione  $f(x) \in C[-1, 1]$  tale che la successione dei polinomi interpolanti  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$  non è limitata per un prefissato  $\bar{x} \in [-1, 1]$ .

iv) La successione dei polinomi interpolanti di Hermite  $\{\mathcal{H}_{2n+1}(f; x)\}$ , costruita su  $(n+1)$  punti equidistanti può non convergere alla  $f(x)$  e si può, inoltre, determinare almeno un  $\bar{x} \in [-1, 1]$  in cui la successione non risulta limitata, anche se

$$|\mathcal{H}_{2n+1}(f; x_k^{(n)})| \leq 1, \quad |\mathcal{H}'_{2n+1}(f; x_k^{(n)})| \leq 1; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Perché una successione di polinomi interpolanti converga alla  $f(x)$  assegnata bisogna particularizzare i punti fondamentali dell'interpolazione e, spesso, restringere la classe cui  $f(x)$  appartiene. Sono, infatti, validi i seguenti risultati [6.14], [6.26]:

*particularizzare i punti fondam. e restringere la classe di appartenenza di  $f$*

v) Se in  $[-1, 1]$   $f(x) \in \text{Lip } \alpha$  ( $2$ ),  $1/2 < \alpha \leq 1$ , la successione  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$  costruita su punti fondamentali  $x_i^{(n)}$  dell'interpolazione soddisfacenti alla condizione (3)

$$(6.3.2) \quad 1 - (x - x_i^{(n)}) \frac{\omega''(x_i^{(n)})}{\omega'(x_i^{(n)})} \geq \rho > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, x \in [-1, 1],$$

con  $\rho$  costante positiva opportuna, converge, uniformemente in  $[-1, 1]$ , alla  $f(x)$ .

vi) Se in  $[-1, 1]$   $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , la successione  $\{\mathcal{L}_n(f; x)\}$ , costruita sugli zeri del polinomio di Chebyshev  $T_{n+1}(x)$ , converge, uniformemente in  $[-1, 1]$ , alla  $f(x)$ .

vii) Se  $f(x) \in C^1[-1, 1]$ , assunto  $f'_i = (df(x)/dx)_{x=x_i}$ , la successione dei polinomi interpolanti di Hermite,  $\{\mathcal{H}_{2n+1}(f; x)\}$ , costruita su punti normalmente distribuiti secondo Fejér (cfr. nota (3)), converge uniformemente in  $[-1, 1]$ , ad  $f(x)$ .

viii) Assegnata  $f(x) \in C[-1, 1]$ , la successione dei polinomi interpolanti di Hermite,  $\{\mathcal{H}_{2n+1}(f; x)\}$ , costruiti sugli zeri del polinomio di Chebyshev  $T_{n+1}(x)$ ,

(2) Assegnata sull'intervallo  $[a, b]$  (ma quanto segue vale anche se in luogo di  $[a, b]$  si considera  $]a, b[$ , che può essere anche  $]-\infty, +\infty[$ , o  $(a, b)$  o  $[a, b)$ ) una funzione  $f(x)$ , valga la condizione

$$a) \quad |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \forall y, x \in [a, b],$$

si dice allora che  $f(x)$  soddisfa, in  $[a, b]$ , ad una *condizione di Lipschitz con esponente  $\alpha$  e coefficiente  $M$* . Di solito si scrive

$$b) \quad f(x) \in \text{Lip}_M \alpha.$$

Nel caso che si scriva

$$c) \quad f(x) \in \text{Lip } \alpha.$$

si intende che non si pongono particolari limitazioni al valore di  $M (> 0)$  per cui vale la condizione a).

Per le funzioni soddisfacenti alla a) valgono le seguenti proprietà [6.26]:

- 1) una funzione che soddisfa alla a) è uniformemente continua;
- 2) se  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$  e  $\alpha > 1$ , allora  $f(x)$  è costante;
- 3) se in  $[a, b]$  esiste  $f'(x)$  ed è  $|f'(x)| \leq M$ , allora  $f(x) \in \text{Lip}_M 1$ ;
- 4) se  $[a, b]$  è limitato e se  $\alpha < \beta$ , allora  $\text{Lip } \alpha \subset \text{Lip } \beta$ .

(3) Un sistema di punti  $x_i^{(n)}$  che soddisfa alla (6.3.2) è detto *normalmente distribuito secondo Fejér*. Satisfano alla (6.3.2), ad esempio, gli zeri dei polinomi di Jacobi  $J_n^{\alpha, \beta}$ , ortogonali in  $[-1, 1]$ , rispetto alla funzione peso  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ , soluzioni, per  $-1 \leq \alpha < 0$ ,  $-1 \leq \beta < 0$ , dell'equazione differenziale

$$(1-x^2)P_n''(x) + [\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x]P_n'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)P_n(x) = 0.$$

Tra tali polinomi figurano i polinomi di Chebyshev ( $\alpha = \beta = -1/2$ ) ed i polinomi di Legendre ( $\alpha = \beta = 0$ ) (cfr. 0.3).

con i valori  $f'_i$  tali che

$$|f'_i| \leq \frac{\epsilon_n^n}{\log n \sqrt{1-x_i^2}}, \quad \text{con } \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

converge, uniformemente in  $[-1, 1]$ , alla  $f(x)$ .

La complessità dei risultati ora richiamati suggerisce di prendere in considerazione polinomi non interpolanti per cercare di ottenere la convergenza uniforme in  $[a, b]$  a  $f(x) \in C[a, b]$ . Ciò è possibile, ad esempio, in  $[a, b] \equiv [0, 1]$ , per  $f(x) \in C[0, 1]$ , costruendo la successione dei polinomi di Bernstein relativi alla  $f(x)$

$$(6.3.3) \quad B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$B_n(f; x)$  è un polinomio in  $x$  di grado non superiore ad  $n$  e tale che

$$B_n(f; 0) = f(0), \quad B_n(f; 1) = f(1).$$

Sviluppando nella (6.3.3) il binomio  $(1-x)^{n-k}$  si ha

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-j};$$

le somme dell'espressione precedente possono essere riordinate in modo che

$$B_n(f; x) = \sum_{r=0}^n x^r \sum_{k=0}^r f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-r} (-1)^{r-k};$$

ricordando che

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{n-r} = \binom{n}{r} \binom{r}{k},$$

si ha

$$B_n(f; x) = \sum_{r=0}^n x^r \binom{n}{r} \sum_{k=0}^r f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{r}{k} (-1)^{r-k},$$

e dalla (6.2.41) segue

$$(6.3.4) \quad B_n(f; x) = \sum_{r=0}^n \Delta^r f(0) \binom{n}{r} x^r.$$

Applicando la (6.3.4) alle funzioni  $1, x, x^2$ , si ottengono i seguenti risultati

Polinomi non interpolanti

$$\begin{aligned}
 (6.3.5) \quad & B_n(1; x) \equiv 1, \\
 & B_n(x; x) = x, \\
 & B_n(x^2; x) = \frac{1}{n^2} \left\{ \binom{n}{1} x + 2 \binom{n}{2} x^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Si tenga presente che alla prima delle (6.3.5) è possibile giungere anche direttamente applicando lo sviluppo del binomio all'espressione  $1 = \{x + (1-x)\}^n$ .

Dalle (6.3.5) è facile ottenere l'identità

$$(6.3.6) \quad \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x),$$

e da quest'ultima una valutazione dell'espressione

$$\sum_{|k/n-x| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

che sarà utile nel seguito. La notazione usata indica che, fissate  $x$  e  $\delta$ , la somma è estesa a tutti e soli quei valori di  $k$  per cui  $|k/n-x| \geq \delta$ . Tale limitazione implica

$$\frac{1}{\delta^2} \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 \geq 1,$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
 \sum_{|k/n-x| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{|k/n-x| \geq \delta} \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} \\
 &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},
 \end{aligned}$$

e per la (6.3.6) e per il fatto che, per  $x \in [0, 1]$ , è  $x(1-x) \leq 1/4$  si ha:

$$(6.3.7) \quad \sum_{|k/n-x| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Per verificare che la successione dei polinomi di Bernstein approssima  $f(x) \in C[0, 1]$  uniformemente in  $[0, 1]$  si può procedere come segue.

Per la prima delle (6.3.5) si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

e quindi

$$f(x) - B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \left\{ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

da cui

$$\begin{aligned}
 (6.3.8) \quad |f(x) - B_n(f; x)| &\leq \sum_{|k/n-x| < \delta} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\
 &+ \sum_{|k/n-x| \geq \delta} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

D'altra parte, per la continuità di  $f(x)$ , esiste un numero  $M > 0$  per cui, qualunque sia  $x \in [0, 1]$ , è  $|f(x)| < M$ . Pertanto dalla (6.3.8) si ha (4):

$$\begin{aligned}
 |f(x) - B_n(f; x)| &\leq \omega(f; \delta) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\
 &+ 2M \sum_{|k/n-x| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},
 \end{aligned}$$

da cui, per la prima delle (6.3.5) e per la (6.3.7), si ha

$$(6.3.9) \quad |f(x) - B_n(f; x)| \leq \omega(f; \delta) + M/(2n\delta^2),$$

e dalla (6.3.9) segue che, qualunque sia  $x \in [0, 1]$ , il valore  $|f(x) - B_n(f; x)|$  può essere reso arbitrariamente piccolo. Il risultato ottenuto costituisce una delle

(4) Ricordiamo che, assegnata sull'intervallo  $[a, b]$ , una funzione  $f(x)$  e dato un numero positivo  $\delta$ , il valore (che non necessariamente deve essere finito)

$$\omega(f; \delta) = \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)|$$

è detto modulo di continuità della  $f(x)$ .  $\omega(f; \delta)$  è una funzione non decrescente di  $\delta$  ed una funzione  $f(x)$  è uniformemente continua in  $[a, b]$  se e solo se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0.$$

Inoltre sono equivalenti le due asserzioni

$$f(x) \in \text{Lip}_M^\alpha, \quad \omega(f; \delta) \leq M\delta^\alpha.$$

dimostrazioni del classico teorema di Weierstrass:

*Primo caso di [6.10]*

**Teorema 6.3.1 (di Weierstrass).** Assegnata  $f(x) \in C[a, b]$  e fissato  $\epsilon > 0$ , è sempre possibile determinare un intero  $\bar{n}$  ed una successione di polinomi

$$\{P_n(x)\}, P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} x^k,$$

tale che, per  $n > \bar{n}$  e qualunque sia  $x$  in  $[a, b]$  vale

$$(6.3.10)_1 \quad |P_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

*Il caso del polinomio di grado  $n$  con  $n$  uguale a  $\bar{n}$  e detto di grado  $\bar{n}$  è detto di grado  $\bar{n}$ .*

**Tavola 6.4.** Valori di  $n$  per cui i polinomi approssimanti differiscono da  $f(x)$  non più di  $\epsilon = 0.2 \cdot 10^{-9}$  in  $[a, b] \equiv [0, 1]$ .  $p_n(x)$  è il polinomio di migliore approssimazione, di grado  $n$ , alla  $f(x)$  in  $[0, 1]$  (cfr. 6.4),  $L_n(f; x)$  è il polinomio interpolante di Lagrange costruito sugli  $n + 1$  punti (6.2.35),  $B_n(f; x)$  è il polinomio di Bernstein di grado  $n$ ,  $S_n(x)$  la somma parziale  $n$ -esima della serie di Taylor ( $x_0 = 0$ ).

$f(x)$	Polinomio approssimante	$n$
exp(x)	$p_n(x), L_n(f; x)$	9
	$S_n(x)$	12
	$B_n(x)$	$\approx 10^9$
$(2-x)^{-1}$	$p_n(x), L_n(f; x)$	$\approx 12$
	$S_n(x)$	32
	$B_n(x)$	$\approx 10^9$
$(1+x^2)^{-1}$	$p_n(x), L_n(f; x)$	$\approx 16$
	$S_n(x)$	la serie diverge per $x = 1$
	$B_n(x)$	$\approx 10^9$
$ f^{(4)}(x)  \leq 1$	$p_n(x), L_n(f; x)$	$\approx 300$
	$B_n(x)$	$\approx 10^9$
$f(x) \in \text{Lip } \alpha, \alpha = \frac{1}{2}$	$p_n(x), L_n(f; x)$	$\approx 10^{19}$
	$B_n(x)$	$\approx 10^{38}$
$f(x) \in C[0, 1]$	$p_n(x)$	$\omega\left(\frac{1}{n}\right) < 10^{-9}$
	$L_n(f; x)$	può non convergere
	$B_n(x)$	$\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 10^{-9}$

ovvero

$$(6.3.10)_2 \quad \max_{x \in [a, b]} |P_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

*Controllare ok  
funzione continua e periodica*

**Osservazione.** È possibile dimostrare [6.26] che il teorema di Weierstrass, nel caso  $f(x) \in C[0, 2\pi]$  e periodica con periodo  $2\pi$ , è ancora valido se in luogo dei polinomi algebrici  $P_n(x)$  vengono considerati i polinomi trigonometrici

$$c_0 + \sum_{k=1}^n \{c_k \cos(kx) + c'_k \sin(kx)\}.$$

b) *Difficoltà di applicazione del teorema di Weierstrass.*

Dalle (6.3.9) e (6.3.10) discende che, in generale, il grado di  $B_n(f; x)$  deve essere dell'ordine di grandezza di  $1/\epsilon$ ; scelto, ad esempio,  $\epsilon = 10^{-6}$ , si deve costruire il polinomio di Bernstein di grado un milione. Tale fatto suggerisce di cercare altre successioni di polinomi che, per un assegnato valore di  $\epsilon$ , approssimino una  $f(x)$  nel senso della (6.3.10)<sub>1</sub> ma con  $\bar{n}$  non troppo grande. D'altra parte, all'inizio di questo paragrafo, abbiamo visto come alcuni polinomi interpolanti, sotto opportune condizioni, approssimino  $f(x)$  nel senso sopra precisato, ma, se non vengono fatte ipotesi abbastanza restrittive sulla natura della  $f(x)$ , il valore  $\bar{n}$  resterà sempre molto grande sì da rendere praticamente inapplicabile il teorema di Weierstrass. A questo proposito la tav. 6.4 [6.22], ottenibile per via teorica e, pertanto, senza i problemi relativi agli errori di arrotondamento, dà un quadro sufficientemente significativo di come, una volta fissato  $\epsilon$ , varia  $\bar{n}$  con la natura della funzione da approssimare.

**6.4. Il problema della migliore approssimazione (lineare).**

Le conclusioni a cui siamo giunti nel paragrafo precedente suggeriscono, per le applicazioni, di affrontare in modo diverso il problema dell'approssimazione, nell'intervallo  $I = [a, b]$ , di una funzione continua  $f(x)$  mediante polinomi; ad esempio si può fissare il grado  $n$  del polinomio e chiedersi quanto si può rendere piccolo il valore  $d$  che compare nella (6.3.10)<sub>2</sub>, ovvero, in altri termini, posto

$$(6.4.1) \quad d = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| = \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right|,$$

determinare, se esiste, tra tutti i polinomi di grado  $\leq n$  quello (quelli) che rende (rendono)  $d$  minimo.

Sia, ad esempio,  $f(x) = x^2$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $P_n(x) = P_0(x) = a_0$ . Il problema di minimizzare  $d$  si riduce a determinare, in questo caso, quel valore di  $a_0$  per cui

### 4. Polinomi osculatori

Una generalizzazione del polinomio di interpolazione è rappresentata dai *polinomi osculatori*, cioè polinomi  $p(x)$  che nei nodi  $x_i, i = 0, \dots, n$ , soddisfano a condizioni più generali delle (1), che coinvolgono anche valori delle derivate fino ad un ordine prefissato, nel modo seguente:

$$p^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad (i, k) \in K_n, \quad (15)$$

dove  $K_n$  è un sottoinsieme di  $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\}$ .

Il modo più semplice per risolvere un tale problema è quello di considerare un polinomio di grado opportuno (di solito il numero dei coefficienti da determinare è uguale al numero delle condizioni date) e imporre che soddisfi le condizioni (15). I coefficienti del polinomio risultano allora soluzione di un sistema lineare.

**5.10 Esempio.** Per determinare il polinomio  $p(x)$  di grado minimo che soddisfa alle seguenti condizioni

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad p(x_0) = 0, \quad p(x_1) = 1, \quad p'(x_1) = 0, \quad p''(x_0) = -1,$$

si considera un generico polinomio di terzo grado (le condizioni da imporre sono quattro)

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0;$$

i coefficienti risultano soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} p_3(0) &= a_0 = 0 \\ p_3(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ p'_3(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ p''_3(0) &= 2a_2 = -1, \end{aligned}$$

da cui si ha  $a_3 = -1/4, a_2 = -1/2, a_1 = 7/4, a_0 = 0$ . Il polinomio cercato è quindi dato da

$$p_3(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 7x).$$

A seconda delle condizioni imposte, il problema può avere o meno soluzione e tale soluzione può essere o no unica.

**5.11 Esempio.** I coefficienti del polinomio

$$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

che soddisfa alle condizioni

$$p_2(x_0) = f(x_0), \quad p_2(x_2) = f(x_2), \quad p'_2(x_1) = f'(x_1),$$

in cui  $f(x_0), f(x_2), f'(x_1)$  sono valori dati e  $x_0 < x_1 < x_2$ , sono soluzione del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_2) \\ f'(x_1) \end{bmatrix}.$$

Tale sistema ha una e una sola soluzione se  $x_1 \neq \frac{x_0 + x_2}{2}$ . Se è  $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ , il sistema ha infinite soluzioni se  $f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ , non ne ha alcuna se  $f'(x_1) \neq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ . ■

Un caso particolarmente importante di polinomio osculatore è quello del polinomio di Hermite: dati  $n + 1$  nodi  $x_i, i = 0, \dots, n$ , il polinomio osculatore di Hermite è un polinomio  $p(x)$  di grado al più  $2n + 1$  tale che

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (16)$$

Analogamente al polinomio di Lagrange, il polinomio di Hermite può essere rappresentato nella forma

$$p(x) = \sum_{j=0}^n U_j(x)f(x_j) + \sum_{j=0}^n V_j(x)f'(x_j), \quad (17)$$

dove i polinomi  $U_j(x)$  e  $V_j(x)$  sono funzioni dei polinomi  $L_j(x)$  definiti in (4)

$$\begin{aligned} U_j(x) &= [1 - 2L'_j(x_j)(x - x_j)]L_j^2(x), \\ V_j(x) &= (x - x_j)L_j^2(x). \end{aligned}$$

Come si può facilmente verificare,

- a) i polinomi  $U_j(x)$  e  $V_j(x)$  hanno grado  $2n + 1$ ;
- b) valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} U_j(x_k) &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{se } k \neq j, \end{cases} \quad \text{OK} \\ V_j(x_k) &= 0 \quad \text{per ogni } k, \quad \text{OK} \\ U'_j(x_k) &= 0 \quad \text{per ogni } k, \quad \text{OK} \\ V'_j(x_k) &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{se } k \neq j. \end{cases} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Ne segue che il polinomio (17) ha grado minore od uguale a  $2n + 1$  e soddisfa le condizioni (16).

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{(x - x_j) \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

$$L'_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{[(x - x_j) \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)]^2}$$

## 5.12 Teorema. Siano

$$a = \min_{i=0, \dots, n} x_i, \quad b = \max_{i=0, \dots, n} x_i$$

e sia  $f(x) \in C^{2n+2}[a, b]$ . Allora esiste un punto  $\xi = \xi(x) \in [a, b]$  tale che il resto  $r(x)$  del polinomio di Hermite è dato da

$$r(x) = \pi_n^2(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!},$$

dove  $\pi_n(x)$  è il polinomio di grado  $n+1$  definito in (6).

**Dim.** La dimostrazione segue la traccia di quella del teorema 5.5. Per  $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , si considerano le funzioni

$$s(x) = \frac{r(x)}{\pi_n^2(x)}$$

e

$$z(y) = r(y) - s(x)\pi_n^2(y), \quad y \in [a, b].$$

La funzione  $z(y)$  si annulla nei punti  $x_i, i = 0, \dots, n$ , e nel punto  $x$ . Per il teorema di Rolle quindi  $z'(y)$  si annulla in  $n+1$  punti distinti, diversi dagli  $x_i$  e  $x$ . Però

$$z'(y) = r'(y) - 2s(x)\pi_n(y)\pi_n'(y),$$

e poiché

$$r'(x_i) = f'(x_i) - p'(x_i) = 0, \quad \text{per } i = 0, \dots, n,$$

$z'(y)$  si annulla anche nei punti  $x_i, i = 0, \dots, n$ . Complessivamente quindi  $z'(y)$  si annulla in  $2n+2$  punti distinti. La parte rimanente della dimostrazione è analoga a quella del teorema 5.5.

**5.13 Esempio.** Il polinomio  $p_3(x)$  di Hermite di grado al più 3 che nei punti  $x_0$  e  $x_1$ , con  $x_0 < x_1$ , soddisfa alle condizioni

$$\begin{aligned} p_3(x_0) &= f(x_0), & p_3(x_1) &= f(x_1), \\ p_3'(x_0) &= f'(x_0), & p_3'(x_1) &= f'(x_1), \end{aligned}$$

per la (17) è dato da

$$p_3(x) = U_0(x)f(x_0) + U_1(x)f(x_1) + V_0(x)f'(x_0) + V_1(x)f'(x_1),$$

dove, posto  $h = x_1 - x_0$ , è

$$U_0(x) = \frac{1}{h^2} \left(1 + 2 \frac{x-x_0}{h}\right) (x-x_1)^2,$$

$$U_1(x) = \frac{1}{h^2} \left(1 - 2 \frac{x-x_1}{h}\right) (x-x_0)^2,$$

$$V_0(x) = \frac{1}{h^2} (x-x_0)(x-x_1)^2,$$

$$V_1(x) = \frac{1}{h^2} (x-x_1)(x-x_0)^2.$$

Il resto per il teorema 5.12 è dato da

$$r(x) = \frac{1}{4!} (x-x_0)^2(x-x_1)^2 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Per il caso particolare della funzione  $f(x) = \sqrt{x}$ , si considera il polinomio di Hermite che nei punti  $x_0 = 0.49$  e  $x_1 = 0.64$  soddisfa alle condizioni

$$p_3(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7, \quad p_3(0.64) = \sqrt{0.64} = 0.8,$$

$$p_3'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{1.4}, \quad p_3'(0.64) = \frac{1}{2\sqrt{0.64}} = \frac{1}{1.6}.$$

Tale polinomio è dato da

$$p_3(x) = \frac{1}{0.0225} \left[ 0.7 \left(1 + 2 \frac{x-0.49}{0.15}\right) (x-0.64)^2 \right.$$

$$\left. + 0.8 \left(1 - 2 \frac{x-0.64}{0.15}\right) (x-0.49)^2 \right.$$

$$\left. + (x-0.49)(x-0.64) \left( \frac{x-0.64}{1.4} + \frac{x-0.49}{1.6} \right) \right]$$

$$= 0.2645503x^3 - 0.7460317x^2 + 1.254841x + 0.2331259.$$

Nel punto  $x = 0.6$  si ottiene il valore  $p_3(0.6) = 0.774602$ . Per  $x \in [0.49, 0.64]$  il resto è dato da

$$r(x) = -(x-0.49)^2(x-0.64)^2 \frac{15}{4! 16 \sqrt{\xi^7}},$$

in cui  $\xi \in (0.49, 0.64)$ . Si ha perciò

$$|r(0.6)| < 0.918 \cdot 10^{-5}.$$

per cui  $p_2(0.6) = 0.7744118$ . Per  $x \in [0.49, 0.81]$  il resto dell'interpolazione è dato da

$$r(x) = \frac{(x - 0.49)(x - 0.64)(x - 0.81)}{16\sqrt{\xi^5}}, \quad \xi \in (0.49, 0.81).$$

Si ha perciò

$$|r(0.6)| < \frac{0.93 \cdot 10^{-3}}{16\sqrt{0.49^5}} \approx 0.346 \cdot 10^{-3}.$$

In realtà risulta

$$\max_{x \in [0.49, 0.81]} |\sqrt{x} - p_2(x)| \approx 0.264 \cdot 10^{-3}$$

e

$$|\sqrt{0.6} - p_2(0.6)| \approx 0.185 \cdot 10^{-3},$$

per cui le 3 cifre più significative di  $p_2(0.6)$  sono esatte. Nella figura 5.2 è riportato il grafico della maggiorazione di  $|r(x)|$  ottenuta sostituendo 0.49 al posto di  $\xi$ .

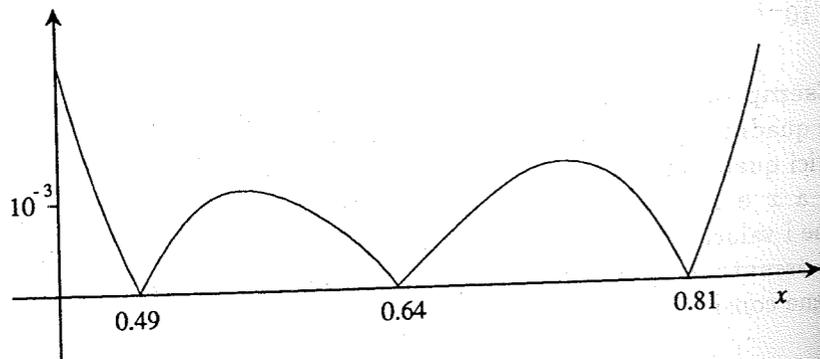


Fig. 5.2 - Maggiorazione di  $|r(x)|$  per la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Un risultato più preciso si ottiene aumentando di uno il grado del polinomio di interpolazione. Assumendo come nodi i 4 punti

$$x_0 = 0.36, \quad x_1 = 0.49, \quad x_2 = 0.64, \quad x_3 = 0.81,$$

si ottiene

$$p_3(x) = 0.2693385x^3 - 0.7676147x^2 + 1.274618x + 0.2280543,$$

per cui  $p_3(0.6) = 0.7746606$ . In questo caso risulta

$$\max_{x \in [0.36, 0.81]} |\sqrt{x} - p_3(x)| \approx 0.165 \cdot 10^{-3}$$

e

$$|\sqrt{0.6} - p_3(0.6)| \approx 0.639 \cdot 10^{-4}.$$

Nel caso di punti equidistanti il resto del polinomio di interpolazione assume una forma più semplice.

**5.8 Teorema.** Siano  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e sia  $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ . Allora esiste un punto  $\xi = \xi(x) \in (a, b)$  tale che

$$r(x_0 + th) = \tau_n(t) h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad t \in [0, n]$$

dove  $\tau_n(t)$  è il polinomio in  $t$  di grado  $n+1$  definito in (10).

$x = x_0 + th$   
 $x \in [x_0, x_n]$

Dim. La dimostrazione segue subito dal teorema 5.5 e dalla (9).

Le espressioni del resto del polinomio di interpolazione date nei teoremi 5.5 e 5.8 permettono di valutare di quanto il polinomio di interpolazione differisce dalla funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$ . Posto

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

si ha

$$r_{\max} = \max_{x \in [a, b]} |r(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |\pi_n(x)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}. \quad (14)$$

Se i punti  $x_i$  sono equidistanti, si ha

$$|r(x_0 + th)| \leq |\tau_n(t)| h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

e quindi

$$r_{\max} \leq \max_{t \in [0, n]} |\tau_n(t)| h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nel caso di punti equidistanti si può avere una valutazione del comportamento di  $r(x_0 + th)$  al variare di  $t$  nell'intervallo  $[0, n]$ , studiando il comportamento del polinomio  $\tau_n(t)$ . Tale polinomio gode delle seguenti proprietà:

a)  $\tau_n(t)$  ha come zeri gli  $n+1$  punti  $0, \dots, n$ ;

Bellu

b) il punto  $\frac{n}{2}$  è punto di simmetria per  $|\tau_n(t)|$ . Infatti

$$|\tau_n(\frac{n}{2} + t)| = |\prod_{i=0}^n (\frac{n}{2} + t - i)| = |\prod_{i=0}^n (i - t - \frac{n}{2})|,$$

e con il cambiamento di variabile  $j = n - i$ , risulta

$$|\tau_n(\frac{n}{2} + t)| = |\prod_{j=0}^n (\frac{n}{2} - t - j)| = |\tau_n(\frac{n}{2} - t)|.$$

c) per  $t$  non intero,  $t \leq \frac{n}{2}$ , è  $|\tau_n(t-1)| > |\tau_n(t)|$ . Infatti

$$|\tau_n(t-1)| = |\prod_{i=0}^n (t-1-i)| = |\prod_{j=1}^{n+1} (t-j)| = |\tau_n(t)| \left| \frac{t-n-1}{t} \right|;$$

ed essendo  $t \leq \frac{n}{2}$ , risulta  $|t-n-1| = |n+1-t| > \frac{n}{2}$ , e quindi

$$\left| \frac{t-n-1}{t} \right| > 1,$$

da cui la tesi.

d) per la simmetria di  $|\tau_n(t)|$  rispetto al punto  $\frac{n}{2}$  e per la c), si ha che per  $t$  non intero,  $t \geq \frac{n}{2}$ , risulta  $|\tau_n(t)| < |\tau_n(t+1)|$ .

Dalle due proprietà c) e d) segue che i massimi relativi di  $|\tau_n(t)|$  in ogni intervallo  $(i, i+1)$ , crescono quando ci si allontana dal centro dell'intervallo  $[0, n]$  verso gli estremi. Nelle figure 5.3 e 5.4 sono riportati i grafici di  $\tau_n(t)$  per  $n = 7$  e per  $n = 10$ .

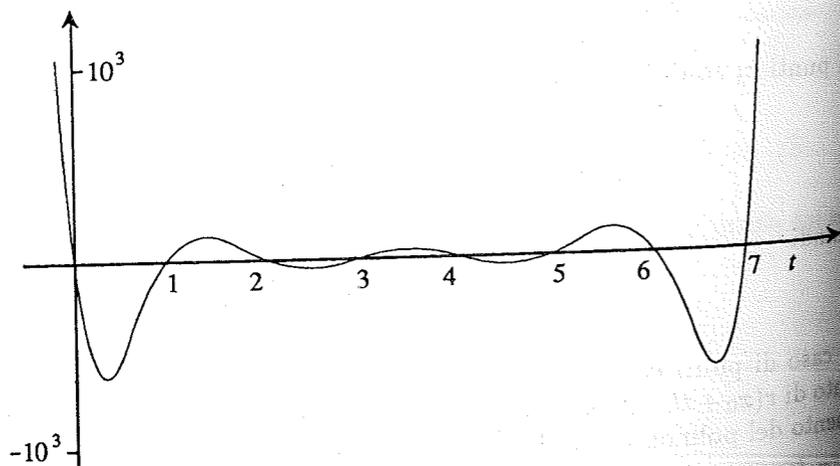


Fig. 5.3 - Grafico di  $\tau_7(t)$ .

Dallo studio del comportamento di  $\tau_n(t)$  si può dedurre che se  $f^{(n+1)}(x)$  non varia molto nell'intervallo  $[x_0, x_n]$ , il resto risulta minore nella parte centrale dell'intervallo.

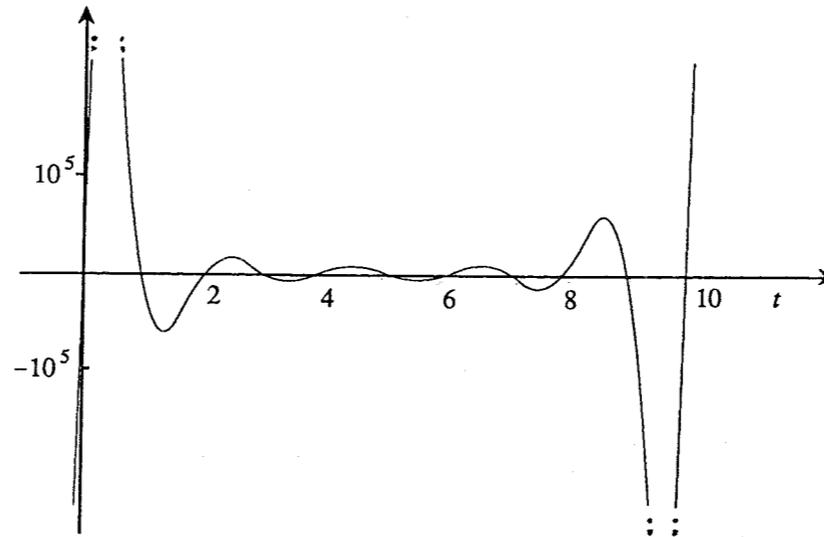


Fig. 5.4 - Grafico di  $\tau_{10}(t)$ .

Un'altra proprietà rilevante dei polinomi  $\tau_n(t)$  è quella della rapida crescita, al crescere di  $n$ , del massimo di  $|\tau_n(t)|$  in  $[0, n]$ , che viene assunto nel primo e nell'ultimo sottointervallo. Si ha

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, n]} |\tau_n(t)| &= \max_{t \in [0, 1]} |\tau_n(t)| \geq |\tau_n(\frac{1}{2})| = \left| \prod_{j=0}^n (\frac{1}{2} - j) \right| \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] = \frac{(2n-1)!}{2^{n+1} [2 \cdot 4 \cdots (2n-2)]} \\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{2n} (n-1)!}. \end{aligned}$$

È opportuno rilevare che, anche se la funzione  $f(x) \in C^\infty[a, b]$ , la successione  $\{p_n(x)\}$  dei valori assunti dal polinomio di interpolazione di grado  $n$  in un punto  $x \in [a, b]$  può non convergere a  $f(x)$ , per  $n$  che tende all'infinito.

**5.9 Esempio.** Per il polinomio di interpolazione in  $n$  punti equidistanti della funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

definita sull'intervallo  $[a, b] = [-5, 5]$ , si può dimostrare [13] che al crescere di  $n$  la successione dei polinomi di interpolazione sui nodi  $x_i = a + i(b-a)/n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , non converge puntualmente a  $f(x)$  e che i corrispondenti resti diventano in modulo arbitrariamente grandi in punti dell'intervallo  $[-5, 5]$ . Le figure 5.5 e 5.6 illustrano l'andamento del polinomio di interpolazione  $p_n(x)$  (tabulato in punti equidistanti, linea più sottile) nei due casi  $n = 9$  e  $n = 15$ , rispetto alla funzione  $f(x)$  (linea spessa).

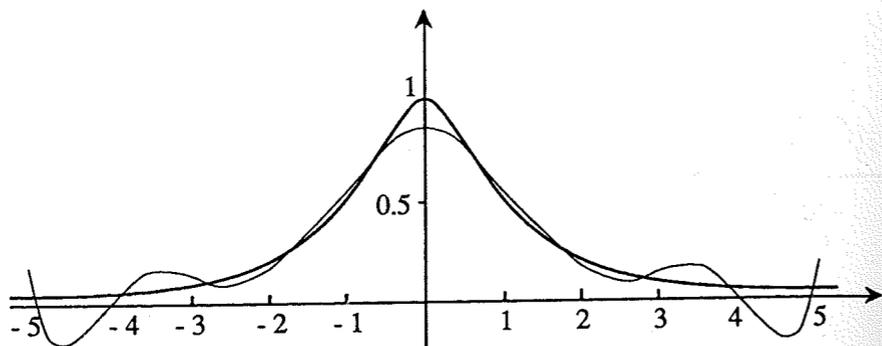


Fig. 5.5 - Polinomio di interpolazione di grado 9 della funzione di Runge.

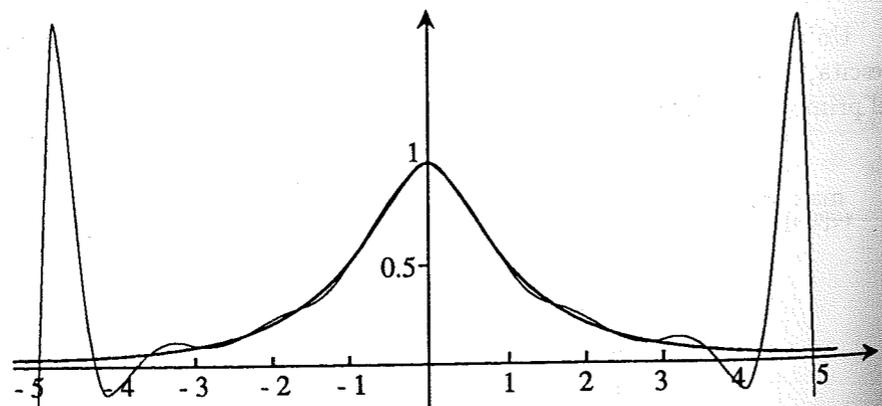
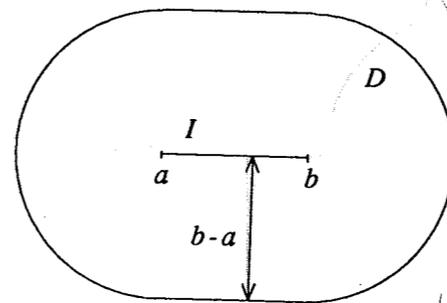


Fig. 5.6 - Polinomio di interpolazione di grado 15 della funzione di Runge.

Perché la successione  $\{p_n(x)\}$  converga uniformemente ad  $f(x)$  per  $x \in [a, b]$ , è sufficiente che la funzione  $f(x)$  sia analitica in una regione del piano complesso contenente  $[a, b]$  e abbastanza ampia. Ad esempio, è possibile dimostrare [7] che se i nodi dell'interpolazione appartengono all'intervallo  $I = [a, b]$ , allora la successione  $\{p_n(x)\}$  converge uniformemente ad  $f(x)$  in tutto  $I$  se  $f(x)$  è analitica nella regione del piano complesso

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - x| \leq b - a, \text{ per ogni } x \in I\}.$$

L'insieme  $D$  è illustrato nella figura 5.7.



*regione in cui f deve essere analitica*  
*rispetto all'intervallo*

Fig. 5.7 - Regione  $D$  del piano complesso.

La condizione precedente è una condizione sufficiente, e quindi non si può dedurre che la successione  $\{p_n(x)\}$  sia divergente se la funzione  $f(x)$  ha un polo in  $D$ . Però se il polo è molto vicino ad  $I$ , accade spesso che la successione non sia convergente in qualche punto di  $I$ . Nel caso della funzione di Runge, per la presenza dei due punti singolari  $\pm i$  non si ha convergenza della successione dei polinomi di interpolazione per  $|x| > 3.63\dots$

Il risultato precedente non fa riferimento alla particolare distribuzione dei nodi nell'intervallo  $[a, b]$ . Esistono dei risultati più raffinati validi quando come nodi si scelgono i *punti di Chebyshev*

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

In tal caso, se la funzione  $f(z)$  nel campo complesso ha un numero finito di poli, esterni all'intervallo  $[a, b]$ , e soddisfa alla condizione

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} = 0 \quad \text{per qualche } k$$

(tutte le funzioni razionali il cui denominatore non si annulla in  $[a, b]$  verificano queste condizioni), allora la successione dei polinomi  $\{p_n(x)\}$  converge uniformemente ad  $f(x)$  in  $[a, b]$ . Infatti nel caso della funzione di Runge dell'esempio 5.9, la successione  $\{p_n(x)\}$  che si ottiene scegliendo come nodi i punti di Chebyshev converge uniformemente nell'intervallo  $[-5, 5]$  (si veda l'esempio 6.44).

La scelta dei punti di Chebyshev come nodi dell'interpolazione è quella che minimizza la quantità  $\pi_n(x)$  (si veda il teorema 6.19) e quindi in generale, se la  $f^{(n+1)}(x)$  non varia molto in  $[a, b]$ , dà un resto minore rispetto alla scelta dei nodi equidistanti.