Come avevamo notato prima, la corrispondenza con la retta determina una struttura di ordinamento naturale sui numeri reali (indicato ancora con i simboli $<, >, \leq, \geq$). In termini delle rappresentazioni decimali, la relazione di ordine può essere vista nel modo seguente: consideriamo ad esempio due numeri positivi $x = k_0, k_1 \cdots$ e $y = h_0, h_1 \cdots$. Allora,

$$x < y \iff \exists r \in \mathbb{N} \text{ tale che } k_i = h_i \text{ per } i = 0, \ldots, r-1 \text{ e } k_r < h_r .$$

L'ordinamento sui reali, come quello sui razionali, gode di alcune proprietà che, seppure evidenti, giocano un ruolo fondamentale in moltissime utilizzazioni dei numeri reali

(P10)	$x \leq x$	riflessività
(P11)	$x \leq y,\ \ y \leq x \ \Rightarrow\ x = y$	antisimmetria
(P12)	$x \leq y,\ \ y \leq z \ \Rightarrow\ x \leq z$	transitività

Inoltre, la relazione di ordine che vi è su $\mathbb{R}$ ha delle proprietà importanti di connessione con la struttura algebrica di campo che riportiamo qui sotto.

(P13) $\quad x \leq y,\ z \leq w, \ \Rightarrow\ x + z \leq y + w$

(P14) $\quad x \leq y, z \geq 0, \ \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Un campo dotato di una relazione di ordine $\leq$ che soddisfi le proprietà (P10)-(P14) è detto un *campo ordinato*. I numeri reali formano un campo ordinato.

Dalle proprietà miste (P13) e (P14) se ne deducono altre come ad esempio

$$
\begin{array}{lll}
(Q3) & x \leq y,\ z \leq 0, & \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z \\
(Q4) & x + z \leq y + z, & \Rightarrow x \leq y \\
(Q5) & x \cdot z \leq y \cdot z,\ z > 0 & \Rightarrow x \leq y \\
(Q6) & 0 < x \leq y & \Rightarrow 0 < y^{-1} \leq x^{-1}
\end{array}
$$

Lo studente certamente noterà come le proprietà (P13), (P14) e (Q3)-(Q6) sono continuamente utilizzate nella risoluzione di disequazioni.

Introduciamo ora un concetto molto utile, quello di valore assoluto di un numero reale. Il *valore assoluto* familiarmente (ma impropriamente) conosciuto da molti studenti come 'il numero senza segno' ha la seguente precisa definizione:

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Nonostante la semplicità della definizione, il valore assoluto è foriero di molti errori. Spesso ci troveremo a dover considerare diseguaglianze del tipo $|x| \leq a$ dove $a \in \mathbb{R}$. Poichè per definizione $|x| \geq 0$ si ha che la suddetta diseguaglianza non ha soluzioni se $a < 0$. Nel caso invece in cui $a \geq 0$ si ha che

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a. \tag{1.4}$$

Se invece consideriamo $|x| \geq a$, essa è sempre soddisfatta se $a \leq 0$, mentre, se $a > 0$ si ha

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ oppure } x \geq a. \tag{1.5}$$

Il valore assoluto gode di alcune importanti proprietà:

$$
\begin{array}{ll}
(Q7) & |x+y| \leq |x| + |y| \\
(Q8) & |x \cdot y| = |x| \cdot |y|
\end{array}
$$

Dimostreremo l'importante (Q7) lasciando la dimostrazione (più semplice) di (Q8) allo studente.

Dimostrazione di (Q7): Poichè sicuramente $|x| \leq |x|$ e $|y| \leq |y|$, segue da (1.4) che

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$
$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Sommando membro a membro, si ottiene

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

che, per la (1.5), è equivalente a

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

■

Si noti che se x e y hanno lo stesso segno, allora la (Q7) è addirittura un'eguaglianza: $|x + y| = |x| + |y|$. La diseguaglianza si ha nei casi in cui i segni sono discordi.

Esercizio 1.4 Si risolva la disequazione $|3x - |x|| < |x| + 1$
R: $-1/3 < x < 1$

Esercizio 1.5 Si descriva sul piano xy l'insieme delle soluzioni della diseguaglianza $|x - y| \leq 1$.

Esercizio 1.6 * Si dimostri che se x e y sono numeri reali, si ha

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| .$$

1.1 Proprietà di continuità

Le proprietà algebriche e di ordinamento illustrate nel paragrafo precedente non sono esclusive dei numeri reali. In effetti anche i razionali godono delle stesse proprietà, in altri termini anche $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato. Ciò che in effetti differenzia i due insiemi numerici riguarda, come è stato discusso prima, la 'continuità' dell'insieme dei numeri reali, la sua struttura di 'retta senza buchi'. Vogliamo qui formalizzare meglio questo concetto rendendo rigoroso il concetto di continuità in termini della definizione che abbiamo assunto di numeri reali come allineamenti decimali.

Cominciamo con alcune definizioni.

Definizione 1.2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme.

- Un elemento $M \in A$ è detto *massimo di A* se $x \leq M$ per ogni $x \in A$.
- Un elemento $m \in A$ è detto *minimo di A* se $x \geq m$ per ogni $x \in A$.

Si usano le notazioni $M = \max A$, $m = \min A$. E' facile verificare (lo studente è invitato a riflettere sul perchè) che se A ammette un elemento massimo, esso è unico; similmente per il minimo.

Mostriamo alcuni esempi.

Esempio 2 $A = [a, b]$. Allora $\max A = b$ e $\min A = a$.

Esempio 3 $A = \{(-1)^n \frac{1}{n} \mid n = 2, 3, \ldots\}$. A consiste di numeri sia positivi che negativi. Prendendo n pari si ottengono i numeri

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$$

mentre prendendo n dispari si ottengono i numeri

$$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$$

Si ha quindi $\max A = 1/2$ e $\min A = -1/3$.

E' facile tuttavia costruire esempi di insiemi che non ammettono massimo e/o minimo:

Esempio 4 $A = \mathbb{N}$. Allora non esiste il massimo mentre il minimo è 1.

Esempio 5 $A = \mathbb{Z}$. Allora non esiste nè il massimo, nè il minimo

Negli esempi precedenti la mancanza di minimo o massimo è collegata ad una 'illimitatezza' dell'insieme stesso. Introduciamo il seguente concetto:

Definizione 1.3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme.

- A è detto *superiormente limitato* se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq L$ per ogni $x \in A$.
- A è detto *inferiormente limitato* se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq l$ per ogni $x \in A$.
- A è detto *limitato* se è sia inferiormente che superiormente limitato.

Chiaramente se A ammette massimo, esso è superiormente limitato e se ammette minimo è inferiormente limitato. Sarà vero che un insieme superiormente limitato necessariamente ammette massimo e che un insieme inferiormente limitato necessariamente ammette minimo? La risposta è in entrambi casi sul negativo come mostrano i seguenti:

Esempio 6 Sia $A =]0,1[$. A è limitato; facciamo vedere che non ammette massimo. Per assurdo supponiamo che il massimo ci sia e chiamiamolo $M \in]0,1[$. Tale numero sarà del tipo $M = 0,k_1k_2k_3\ldots$ con non tutti i k_i eguali a 9 (infatti ce ne saranno infiniti non eguali a 9). Supponiamo che $k_s < 9$ e consideriamo il numero $\tilde{M} = 0,k_1k_2\cdots k_{s-1}(k_s+1)k_{s+1}\cdots$. Chiaramente $\tilde{M} \in]0,1[$ e $\tilde{M} > M$ e questo significa che M non poteva essere il massimo di A. Similmente si fa vedere che A non ammette minimo.

Esempio 7 Sia $A = \{1/n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$. A è limitato; chiaramente esiste il massimo di A che è 1. Non esiste invece il minimo: in effetti se per assurdo $a \in A$ fosse il minimo si avrebbe $a = 1/n$ per qualche n (essendo questi gli elementi di A). Ma $1/(n+1) \in A$ e $1/(n+1) < 1/n$ il che significa che $a = 1/n$ non può essere il minimo.

Gli esempi sopra suggeriscono un modo di generalizzare i concetti di massimo e di minimo di un insieme. Nel caso $A =]0,1[$ pur non esistendo nè massimo nè minimo, vi sono due numeri in un certo senso speciali per A: 0 e 1. 1 non è il massimo perchè non sta in A, però ha una notevole proprietà: se L è un qualunque numero che sta alla destra di A cioè tale che $L \geq x$ per ogni $x \in A$, allora $1 \leq L$; in altri termini 1 è il più piccolo dei numeri che stanno alla destra di A. Similmente 0 può essere caratterizzato come il numero più grande che sta alla sinistra di A. Quanto è generale questo nostro ragionamento? Può essere fatto per ogni insieme limitato? La risposta è affermativa e conduce al cuore del problema di continuità. Per formalizzare i ragionamenti che faremo è conveniente prima introdurre qualche altra notazione.

Definizione 1.4 Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Un numero reale L è detto *maggiorante di* A se $L \geq x$ per ogni $x \in A$. Un numero reale l è detto *minorante di* A se $l \leq x$ per ogni $x \in A$. L'insieme dei maggioranti di A lo indicheremo con il simbolo A^+, mentre quello dei minoranti con il simbolo A^-.

E' chiaro che A è superiormente limitato se e soltanto se esiste almeno un maggiorante, cioè se A^+ è non vuoto. Similmente, A è inferiormente limitato se e soltanto se A^- è non vuoto. Inoltre il massimo, se esiste, è un maggiorante, mentre il minimo, se esiste, è un minorante. Vale il seguente fondamentale risultato:

Teorema 1.5 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:*

(i) Se A è superiormente limitato, A^+ ammette minimo che viene detto l'estremo superiore di A e indicato con $\sup A = \min A^+$.

(ii) Se A è inferiormente limitato, A^- ammette massimo che viene detto l'estremo inferiore di A e indicato con $\inf A = \max A^-$.

Dimostrazione Diamo solo un'idea della dimostrazione che contiene delle idee piuttosto interessanti. Dimostriamo (i) nel caso particolare in cui $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$, così che $A^+ \subseteq \mathbb{R}^+$. Gli elementi di A^+ saranno quindi del tipo $x = k_0, k_1k_2k_3 \cdots$. Consideriamo

$$\tilde{k}_0 = \min\{k_0 \mid x \in A^+\}, \qquad A_0^+ = \{x \in A^+ \mid k_0 = \tilde{k}_0\},$$

$$\tilde{k}_1 = \min\{k_1 \mid x \in A_0^+\}, \qquad A_1^+ = \{x \in A_0^+ \mid k_1 = \tilde{k}_1\},$$

e così via, iterando,

$$\tilde{k}_n = \min\{k_n \mid x \in A_{n-1}^+\}, \qquad A_n^+ = \{x \in A_{n-1}^+ \mid k_n = \tilde{k}_n\}.$$

Si ha chiaramente $A^+ \supseteq A_0^+ \supseteq A_1^+ \supseteq \cdots$ e tutti gli A_r^+ sono, per costruzione, non vuoti. Consideriamo $L = \tilde{k}_0, \tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \cdots$ e dimostriamo che questo è il minimo di A^+. Per come è stato costruito è facile rendersi conto che $L \leq x$ per ogni $x \in A^+$. Rimane da dimostrare che L sta in A^+. Se per assurdo $L \notin A^+$, vuol dire che non è un maggiorante di A, quindi esiste $y \in A$ tale che $y > L$. Avremo $y = h_0, h_1h_2 \cdots$ ed esisterà un indice $r \geq 0$ tale che

$$\tilde{k}_i = h_i \text{ per } i = 0, 1, \ldots, r-1 \quad \text{e} \quad \tilde{k}_r < h_r.$$

Scegliamo un qualunque $z \in A_r^+$. z è un maggiorante e la sua rappresentazione decimale è del tipo $z = \tilde{k}_0, \tilde{k}_1\tilde{k}_2 \cdots \tilde{k}_r k_{r+1} \cdots$. Quindi $z < y$ e questo è assurdo perchè $y \in A$ e $z \in A^+$. Quindi L deve stare in A^+ e quindi è il minimo di A^+. Lo studente pensi a come estendere la dimostrazione di (i) al caso generale. La dimostrazione di (ii) si fa in modo analogo: vale la pena notare che sfruttando la simmetria dell'insieme dei numeri reali rispetto allo 0, si può far discendere (ii) da (i); lasciamo allo studente il compito di formalizzare il procedimento. ■

Nel caso in cui un insieme A non sia, rispettivamente, superiormente o inferiormente limitato, si pone, per convenzione $\sup A = +\infty$ o $\inf A = -\infty$.

Esempio 8 Riprendiamo l'Esempio 6: $A =]0, 1[$. Allora $A^+ = [1, +\infty[$: '$\supseteq$' è evidente, mentre '$\subseteq$' segue dal fatto che per le considerazioni svolte nell'Esempio 6, non ci sono maggioranti più piccoli di 1. Similmente, $A^- =]-\infty, 0]$. Quindi $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$.

Esempio 9 Riprendiamo l'Esempio 7: $A = \{1/n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Allora chiaramente $A^+ = [1, +\infty[$, mentre $A^- =]-\infty, 0]$: '$\supseteq$' è evidente, mentre '$\subseteq$' segue dal fatto che non ci sono minoranti più grandi di 0 (si rifletta sul perchè). Quindi $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$.

Esempio 10 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < x^2\}$. La diseguaglianza $x^3 < x^2$ è risolta da $x < 0$ e da $0 < x < 1$. Quindi, $A =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Si ha, in questo caso, $A^+ = [1, +\infty[$ e $A^- = \emptyset$. Quindi, $\sup A = 1$ e $\inf A = -\infty$.

C'e' un'utile caratterizzazione per gli estremi superiore ed inferiore di un insieme:

Proposizione 1.6 *Sia A un insieme superiormente limitato e sia $L \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

1) $L = \sup A$.

2) L gode delle seguenti due proprietà:

(A) $L \geq x$ per ogni $x \in A$.

(B) Per ogni numero $E > 0$, esiste $x \in A$ tale che $x > L - E$.

Dimostrazione 1) $\Rightarrow$ 2): supponiamo che $L = \sup A$ e dimostriamo (A) e (B). Per quanto riguarda (A) si noti che essa dice semplicemente che L è un maggiorante di A: essa è quindi verificata essendo l'estremo superiore un maggiorante. Veniamo a (B): se, per assurdo essa fosse falsa vorrebbe dire che esiste $E > 0$ tale che $x \leq L - E$ per ogni $x \in A$. Quindi $L - E$ è anch'esso un maggiorante di A e $L - E < L$: ma questo è assurdo poichè L è, per ipotesi, il più piccolo dei maggioranti. Quindi anche (B) deve valere.

2) $\Rightarrow$ 1): supponiamo ora che L soddisfi le proprietà (A) e (B) e dimostriamo che $L = \sup A$. Dobbiamo far vedere che L è il minimo dei maggioranti. Il fatto che sia un maggiorante lo dice (A). Se non fosse il minimo, vorrebbe dire che esisterebbe un altro maggiorante $L' < L$. Sicuramente si può scrivere $L' = L - E$ per qualche numero $E > 0$. Poichè $L - E$ è un maggiorante, si ha che $x \leq L - E$ per ogni $x \in A$. Ma questo contraddice l'ipotesi (B). Quindi L è necessariamente il minimo dei maggioranti, cioè l'estremo superiore di A. ■

Proposizione 1.7 *Sia A un insieme inferiormente limitato e sia l R. Sono equivalenti:*

1) $l = \inf A$.

2) *l gode delle seguenti due proprietà:*

   (A) $l \leq x$ *per ogni* $x \in A$.

   (B) *Per ogni numero* $E > 0$, *esiste* $x \in A$ *tale che* $x < l + E$.

Dimostrazione Completamente analoga alla precedente. E' lasciata come utile esercizio per lo studente. ■