Approfondimenti: la formula di Stirling

La formula di Stirling è una formula che fornisce una stima asintotica per il fattoriale $n!$ Essa stabilisce che[1]

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,, \tag{1}$$

cioè che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}\,.$$

Se si introduce la successione numerica

$$a_n := \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

la formula di Stirling (1) sarà provata se si sarà in grado di dimostrare che $a_n \to \sqrt{2\pi}$, per $n \to \infty$. La dimostrazione di questo fatto – e quindi della formula (1) –, pur non utilizzando argomenti 'sofisticati', non è immediata: essa si articola in alcuni passi principali, che vengono qui messi in maggiore evidenza e la cui dimostrazione viene dettagliata nel seguito.

i) Si prova innanzitutto che a_n è una successione *decrescente*. Combinando la proprietà di monotonia con il fatto che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (cioè a_n è una successione inferiormente limitata), ed utilizzando il Teorema sul limite di successioni monotone, si ottiene che a_n risulta convergente, con limite $L \geq 0$.

ii) Successivamente, si mostra che la successione $b_n := a_n e^{-\frac{1}{2n}}$ è *crescente*. Il Teorema del limite di un prodotto fornisce $b_n \to L \cdot 1 = L$, ove $L = \sup_n b_n$ risulta evidentemente positivo. Si esclude quindi il caso $L = 0$, e si ha $L > 0$.

iii) Si prova infine che $L = \sqrt{2\pi}$. Il valore esatto di L è ottenuto utilizzando in maniera cruciale la *Formula di Wallis*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\,. \tag{3}$$

La dimostrazione della *Formula di Wallis* si trova in larga parte dei testi di Analisi Matematica (anche se non sempre nei testi più recenti indirizzati a studenti di corsi di laurea triennale). Essa segue, senza particolari difficoltà, dalle note formule per l'integrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\, dx\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

1. Dalla definizione (2) è evidente che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$; inoltre, semplici manipolazioni algebriche mostrano che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}} = \frac{(n+1)^n\sqrt{n+1}}{n^n\, e\,\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\,. \tag{4}$$

[1] Si ricordi che il simbolo $\sim$ si legge "è asintoticamente equivalente a", oppure "è asintotica a".

Al fine di provare che a_n è una successione monotona decrescente (non crescente), occorre mostrare che $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$; si vedrà che di fatto $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, cioè a_n è decrescente *in senso stretto*. In virtù della catena di uguaglianze in (4), la stima (dal basso) $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ sarà stabilita se saremo in grado di provare che

$$\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \log\big(1 + \frac{1}{n}\big) - 1 > 0\,. \tag{5}$$

La (5) suggerisce che si introduca la funzione di una variabile

$$f(t) := \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{t}\Big) \log(1+t)\,, \qquad 0 < t \leq 1\,, \tag{6}$$

che consente di riscrivere sinteticamente (4) come

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{f(1/n)-1}\,,$$

mentre la condizione (5) non è altro che

$$f(1/n) - 1 > 0\,. \tag{7}$$

Non è difficile provare f è una funzione *strettamente crescente* in $(0, +\infty)$, e in particolare in $(0, 1]$. Di conseguenza, si ha

$$f(t) > \inf_{(0,1]} f(t) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \Big[\frac{1}{2}\log(1+t) + \frac{\log(1+t)}{t}\Big] = 1\,, \tag{8}$$

che riscritta per $t = 1/n$ stabilisce la validità di (7).

In conclusione, si è provato che

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{f(1/n)-1} > e^0 = 1\,,$$

e $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è strettamente descrescente, come affermato in **i)**.

2. Si ritorni alla definizione di f in (6), osservando che in virtù della stima

$$\log(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

(di facile dimostrazione), si ha anche

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\log(1+t) + \frac{1}{t}\log(1+t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} = 1 + \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6} \leq \\ &\leq 1 + \Big(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\Big)t^2 = 1 + \frac{t^2}{4}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

ove si è utilizzata la maggiorazione $t^3 \leq t^2$ valida per $0 < t \leq 1$. La stima (9) fornisce, per $t = 1/n$, $f(1/n) \leq 1 + 1/(4n^2)$, da cui segue

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{f(\frac{1}{n})-1} \leq e^{\frac{1}{4n^2}}\,. \tag{10}$$

Sia ora $b_n := a_n e^{-\frac{1}{2n}}$, $n \geq 1$. Si ha

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n e^{-\frac{1}{2n}}}{a_{n+1} e^{-\frac{1}{2(n+1)}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} e^{\frac{-n-1+n}{2n(n+1)}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} e^{-\frac{1}{2n(n+1)}} \leq$$

$$\leq e^{\frac{1}{4n^2}}\, e^{-\frac{1}{2n(n+1)}} = e^{\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n(n+1)}} = e^{\frac{n+1-2n}{4n^2(n+1)}} = e^{\frac{1-n}{4n^2(n+1)}} =$$

$$= e^{-\frac{n-1}{4n^2(n+1)}} \leq e^0 = 1\,,\ n \geq 1\,, \tag{11}$$

ove nella prima maggiorazione si è utilizzata la stima (10). Pertanto $b_n/b_{n+1} \leq 1$ e poiché $b_n > 0$, la successione $\{b_n\}_{n\geq 1}$ è monotona *crescente*. Dal Teorema sul limite di un prodotto si ottiene $b_n \to L \cdot 1 = L$, ove $L = \sup_n b_n$ risulta evidentemente positivo, che esclude il caso $L = 0$. Si conclude che $L > 0$, ed il passo **ii)** è concluso.

3. Al fine di ottenere il valore esatto di L, si osserva che

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{(n!)^2}{n^{2n}e^{-2n}n\,\sqrt{2}} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}\,. \tag{12}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ in ambo i membri di (12), e ricordando la formula (di Wallis) (3), si ottiene

$$\frac{L^2}{L\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}\,,$$

ovvero $L = \sqrt{2\pi}$, che è quanto anticipato in **iii)** e che conclude la dimostrazione della Formula di Stirling.