Università degli Studi di Firenze – Scuola di Scienze

Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2017/18)

Estremo superiore/inferiore (*cont.*), valore assoluto, successioni numeriche – 9 Ott. 2017

1. Tenendo conto che dati due insiemi E e F, si ha $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$ e $\inf\{E \cup F\} = \min\{\inf E, \inf F\}$, si determinino estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$\big\{n^2 - 4n + 12,\ n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{ -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\big\}$$

specificando se essi sono, rispettivamente, massimo e minimo.

2. Determinare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \big\{2^{(-n)^n + n} \,|\, n \in \mathbb{N}\big\}$$

specificando se essi sono, rispettivamente, massimo e minimo.

3. Provare che si ha

$$|x| \le |y| \Longleftrightarrow x^2 \le y^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,,$$

mentre

$$x \le y \Longleftrightarrow x^2 \le y^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,,$$

è falsa.

4. Provare che dati $x, y \in \mathbb{R}$ la stima

$$|x - y| \le |x| - |y|$$

è in generale falsa, mentre vale

$$|x - y| \ge \big||x| - |y|\big| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

5. Risolvere le equazioni/disequazioni seguenti.

$a)$ $\sqrt{\dfrac{|x+2|}{|x-1|}} > 1$ $\qquad$ $b)$ $x^2 - 5|x| + 6 \le 0$

$c)$ $x < |x^2 - 12| < 4x$ $\qquad$ $d)$ $|2 + 3x| = |4 - x|\,.$

6. Utilizzare la definizione di limite per verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2 - n + 1} = \frac{1}{3}\,.$$

7. Provare che $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$. È vero più in generale che $a_n \to L \in \mathbb{R}$ se e solo se $|a_n| \to L$?

8. Provare che se $a_n \to 0$ e b_n è limitata, allora $a_n \cdot b_n \to 0$.

9. i) Si osservi che se $a_n \to L \in \mathbb{R}$, allora $a_{n+1} - a_n \to 0$. È vero il viceversa?
ii) In maniera analoga, si osservi che se $a_n \to L \neq 0$, allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ (spiegando perché ha senso introdurre la successione a_{n+1}/a_n ai fini del limite sopra). È vero il viceversa?

10. Stabilire se esistono i limiti seguenti, e nel caso calcolarli.

$$a) \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) \qquad b) \lim_{n\to\infty} n \cos \frac{1}{n}$$

$$c) \lim_{n\to\infty} n^2 \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad d) \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^3}.$$

11. Calcolare
$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3 + 2^n)}{\log(n^2 + 3^n)}$$
oppure spiegare perché L non esiste.

12. Data la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definita (*per ricorrenza*) da
$$\begin{cases} a_1 = \alpha \in (0,1) \\ a_{n+1} = a_n - a_n^3\,, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
si chiede di stabilire se essa ammette limite per $n \to \infty$ (calcolandolo, in caso affermativo).
Suggerimento: Provare preliminarmente che $a_n \in (0,1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

13. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definita (*per ricorrenza*) da
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{\lambda + a_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$
con $\lambda > 0$ fissato. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} a_n$.

14. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definita (per ricorrenza) da:
$$\begin{cases} a_1 = \frac{5}{4} \\ a_{n+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{a_n}\,. \end{cases}$$
Dimostrare che $a_n = \dfrac{8 + 2^{2n+1}}{16 + 2^{2n}}$.