Capitolo 7

Integrazione numerica

7.1. Generalità sulle formule di quadratura

La valutazione numerica di integrali definiti

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{7.1.1}$$

può essere attuata, in numerosi casi, attraverso procedimenti analitici; ad esempio, nel caso che f sia continua in $[a, b]$, si può scrivere

$$I(f) = F(b) - F(a) \tag{7.1.2}$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

È ben noto, però, che non sempre F è esprimibile in una forma chiusa mediante funzioni elementari, basti pensare alle funzioni: $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$, $f(x) = (\sin x)/x$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, solo per citarne alcune.

Tuttavia, anche nel caso sia nota l'espressione analitica di F, il calcolo di (7.1.2) può risultare complesso; pertanto è importante disporre, per il calcolo approssimato di (7.1.1), di tecniche numeriche basate sull'utilizzo dei soli valori numerici assunti dalla funzione integranda in un certo insieme di nodi $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, distinti e situati, generalmente, in $[a, b]$.

Si dice *formula di quadratura*, o di *integrazione numerica*, una formula del tipo

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R_n(f) \tag{7.1.3}$$

nella quale i numeri reali $\{x_i\}$, $\{c_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, sono detti rispettivamente *nodi* e *pesi* o *coefficienti* della formula stessa.

Con una formula di quadratura è dunque possibile dare una valutazione anche di integrali di funzioni, che siano note solo in un insieme di punti, come avviene quando si ha a che fare con dati rilevati sperimentalmente; inoltre, come si vedrà in seguito, si potranno considerare anche funzioni con singolarità in $[a, b]$, o funzioni definite su intervalli illimitati.

La quantità

$$S_n^\star(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \tag{7.1.4}$$

viene anche detta *somma o parte approssimante* della formula di quadratura (7.1.3); tipici esempi di tali somme sono le somme integrali, che si introducono nella definizione di integrale definito (secondo Riemann) di funzioni continue.

La quantità

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = I(f) - S_n^\star(f) \tag{7.1.5}$$

viene detta *resto o errore di troncamento* della formula di quadratura.

Nelle applicazioni pratiche, la valutazione di $S_n^\star(f)$ spesso non è realizzata esattamente con i valori $\{f(x_i)\}$, ma piuttosto con loro approssimazioni $\{f_i\}$, come già è stato fatto osservare nel paragrafo 6.3 a proposito dell'interpolazione. Pertanto, in generale, una formula di quadratura avrà come parte approssimante il valore

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i$$

dove

$$f(x_i) - f_i = \varepsilon_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n\,;$$

e le formule di quadratura realmente costruite avranno la forma

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i(f_i + \varepsilon_i) + R_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i + \sum_{i=0}^{n} c_i \varepsilon_i + R_n(f) \tag{7.1.6}$$

ossia

$$\int_a^b f(x)dx = S_n(f) + R^\star(f) + R_n(f)\,, \tag{7.1.7}$$

avendo posto

$$R^\star(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varepsilon_i = \sum_{i=0}^{n} c_i (f(x_i) - f_i)\,. \tag{7.1.8}$$

Non si è tenuto conto, in questa analisi, degli errori aritmetici dovuti all'esecuzione dei calcoli; la quantità $R^\star(f)$ è l'*errore di propagazione* dell'errore sui *dati*.

A proposito di questo tipo di errore, va osservato che, in generale, $R^\star(f)$ aumenta all'aumentare del numero $n+1$ di informazioni; e che la presenza di coefficienti positivi e negativi può amplificare il contributo globale degli errori sui dati, che sono a loro volta positivi e negativi; ciò significa che una formula di quadratura a *coefficienti di segno variabile* può diventare *numericamente instabile*, e che è pertanto preferibile, nella pratica, ove possibile, l'uso di formule di quadratura con pesi di segno positivo.

Nel seguito, verranno prese in considerazione *formule di quadratura interpolatorie*, ossia basate sulla sostituzione della funzione integranda f con il suo polinomio interpolatore, su un insieme opportuno di nodi $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

I criteri di scelta dei nodi delle formule che verranno esaminate sono i seguenti:

1) nodi equispaziati in $[a, b]$; in questo caso si hanno le *formule di Newton-Cotes*;
2) nodi situati in punti opportuni di $[a, b]$, (in generale negli zeri di certi polinomi), in modo tale da ottenere la precisione massima; in questo caso si hanno le *formule gaussiane.*

Indipendentemente dalla scelta dei nodi, le formule di quadratura interpolatorie si costruiscono come segue.

Data una funzione $f \in C[a, b]$, si consideri la formula di interpolazione di Lagrange (6.2.8); ammesso che sia $f(x_i) = f_i$ (ovvero i dati non siano affetti da errore), si integri su $[a, b]$; si otterrà allora

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx$$

ovvero

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R_n(f)\,, \tag{7.1.9}$$

e dunque si otterrà una formula di quadratura avente coefficienti e resto dati da

$$c_i = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}dx \tag{7.1.10}$$

$$R_n(f) = \int_a^b E_n(x)dx\,. \tag{7.1.11}$$

Tenuto conto della (6.2.8), i coefficienti possono anche essere posti nella forma

$$c_i = \frac{l}{\pi_n'(x_i)} \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{x-x_i}dx\,, \tag{7.1.12}$$

dove, come al solito, π_n indica il polinomio nodale.

7.2. Grado di precisione

Di una qualsiasi formula di quadratura (7.1.3) a $n+1$ nodi, si dice che ha *grado di precisione* ν se risulta

$$\begin{cases} R_n(f) = 0 & \text{per} \quad f(x) = x^k \quad , \quad k = 0, 1, \dots, \nu\,, \\ R_n(f) \neq 0 & \text{per} \quad f(x) = x^{\nu+1}\,; \end{cases} \tag{7.2.1}$$

In altre parole, il grado di precisione denota l'ordine massimo dei monomi per i quali la formula di quadratura è *esatta*, ossia ha resto nullo. Data la linearità dell'operatore integrale, dire che una formula ha grado di *precisione* ν, significa che essa *è esatta per ogni polinomio di grado* $\leq \nu$, ossia per $f \in \mathbb{P}_\nu$, mentre *esiste almeno un polinomio di grado* $\nu+1$, *per cui la formula non è esatta.*

Grado di precisione dipende dal numero dei nodi e dalla distribuzione dei nodi

Come vedremo, il grado di precisione dipende, oltre che dal numero, anche dalla distribuzione dei nodi; in ogni caso, per una qualsiasi formula di quadratura, ν non può superare $2n+1$; infatti, qualunque sia la distribuzione dei nodi, si consideri la funzione data dal seguente polinomio di grado $2n+2$

$$\Pi(x) = [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)]^2\,;$$

risulta evidentemente $\Pi(x_i) = 0$; $i = 0, 1, \dots, n$; posto allora $f = \Pi$ nella (7.1.3), si ottiene

$$\int_a^b \Pi(x)dx = R_n(\Pi)\,, \qquad \sum c_i f(x_i) = 0$$

ma la funzione Π, essendo non identicamente nulla e a segno non negativo in $[a,b]$, ha integrale positivo, pertanto risulta

$$R_n(\Pi) > 0\,,$$

e ciò dimostra l'esistenza di almeno un polinomio di grado $2n+2$, per cui la (7.1.3) non è esatta.

Per le formule di quadratura interpolatorie è possibile fornire espressioni dell'errore di troncamento $R_n(f)$ in base al teorema seguente

TEOREMA 7.2.1. *Nelle formule di quadratura interpolatorie si ha*

$$R_n(f) = \int_a^b \pi_n(x) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]dx\,, \tag{7.2.2}$$

inoltre, se f *è dotata di derivata* $n+1$*-sima in* $[a,b]$*, si ha*

$$R_n(f) = \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))dx\,. \tag{7.2.3}$$

Dimostrazione – La (7.2.2) segue subito dalla (6.5.1).

La (7.2.3) segue dalla (6.3.8), che può essere integrata dalle considerazioni seguenti: benchè $\xi(x)$ (come osservato nel paragrafo 6.3) possa essere una funzione di x, a più valori, la funzione $f^{(n+1)}(\xi(x))$ è una funzione di x a 1 solo valore, come segue dalla (6.3.8); infatti si ha

$$f^{(n+1)}(\xi(x)) = (n+1)!\frac{f(x)-p_n(x)}{\pi_n(x)}$$

e tutte le funzioni a secondo membro sono a 1 sol valore e continue; anche $f^{(n+1)}(\xi(x))$ risulta poi continua in A, in quanto i nodi $\{x_i\}$ sono singolarità eliminabili, come si vede facilmente applicando il teorema sulle forme indeterminate. ■

Dalla (7.2.3) applicata al caso che f sia $\in \mathbb{P}_n$, e quindi risulti $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$, segue che il *grado di precisione* ν *delle formule interpolatorie* verifica la limitazione

$$\nu \geq n$$

e tenendo anche conto di quanto osservato all'inizio del paragrafo, si può concludere che per le *formule interpolatorie* risulta

$$n \leq \nu \leq 2n+1. \tag{7.2.4}$$

Infine osserviamo che, essendo $n \geq 0$, risulta anche $\nu \geq 0$, cioè le formule interpolatorie sono esatte almeno per le funzioni costanti; se dunque nella (7.1.9) si pone $f(x) = 1$, si ottiene

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = b - a\,. \tag{7.2.5}$$

7.3. Formule di Newton-Cotes

Le *formule di Newton-Cotes* sono formule di quadratura *interpolatorie a nodi equispaziati*; dato n si introduce dunque il passo h:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

e i nodi della formula di quadratura sono

$$x_i = a + ih \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n\,; \tag{7.3.1}$$

la struttura della formula è formalmente data dalla (7.1.9), ovvero da

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R_n(f)\,, \tag{7.3.2}$$

con i coefficienti ricavabili dalla (7.1.10). Assumeremo che i dati *non* siano affetti da errori, ossia che risulti: $f(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, e scriveremo brevemente le formule di Newton-Cotes nella forma generale

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i + R_n(f)\,,$$

che sarà poi specializzata, per alcuni valori di n, dando luogo alle formule del trapezio, di Cavalieri-Simpson, e così via.

Le formule di Newton-Cotes possono essere *chiuse o aperte*, a seconda che tra i nodi dell'interpolazione siano compresi o meno gli estremi.

Una caratteristica importante delle formule di Newton-Cotes, è che la relazione (7.2.4) può essere precisata meglio, in base ai seguenti risultati sulla cui dimostrazione non ci soffermiamo.

Per l'errore di troncamento valgono le seguenti rappresentazioni, dove ξ_1, ξ_2 sono punti opportuni di (a,b) e si suppone la continuità di $f^{(n+1)}$ oppure $f^{(n+2)}$ a seconda che sia $n+1$ pari o dispari

$$\begin{cases} R_n(f) = \gamma_n h^{n+2}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} & \text{se } n+1 \text{ è pari} \\ \gamma_n = \displaystyle\int_0^n t(t-1)\ldots(t-n)dt \end{cases} \tag{7.3.3}$$

$$\begin{cases} R_n(f) = \gamma_n^* h^{n+3}\dfrac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} & \text{se } n+1 \text{ è dispari} \\ \gamma_n^* = \displaystyle\int_0^n t^2(t-1)\ldots(t-n)dt\,. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

e quindi, per il grado di precisione delle formule di Newton-Cotes si ha

$$\begin{cases} \nu = n, & n+1 \text{ pari} \\ \nu = n+1, & n+1 \text{ dispari} \end{cases} \tag{7.3.5}$$

Sottolineiamo che le formule con un numero dispari di nodi sono più precise.

Le precedenti espressioni possono essere unificate nella forma seguente, con chiaro significato dei simboli

$$R_n(f) = k_n h^{\nu+2} f^{(\nu+1)}(\xi)\,; \tag{7.3.6}$$

si noti che in questa espressione k_n, in base alle (7.3.3), (7.3.4), dipende solo da n e non dall'intervallo $[a,b]$.

È opportuno notare che la funzione f può non soddisfare le ipotesi necessarie per scrivere la (7.3.6); ciò non significa che il grado di precisione diminuisca, o che, delle varie formule, non si possa scrivere la parte approssimante: significa che occorre usare altre espressioni per $R_n(f)$, principalmente la (7.2.2).

Dettagli su questa e altre questioni si possono trovare in testi specializzati sulle formule di quadratura.

Per ciò che riguarda i coefficienti delle formule di Newton-Cotes, si può dimostrare che essi, per $n \leq 7$, sono tutti positivi, mentre per $n > 7$ hanno segni sia positivi che negativi, e quindi possono produrre amplificazione degli errori sui dati in $R^*(f)$, come osservato nel paragrafo 7.1.

Riportiamo le prime 7 formule chiuse con i rispettivi errori, ottenute da (7.1.10) tenendo conto della (7.3.1) per ciò che riguarda i coefficienti, e delle (7.3.3), (7.3.4) per ciò che riguarda la valutazione del resto nell'ipotesi di continuità delle derivate interessate.

In ciascuna formula, $h = \dfrac{b-a}{n}$

Formula del trapezio; $n+1 = 2$, $\nu = 1$, $f \in C^2[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)\,.$$

Formula di Cavalieri-Simpson; $n+1 = 3$, $\nu = 3$, $f \in C^4[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)\,.$$

Formula dei 3/8; $n+1 = 4$, $\nu = 3$, $f \in C^4[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi)\,.$$

Formula di Milne-Boole; $n+1 = 5$, $\nu = 5$, $f \in C^6[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi)\,.$$

Formula a sei nodi; $n+1 = 6$, $\nu = 5$, $f \in C^6[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{5h}{288}(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5) + - \frac{275h^7}{12096} f^{VI}(\xi)$$

Formula di Weddle; $n+1 = 7$, $\nu = 7$, $f \in C^8[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6) + - \frac{9h^9}{1400} f^{VIII}(\xi)$$

Formula a otto nodi; $n+1 = 8$, $\nu = 7$, $f \in C^8[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{7h}{17280}(751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + 1323f_5 + + 3577f_6 + 751f_7) - \frac{8183}{518400} h^9 f^{VIII}(x)\,.$$

Esempio 7.3.2

Calcolare $\log 2$, mediante la formula di Weddle.

Il valore richiesto si ottiene dalla formula a 7 nodi, che dà

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \log 2 \simeq S_6\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0.6933\,,$$

una "buona" approssimazione del valore richiesto è data da: 0.69315; va poi notato che se si usa la serie di Mac-Laurin di $\log(1+x)$, con $x = 1$ occorrono 22 termini per ottenere l'approssimazione più scadente $\log 2 \simeq 0.671$.

L'interpretazione geometrica delle formule date è molto semplice ed è legata alla costruzione del polinomio interpolatore; ad esempio se $n+1 = 2$, si costruisce il polinomio interpolatore di grado 1 per i dati

$$(x_0, f_0) \quad , \quad (x_1, f_1)$$

ossia si traccia la retta P_0P_1 e si assume come integrale della funzione l'area del trapezio ABP_1P_0 (cfr. fig. 1)

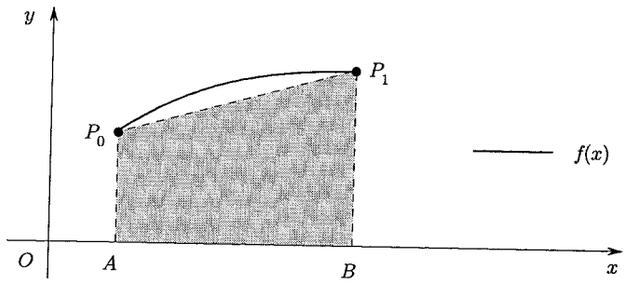


Fig. 1. Approssimazione con la formula del trapezio.

è anche evidente che, se f è convessa (concava), l'approssimazione è per eccesso (difetto), come risulta anche dal segno dell'errore, infatti

$$f''(x) \gtrless 0 \quad , \quad x \in [a,b] \implies R_1(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi) \lessgtr 0\,.$$

Per $n+1 = 3$, si costruisce il polinomio interpolatore di 2° grado, per i dati, ovvero si traccia un arco di parabola $P_0P_1P_2$ e si approssima l'integrale della funzione con l'area delimitata dalla parabola come illustrato in figura 2

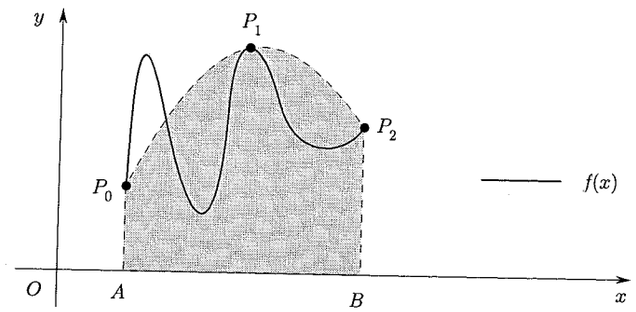


Fig. 2. Approssimazione con la formula di Cavalieri-Simpson.

È evidente che, a seconda del tipo di f, gli errori possono essere anche consistenti.

Insistiamo ancora sul concetto di grado di precisione; dire che una certa formula ha il grado di precisione ν significa che, se applicata ad un generico polinomio di grado $\leq \nu$, tale formula fornisce risultato esatto, ma l'utilizzo di due formule, l'una più precisa (di grado di precisione più elevato) dell'altra non comporta che, per qualsiasi funzione, la prima fornisca un risultato migliore della seconda.

Esempio 7.3.1

Sia $f(x) = 25x^4 - 45x^2 + 8$, $x \in [0,1]$.

Risulta esattamente $I(f) = -2$; la formula del trapezio fornisce (cfr. (7.1.4))

$$S_1^\star(f) = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = -2$$

mentre la formula di Cavalieri-Simpson dà

$$S_2^\star(f) = \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)] = -1.791\bar{6}\,,$$

e ciò benché il grado di precisione della seconda formula sia più elevato che non quello della prima.

Le formule di Newton-Cotes aperte si ottengono utilizzando, nella costruzione dei polinomi interpolatori, solo i nodi $x_1, \ldots, x_{n-1}$, dei (7.3.1): questo ha come conseguenza che anche il grado di precisione diminuirà di due unità, e le (7.3.5) andranno sostituite con

$$\begin{cases} \nu = n-2\,, & n+1 \text{ pari} \\ \nu = n-1\,, & n+1 \text{ dispari}\,. \end{cases}$$

Le formule aperte hanno minore precisione rispetto alle chiuse, a parità di passo, ma, usando meno nodi, introducono meno errori sulle ordinate. Riportiamo le prime quattro formule con relativi errori di troncamento, sempre nell'ipotesi di continuità delle derivate interessate.

In ciascuna formula, $h = \dfrac{b-a}{n}$

Formula del punto centrale; $n-1=1$, $\nu=1$, $f \in C^2[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf_1 + \frac{h^3}{3}f''(\xi)\,.$$

Formula aperta a 2 nodi; $n-1=2$, $\nu=1$, $f \in C^2[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{2}(f_1+f_2) + \frac{3h^3}{4}f''(\xi)\,.$$

Formula aperta a 3 nodi; $n-1=3$, $\nu=3$, $f \in C^4[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{14h^5}{45}f^{IV}(\xi)\,.$$

Formula aperta a 4 nodi; $n-1=4$, $\nu=3$, $f \in C^4[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{5h}{24}(11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4) + \frac{95h^5}{144}f^{IV}(\xi)\,.$$

Va notato che, se f è convessa, la formula del trapezio, e la prima delle formule aperte, forniscono approssimazioni per eccesso e per difetto rispettivamente; lo stesso può dirsi a proposito della formula di Cavalieri-Simpson e della terza delle formule aperte; l'uso combinato di queste coppie di formule può fornire, dunque, limitazioni inferiori e superiori di integrali definiti di funzioni a derivata, seconda o quarta, di segno costante.

7.4. Le formule di Newton-Cotes generalizzate

Le formule di Newton-Cotes presentano, per $n > 7$, coefficienti sia positivi che negativi, e, nell'uso di formule con molti nodi, questa situazione può portare instabilità numerica, in quanto può produrre amplificazione degli errori sui dati e quindi in $R^*(f)$ (cfr. (7.1.8)). Per evitare allora l'uso di formule di Newton-Cotes con numero elevato di dati, senza però perdere il vantaggio di poter disporre di molte informazioni, si procede mediante l'uso di *formule di Newton-Cotes generalizzate*, basate sull'applicazione ripetuta della medesima formula di Newton-Cotes, con pochi nodi, riferita ai sottointervalli di una decomposizione di $[a,b]$. Per essere più precisi, si procede preliminarmente con una decomposizione di $[a,b]$ in m parti uguali, inserendo i nodi

$$X_j = a + j\frac{b-a}{m} \quad , \quad j = 0,1,\dots,m\,,$$

e si considera

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{X_j}^{X_{j+1}} f(x)dx = \sum_{j=0}^{m-1} I_j(f)\,.$$

Ad ognuno dei sottointervalli $[X_j, X_{j+1}]$ si applica la stessa formula di quadratura a $n+1$ nodi, e quindi con passo

$$h = \frac{b-a}{mn}\,, \tag{7.4.1}$$

e con nodi

$$x_r = a + rh\,, \quad r = 0,1,\dots,N;\ \text{con } N = mn\,,$$

per cui risulta: $[X_j, X_{j+1}] = [x_{jn}, x_{(j+1)n}]$, ottenendo così una formula *elementare*

$$I_j(f) = \int_{X_j}^{X_{j+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_k f_{jn+k} + R_{jn}(f)\,, \tag{7.4.2}$$

ammesso di operare con dati esatti $f_r = f(x_r)$, $r = 0,1,\dots,N$. Sommando le (7.4.2) al variare di j, si ottiene allora la *formula di quadratura di Newton-*

Cotes generalizzata

$$I(f) = \sum_{j=0}^{m-1} I_j(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} c_k f_{jn+k} + \sum_{j=0}^{m-1} R_{jn}(f)\,. \tag{7.4.3}$$

Si noti che, in ciascun sottointervallo, variano ovviamente i nodi, mentre i coefficienti sono invariati; osserviamo poi che, nell'ipotesi che sia $f \in C^{\nu+1}[a,b]$, in base alla (7.3.6), l'errore di troncamento in (7.4.2) può essere posto nella forma

$$R_{jn}(f) = k_n h^{\nu+2} f^{(\nu+1)}(\xi_j)$$

dalla quale risulta evidente che la dipendenza di $R_{jn}(f)$, dall'indice j del sottointervallo, si attua solo attraverso il punto ξ_j, in quanto k_n è una costante caratteristica della formula a $n+1$ nodi usata, e *non* dipende dall'intervallo cui tale formula è applicata; ad esempio, nella formula del trapezio, si ha $k_1 = -1/12$, nella formula di Cavalieri-Simpson si ha $k_2 = -1/90$.

L'errore di troncamento nella formula generalizzata è dato quindi da

$$R_N(f) = \sum_{j=0}^{m-1} R_{jn}(f) = k_n h^{\nu+2} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(\nu+1)}(\xi_j)\,. \tag{7.4.4}$$

La continuità di $f^{(\nu+1)}$ implica che si possa scrivere, indicando con Λ e λ, rispettivamente, il massimo e il minimo di $f^{(\nu+1)}$ in $[a,b]$:

$$m\lambda \le \sum_{j=0}^{m-1} f^{(\nu+1)}(\xi_j) \le m\Lambda$$

e quindi, indicando con τ un opportuno punto di (a,b), applicando un noto risultato di Analisi, giungere alla

$$\sum_{j=0}^{m-1} f^{(\nu+1)}(\xi_j) = m f^{(\nu+1)}(\tau)\,.$$

Tenendo conto del valore (7.4.1) di h, si ricava poi dalla (7.4.4):

$$R_N(f) = k_n h^{\nu+2} m f^{(\nu+1)}(\tau) = k_n \frac{(b-a)}{n} h^{\nu+1} f^{(\nu+1)}(\tau)\,. \tag{7.4.5}$$

Questa osservazione consente di scrivere infine, nell'ipotesi che sia $f \in C^{\nu+1}[a,b]$, la formula di quadratura generalizzata nella forma

$$I(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} c_k f_{jn+k} + k_n \frac{(b-a)}{n} h^{\nu+1} f^{(\nu+1)}(\tau)\,. \tag{7.4.6}$$

Per l'applicazione pratica delle formule generalizzate, è evidente, in base alle osservazioni fatte all'inizio del paragrafo, che, in generale, si farà uso di una formula elementare con pochi nodi, o comunque con $n \le 7$; anzi, tra le formule più usate vanno annoverate quelle con $n = 1$, oppure $n = 2$, che danno luogo alle formule generalizzate dette rispettivamente *dei trapezi* e *delle parabole*. Riportiamo qui di seguito quello che diventa l'espressione (7.4.6) in questi ultimi due casi.

Formula dei trapezi

$$I(f) = \frac{b-a}{2m}\left[f_0 + 2\sum_{j=1}^{m-1} f_j + f_m\right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\tau)\,.$$

Formula delle parabole

$$I(f) = \frac{b-a}{6m}\left[f_0 + 4\sum_{j=0}^{m-1} f_{2j+1} + 2\sum_{j=1}^{m-1} f_{2j} + f_{2m}\right] + - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{IV}(\tau)\,.$$

Una significativa conseguenza dell'espressione (7.4.5) dell'errore di troncamento, è che da essa segue subito il teorema seguente:

TEOREMA 7.4.1. *Se $f \in C^{\nu+1}[a,b]$, le formule di Newton-Cotes generalizzate convergono all'integrale $I(f)$, quando il numero dei nodi tende all'infinito.*

Dimostrazione – La tendenza all'infinito del numero N dei nodi si realizza al crescere di m, in quanto il valore n è fissato; dall'ipotesi segue che $f^{(\nu+1)}$ è limitata in $[a,b]$, indicando allora con M un numero tale che

$$|f^{(\nu+1)}(x)| \le M \quad , \quad x \in [a,b]$$

dalla (7.4.5) si deduce

$$0 \le |R_N(f)| \le k_n \frac{(b-a)^{\nu+2}}{n^{\nu+2}} \cdot \frac{1}{m^{\nu+1}} \cdot M$$

e quindi

$$0 \le \lim_{N\to\infty} |R_N(f)| \le k_n \frac{(b-a)^{\nu+2}}{n^{\nu+2}} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{\nu+1}} \cdot M = 0$$

e questo, attraverso la (7.4.6), implica la tesi. ■

L'importanza di questo risultato risiede nel fatto che, come si vedrà nel paragrafo 7.9, per le formule di Newton-Cotes elementari, non per ogni funzione, sussiste la convergenza delle parti approssimanti a $I(f)$, per $n \to \infty$.

Un'altra proprietà interessante delle formule generalizzate, che costituisce un ulteriore motivo che porta a preferirle, nelle applicazioni, alle formule elementari, è che il calcolo della derivata che compare nel termine d'errore, può essere evitato, sotto certe ipotesi, con una tecnica che va sotto il nome di *criterio di Runge*, che verrà ora illustrato solo per le formule dei trapezi e delle parabole, ma che può essere esteso facilmente ad altre scelte di n.

La condizione di applicabilità, in ogni caso, è che la derivata in questione vari poco nell'intervallo $[a, b]$.

Illustriamo il criterio, facendo riferimento prima al caso della formula dei trapezi; detti $S_h(f)$ e $R_h(f)$ la parte approssimante e l'errore di troncamento della formula dei trapezi, applicata con passo generico h, si può scrivere, usando successivamente i passi h e $h/2$:

$$I(f) = S_h(f) + R_h(f) = S_h(f) - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\tau)\,,$$

$$I(f) = S_{h/2}(f) + R_{h/2}(f) = S_{h/2}(f) - \frac{(b-a)}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\sigma)\,,$$

dove τ e σ sono opportuni punti di (a, b).

Ammesso che la derivata seconda di f vari poco in $[a, b]$, ovvero che risulti: $f''(\tau) \simeq f''(\sigma)$, si può scrivere

$$R_{h/2}(f) \simeq R_h(f)/4\,;$$

sottraendo le due formule precedenti, si ottiene

$$|R_{h/2}(f)| \simeq |S_h(f) - S_{h/2}(f)|/3$$

dunque l'errore di troncamento, per il passo $h/2$, può essere valutato, in modo approssimato, attraverso la sola *conoscenza delle parti approssimanti* ottenute con i passi h e $h/2$.

Inoltre, se il valore approssimato di $|R_{h/2}(f)|$ è confrontabile con una certa tolleranza prestabilita, il procedimento si può arrestare al passo $h/2$, altrimenti deve essere ripetuto.

Nel caso della formula delle parabole, basta ripetere il ragionamento con la sostituzione della derivata quarta al posto della seconda e con la modifica del fattore di riduzione; infatti, in questo caso, si ha:

$$I(f) = S_h(f) + R_h(f) = S_h(f) - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{IV}(\tau)\,,$$

$$I(f) = S_{h/2}(f) + R_{h/2}(f) = S_{h/2}(f) - \frac{(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{IV}(\sigma)\,,$$

e quindi, ammesso che la derivata quarta vari poco in $[a, b]$, risulta

$$R_{h/2}(f) \simeq R_h(f)/16\,;$$

sottraendo le due formule precedenti, si ottiene

$$|R_{h/2}(f)| \simeq |S_h(f) - S_{h/2}(f)|/15\,; \tag{7.4.7}$$

e qui si può ripetere quanto già detto per il caso della formula dei trapezi, ossia l'errore di troncamento, per il passo $h/2$, può essere valutato con la sola conoscenza delle parti approssimanti ottenute con i passi h e $h/2$; sulla base, poi, della valutazione approssimata fornita dalla formula precedente, si può decidere se arrestare o meno il procedimento di quadratura al passo $h/2$.

7.5. Estrapolazione di Richardson - Metodo di Romberg

L'applicazione del criterio di Runge conduce, in definitiva, ad assumere come valore approssimato dell'integrale $I(f)$, nel caso si utilizzi la formula dei trapezi, il valore:

$$I(f) \simeq S_{h/2}(f) + (S_{h/2}(f) - S_h(f))/3\,,$$

e quindi risulta

$$T_{1,1} = \frac{4T_{1,0} - T_{0,0}}{3} = \frac{1}{3}\frac{b-a}{2}[f_0 + 4f_1 + f_2];$$

pertanto $T_{1,1}$ rappresenta la parte approssimante della formula delle parabole con $h = (b-a)/2$.

Analogamente, si prova che i valori

$$T_{m,1} \quad , \qquad m = 1, 2, \ldots, n$$

sono parti approssimanti di formule delle parabole con passi: $(b-a)/2^m$.

Anche tali valori si dispongono in un vettore

$$\mathbf{T}_1 = [T_{1,1}, T_{2,1}, \ldots, T_{n,1}]^T .$$

Dai valori così ottenuti si genera una ulteriore "correzione" ancora basata sull'estrapolazione

$$T_{m,2} = \frac{4^2 T_{m,1} - T_{m-1,1}}{4^2 - 1} .$$

Si può dimostrare che anche i valori $T_{m,2}$ rappresentano parti approssimanti di formule di quadratura generalizzate, ottenute da una formula elementare a 5 nodi.

Il procedimento può essere poi generalizzato mediante la seguente formulazione: detta $T(h)$ la parte approssimante della formula dei trapezi con generico passo h, si ha

$$\begin{cases} T_{m,0} = T((b-a)/2^m), & m = 0, 1, \ldots, n \\ T_{m,k} = \dfrac{4^k T_{m,k-1} - T_{m-1,k-1}}{4^k - 1}, & \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n; \\ m = k, k+1, \ldots, n. \end{cases} \end{cases}$$

Nasce così una matrice triangolare contenente le varie approssimazioni di I; si noti che solo la prima colonna richiede l'uso di una formula di quadratura. Ad esempio, per $n = 3$, si ha

$$\begin{array}{cccc} T_{00} & & & \\ T_{10} & T_{11} & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}$$

per $n \geq 3$, i $T_{m,k}$ non sono risultati di formule di quadratura.

È noto che, in base alla proprietà di convergenza delle formule di quadratura generalizzate, al crescere di n i valori della prima colonna convergono ad I; si può dimostrare che lo stesso avviene, ma con maggiore velocità, per le rimanenti colonne.

Esempio 7.5.1

Calcolare, con il metodo di Romberg, il seguente integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} .$$

Posto $n = 3$, si ottiene la seguente matrice di approssimazioni di I

$$\begin{array}{cccc} 1.1780972 & & & \\ 1.0491242 & 1.0061332 & & \\ 1.0126927 & 1.0005489 & 1.0001766 & \\ 1.0032025 & 1.0000392 & 1.0000052 & 1.0000025 \end{array}$$

Il valore esatto dell'integrale è

$$I = 1;$$

è quindi evidente l'efficienza del metodo.

7.6. Generalità sulle formule di quadratura gaussiane

Le formule di quadratura gaussiane sono caratterizzate da due tipi di proprietà che le rendono particolarmente interessanti dal punto di vista computazionale.

La prima proprietà riguarda il *grado di precisione*; in queste formule, infatti, i nodi vengono scelti in modo tale da dar luogo alla precisione massima, ovvero, per quanto già visto nel paragrafo 7.1, precisione $\nu = 2n + 1$, in corrispondenza ad $n + 1$ nodi.

La seconda proprietà riguarda l'introduzione di una *funzione peso*, nell'integrando, cosa questa che consente di valutare numericamente anche integrali di funzioni contenenti singolarità, o integrali estesi ad intervalli illimitati.

Per ciò che riguarda l'introduzione della funzione peso, si procede come segue: detta F la funzione integranda, la si decompone nel prodotto di due fattori p e f, dove f rappresenta la parte regolare (continua) di F; si scrive cioè

$$F(x) = p(x) \cdot f(x)\,; \tag{7.6.1}$$

ad esempio, dato il seguente integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

le singolarità, sommabili, agli estremi possono essere inserite in una funzione peso, fattorizzando l'integrando come segue

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = p(x) \cdot f(x)\,.$$

Si deve tenere presente che la funzione del *peso* è quella di contenere le eventuali singolarità dell'integrando, oppure di assicurare la sommabilità all'infinito, nel caso si integri su intervalli illimitati. Naturalmente p dovrà appartenere ad una particolare classe di funzioni; ciò sarà specificato nei paragrafi 7.7, e 7.8.

È opportuno sottolineare che, in particolare, può risultare $p(x) \equiv 1$, $x \in [a,b]$; ciò avviene, ad esempio, se F non presenta singolarità nell'intervallo di integrazione. Dunque, anche gli integrali (7.1.1) possono essere visti come integrali pesati; il che fa apparire il concetto di integrale pesato, come una generalizzazione ed estensione degli integrali definiti trattati nei precedenti paragrafi.

Una volta introdotta la funzione peso, si ottiene una formula di quadratura sostituendo solo la parte regolare f dell'integrando F con il suo polinomio interpolatore su un certo insieme di nodi; si perviene così ad un'espressione del tipo

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b p(x) l_i(x)dx + \int_a^b p(x) \cdot E_n(x)dx = \tag{7.6.2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i f(x_i) + \rho_n(f)$$

nella quale si è posto

$$\gamma_i = \int_a^b p(x) l_i(x)dx\,, \tag{7.6.3}$$

$$\rho_n(f) = \int_a^b p(x) \cdot E_n(x)dx\,.$$

Come si vede, sia i coefficienti che il resto dipendono dal peso.

Le formule del tipo (7.6.2) sono dette *pesate*, ma *non* sono ancora gaussiane, finché non si specifica la scelta dei nodi, realizzata con l'obiettivo di raggiungere la precisione *massima*.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, ciò è ottenuto, per ogni fissato n, e in relazione alla funzione peso, situando i nodi $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, negli zeri di un opportuno polinomio P_{n+1}, dipendente dalla funzione peso stessa e detto *polinomio ortogonale*. Alla costruzione delle formule di quadratura gaussiane vanno premesse le definizioni e alcune proprietà base dei polinomi ortogonali.

Concludiamo osservando che, anche per le formule di quadratura pesate, e in particolare gaussiane, si possono ripetere le considerazioni fatte a fine paragrafo 7.2, sul grado di precisione delle formule interpolatorie, per cui risulta:

$$\nu \geq n \geq 0\,; \tag{7.6.4}$$

e questo, sostituendo $f(x) = 1$ nella (7.6.2) porta alla

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i = \int_a^b p(x)\,. \tag{7.6.5}$$

7.7. Polinomi ortogonali

Con la denominazione *funzione peso* si intenderà, qui e nel seguito, riferirsi ad una funzione $p(x)$ che soddisfi le seguenti proprietà, che indicheremo sinteticamente con A) :

A) *$p(x)$ sia generalmente continua, non negativa nell'intervallo, limitato o illimitato, $[a,b]$ e non identicamente nulla, tale, inoltre, che tutti i suoi*

momenti:

$$m_k = \int_a^b p(x)x^k dx \quad , \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

esistano finiti.

Un sistema di polinomi $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$, con:

$$P_n(x) = a_{n,0}x^n + a_{n,1}x^{n-1} + \dots + a_{n,n}\,, \qquad \text{con } a_{n,0} \neq 0\,,$$

è detto *sistema di polinomi ortogonali* in $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $p(x)$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\int_a^b p(x)P_n(x)P_m(x)dx \begin{cases} = 0 & \text{per } n \neq m \\ \neq 0 & \text{per } n = m \end{cases} \tag{7.7.1}$$

In questo caso, i polinomi $P_n(x)$ stessi vengono denominati ortogonali. Ovviamente

$$h_n = \int_a^b p(x)P_n^2(x)dx > 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2 \dots .$$

Il sistema è detto *ortonormale* se $h_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

L'intervallo $[a, b]$ e la funzione $p(x)$ definiscono *univocamente* i polinomi $P_n(x)$, a meno di fattori costanti non nulli; infatti la successione

$$\{c_0P_0(x), c_1P_1(x), \dots, c_nP_n(x), \dots\}\,,$$

con $c_0, c_1, \dots, c_n \dots$ costanti arbitrarie non nulle, rappresenta lo stesso sistema di polinomi ortogonali, in quanto soddisfa a sua volta le (7.7.1) verificate dal sistema $\{P_k(x)\}$; è evidente però che subiscono una modifica i valori h_n. Pertanto, per individuare univocamente il sistema $\{P_k(x)\}$, occorre prefissare le costanti arbitrarie; ad esempio, si può prefissare il coefficiente di grado massimo di ogni polinomio; quando, per il coefficiente di x^n in $P_n(x)$, si pone: $a_{n,0} = 1$, il polinomio viene denominato *monico*, e si ha

$$P_n(x) = x^n + a_{n,1}x^{n-1} + \dots + a_{n,n}\,.$$

Enunciamo ora alcuni teoremi fondamentali riguardanti tali polinomi.

TEOREMA 7.7.1. *Ogni sistema di polinomi ortogonali soddisfa una relazione di ricorrenza a tre termini del tipo*

$$\begin{cases} P_{-1}(x) = 0 \quad , \quad P_0(x) = k_0 \\ P_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)\,, \; n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{7.7.2}$$

con $A_n > 0$ *e* $C_n > 0$.

Questo risultato ci consente di affermare che il sistema $\{P_n(x)\}$ definito dalla coppia $\{[a, b], p(x)\}$, e dalla normalizzazione scelta, può essere univocamente individuato da k_0 e dall'insieme dei coefficienti $\{(A_n, B_n, C_n)\}$ della relazione (7.7.2). Di solito si preferisce definire implicitamente i polinomi ortogonali proprio mediante i coefficienti predetti: il valore iniziale k_0 e le terne $\{(A_n, B_n, C_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1\}$ individuano i polinomi $P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x)$.

TEOREMA 7.7.2. *Per ogni* $n \geq 1$ *il polinomio ortogonale* $P_n(x)$ *possiede* n *zeri reali, distinti e tutti contenuti in* (a, b). *Inoltre, gli zeri di* $P_n(x)$ *si alternano con quelli di* $P_{n-1}(x)$; *ossia tra due zeri consecutivi di* $P_n(x)$ *esiste un sol zero di* $P_{n-1}(x)$.

Una Gaussiana quindi non può mai includere gli estremi!

Le condizioni di ortogonalità (7.7.1) possono essere poste anche in altra forma, che risulta talora più semplice da verificare in pratica. Premettiamo che, fissato un sistema di polinomi ortogonali, un generico *qualsiasi polinomio* $Q_m(x)$ di grado m può venire rappresentato univocamente, come combinazione lineare dei polinomi di un sistema $\{P_k(x)\}$ ortogonale, comunque scelto; ovvero può essere posto nella forma seguente:

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_kP_k(x)\,, \tag{7.7.3}$$

basta infatti assumere

$$c_k = \frac{\int_a^b p(x)Q_m(x)P_k(x)dx}{\int_a^b p(x)P_k^2(x)dx}\,, \quad k = 0, 1, \dots, m\,,$$

come segue subito dalla (7.7.3), moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per $p(x)P_k(x)$, integrando e tenendo conto delle (7.7.1).

L'espressione (7.7.3) e la definizione stessa di ortogonalità conducono al risultato che segue.

Per ogni polinomio $q(x)$ di grado $\leq n-1$ risulta

$$\int_a^b p(x)P_n(x)q(x)dx = 0 \tag{7.7.4}$$

in particolare, le condizioni di ortogonalità possono essere poste nella forma

$$\int_a^b p(x)P_n(x)x^k dx = 0 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1 . \tag{7.7.5}$$

Esempio 7.7.1

Data la funzione peso $p(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, determinare il polinomio $P_2(x)$, di secondo grado, monico, ortogonale rispetto a $p(x)$.

Esprimendo tale polinomio nella forma

$$P_2(x) = x^2 + bx + c ,$$

si determinano b e c mediante le condizioni di ortogonalità. Usando, ad esempio, le (7.7.5), con $k = 0, 1$, si ottiene

$$\int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + bx + c)dx = 0 ,$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + bx + c)x\,dx = 0 ;$$

calcolando gli integrali si perviene al sistema

$$\begin{cases} 1/7 + b/5 + c/3 = 0 \\ 1/9 + b/7 + c/5 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava: $b = -10/9$, $c = 15/63$, e quindi

$$P_2(x) = x^2 - 10x/9 + 15/63 .$$

Le proprietà dei polinomi ortogonali qui presentate, costituiscono una limitatissima parte delle numerose caratteristiche di questi sistemi di polinomi, che peraltro giocano un ruolo fondamentale in moltissime questioni di Teoria dell'Approssimazione, e in svariate applicazioni; nell'ambito di questo corso, però, restringeremo il nostro interesse al solo intervento dei polinomi ortogonali nella costruzione delle formule di quadratura gaussiane, e, per questo unico scopo, le nozioni e i teoremi forniti sono sufficienti.

I polinomi ortogonali più noti e più utilizzati sono quelli denominati *classici*, essi possono essere relativi ad intervalli limitati, o ad intervalli illimitati. Nel primo caso faremo riferimento all'intervallo [-1,1], ricordando che la trasformazione lineare

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} , \tag{7.7.6}$$

trasforma l'intervallo $[-1,1]$ nell'intervallo $[a,b]$. Per il caso di intervalli illimitati superiormente si considererà l'intervallo $[0,\infty)$, e per gli intervalli illimitati, l'intervallo $(-\infty,\infty)$.

1) Polinomi di *Legendre* $\mathcal{L}_n(x) : p(x) = 1$, $[a,b] = [-1,1]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(x) = 1 \quad , \quad \mathcal{L}_1(x) = x \\ (n+1)\mathcal{L}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathcal{L}_n(x) - n\mathcal{L}_{n-1}(x) , \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$a_{n,0} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \quad , \quad h_n = \frac{2}{2n+1} .$$

2) Polinomi di *Chebyshev* $T_n(x) : p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $[a,b] = [-1,1]$

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) , \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$a_{n,0} = 2^{n-1} , \quad h_0 = \pi/2 , \quad h_n = \pi , \quad n > 0 .$$

Esempio 7.7.2

I polinomi di Chebyshev sono già stati introdotti, per altri scopi, nel paragrafo 6.10, e di conseguenza è noto che possono anche essere espressi

nella forma

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x)\,;$$

riferendosi a questa rappresentazione è facile verificarne le condizioni di ortogonalità (7.7.1). Si ha infatti

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x)T_m(x)dx = \int_0^{\pi} \cos(n\vartheta)\cdot\cos(m\vartheta)d\vartheta = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ \pi\,, & m = n \neq 0 \\ \pi/2\,, & m = n = 0\,. \end{cases}$$

3) Polinomi di *Laguerre* $L_n(x) : p(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $[a,b] = [0,\infty)$

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = 1 - x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\,, \quad n = 1,2,\dots \end{cases}$$

$$a_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad , \quad h_n = 1$$

4) Polinomi di *Hermite* $H_n(x) : p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $[a,b] = (-\infty,\infty)$

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \quad , \quad H_1(x) = 2x \\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\,, \quad n = 1,2,\dots \end{cases}$$

$$a_{n,0} = 2^n \quad , \quad h_n = \sqrt{\pi}2^n n!$$

7.8. Le formule di quadratura gaussiane

Le formule di quadratura *gaussiane* sono formule di quadratura relative ad un intervallo $[a,b]$, limitato o illimitato, interpolatorie, pesate con un peso $p(x)$, verificante la proprietà: A) di paragrafo 7.7, e con i nodi $\{x_i\}$, $i = 0,1,\dots,n$, coincidenti con gli zeri del polinomio P_{n+1}, di grado $n+1$, ortogonale in $[a,b]$, rispetto al peso $p(x)$.

Tali formule verranno poste nella forma (7.8.1), analoga alla (7.6.2), indicando in particolare con $\{H_i\}$ i coefficienti (per distinguerli dal simbolo

(7.6.3) usato per le generiche formule pesate), e ancora con $R_n(f)$ il resto, o errore di troncamento, e supponendo $f(x_i) = f_i$:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} H_i f_i + R_n(f)\,, \tag{7.8.1}$$

dove, deducendo da (7.6.3), si ha

$$H_i = \int_a^b p(x)l_i(x)dx \quad ; \quad R_n(f) = \int_a^b p(x)\cdot E_n(x)dx\,, \tag{7.8.2}$$

$\{l_i(x)\}$, $i = 0,1,\dots,n$, rappresentano, come al solito, i polinomi di base di Lagrange.

I nodi sono detti *gaussiani*, e sono tali che risulta

$$P_{n+1}(x_i) = 0\,, \qquad i = 0,1,\dots,n\,.$$

Osserviamo che, affinché la formula (7.8.1) abbia significato, la funzione f deve essere almeno continua e tale che $f(x)\cdot p(x)$ *sia sommabile* in $[a,b]$; se poi si suppone f dotata di derivata $(n+1)$-sima in $[a,b]$, allora si può scrivere

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)\cdot\frac{\pi_n(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))dx\,. \tag{7.8.3}$$

Dalla precedente relazione segue che il grado di precisione delle formule di quadratura gaussiane è: $\nu \geq n$, ma proveremo che, in base proprio alla scelta dei nodi, esso è addirittura massimo, ovvero: $\nu = 2n+1$. Premettiamo il seguente teorema:

TEOREMA 7.8.1. *Siano* $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ *due generici polinomi di grado* $\leq 2n+1$, *sia* $P_{n+1}(x)$ *il polinomio ortogonale in* $[a,b]$ *rispetto ad un dato peso* $p(x)$; *risulti poi, detti* $\{x_i\}$ *gli zeri di* $P_{n+1}(x)$:

$$\Pi_1(x_i) = \Pi_2(x_i)\,, \quad i = 0,1,\dots,n\,,$$

allora si ha

$$\int_a^b p(x)\cdot\Pi_1(x)dx = \int_a^b p(x)\cdot\Pi_2(x)dx\,.$$

Dimostrazione – Il polinomio $D(x)=\Pi_1(x)-\Pi_2(x)$ ha grado $\le 2n+1$, inoltre, come segue dall'ipotesi, verifica le condizioni

$$D(x_i)=0\,,\qquad i=0,1,\dots,n,$$

quindi è divisibile per P_{n+1}, ossia risulta:

$$D(x)=P_{n+1}(x)\cdot q(x)\,, \tag{7.8.4}$$

con: grado $q(x)\le n$. Integrando la (7.8.4), dopo averne moltiplicato ambo i membri per $p(x)$, si ottiene, ricordando la (7.7.4):

$$\int_a^b p(x)\cdot D(x)dx = \int_a^b p(x)\cdot P_{n+1}(x)\cdot q(x)dx = 0\,,$$

e quindi la tesi. ■

TEOREMA 7.8.2. *Le formule di quadrature gaussiane a $n+1$ nodi, hanno grado di precisione $\nu=2n+1$.*

Dimostrazione – Si deve provare che la (7.8.1) ha resto nullo per ogni polinomio $\Pi(x)$ di grado $2n+1$. Si consideri il polinomio $g_n(x)$ di grado n, che interpola $\Pi(x)$ sui nodi gaussiani $\{x_i\}$, cioè tale che

$$g_n(x_i)=\Pi(x_i)\,,\qquad i=0,1,\dots,n\,; \tag{7.8.5}$$

si ha quindi, per il Teorema 7.8.1:

$$\int_a^b p(x)\cdot g_n(x)dx = \int_a^b p(x)\cdot\Pi(x)dx\,.$$

Applicando la (7.8.1) ad entrambi gli integrali di questa relazione si ottiene

$$\sum_{i=0}^n H_i g_n(x_i) + R_n(g_n) = \sum_{i=0}^n H_i\Pi(x_i) + R_n(\Pi)\,;$$

in base alla (7.8.5), le parti approssimanti sono uguali; inoltre $R_n(g_n)=0$, perché, come già osservato, il grado di precisione della (7.8.1) è almeno pari a n. Ne segue:

$$R_n(\Pi)=0\,,$$

e questo, data l'arbitrarietà di Π, prova il teorema. ■

Un'importante ulteriore conseguenza del Teorema 7.8.1, riguarda i coefficienti delle formule gaussiane, per le quali è facile provare la seguente proprietà: *i coefficienti delle formule di quadrature gaussiane sono positivi.*

Infatti, si consideri la (7.8.2); i polinomi $\{l_i(x)\}$ hanno grado n, e quindi i polinomi $\{l_i^2(x)\}$ hanno grado $2n$; inoltre, per le (6.2.4), risulta

$$l_i(x_k)=l_i^2(x_k)\,,\qquad k=0,1,\dots,n\,;$$

i polinomi $l_i(x)$ e $l_i^2(x)$ verificano, per ogni i, le ipotesi del Teorema 7.8.1, per cui si può scrivere

$$H_i=\int_a^b p(x)l_i(x)dx=\int_a^b p(x)l_i^2(x)dx>0\,.$$

Osserviamo che, con i simboli relativi alle quadrature gaussiane, la (7.6.5) diventa

$$\sum_{i=0}^n H_i=\int_a^b p(x)dx\,. \tag{7.8.6}$$

Infine, riportiamo senza dimostrazione, una significativa espressione dell'errore di troncamento $R_n(f)$; oltre la (7.8.3), se $f\in C^{2n+2}[a,b]$, sussiste la seguente proprietà: esiste un punto $\xi\in(a,b)$, tale che

$$R_n(f)=K_n\cdot f^{(2n+2)}(\xi)\,,$$

dove K_n è una costante indipendente da f, dipendente dalla funzione peso ed espressa da

$$K_n=\frac{\int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2dx}{(2n+2)!a_{n+1,0}^2}\,. \tag{7.8.8}$$

Ad ognuno dei pesi classici, introdotti nel paragrafo 7.7, si associano le corrispondenti formule di quadratura, i cui nodi sono negli zeri dei polinomi ortogonali, i cui coefficienti si ottengono dalla prima delle (7.8.2), ed il cui resto si ricava da (7.8.7) e (7.8.8).

I valori dei nodi e dei coefficienti sono tabulati per vari valori di n e possono essere trovati nei testi contenenti tavole numeriche, come, ad esempio: M. ABRAMOWITZ – I. STEGUN *"Handbook of Mathematical Functions"*.

Qui vengono riportati solo i valori corrispondenti ai primi valori di n.

Formula di Gauss-Legendre; peso $p(x) \equiv 1, x \in [-1,1]$, $n+1$ **nodi,** $f \in C^{2n+2}[-1,1]$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} H_i f_i + \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi)\,.$$

Nella seguente tavola sono contenuti i valori di nodi, coefficienti e resti per i primi valori di n, riferiti alle formule di Gauss-Legendre.

n	x_i	H_i	$R_n(f)$
0	0	2	$0.333 f''(\xi)$
1	± 0.5773502692	1	$0.741\ 10^{-2} f^{(4)}(\xi)$
2	± 0.7745966692 0	0.5555555556 0.8888888889	$0.635\ 10^{-4} f^{(6)}(\xi)$
3	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549	$0.288\ 10^{-6} f^{(8)}(\xi)$
4	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889	$0.808\ 10^{-9} f^{(10)}(\xi)$
5	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$0.154\ 10^{-11} f^{(12)}(\xi)$
6	± 0.9491079123 ± 0.7415311856 ± 0.4058451514 0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$0.213\ 10^{-14} f^{(14)}(\xi)$

Tavola 7.1. Nodi, coefficienti e resti delle formule di Gauss-Legendre.

Naturalmente, la formula di Gauss-Legendre si può applicare anche ad intervalli diversi da $[-1,1]$, semplicemente usando preliminarmente il cambiamento di coordinate (7.7.6).

Si avrà allora

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} f\Big(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\Big)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{b-a}{2} H_i f\Big(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\Big) + (b-a)^{2n+3} \frac{[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi)\,.$$

Formula di Gauss-Chebyshev; peso $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $x \in [-1,1]$, $n+1$ **nodi,** $f \in C^{2n+2}[-1,1]$.

Queste formule sono caratterizzate dal fatto che i *coefficienti sono tutti uguali*, per ogni fissato valore di n, e sono dati, se i nodi sono n+1, da

$$H_i = \pi/(n+1)\,, \qquad i = 0,1,\ldots,n\,.$$

I nodi, poi, dovendo coincidere con gli zeri dei polinomi di Chebyshev, sono dati da [cfr. (6.10.3)]

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\,, \qquad i = 0,1,\ldots,n\,,$$

di conseguenza la formula di Gauss-Chebyshev è la seguente

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(1-x^2)^{1/2}}dx =$$

$$= \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f\Big(\cos\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)\,.$$

Formula di Gauss-Laguerre; peso $p(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, $n+1$ **nodi,** $f \in C^{2n+2}[0, \infty)$.

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} H_i f_i + \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) .$$

Nella seguente tavola sono contenuti i valori di nodi, coefficienti e resti per i primi valori di n, riferiti alle formule di Gauss-Laguerre.

n	x_i	H_i	$R_n(f)$
0	1	1	$0.500\ f''(\xi)$
1	0.5857864376 3.414213562	0.8535533906 0.1464466094	$0.167\ f^{(4)}(\xi)$
2	0.4157745568 2.29428036 6.289945083	0.7110930099 0.2785177336 $0.103892565\ 10^{-1}$	$0.500\ 10^{-1} f^{(6)}(\xi)$
3	0.3225476896 1.745761101 4.536620297 9.395070912	0.6031541043 0.3574186924 $0.3888790852\ 10^{-1}$ $0.5392947056\ 10^{-3}$	$0.143\ 10^{-1} f^{(8)}(\xi)$
4	0.2635603197 1.413403059 3.596425771 7.085810006 12.64080084	0.5217556106 0.3986668111 $0.7594244968\ 10^{-1}$ $0.3611758680\ 10^{-2}$ $0.2336997239\ 10^{-4}$	$0.397\ 10^{-2} f^{(10)}(\xi)$

Tavola 7.2. Nodi, coefficienti e resti delle formule di Gauss-Laguerre.

Formula di Gauss-Hermite; peso $p(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $n+1$ **nodi,** $f \in C^{2n+2}(-\infty, \infty)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} H_i f_i + \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

Nella seguente tavola sono contenuti i valori di nodi, coefficienti e resti per i primi valori di n, riferiti alle formule di Gauss-Hermite.

n	x_i	H_i	$R_n(f)$
0	0	1.772453851	$0.443 f''(\xi)$
1	± 0.7071067812	0.8862269255	$0.369\ 10^{-1} f^{(4)}(\xi)$
2	± 1.224744871 0	0.2954089752 1.181635901	$0.185\ 10^{-2} f^{(6)}(\xi)$
3	± 1.650680124 ± 0.5246476233	$0.8131283545\ 10^{-1}$ 0.8049140900	$0.659\ 10^{-4} f^{(8)}(\xi)$
4	± 2.02018287 ± 0.9585724646 0	$0.1995324206\ 10^{-1}$ 0.3936193232 0.9453087205	$0.183\ 10^{-5} f^{(10)}(\xi)$
5	± 2.350604974 ± 1.335849074 ± 0.4360774119	$0.4530009906\ 10^{-2}$ 0.1570673203 0.7246295952	$0.416\ 10^{-7} f^{(12)}(\xi)$
6	± 2.651961357 ± 1.673551629 ± 0.8162878829 0	$0.9717812451\ 10^{-3}$ $0.5451558282\ 10^{-1}$ 0.4256072526 0.8102646176	$0.801\ 10^{-9} f^{(14)}(\xi)$

Tavola 7.3. Nodi, coefficienti e resti delle formule di Gauss-Hermite.

7.9. Convergenza delle formule di quadratura

Una questione di notevole importanza, nell'utilizzo delle formule di quadratura, è il problema della convergenza al valore $I(f)$ della successione delle parti approssimanti $\{S_n(f)\}$ di una certa classe di formule di quadratura, quando tende all'infinito il numero dei nodi; cioè il problema di sapere se un aumento del numero di informazioni, produce una progressiva riduzione dell'errore di troncamento, indicato con $R_n(f)$, e quindi un miglioramento dell'approssimazione di $I(f)$ ottenuta mediante $S_n(f)$; in breve, si vuole stabilire se risulta

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0 . \tag{7.9.1}$$

Questo problema è già stato trattato a proposito delle formule di Newton-Cotes generalizzate per le quali si è supposto di operare con dati esatti, [cfr. Teorema 7.4.1].

Questione analoga si pone anche per l'interpolazione e, in questo caso, si è visto nel paragrafo 6.10, quali condizioni sulla funzione o sulla scelta dei nodi assicurano la convergenza dei polinomi interpolatori alla funzione da approssimare.

Nel caso delle formule di quadratura, si può dare un semplice teorema di convergenza valido per le funzioni che soddisfino anche la sola condizione di continuità in $[a,b]$, dove $[a,b]$ è supposto limitato.

Tratteremo in modo unificato sia il caso delle formule di quadratura di Newton-Cotes (7.3.2) che gaussiane (7.8.1), premettendo alcune notazioni.

Le formule (7.3.2) e (7.8.1) possono essere poste nella forma

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} C_i f_i + \int_a^b p(x)E_n(x)dx \tag{7.9.2}$$

dove si intende che sia $p(x) \equiv 1$, per le formule di Newton-Cotes, e $\{C_i\}$ rappresentano i coefficienti delle formule a nodi equispaziati $\{c_i\}$ (paragrafo 7.3) o gaussiani $\{H_i\}$ (paragrafo 7.8); tenendo conto che, in generale, si dovrà supporre che i dati siano affetti da errore, seguendo un ragionamento analogo a quello che ha dato luogo alla (7.1.7), si passerà dalla (7.9.2) alla

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i) + r^*(f) + R_n(f)$$

dove $\varepsilon_i = f_i - f(x_i)$, $r^*(f)$ è l'errore di propagazione dell'errore sui dati

$$r^*(f) = \sum_{i=0}^{n} C_i \varepsilon_i \tag{7.9.3}$$

e $R_n(f)$ è l'errore di troncamento:

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)E_n(x)dx\,.$$

L'errore globale $r_n(f)$ è pertanto dato da

$$r_n(f) = r^*(f) + R_n(f)\,.$$

Se si suppone di operare con dati esatti, ovvero se $f(x_i) = f_i$, l'errore si riduce al solo errore di troncamento; in questo caso sussiste il seguente teorema di convergenza.

TEOREMA 7.9.1. *Sia $f \in C[a,b]$, $[a,b]$ limitato, sia $\{S_n(f)\}$ una successione di formule di quadratura interpolatorie*

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$$

esista una costante positiva M tale che risulti

$$\sum_{i=0}^{n} |C_i| \le M \qquad \forall n,$$

allora sussiste la (7.9.1).

Non diamo la dimostrazione di questo teorema, ma osserviamo che una sua importante conseguenza riguarda le formule di quadratura a coefficienti positivi; in tal caso, infatti, dalla (7.2.5) e dalla (7.8.6) segue

$$\sum_{i=0}^{n} |C_i| = \sum_{i=0}^{n} C_i = \int_a^b p(x)dx$$

e quindi l'ipotesi del teorema è soddisfatta con

$$M = \int_a^b p(x)dx\,;$$

ne segue che *ogni successione $\{S_n(f)\}$ di formule di quadratura a coefficienti positivi è convergente*; in particolare sono convergenti le formule di quadratura gaussiane.

Se i coefficienti non sono di segno costante, o se, più in generale, non si può applicare il Teorema 7.9.1, il comportamento delle formule di quadratura interpolatorie può essere posto in relazione con quello delle successioni

dei polinomi interpolatori $\{p_n(x)\}$. Infatti, per qualsiasi insieme di nodi, risulta

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) \quad \text{uniformemente in } [a,b]\,, \tag{7.9.4}$$

se f è tale da verificare le condizioni, abbastanza restrittive, imposte dal Teorema 6.10.1 o dal Teorema 6.10.2.

Poichè la convergenza uniforme di successioni di funzioni consente il passaggio al limite sotto il segno di integrale, nell'ipotesi di operare con dati esatti si possono enunciare i seguenti due teoremi, conseguenza dei citati teoremi di paragrafo 6.10.

TEOREMA 7.9.2. *Sia $f \in C^\infty[a,b]$, $[a,b]$ limitato, posto $|f^{(k)}(x)| \le M_k$, $x \in [a,b]$, $k = 0,1,\dots,$ risulti*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot M_k = 0$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f)\,.$$

Dimostrazione – Dalla (7.9.4) e tenendo conto che le formule sono interpolatorie, segue

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)p_n(x)dx = \int_a^b p(x) \lim_{n\to\infty} p_n(x)dx =$$
$$= \int_a^b p(x)f(x)dx\,. \qquad \blacksquare$$

Indicando con $F(z)$ il prolungamento di f nel campo complesso, si ha il teorema seguente, conseguenza del Teorema 6.10.2.

TEOREMA 7.9.3. *Se $F(z)$ è olomorfa in un campo $A \supset [a,b]$, e risulta $d(\delta A, [a,b]) > b-a$, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f)\,.$$

Questi teoremi valgono in particolare per le formule di Newton-Cotes. Se f non soddisfa le condizioni di regolarità di questi teoremi, non è detto che un aumento di informazioni produca un miglioramento nell'approssimazione di $I(f)$, come mostra il seguente esempio.

Esempio 7.9.1

Si consideri ancora la funzione dell'esempio 6.10.1, e l'integrale seguente

$$\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,4 \cong 2.6516\,;$$

le formule di Newton-Cotes con $n+1$ dispari forniscono i seguenti risultati

$$\begin{aligned} S_2(f) &= 5.4902 \\ S_4(f) &= 2.2776 \\ S_6(f) &= 3.3288 \\ S_8(f) &= 1.9411 \\ S_{10}(f) &= 3.5956 \end{aligned}$$

che non mostrano alcuna tendenza alla convergenza; e in effetti, ragionando come nell'Esempio 6.10.2, si vede che la funzione integranda non soddisfa le ipotesi di Teorema 7.9.3.

Concludiamo osservando che, nel caso si operi con dati non esatti, occorre tenere conto anche dell'errore di propagazione dell'errore sui dati (7.9.3), per il quale si ha, posto $|\varepsilon_i| \le \varepsilon$, $\forall\, i$,

$$|r^*(f)| = \Big|\sum_{i=0}^{n} C_i\varepsilon_i\Big| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |C_i|\,;$$

pertanto, se vale l'ipotesi del Teorema 7.9.1, si perviene alla

$$|r^*(f)| \le \varepsilon M\,,$$

e se, in particolare, le formule sono a coefficienti positivi, si ottiene

$$|r^*(f)| \le \varepsilon \int_a^b p(x)dx\,,$$

formule, queste ultime, che mostrano come, nei procedimenti di integrazione numerica, che siano teoricamente convergenti nel senso che sussiste la (7.9.1), l'accuratezza con la quale sono forniti i dati influisce sull'accuratezza che si può raggiungere nell'approssimazione dell'integrale.

7.10. Osservazioni sull'uso delle formule di quadratura

Confrontando tra loro formule di quadratura di Newton-Cotes e gaussiane, si possono fare le seguenti osservazioni:

1 - a parità di numero di nodi, la precisione delle formule gaussiane è quasi doppia di quella relativa alle formule di Newton-Cotes;

2 - le formule gaussiane hanno nodi e coefficienti espressi da numeri irrazionali, mentre le formule newtoniane, nel caso che gli estremi siano razionali, hanno razionali sia nodi che coefficienti; questo fatto è stato considerato, in passato, un vantaggio delle formule a nodi equispaziati rispetto alle gaussiane, in quanto la limitata precisione con cui venivano forniti nodi e coefficienti di queste ultime, poteva produrre una notevole propagazione degli errori;

3 - i coefficienti delle formule gaussiane sono sempre positivi, non così quelli delle formule di Newton-Cotes, come è stato più volte osservato, pertanto le formule gaussiane, in base al Teorema 7.9.1, risultano convergenti, al divergere del numero dei nodi, per una vastissima classe di funzioni integrande, mentre non altrettanto può dirsi a proposito delle formule newtoniane, a meno che non siano utilizzate nella forma generalizzata;

4 - nelle formule gaussiane, una variazione nel numero di nodi richiede di ricalcolare, *ex-novo*, sia nodi che coefficienti, mentre nelle formule newtoniane, ad esempio, un raddoppio del numero di nodi "salva" tutte le informazioni già utilizzate.

A queste osservazioni, possono però essere aggiunti alcuni commenti: con la diffusione dei calcolatori e l'uso di aritmetiche ad elevata precisione, si possono ottenere buone precisioni anche con un numero molto grande di nodi ($n = 1000$); nella rappresentazione di macchina anche i numeri razionali richiedono arrotondamenti come i numeri irrazionali, pertanto l'unico vero inconveniente delle formule gaussiane rimane quello segnalato al punto 4, oltre alla considerazione che, con una certa frequenza, nelle applicazioni si dispone di informazioni su nodi equispaziati, e, quindi, l'uso delle gaussiane richiederebbe una preliminare interpolazione per procurarsi i dati corrispondenti alle ascisse gaussiane.

7.11. Integrazione numerica adattativa

L'esigenza che sta alla base dell'integrazione numerica adattativa può essere illustrata mediante il seguente esempio: si consideri il problema di approssimare l'integrale esteso ad $[a, b]$ della funzione f, il cui grafico è riprodotto in figura,

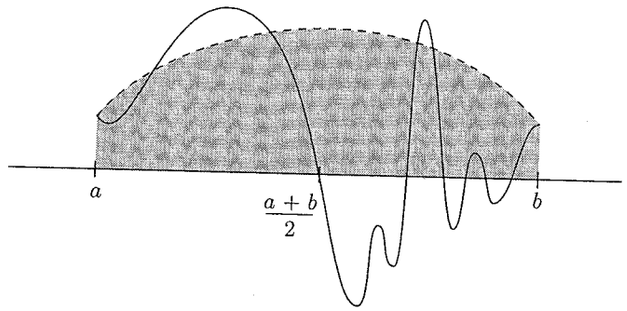


Fig. 4. Approssimazione con la formula della parabola

mediante la formula della parabola. È evidente che usando 3 nodi l'approssimazione sarà abbastanza scadente in quanto con le corrispondenti ordinate viene completamente ignorato l'andamento di f in $A_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$, dove la funzione presenta rapide e notevoli variazioni. Un infittimento di nodi, allo scopo di "seguire" tale andamento di f si mostra però necessario solo in A_2, mentre in $A_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$, dove la funzione è "liscia", l'approssimazione è già buona anche con la formula a 3 soli nodi. D'altronde, un infittimento di nodi in A_2, con successivi dimezzamenti del passo, comporta un altrettale infittimento di A_1, non strettamente necessario, con conseguente aumento del costo computazionale. È a questo punto che subentra il concetto di integrazione adattativa, che è un algoritmo nel quale viene deciso *in itinere*, ossia durante lo svolgimento dei calcoli, in quale zona e quanto l'infittimento dei nodi è richiesto, limitando allora al minimo l'onere del procedimento.

Questa tecnica può fare uso di formule di quadratura sia di Newton-Cotes che gaussiane; esistono poi varie routines automatiche, reperibili nelle librerie matematiche, quali NAG o MSL. Noi ci limiteremo ad illustrare il procedimento per la formula delle parabole, sfruttando il criterio di Runge.

Il problema è dunque quello di generare un'approssimazione, che indicheremo con J dell'integrale $I(a, b) = \int_a^b f(x)dx$. Faremo uso delle seguenti notazioni:

Detto $[\alpha,\beta]$ un generico sottointervallo di $[a,b]$, porremo $I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, $J(\alpha,\beta)$ l'approssimazione di $I(\alpha,\beta)$, $S_h(\alpha,\beta)$ e $S_{h/2}(\alpha,\beta)$ le approssimazioni fornite dalla formula delle parabole con passo $h = \frac{\beta-\alpha}{2}$, e $h/2$. L'obiettivo è quello di approssimare $I(a,b)$ mediante un'approssimazione J, dopo aver stabilito una certa tolleranza ε, in modo che risulti

$$|I(a,b) - J| < \varepsilon\,. \tag{7.11.1}$$

Indicato dunque con $[\alpha,\beta]$ un sottointervallo di $[a,b]$, dalla (7.4.7) si deduce

$$|I(\alpha,\beta) - S_{h/2}(\alpha,\beta)| \cong \frac{|S_h(\alpha,\beta) - S_{h/2}(\alpha,\beta)|}{15}\,; \tag{7.11.2}$$

posto allora $E(\alpha,\beta) = |S_h(\alpha,\beta) - S_{h/2}(\alpha,\beta)|$, se

$$E(\alpha,\beta) < 15\varepsilon \tag{7.11.3}$$

risulta

$$|I(\alpha,\beta) - S_{h/2}(\alpha,\beta)| < \varepsilon\,.$$

Ricordando che la (7.4.7) (e quindi la (7.11.2)) è valida nell'ipotesi che f^{IV} vari "poco" in $[\alpha,\beta]$, sarà opportuno tenere conto che tale ipotesi potrebbe anche non sussistere, sostituendo la (7.11.3) con la più restrittiva, o "conservativa", stima

$$E(\alpha,\beta) < 10\varepsilon\,;$$

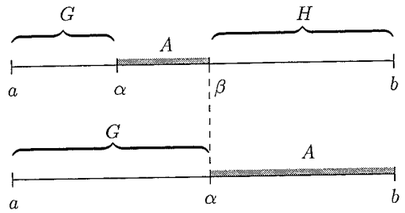
inoltre, poiché l'obiettivo è la valutazione dell'integrale esteso a tutto $[a,b]$, per garantire che sussista la (7.11.1), si imporrà che risulti

$$E(\alpha,\beta) < 10\varepsilon\frac{\beta-\alpha}{b-a}\,. \tag{7.11.4}$$

L'algoritmo può essere così descritto. Posto $B = [a,b]$, indicheremo con $A = [\alpha,\beta]$ il sottointervallo di B in cui si approssima "attualmente" $I(\alpha,\beta)$, con G il sottointervallo già esaminato per il quale il test (7.11.4) è stato superato, con H il sottointervallo ancora da esaminare.

All'inizio risulta $G = \emptyset$, $A = H = [a,b]$, inoltre l'approssimazione iniziale è $J = 0$; ad ogni passo si procede come segue; si considera il generico

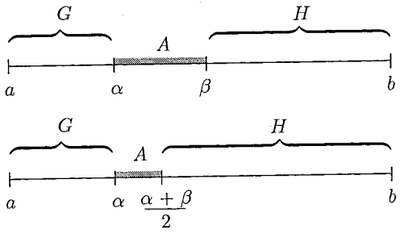
intervallo $[\alpha,\beta]$, e si approssima $I(\alpha,\beta)$, se il test (7.11.4) è superato, si incrementa J di $J(\alpha,\beta)$ e si considera come nuovo intervallo G, l'intervallo $G \cup A$; si pone $A = H$ e si ripete la procedura (vedi figura 5).



test superato

Fig. 5. Generico passo dell'algoritmo adattativo.

Se il test (7.11.4) non è stato superato, si dimezza $[\alpha,\beta]$, il nuovo intervallo attivo allora diventa $A = [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, e si ripete la procedura; la situazione degli intervalli è ora quella descritta in figura 6.



test non superato

Fig. 6. Aggiornamento degli intervalli

Il seguente esempio è tratto da [1, Cap. 7].

Esempio 7.11.1.

Il seguente integrale

$$I(0,1) = \int_0^1 1 - \sqrt{1-x}\,dx = 1/3$$

è valutato con lo schema di Romberg e la strategia adattativa; si pone $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$. Il valore approssimato che si ottiene è dato da 0.3333502, e il calcolo ha richiesto 28 valutazioni funzionali, mentre con la formula dei

trapezi sarebbero necessarie 513 valutazioni e con il metodo di Romberg 257 valutazioni.

Visto l'andamento della funzione, i nodi della strategia adattativa si addensano vicino a 1.

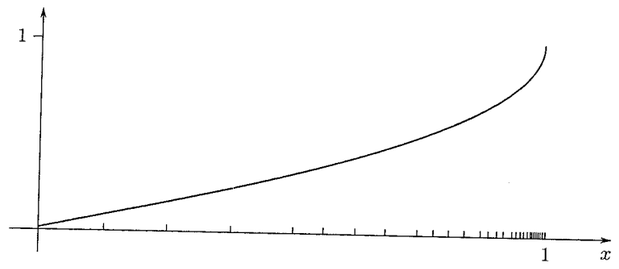


Fig. 7. Grafico della funzione integranda e distribuzione dei nodi.

Capitolo 8

Equazioni alle differenze

8.1. Definizioni e prime proprietà

Si definisce *equazione alla differenze di ordine* r un'equazione del tipo

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r}) = 0 \tag{8.1.1}$$

ossia un legame tra la variabile intera n ed $r+1$ valori di una variabile discreta (o successione) y_n.

L'equazione (8.1.1) è denominata "alle differenze", anche se apparentemente non vi figurano differenze finite, poiché sussiste la relazione

$$y_{n+k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \Delta^r y_n$$

che può essere facilmente provata per induzione, ricordando la relazione (cfr. paragrafo 6.6)

$$\Delta^k f_i = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f_{i+r} .$$

Sono equazioni alle differenze quelle che si ottengono applicando il metodo del punto unito ad un'equazione della forma $y = \varphi(y)$; infatti, la relazione tra le iterate successive:

$$y_{n+1} = \varphi(y_n) ,$$

è del tipo (8.1.1) con: $F(n, y_n, y_{n+1}) = y_{n+1} - \varphi(y_n)$; $r = 1$.

Sono equazioni alle differenze anche le relazioni ricorsive a tre termini, che sussistono per i polinomi ortogonali.