Università degli Studi di Firenze – Scuola di Scienze

Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

***Analisi Matematica I* (A.A. 2015/16)**

Funzioni continue, primi problemi di massimo/minimo – 4 Novembre 2015

1. Verificare che la somma di due funzioni crescenti (decrescenti) in un intervallo I è crescente (decrescente) in I. Stabilire se il reciproco di una funzione crescente/decrescente risulta crescente/decrescente.

2. Sia $f(x) = x^3+x+1$, $x \in \mathbb{R}$. Si chiede di giustificare il fatto che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile, e successivamente di calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{y \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right).$$

3. Dimostrare che se $f : [0,1] \to [0,1]$ è continua, allora esiste x tale che $f(x) = x$.

4. Provare che
(i) non esiste una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva;
(ii) esiste una funzione $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva;
(iii) non esiste una funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ continua e bigettiva.

5. (*Variante del Teorema di Weierstrass*) Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Dimostrare che esiste $\min_{x \geq 0} f$.

6. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1-\sin x}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
si chiede di (i) verificare che f è iniettiva, e determinarne l'immagine; (ii) scrivere esplicitamente la funzione inversa f^{-1}; (iii) calcolare, se esiste,
$$\lim_{y \to 1} \frac{f^{-1}(y) - y + 1}{(y-1)^2}.$$

7. Stabilire qual è l'infinito di ordine superore e quale quello di ordine inferiore tra le successioni
$$n^{100n}, \quad 2^{n^3}, \quad 10^{n^2}.$$

8. Stabilire se le proposizioni seguenti sono vere o folse:
(i) Esiste $c > 0$ tale che $x \arctan x + \cos^2 x \geq c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(ii) Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{\sqrt{x}} \leq cx^{2016}$ per ogni $x \geq 0$.

9. Dimostrare che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ non negativa assume in x_0 valore massimo/minimo (assoluto o relativo) se e soltanto se lo stesso vale per la funzione $f^2(x)$.

10. (*Dal testo di B.P. Demidovič*) I letti di due corsi d'acqua (entro i limiti di un certo campo) sono rappresentati approssimativamente dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla retta di eqauzione $x - y = 2$. I due corsi d'acqua devono essere collegati per mezzo di un canale rettilineo di lunghezza minima. Per quali punti bisogna farlo passare?

11. (*Ispirato da un problema contenuto anche nel testo di riferimento*) Durante la ristrutturazione di un palazzo viene concessa l'apertura di una finestra, la cui forma è quella di un rettangolo sormontato da un semicerchio (il cui diametro coincide con un lato del rettangolo). Secondo il progetto, la finestra sarà arricchita da una cornice di pietra serena: per via dei costi relativi, il perimetro della finestra è dato. Determinare le dimensioni della finestra che rendono massima l'apertura.

12. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|-|x-1|^2}{x-1} e^{-|x|} & x \neq 1\,, \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

stabilire per quali x f risulta continua, e per quali x essa è derivabile.

13. (*Dal testo di B.P. Demidovič*) Dato un foglio di forma circolare, se ne tagli un settore in modo tale da ottenere un imbuto di capacità massima.