31 ottobre 2017

9/10/17 LEZIONE 10

FUNZIONI

Notazione: $\mathbb{R}_\star := \mathbb{R} - \{0\}$.

Definizione. Siano $D, C \subseteq \mathbb{R}$. Una terna (f, D, C) è una **funzione** se f descrive una legge che ad *ogni* elemento $x \in D$ associa *al più un* elemento $y \in C$, DIAGRAMMA [ATT!! Giusti nella def. a p.116 dice *un* per dire *UNO SOLO*. Quindi qualche elemento di C può non avere controimmagine in D. Infatti poi distingue codominio (def a p.117) da immagine $Im(f)$, def. a p. 119]

indichiamo tale fz con $f : D \to C$,
D si chiama **dominio** di f e C **codominio** di f.
x **variabile indipendente**, y **variabile dipendente**.

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3$ è una funzione

f è descritta da una espressione algebrica:

Campo di esistenza (CE) (sul libro *insieme di definizione*) di una espressione= ins. delle x su cui f è definita, ossia su cui le operazioni descritte da f sono possibili e conducono ad un n reale

Es. Il campo di esistenza di $\frac{1}{x}$ è $\mathbb{R}_\star$
$f : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione

Dominio di una fz: un ins. $D \subseteq CE$ tale che $f : D \to C$.
D è un insieme su cui ci interessa studiare f.
Il dominio di una fz può essere più piccolo del CE: $f : D \to C$ è una fz non appena $D \subseteq CE$.

Es. $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione: in questo caso ci serve studiare/usare la f solo su un Dominio più piccolo di $\mathbb{R} - \{0\}$

EX. CE di $\sqrt{4x^2 - 2}$
NB: quando all'esame scritto si chiede di determinare il dominio si intende il *più grande dominio possibile,* ossia il CE

QUALI SONO I FATTI DA TENERE IN MENTE PER IL CALCOLO DI UN CE:
$\star$ radici $\sqrt{a}$ pari estraibili solo se argomento $a \geq 0$
$\star$ denominatori di frazioni sempre $\neq 0$
$\star$ vedremo: potenze irrazionali a^i definite solo se, per $i > 0$ argomento $a \geq 0$, per $i < 0$ argomento $a > 0$
$\star$ vedremo: logarirmi $\log(a)$ definiti solo se argomento $a > 0$.

[Es. Il prezzo di mercato delle azioni ENEL è oggi 4.21 Eu cad. Se compro x
[azioni il valore del mio portafoglio è $4.21x$; $f(x) = 4.21x$, definita da $D = \mathbb{R}_+$
[a $C = \mathbb{R}_+$ è una fz

spesso chiamiamo x **input** ed il risultato $f(x)$ **output**. $y = f(x)$ è il **valore** assunto da f quando l'input è x

[Nell'es. sopra delle azioni, se compro 1'000 azioni, $x = 1'000$ è l'input, $4.21 \cdot 1000$
[$= 4'210$ è il valore del mio pf, ed è l'output di f.

NB un elem FONDAMENT per una fz è che ad ogni input venga associato **al più un** output, DIAGRAMMA.

Es. RADICE ALGEBRICA: per $x \geq 0$: $\sqrt{x} :=$ tutti i n che al quadrato dan x. Es $\sqrt{9} = \{+3, -3\}$. Questa legge, con $D = \mathbb{R}_+, C = \mathbb{R}$ **NON può definire una fz**
RADICE ARITMETICA:
$\sqrt{x} :=$ il n≥ 0 che al quadrato da x,
$\sqrt{9} = +3$. Questa f, assieme a $D = \mathbb{R}_+$ e $C = \mathbb{R}_+$ definisce una fz.

La mat traduce, schematizza, modellizza un fatto concreto $\rightarrow$ aiuta a misurarlo, quantificarlo e studiarlo

Es. Se una azienda per produrre x unità di una merce ha costi fissi 200 Eu (ad es. di acquisto di un macchinario) e costi variabili $10x$ proporzionali alla quantità x prodotta, il **costo di produzione** di x unità, pari a $200 + 10x$, con $D = R_{++}$, $Cod = \mathbb{R}$, $C(x) = 200 + 10x$ è una fz.

Es. Il n di metri y percorsi da un oggetto che cade (partendo da fermo) nel vuoto (dove non c'è attrito dell'aria) è completamente determinato dal numero x di secondi trascorsi: $y = \frac{1}{2}gx^2$, dove g=9.8 m/s^2 è l'accelerazione di gravità. Ad es. in 8 secc l'oggetto percorre $\frac{9.8}{2} \cdot 8^2 \approx 5 \cdot 64 = 320$ mt.
Ebbene, $(f, \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ è una fz.

NB: è abuso di notazioni se troviamo scritto $f : A \rightarrow C$ con A più grande del CE. In tal caso la terna (f, A, C) non può propriamente chiamarsi fz, ma, una volta determinato il CE, possiamo dire che $f : CE \rightarrow C$ è una fz.

EX Dire se è fz la $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ che associa a $r \in \mathbb{Q}$ la somma $p + q$ dove p, q sono tali che $r = \frac{p}{q}$.

EXX CASA sul libro 4.1, 4.2 (data f calcolare f in vari punti e combinazioni), 4.8 (costruire fz volume del cilindro e dominio)

EXX CASA Zwirner (*insieme di esistenza* = campo di esistenza = *ins di defini zione*), p.606 n. 6,7,10,11,36

Quando $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono associati da f, diciamo che $\bar{y} = f(\bar{x})$ è **immagine** di $\bar{x}$ tramite f, mentre $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ è **controimmagine** (o **immagine inversa**) di $\bar{y}$ tramite f.

Nell'es. $f : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$: $f^{-1}(3.2)$? il valore $\bar{y} = 3.2 = \frac{32}{10}$ è scrivibile come $3.2 = \frac{1}{\bar{x}}$ e allora proviene da $\bar{x} = \frac{1}{3.2} = \frac{10}{32}$. L'immagine di $\bar{x} = \frac{10}{32}$ è $\bar{y} = 3.2$, $\bar{x} = \frac{10}{32}$ è controimmagine di $\bar{y} = 3.2$.

EX. $f(x) = \frac{5x+2}{3x-2} : \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$. $f^{-1}(2)$? [6]; $f^{-1}(y)$, per il generico y? torna se $y = 2$?

[per $y \neq \frac{5}{3}, f^{-1}(y) = \frac{-2y-2}{5-3y}$, $f^{-1}(\frac{5}{3}) = \emptyset$.]

REGOLA D'ORO n.3 PRIMA DI DIVIDERE per un numero MI DEVO ASSICURARE CHE SIA $\neq 0$!!

Studieremo funzioni a valori y reali di variabile x reale: $D \subseteq \mathbb{R}$, $C \subseteq \mathbb{R}$

Grafico di una espressione $f(x)$, non nec fz: $\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subsetneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, perciò raffiguriamo Γ sul **piano cartesiano**, che è una rappresentazione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Richiamo: **piano cartesiano**: 2 rette incidenti (scegliamo di prenderle perp), dette **assi cartesiani**, definiamo *origine* il p. di incontro, stabiliamo *versi di percorrenza* e *unità di misura*, DISEGNO
Ogni punto P è univocamente identificato da una coppia (x, y) di n reali, quelli che corrispondono ai pti ottenuti sugli assi tracciando rette parallele agli stessi assi.

(x, y)= **coordinate:** x=ascissa di P, y= ordinata di P, DISEGNO

Il graf. di una fz è rappr. dall'ins dei pti (x, y) del piano cart per i quali la y è ESATTAMENTE il valore assunto da f su x, ossia y è l'output generato dall'input x, ossia y è l'immagine di x, DISEGNO

Es. $f : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$:
per $x = 1$ ho $y = 1$, $x = 2$ ho $y = \frac{1}{2}$, $x = 3$ ho $y = \frac{1}{3}$, etc
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$, $x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$, etc.
$x = -1$ ho $y = -1$, $x = -2$ ho $y = -\frac{1}{2}$, etc. DISEGNO

NB che per conoscere tutto il graf dovrei calcolare f per INFINITI input, in effetti il computer la calcola per TANTISSIMI input. Noi invece impareremo a STUDIARE una fz per poterne fare un adeguato grafico qualitativo

Il graf descrive una fz completamente, rendendo tangibili tutte le sue caratteristiche. Quando un graf è noto, da lì si possono ricavare tutte le info su f. In generale però non è immediata la conoscenza del graf, e allora la fz verrà studiata per risucire a riassumerne le sue propr. su un graf

$\star$ **Ex**. DISEGNO, FOGLIO A PARTE [di fz sul piano cart.]
quanto fa $f(3)$? $f(0)$? $f^{-1}(-1)$? $f^{-1}(2)$?

EX. Fare i graff di:
1) $f(x) = 2x - 1$, con $C = D = \mathbb{R}$;
Definiamo le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ fissati: *funzioni lineari o affini*

10/10/17 LEZIONE 11

2) $f(x) = -x^2 - 3x + 1$, con $C = D = \mathbb{R}$;
Definiamo le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ fissati: *funzioni quadratiche*

3) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \in [0, 2]; \\ -x + 7 & \text{se } x \in (2, 4], \end{cases}$

con $D = [0,4], C = \mathbb{R}$.

Definiamo le funzioni $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = \begin{cases} \text{espressione} & \text{se } x \in A \\ \text{altra espressione} & \text{se } x \in B, \end{cases}$
con $A, B \subset \mathbb{R}$ disgiunti, fissati: *funzioni definite a tratti.*

ES. $|x|$ è di fatto una fz def a tratti: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

4) $\quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \in [0,2]; \\ -x+3 & \text{se } x \in (2,4], \end{cases}$
con $D = [0,4], C = \mathbb{R}$.

NB: pur essendo definite con una parentesi graffa, le fz def a tratti NON DANNO LUOGO ad un sistema di condizioni per x. Infatti A e B sono disgiunti

NB: gli input x si trovano sull'asse x, quindi D è un sottoins dell'asse x,
le $f(x)$ si trovano sull'asse $y \Rightarrow C$ è sottoins dell'asse y.
Le $f^{-1}(y)$ sono input, quindi si trovano sull'asse x.

Cond nec affinché (f, D, C) sia fz è che per ogni possibile ascissa a, tracciando la retta vertic $x = a$, si intercetti su $\Gamma(f)$ al più un pto.

ES. GRAF della RADICE ALGEBR, GRAF della RADICE ALGEBRICA

NB Per una fz: mentre $y_1 \neq y_2$ non possono provenire da uno stesso x,
$x_1 \neq x_2$ potrebbero essere associati da f ad uno **stesso** y, DIAGRAMMA
In tal caso la controimmagine di y è costituita da più elementi: $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$.

Es. $y = 3x + 1 : f^{-1}(y)$ singoletto

Es. $f(x) = x^2,\ D = \mathbb{R}_+,\ C = \mathbb{R} : f^{-1}(4) = \{+2, -2\}$, RADICE ALGEBR.

NB La controimmagine di $\bar{y}$ è l'ins. delle soluzioni x dell'eq. $f(x) = \bar{y}$:
graficam la determino tracciando una **retta orizz** a quota y e guardando quali sono le ascisse dei pti intercettati sul graf

Una fz (f, D, C) si dice **iniettiva** quando $\forall y \in C, f^{-1}(y)$ ha **al più** un elemento
f iniett sse $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$

Es. $f(x) = 3x + 1$ è iniett, GRAF, retta orizz
Es. $f(x) = x^2$ NON è iniett, GRAF, retta orizz
Es. PLOT della fz ex preced, pto 4): è iniettiva.
PLOT di fz [tipo x^3]: è iniettiva.

$f(D)$= **immagine** di f (e NON di un SINGOLO x)= insieme dei valori y assunti da f al variare di $x \in D$, ossia
ins delle y per cui l'eq. $f(x) = y$ ammette soluzioni x, ossia
ins delle y per cui la retta a quota y interseca il grafico di f.

$Im(f) \subseteq C$, si trova sull'asse y
Ci potranno essere degli $y \in C$ che non vengono mai assunti, DIAGRAMMA

Es. $f : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$: $\forall y \neq 0$ è scrivibile come $y = \frac{1}{x}$ con un

$x \in \mathbb{R}_\star$: infatti $x = \frac{1}{y}$.
GRAF.
Però 0 NON ha controimm: $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Immagine di $A \subset D : f(A)$

Controimmagine di $B \subset Cod : f^{-1}(B)$

REGOLA D'ORO n.4, simile alla REGOLA D'ORO n.1 [basi positive allora $a \leq b$ sse $a^2 \leq b^2$]: quando elevo al q i due membri di una EQUAZIONE, la nuova eq che ottengo ha le stesse soluzioni SE e SOLO SE i due membri inizialmente avevano lo STESSO SEGNO
Es. $-2 \neq 2$ mentre $(-2)^2 = 2^2$
quindi PRIMA DI ELEVARE al q i due membri di una eq devo CONTROLLARE I SEGNI delle basi.

12/10/17 LEZIONE 12

Ex. Sia $\varepsilon > 0$. Risolvere $\sqrt{x} > -\varepsilon + 5$.

Ex. risolvere $\sqrt{x-2} \leq 10x$.
Sol. CE $x \geq 2$; il membro di sx è ≥ 0: $x < 0$ non rientra nelle CE. Se $x \geq 0$ sono autorizz ad elevare al q, so che le soluz restano le stesse: vado a ris $x - 2 \leq 100x^2$, $100x^2 - x + 2 \geq 0 : y = 100x^2 - x + 2$ rappres una parab sul piano cart, $\Delta = 1 - 800 < 0$, allora la parab, che ha concavità rivolta vs l'alto, non tocca l'asse delle ascisse, allora ne rimane sempre sopra, allora la dis è verif $\forall x \geq 0$, ma solo le $x \geq 2$ sono accettabili: $\mathcal{S} = [2, +\infty)$.■

Ex. Consideriamo l'espress. $\sqrt{x}$. CE ?
prendiamo la RAD ARITM: $f(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: Im(f)?
Dim. che $Im(f) = \mathbb{R}_+$. Dobbiamo determinare tutti gli y per cui l'eq $\sqrt{x} = y$ in x ha soluzioni: abbiamo $\sqrt{x}$, vogliamo x.
NB la rad aritm, per def, è ≥ 0. Allora se $y < 0$ non abbiamo soluz.
Se invece $y \geq 0$ allora l'eq data ha le stesse soluz di $x = y^2$, ed abbiamo trovato x.
Dunque: $\forall y \geq 0$ abbiamo $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Segue che $Im(f) = \mathbb{R}_+$.■

EXX Giusti p.123, 4.11 pti 2,3,11 $(f(A)), p.124, 4.12 pti 1, 4, 7, 8 (f^{-1}(B))$

Def. $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset CE$, fz si dice **limitata superiormente** se $Im(f)$ (sull'asse y) è un ins. limitato superiormente, ossia le y assunte da f sono limitate da sopra da qualcosa: $\exists K \in \mathbb{R} : f(x) \leq K \ \forall x \in D$, DISEGNO
Es. Fare plot di $\sin(x)$ senza dare l'espess, e riconoscere se limit sup

Def. $f : D \to \mathbb{R}$ è limitata superiormente <u>su $A \subset D$</u>
ES: $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$

Def. **Restrizione.** $f : D \to \mathbb{R}$, $A \subset D$: $f_{|A} : A \to \mathbb{R}$ data da $f_{|A}(x) = f(x)$ si dice restrizione di f ad A: guardo la stessa f di partenza, ma solo limitatamente alle x di A, nuovo dominio *ristretto* A
ES: $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$ PLOT

OSS: $f_{|A}(x)$ limitata superiorm sse f limitata super. su A

Def. $f : D \to \mathbb{R}$, si definisce $\sup_D f := \sup Im(f)$.

ES $\frac{1}{x}$ su $D = (0, +\infty)$: $Im = (0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$ su $D = (2, +\infty)$: $Im = (0, \frac{1}{2})$

Def. $f : D \to \mathbb{R}$, se $Im(f)$ ammette max, questo viene chiamato **massimo globale** (o **assoluto**) di f su D. Quindi $M = \max_D f$ è
1) limitazione superiore per tutte le $y \in Im(f)$: $f(x) \leq M, \forall x \in D$,
ossia, M è maggiorante dell'ins. di tutti i valori $f(x)$ assunti alla fz
2) è raggiunto da un $y \in Im(f) : \exists\ \bar{x} \in D : f(\bar{x}) = M$.
$\bar{x}$ viene chiamato **punto** di max globale, mentre $M = f(\bar{x})$ si chiama **valore** massimo globale.

Es. $\frac{1}{x}$ su $(2, +\infty)$ ha max?
$\frac{1}{x}$ su $[2, +\infty)$ ha max? pti di max?
se ho il graf lo vedo subito

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^4$ GRAF: è limitata sup? $\max_{\mathbb{R}} f$? $\bar{x}$? $\max_{[1,+\infty)} f$?

NB: f ha UN SOLO valore max globale (il max è unico), ma può avere PIù PUNTI di max glob: DISEGNO

Es. Plot di $-\cos(x)$ senza espressione: max su $[-2\pi, 2\pi]$? pti di max?

Es.: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \cup [3, +infty) \\ 1 & \text{se } x \in (1,3) \end{cases}$ p.ti di max?

$f : D \to \mathbb{R}$ fz si dice **limitata inferiormente** se $Im(f)$ è un ins. limitato inferiormente, ossia $\exists k \in \mathbb{R} : f(x) \geq k\ \forall x \in D$, DISEGNO

Es. x^2

Def. $f : D \to \mathbb{R}$, si definisce $\inf_D f := \inf Im(f)$.
Es. x^2: $Im(f) = \mathbb{R}_+$
Es $\frac{1}{x} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$: $Im(f) = (0, +\infty)$

Def. $f : D \to \mathbb{R}$, se $Im(f)$ ammette min, questo viene chiamato **minimo globale** (o **assoluto**) di f su D: Quindi $m = \min_D f$ se
1) $m \leq f(x), \forall x \in D$
2) $\exists\ \underline{x} \in D : f(\underline{x}) = m$, tutti gli x che, come $\underline{x}$, danno $f(x) = m$ si chiamano **punti** di min globale.
Es. x^2

m unico, $\underline{x}$ non necessariam

$f : D \to \mathbb{R}$ fz si dice **limitata** se $Im(f)$ è un ins. limitato sia sup. che inferiormente, ossia $\exists K \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq K\ \forall x \in D$, ossia $-K \leq f(x) \leq K\ \forall x \in D$, DISEGNO

EX. $f : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ (è limitata inferiorm su $\mathbb{R}$): inf con dimostrazione? min?

EX per CASA: n. 52; 55 no pto b) [ha log], del pto d) solo la prima; 62 dall'eserciziario (sup max f)

Def. p. di **max locale** (o **relativo**) per f su D [p.154 Zezza] $\bar{x}$ se $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap D$ si ha $f(x) \leq f(\bar{x})$

16/10/2017 **LEZIONE 13**

ES PLOT di $x^3 - 3x$ [$f' = 3x^2 - 3, f'' = 6x$, tg negativam inclinata in 0]: $\bar{x} = -1$ p. di max loc; $f(-1)$ valore max loc; è 0 p. di max loc?

Def. $f(\bar{x})$ **valore max locale** (o **relativo**) per f su D
Es. PLOT di $\sin x$

OSS: posso avere più valori di max locale.
ES.

OSS: un max loc è assoluto? un max assoluto è loc?

Def. p. di **min locale** (o **relativo**) per f su D: $\underline{x}$
Def. $f(\underline{x})$ **valore min locale** (o **relativo**) per f su D

EX per CASA: n. 65 (max loc), 82, 83, 84, 86 (Im f, anche parametrici) dall'eserciziario

Ex PER CASA. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 100x^2 - x + 2$
0) $f(-1)$? $f(3)$?
1) CE e Im(f)
2) $\Gamma(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max_{CE} f, \min_{CE} f$ locali e globali
3) determinare $f^{-1}(5), f^{-1}(1)$.

Sol. 0) $f(-1) = 100 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = 103$, $f(3) = 100 \cdot (3)^2 - (3) + 2 = 900 - 1 = 899$.
1) $\forall x \in \mathbb{R}$ è possibile eseguire $100x^2 - x + 2$ ed il ris è un n reale: $CE = \mathbb{R}$, quindi la f data è una fz.
Abbiamo appena visto che $f(x) \geq 0 \forall x$, ma sappiamo anche che i punti di una parabola hanno tutti ordinata $\geq y_V$. Vertice $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) : y_V = -\frac{-799}{400} \approx 2$, perciò $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq \frac{799}{400}\}$.
2) GRAF: parabola con vertice in $(\frac{1}{200}, \frac{799}{400})$, concavità rivolta verso l'alto e **intercetta**(= ordinata del punto di intersezione tra $\Gamma(f)$ e asse y) 2
3) Cerchiamo la controim di $y = 5$, dobbiamo ris. $f(x) = 5$, ossia $100x^2 - x + 2 = 5$, $100x^2 - x - 3 = 0$, $\Delta = 1 + 1200 = 1201$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1201}}{200} \Rightarrow f^{-1}(5) = \{\frac{1+\sqrt{1201}}{200}, \frac{1-\sqrt{1201}}{200}\}$, VD GRAF
NB $\sqrt{900} < \sqrt{1201} < \sqrt{1600}$ quindi $30 < \sqrt{1201} < 40$, diciamo $\sqrt{1201} \approx 35 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{1201}}{200} \approx \frac{36}{200} = \frac{0.36}{2} = 0.18$, $\frac{1-\sqrt{1201}}{200} \approx \frac{-34}{200} = -0.17$. Infatti la retta orizz a quota 5 interseca in 2 punti il grafico di f.
Cerchiamo ora la controim di $y = 1 : f(x) = 1$ signif $100x^2 - x + 2 = 1$, $100x^2 - x + 1 = 0 :$ $\Delta = 1 - 400 < 0 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni: $f^{-1}(1) = \emptyset$, infatti $1 < y_V$. Infatti la retta orizz a quota 1 non interseca il grafico di f. ■

fz inversa: data una fz INIETTIVA $f : D_f \to \mathbb{R}$, con $D_f \subseteq CE(f)$, diciamo allora che $f : D_f \to \underline{Im(f)}$ è **invertibile**, e definiamo la sua **inversa** la fz

$$f^{-1} : \begin{array}{l} Im(f) \to D_f \\ y \to f^{-1}(y) \end{array}$$

che associa ad ogni $y \in Im(f)$ la sua controimmagine tramite f.

OSS. f è **invertibile su** D sse f^{-1} è una fz (ogni input y ha al più un output $f^{-1}(y)$)

quindi: $f : D \to Im(f)$ è **invertibile** sse la sua inversa è una fz sse $f : D \to Im(f)$ è iniettiva

NB: $f : D \to Im(f)$ è iniettiva sse $f : D \to \mathbb{R}$ è iniettiva, ma non dico che $f : D \to \mathbb{R}$ è invertibile (perché $f^{-1} : \mathbb{R} \to D$ NON è fz se $D_{f^{-1}} \neq \mathbb{R}$).

OSS: $CE(f^{-1}) = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = D$: tutti gli $x \in D_f$ sono tali che esiste un y per cui $x = f^{-1}(y)$, perché $y \in Im(f)$, quindi $f(x) = y$, ed essendo f iniettiva si ha che $f(x) = y$ sse $x = f^{-1}(y)$

ATT! NON CONFONDERE la *funzione* inversa f^{-1}, con l'*immagine* inversa $f^{-1}(B)$ o $f^{-1}(y)$:
· le immagini inverse degli $y \in Im(f)$ esistono sempre, mentre $f^{-1} : Im(f) \to D_f$ è una funzione solo se f iniettiva;
· le immagini inverse sono *insiemi*, mentre f^{-1} è una *funzione*.

Ex. $f(x) = \frac{1}{3x-5}$: 1) CE? 2) iniettiva? 3) Im ? 4) inversa?
Sol. 1) denominatori sempre $\neq 0$: $x \neq \frac{5}{3}$.
2) Dato il generico y cerco la controimm: risolvo in x l'eq. $f(x) = y$, $\frac{1}{3x-5} = y$.
NB: se $y = 0$ no soluz; altrimenti posso passare ai reciproci: cerco x :
$3x - 5 = \frac{1}{y}$, $x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + 5\right)$. ACCETTABILE?
Per ogni $y \neq 0$ ho trovato 1 sola controim $\Rightarrow$ 2) f è iniett su D e
3) $Im(f) = \{y \neq 0\}$.
4) $f^{-1} : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + 5\right)$.

MODO ALTERNATIVO per verificare l'iniettività:
NB: non ok verificare che $f(x_1) \neq f(x_2)$ per 2 specifici numeri diversi scelti.
ES. $f(x) = x^2$, $x_1 = 1, x_2 = 2$.
Verifico che PER OGNI $x_1, x_2 \in D$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Il modo alternativo però non fornisce in automatico $Im(f)$ e le controimmagini

[**Ex.** PLOT di fz: CE? Im(f)? è la fz iniettiva?

NB: nell'EX sopra la variabile di una fz è **muta**: conta il ruolo che ha, non il nome. La posso chiamare x: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + 5\right)$

E' importante dare ad entrambe f, f^{-1} la stessa var, così ne possiamo disegnare i graf sullo stesso piano cartes con lo stesso asse x. GRAF $x^2_{|\mathbb{R}_+}, \sqrt{x}$

Vale in generale che $\Gamma(f^{-1})$ è il **simmetrico** di $\Gamma(f)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadr del piano cart

17/10/2017 **LEZIONE 14**

EX. Sia $f(x) = -3x + 2$: calcolare la fz inversa e farne il grafico

PER CASA EX 66 eserciziario

OSS. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è una fz non iniett $\Rightarrow$ non è invertib. GRAF
Se però restringiamo D, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ diventa iniett, e troviamo la fz inversa di $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (procedimento inverso di quello fatto sopra per calcolare l'inversa di $\sqrt{x}$). Avremo $D_{f^{-1}} = Im(f) = \mathbb{R}_+$.
Dato $y \in D$, ossia $y \geq 0$, generico, cerco $x : x^2 = y$.
ho basi positive, posso estrarre la radice: estraggo la RADICE ALGEBRICA, perché cerco TUTTE le soluzioni x. $x = \pm\sqrt{y}$ dove $\sqrt{y}$ è aritmetica (e $\pm\sqrt{y}$ sono le radici algebriche); ma radici negative NON ACCETTAB perché non appart. al D$\Rightarrow$ accetto solo la RAD ARITM $x = \sqrt{y} : f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. PLOT

L'iniettività dipende dal dominio, intervallo massimale di invertibilità

EX per CASA. Fz **costo di produzione**. La definiamo anche su 0, inoltre teniamo conto del tipico fatto che fino ad un certo livello di produzione (ad es. $x \leq 100$) ho un tipo di costo, oltre quel livello mi servono 2 macchinari anziché uno, ed il costo cambia:

$$C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 200 + 10x & \text{se } x \in (0, 100] \\ 400 + 10x & \text{se } x \in (100, 200]. \end{cases}$$

$D = [0, 200]$.
1) disegnare GRAF; Im(C(x))?
2) è $C(x)$ iniettiva? è invertibile?
3) calcolare C^{-1} e disegnare $\Gamma(f^{-1})$.

Sol. 1) retta $y = 200 + 10x$ per i punti con $x = 0, x = 100$ da prendersi solo per le $x \in (0, 100]$; retta $y = 400 + 10x$ per i punti con $x = 100, x = 200$ da prendersi solo per le $x \in (100, 200]$, etc.

fz monotone

Def. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **crescente in** D (o **su** D) se conserva l'ordinamento dei n. reali, ossia se $\forall x_1, x_2 \in D$ e $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

NB: se diciamo che $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente, senza precisare dove, si intende che f sia crescente in D.

OSS: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente su D **sse**
$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2$, si ha **rapporto incrementale** $:= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$.

Es. $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente su $\mathbb{R}$, GRAF
il grafico va sempre a salire man mano che x aumenta
dim. prendo $x_1 < x_2$: vedo che $x_1^3 \leq x_2^3$, ossia $x_2^3 - x_1^3 \geq 0$. Infatti $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$: primo fattore > 0,
1) se x_i concordi $\Rightarrow$ secondo fattore $\geq 0 \Rightarrow x_2^3 - x_1^3 \geq 0 \Rightarrow$ ok
2) se x_i discordi $\Rightarrow x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < 0 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$.

Es. $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON è crescente su $\mathbb{R}$. $f(x) = x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è $\uparrow$.

Def. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **strettamente crescente in** D se
$\forall\ x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Oss: rapporto increm > 0

Es. $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strett. crescente su $\mathbb{R}$
Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \equiv c$ è crescente ma non strett., GRAF. Si dice anche **debolmente crescente**

Oss: $f \uparrow$ su $[a, b] \Rightarrow \sup_{[a,b]} f$? $\inf_{[a,b]} f$?

EX. [Metà dell'ex 1 del compito del 14/7/2016] La fz def a tratti da

$$g(t) = \begin{cases} 10 + \frac{t}{8} & \text{se } t \in (0, 120] \\ 22 + \frac{t}{15} & \text{se } t \in (120, 300] \\ 37 + \frac{t}{30} & \text{se } t > 300. \end{cases}$$

rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata t secondi.
1) Si calcoli la spesa per una telefonata di 120 secondi, per una di 5 minuti e per una di 500 secondi.
2) Si calcoli $\inf_{(0,120]} g(t)$ e si interpreti il risultato.
3) Si calcolino $\inf_{(120,300]} g(t)$, $\inf_{(300,+\infty)} g(t)$ e si disegni il grafico della tariffa g in funzione di t.
Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:
4) è g crescente? è strettamente crescente?
5) avendo a disposizione 35 cent (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata?

Def. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **decrescente in** D se INVERTE l'ordinamento dei n. reali, ossia se $\forall x_1, x_2 \in D$ e $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \equiv c$ è decrescente, GRAF

Es. $f : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ GRAF: è decrescente su $\mathbb{R}_{++}$, è decrescente su $\mathbb{R}_{--}$, MA NON su $\mathbb{R}$, o su $\mathbb{R}_\star$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decrescente su D **sse** $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2$, si ha $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$.

Def. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **strettamente decrescente in** D se $\forall\ x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

19/10/2017 LEZIONE 15

Es. $f(x) = -x^3$.

Es. Mostro solo plot di $\sin(x)$: f è strett. decrescente su $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$:
$f : [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R} \downarrow\downarrow$

Def. una fz **monotòna** è una fz o strett cresc, o cresc, o strett decr, o decr

EXX Giusti 5.10 pti 1,3, p.184

Ex. Risolvere $\sqrt[3]{-2+3x} \leq \sqrt[3]{-x+1}$
elevo al cubo, che è $\uparrow$, allora la disuguagl. proposta vale sse $-2+3x \leq -x+1$, $x \leq \frac{4}{3}$

Ex. Risolvere $\sqrt{x-2} \leq 10x$ [già vista $\sqrt{x-2} = 10x$]
NNB: prima di elev al quadrato ricordare la REGOLA D'ORO n. 1: sono autorizzata SOLO SE basi ≥ 0.
INFATTI $x^2 \uparrow$ SOLO dove $x \geq 0$: "$x_1 \leq x_2$ sse $x_1^2 \leq x_2^2$" è garantita solo per x_1, x_2 nella zona dove $x^2 \uparrow$

Proprietà. Se $f : D \to C$ è *strettamente* cresc o *strettamente* decresc $\Rightarrow$ f è iniettiva, quindi $f : D \to Im(f)$ invertibile
NB non è vera l'implicaz $\Leftarrow$, ad es. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [-\infty, 0) \\ -x+2 & \text{se } x \in [0,2] \end{cases}$ è iniett ma NON è monotona.

PER CASA: **Pb.2 SCELTA tra le due TARIFFE TELEFONICHE** FAST= f e GO= g: ex 1 compito 14/7/16: SOSTITUIRE $\lim_{t\to 0^+}$ con $\inf_{(0,120]} f$.

- $f : D \to \mathbb{R}$ fz si dice **pari** se
  1) D è simmetrico rispetto all'origine, ossia se quando $x \in D$ allora anche $-x \in D$,
  2) $\forall x \in D$ si ha $f(x) = f(-x)$.

  Es. $f(x) = |x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ è simm risp allo 0, e $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, GRAF
  Es. $f(x) = x^2$

  Es. di graf di fz non pari

  NB: Quando $f : D \to \mathbb{R}$ è pari $\Rightarrow$ il suo graf è **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate** [perché $(x, f(x)), (-x, f(-x)) \in \Gamma(f)$, ma $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$, e questo è il simmetr di $(x, f(x))$ risp all'asse delle ordin.]

  Di conseguenza se devo studiare una fz e mi accorgo che è pari BASTA studiarla su $D \cap \mathbb{R}_+$ e alla fine ribaltare il graf risp all'asse y

- $f : D \to \mathbb{R}$ fz si dice **dispari** se
  1) D è simmetrico rispetto all'origine,
  2) $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$.

  Es. $f(x) = x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari: $\mathbb{R}$ è simm risp allo 0, e $f(-x) = -x = -f(x)$, GRAF

  ATT!! NON BASTA verificare che $f(-x) = -f(x)$ per un x da noi scelto, va controllato SU OGNI $x \in D$: x va lasciato non specificato
  Se invece voglio dimostrare che f NON è dispari BASTA mostrare che $f(-x) \neq -f(x)$ su un solo x scelto

  Es. $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è disp?

  Es. $\frac{2^{x+1}-2^{x-1}}{2^x}$ è pari?

  EX. E' $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$ dispari? CE non è simmetrico risp all'origine

  NB: Quando $f : D \to \mathbb{R}$ è dispari $\Rightarrow$ il suo graf è **simmetrico rispetto all'origine** [perché $(x, f(x)), (-x, f(-x)) \in \Gamma(f)$, ma $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$, e questo

è il simmetr di $(x, f(x))$ risp all'origine.]
Di conseguenza se devo studiare una fz e mi accorgo che è pari BASTA studiarla su $D \cap \mathbb{R}_+$ e alla fine ribaltare il graf risp all'origine.

EX eserciziario (pari/disp) 77 (c), 78 (c) gli altri punti sono fattibili dopo aver visto la carrellata delle seguenti fz elementari

Funzioni elementari

Si intendono le fz più semplici a partire dalle quali poi, con operazioni tra fz, si risecono a costruire fz/modelli con una vasta varietà di proprietà

Funzione **segno**: associa ad un $x \in \mathbb{R}$ il suo segno

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$CE = \mathbb{R}$, GRAF
Im(f)?

Funzione **identità**: $f(x) = x$, $CE = \mathbb{R}$, $Im = \mathbb{R}$, GRAF

Funzione **costante**: per $k \in \mathbb{R}$ FISSATO, "$f \equiv k$" significa "$f(x) = k,\ \forall x \in \mathbb{R}$": $CE = \mathbb{R}$, GRAF, Im? [è f iniettiva?]

Conoscere e ricordare i grafici delle fz elem è FONDAMENTALE per ricordare le loro proprietà

Funzione **valore assoluto**: $f(x) = |x|$, Ebbene $(|x|, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ è una fz

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$CE = \mathbb{R}$, $Cod = \mathbb{R}$
GRAF
$Im(|x|)$?

Ex. $f^{-1}(3)$? [Intervallo massimale di invertibilità di f?]

Funzioni **potenza**. Al variare di x nell'opportuno D, con $C = \mathbb{R}$, le espressioni $f(x) = x^\alpha$, con α fissato, sono fz. Si tratta di fz diverse, ossia con diverse proprietà e diversi grafici, a seconda di quale sia l'esponente.

• **Esponente naturale** Se $n \in \mathbb{N}$, si def.

$$x^n := x \cdot x \cdot \ldots \cdot\ x,$$

dove il n. di fattori è n.
Es. 2^3, $(\sqrt{2})^3$

Base $x < 0$ ammessa: **CE=**$\mathbb{R}$
Es. $(-3)^2 = 9$

GRAFICI:

esponente n **PARI**: $f(x) = x^{2k},\ k \in \mathbb{N}$, PLOT x^2
dal graf si deduce tutto: CE? positività? Im(f)? fz pari? monotonia?
Tutte le potenze con esp n pari hanno graf simile a x^2,
GRAFICI $2k = 2, 4, 6$,

esponente n **DISPARI**: $f(x) = x^{2k+1},\ k \in \mathbb{N}$. PLOT x^3
CE? positività? Im(f)? fz pari? monotonia?
GRAFICI $2k + 1 = 1, 3, 5$

• **esponente negativo:** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, **posso scrivere** $\alpha = -\beta$:

$$x^\alpha := \left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$$

in partic se **esponente in** $\mathbb{Z}$ **e negativo**: $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$
necess $x \neq 0$
Es. $x^{-3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3$
Es. $(\sqrt{2})^{-3}$

Base $x < 0$ ammessa: **CE=**$\mathbb{R}_\star$
Es. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$.

GRAFICI
n **PARI**: $f(x) = x^{-2k},\ k \in \mathbb{N} : x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$ PLOT $\frac{1}{x^2}$
CE? positività? intersez. asse x? Im(f)? simmetrie?
PLOT $\frac{1}{x^4}$

n **DISPARI**: $f(x) = x^{-(2k+1)},\ k \in \mathbb{N} : x^{-2k-1} = \frac{1}{x^{2k+1}}$ PLOT $\frac{1}{x}$
CE? positività? intersez. asse x? Im(f)? simmetrie? iniettività? monotonia?

La fz $f(x) = \frac{1}{x}$ **è strett decresc** su $\mathbb{R}_{++}$ ($D = \mathbb{R}_{++},\ Cod = \mathbb{R}$), PLOT, perciò nel passaggio ai reciproci di due n. positivi si ha: $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ **è strett decresc** anche su $\mathbb{R}_{--}$ ($D = \mathbb{R}_{--},\ Cod = \mathbb{R}$), perciò $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

invece **non** possiamo dire che $\frac{1}{x}$ sia **strett decresc su** $\mathbb{R}_\star$, perché, come si vede dal graf e come già osservato, se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}$ rimane < 0 e $\frac{1}{x_2}$ rimane > 0: $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$

• **Esponente razionale** $\alpha = \frac{1}{n}$**,** $n \in \mathbb{N}$**: radice n-esima**.
se $x = 0$:

$$0^{\frac{1}{n}} = 0$$

se $x > 0$:

$$x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$$

come l'unico numero POSITIVO z (x fissato) tale che $z^n = x$: RADICE ARITMETICA

OSS: Se n **pari e** $x > 0$ l'eq $z^n = x$ ha **2 soluzioni**, si prende la positiva
Se n **pari e** $x < 0$ l'eq $z^n = x$ **non** ha soluzioni: la radice n-esima di x non è def
CE=$\mathbb{R}_+$

Es. $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$; $[\sqrt{12}, 12 \in (9, 16)]$

Se n **dispari**, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ l'eq $z^n = x$ ha **una sola** sol.
QUindi base x negativa ammessa: **CE=**$\mathbb{R}$
Es. $z^3 = 8 : z = \sqrt[3]{8}$
Es. $9^{\frac{1}{3}}\ \sqrt[3]{9}$, $9 \in (8, 27)$;
Es. $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{-4}\ \nexists$

Oss. $g(x) = x^n : CE \to \mathbb{R}$. Dato y, $g(x) = y$ sse $x^n = y$ sse $x = y^{\frac{1}{n}}$,
$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ è dunque la **fz INVERSA di** $g(x) = x^n$, il graf f è quindi il simmetriz zato di graf g

PLOT x^2 e poi $x^{\frac{1}{2}}$
[D($x^{\frac{1}{2}}$)? Im? iniettività?]
PLOT $x^{\frac{1}{2}}$ vs $x^{\frac{1}{4}}$

PLOT x^3 e poi $x^{\frac{1}{3}}$
[D($x^{\frac{1}{3}}$)? Im? iniettività?]
PLOT $x^{\frac{1}{3}}$ vs $x^{\frac{1}{5}}$

23/10/17 **LEZIONE 16**

- **Esponente razionale** $\alpha = \frac{p}{n}, p \neq 1$, **con** $p, n \in \mathbb{N}$ **AI MINIMI TERMINI**.

NOTA: se n pari, p è dispari, e deve essere $x \geq 0$
Quando $x \in$CE, si pone

$$x^{\frac{p}{n}} := (x^p)^{\frac{1}{n}}\ .$$

e vale

$$(x^p)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p .$$

Es. $2^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $[8 \in (4, 9) \Rightarrow \sqrt{8} \in (2, 3)]$

OSS: se $x \geq 0$ e $\frac{p}{n} = \frac{p'}{n'}$, allora $x^{\frac{p}{n}} = x^{\frac{p'}{n'}}$.
Es. $2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{4}}$

Se invece base $x < 0$ NO.
Es. $x = -8$, esp. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$:

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2,$$

mentre

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)} = -2.$$

Per questo l'espon $\frac{p}{n}$ deve essere **ai minimi termini**

[inoltre NB: $\left(\sqrt[6]{-8}\right)^2\ \nexists$

PLOT con esp raz positivo, n **pari: CE=** $\mathbb{R}_+$
$x^{\frac{3}{4}}$ esp < 1, vs x^1, vs $x^{\frac{7}{4}}$ esp > 1
[segno? iniett?]

PLOT con esp raz positivo, n **disp.: CE**$=\mathbb{R}$
$x^{\frac{2}{3}}$ esp < 1, vs x^1, vs $x^{\frac{5}{3}}$ esp > 1
[segno? iniett?]

• **Esponente razionale NEGATIVO** $-\frac{p}{n}, p \neq 1$, **con** $p, n \in \mathbb{N}$ **AI MINIMI TERMINI**.

Il CE è come per $x^{\frac{p}{n}}$ MA senza lo 0

PLOT $x^{\frac{2}{3}}$ vs $x^{-\frac{2}{3}}$
PLOT vs $x^{\frac{7}{2}}$ vs $x^{-\frac{7}{2}}$

• **Esponente** α **IRRAZIONALE** x^α è def solo per $x \geq 0$ o $x > 0$.
Se $x \geq 1$ e $\alpha > 0$:
$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \sup\{r : \mathbf{r} \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq \alpha\}$: i razionali sotto α danno approx per difetto di α.

$r < r' \Rightarrow x^r \leq x^{r'}$, perché $x \geq 1$
Es. $2 < 3$, $2^2 < 2^2 \cdot 2 = 2^3$

Si definisce (e la def. risulta ben posta)

$$x^\alpha = \sup\{x^r : \mathbf{r} \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq \alpha\},$$

così gli x^r danno approx per difetto di x^α.

Es. è difficile immaginare il valore esatto di $3^{\sqrt{2}}$
ma poiché posso aumentare a piacere la precisione dell'approx di $\sqrt{2}$ aggiungendo cifre dopo la virgola, 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142, etc, ottengo approx sempre migliori di $3^{\sqrt{2}}$ se calcolo $3^{1.4}$; poi $3^{1.41}$, poi $3^{1.414}$, poi $3^{1.4142}$, etc.

Se $x \in (0,1)$ e $\alpha > 0$: se r aumenta, allora x^r diminuisce.
Es. $2 < 3$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Si definisce

$$x^\alpha = \inf\{x^r : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq \alpha\}.$$

PLOT $x^{\sqrt{2}}$ esp > 1 vs x^1 vs $x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
per $\alpha > 0$, **CE=**$\mathbb{R}_+$ [iniett; Im?]

esp. IRRAZIONALE NEGATIVO
$x^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}}$
PLOT $x^{-\sqrt{2}}$
CE=$\mathbb{R}_{++}$; iniett; Im?

• **Esponente 0**: $\forall x \neq 0,\ x^0 = 1$

infatti $x^0 = x^1 \cdot x^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

• **base** $x = 0$: $\forall \alpha > 0$: $0^\alpha = 0$.
Es. $\sqrt[3]{0}$

• 0^0 NON è definito

Proprietà: richiamo. Dalle def. date sopra segue che, per ogni a, b, α, γ per cui le espressioni sotto sono definite, si ha

$$a^1 = a$$
$$a^\alpha \cdot a^\gamma = a^{\alpha+\gamma}$$
$$\frac{a^\alpha}{a^\gamma} = a^{\alpha-\gamma}$$
$$a^{\alpha\cdot\gamma} = (a^\alpha)^\gamma$$
$$(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

In particolare da $\frac{a^\alpha}{a^\gamma} = a^{\alpha-\gamma}$, e con $\alpha = 0$ si ha

$$\frac{1}{a^\gamma} = (a^\gamma)^{-1} = a^{-\gamma} = (a^{-1})^\gamma = \left(\frac{1}{a}\right)^\gamma.$$

Dai grafici si vedono le proprietà:
$0^\alpha = 0, \forall \alpha > 0$
$x > 1$ e $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha > 1$
$0 \leq x < 1$ e $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha < 1$

Inversa: vale in generale, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, che le due fz
$x^\alpha : D_{\text{iniettività di } x^\alpha} \to Im(x^\alpha)$, ed $x^{\frac{1}{\alpha}} : Im(x^\alpha) \to D_{\text{iniettività di } x^\alpha}$ siano l'una l'inversa dell'altra

ES. se $3^\alpha = y \Rightarrow 3 = y^{\frac{1}{\alpha}}$
ES. se $3^{-\alpha} = y \Rightarrow 3 = y^{-\frac{1}{\alpha}}$
EXX Zwirner (determ domini) p.606: 8, 18 (con rad cubica anziché quadra)

Fz **esponenziale**. E' sempre una elevazione a potenza reale, solo che adesso LA BASE è FISSATA e l'esponente varia (mentre per le fz potenza la base varia e l'esp è fissato).

Data una base $a > 0$ t.c. $a \neq 1$, la fz esp è def da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x$.

NB: se fosse base $a = 1 : a^x =? \ \forall x$

Per $a > 0$ sono ammessi tutti gli espon reali: $CE = \mathbb{R}$.
GRAFF $a > 1, a < 1$

Caso partic: base $e =$ il n. di Nepero $e \approx 2.7183$, che è definito esattamente come *limite* di una certa espressione notevole che vedremo.

Dai Graf. si vedono importanti **proprietà** delle fz esp:

passano tutti per $(0, 1)$: $a^0 = 1, \forall a > 0$.
se $a > 1$ allora $\frac{1}{a} < 1$ e $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = (a^{-1})^x$ ha il graf di un espon con base < 1.
$a > 0 \Rightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ a^x > 0 \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}_{++}$
$a > 1 \Rightarrow\ \forall x > 0,\ \ a^x > 1$
$a > 1,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} : a^x$ strettam cresc se $a > 1 : a^{x_2} = a^{x_1} a^{x_2 - x_1} > a^{x_1}$, perché $a^{x_2-x_1} > 1$
allora a^x iniett. se $a > 1$
in part e^x strettam cresc $\Rightarrow$ iniett.

$0 < a < 1, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ strettam decresc. se $a < 1 : a^{x_2} = a^{x_1} a^{x_2 - x_1} < a^{x_1}$, perché $a^{x_2 - x_1} < 1$
allora a^x iniett. anche per $a < 1$
in part $e^{-x} = (\frac{1}{e})^x \downarrow\downarrow$ e iniett

In una disug. $a(x) \leq b(x)$ se elevo e ad entrambi gli esponenti il verso resta lo stesso: $e^{a(x)} \leq e^{b(x)}$;
se elevo e^{-1} ad entrambi gli esponenti il verso CAMBIA: $e^{-a(x)} \geq e^{-b(x)}$;
in partic. $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} = (e^{-1})^{x_1} > e^{-x_2} = (e^{-1})^{x_2}$

Proprietà: come per tutte le elevazioni a potenza,
• $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$
• $a^{x_1 x_2} = (a^{x_1})^{x_2}$

EX n.56 eserciziario: monotonia di $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ kx + q & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Fz **logaritmo**. Data una base $a > 0, a \neq 1$, $f(x) = \log_a(x)$ è definita come la fz INVERSA dell'esponenziale a^x, che è iniettiva
$Im(a^x) = \mathbb{R}_{++} \Rightarrow CE(\log_a(x)) = \mathbb{R}_{++}$; $CE(a^x) = \mathbb{R} \Rightarrow Im(\log_a(x)) = \mathbb{R}$.

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y) \quad \text{(inversa)}$$

quindi log è **SINONIMO di ESPONENTE**: $\log_a(y)$ è l'espon x che devo dare alla base a affinché il ris sia y

$\log_a(x)$ è l'espon che devo dare alla base a affinché il ris sia x

Es. $\log_3(9)$? $9 = 3^2 \Rightarrow \log_3(9) = \log_3(3^2) = 2$,
$\log_{10}(100)$?
$\log_2(8)$?

24/10/17 **LEZIONE 17**

$\log_2(1)$?

Poiché $\log_a(x)$ è inversa di a^x, il graf di $\log_a(x)$ è il simmetrizz del graf di a^x, quindi cambia se $a > 1$ o $a < 1$, GRAFF,

Dai graf si vede che:
• $\forall\ a > 0, \Gamma(\log_a)$ passano tutti per $(1, 0)$: $x = 1 \Rightarrow \log_a(x) = 0$
• per $a > 1$: se $x < 1 \Rightarrow \log_a(x) < 0$; se $x > 1 \Rightarrow \log_a(x) > 0$;
$x \gtrless a \Rightarrow \log_a(x) \gtrless 1$.
• $\forall a \in \mathbb{R} : \ \log_a(a) = 1$

Quando non si indica la base, $f(x) = \log(x)$, si intende che la base è e, ed il log si chiama anche **log naturale,** indicato anche con $\ln(x)$.

• $\log(x)$ è **strett cresc** su $(0, +\infty)$ $(D = \mathbb{R}_{++},\ Cod = \mathbb{R})$;
$x_1 < x_2 \Rightarrow \log(x_1) < \log(x_2)$ (base e)

in una disug $a(x) \leq b(x)$ se applico il log ad entrambi i membri la disug resta la stessa: $\log(a(x)) \leq \log(b(x))$

EX. Risolvere $e^{3x+1} \leq 2$: $3x+1 \leq \log 2, x \leq \frac{\log 2-1}{3}$
Risolvere $e^{-3x+4} \leq e^{x-1}$: $-3x+4 \leq x-1$

Proprietà:
• $log(e^x) =$ (esponente che devo dare alla base e aff il ris sia e^x) $= x$
• $e^{log(x)} =$ (e dotato di quell'esponente che dovrei dare ad e per ottenere x) $= x$.
Segue che $a = e^{log(a)}$ e quindi anche
• $a^x = (e^{log(a)})^x = e^{x\log(a)}$
• $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1x_2)$
• $\log_a(x_1) - \log_a(x_2) = \log_a(\frac{x_1}{x_2})$
• $\log_a(1) = 0$
• $\log_a(b)\log_b(c) = \log_a(c)$, segue che
• $\log_b(x) = \frac{1}{\log(b)}\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}$ (con $a = e, c = x$): $\log_b$ con $b \neq e$ si può sempre ricavare dal $\log_e$, per questo la calcolatrice NON ha il tasto $\log_b$

EX. E' $f(x) = \log(|x|) : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}$ pari? $\mathbb{R}_\star$ è simm risp allo 0, e $f(-x) = \log(|-x|) = \log(|x|) = f(x)$, GRAF

EXX tante disequazioni con log ed esp sul Castellani, Gozzi & co.

Fz **trigonometriche**: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$.
Circonferenza trigonometrica
radianti= $\frac{\pi}{180}\cdot$ gradi:
es. 90 gradi = $\frac{\pi}{180}\cdot 90 = \frac{\pi}{2}$ rad;
30 gradi $= \frac{\pi}{180}\cdot 30 = \frac{\pi}{6}$ rad;
180 gradi = π rad;
360 gradi= 2π rad

anogolo di ampiezza x rad individua P sulla circonf trig:
in un triang rettang si definisce

$$\sin(x) := y_P$$

$$\cos(x) := x_P$$

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{y_P}{x_P}.$$

Teo di Pitagora: in un triang rettang ...

Proprietà fondamentale $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Es. $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1, \tan(0)$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\tan(\frac{\pi}{2})$ " = " $\frac{1}{0}$ non def
$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{ad}{ip} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}^2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

EX PER CASA: $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$,
$\sin(2\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$,
$\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
$\sin(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$CE(\sin(x)) = \mathbb{R}, CE(\cos(x)) = \mathbb{R}$
$CE(\tan(x)) = \{x : \cos(x) \neq 0\} = \{x : P$ non si trovi sull'asse verticale$\} =$

$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, ... - \frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi, ...\} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

GRAFICI di sin e cos in $[0, 2\pi]$

Periodicità: $\exists T \in \mathbb{R} : \ f(x+T) = f(x) \ \forall x \in D$
ES: $\sin(x + 2\pi)$ sulla circonfer. $\Rightarrow T = 2\pi$
cos ha $T = 2\pi$, tan ha $T = \pi$ [per tan si dim con le formule di addiz]

GRAFF su $\mathbb{R}$

$Im(\sin(x))$ = range delle $y_P = [-1, 1]$; $Im(\cos(x))$ = range delle $x_P = [-1, 1]$;
$Im(\tan(x)) = \mathbb{R}$, perché $\sin(x)$ si può avvicinare a 1, e nel mentre $\cos(x)$ si avvic a 0.

EX $\max_{\mathbb{R}}$? $\min_{\mathbb{R}}$? $\Rightarrow$ sin, cos limitate: $|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
p.ti di max su $\mathbb{R}$?

EX $\cos(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari?
$\mathbb{R}$ è simm risp allo 0, e $f(-x) = \cos(-x) = x_P$, guardando la circonf trigon $x_{P'} = \cos(x) = f(x)$, GRAF

Ex. Intervallo massimale di invertibilità di $\sin(x)$?

retta r di eq $y = mx : m =$ coeff angolare: se $P \in r$ a distanza 1 da (0,0), P individua un triang rettang sulla circonfer. trigonometrica, e $\tan(\theta) = \frac{op}{ad} = \frac{y_P}{x_P} = \frac{mx_p}{x_p} = m$: il coeff angol è proprio la tan dell'angolo θ che la retta forma con l'asse delle ascisse, $m =$ pendenza della retta

EXX Zwirner p.606: 22 (domini)
Eserciziario: 66 (iniettività, inversa), 70, 79, 80, 85, 86, 87
EX n.2 del compito 11/1/16 [dato graf riconoscere Im etc.]

26/10/2017 **LEZIONE 18**

$\star$ **Ex.** 5 GRAFICI: qual è il graf di $f(x) = x^4$? quale decrescente? quale iniettiva?

Ulteriori operazioni tra funzioni
alcune già apparse $(f + g, cf, fg, \frac{1}{f})$

Date $(f, D_f, C_f), (g, D_g, C_g)$ si possono costruire nuove fz:

- $(f + g, D_{f+g}, C_{f+g}) : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

  Es. Costo totale della produzione di quantità x di un bene = (costo fisso(x) + costo variabile)(x)= 200 + 10x

  $CE_{f+g} = CE_f \cap CE_g$

  EX. CE di $\sqrt{x+2} + 3^x$

• per $c \in R$ fissata: $(c \cdot f, D_{c\cdot f}, C_{c\cdot f}) : (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$, $CE_{c\cdot f} = CE_f$

Es. $c = 3, f(x) = \log(x)$: $(c \cdot f)(x) = 3\log(x)$
Es. $-g = (-1) \cdot g$
Es. $f - g = f + (-g)$: $CE_{f-g} = CE_f \cap CE_g$

• $(f \cdot g, D_{f\cdot g}, C_{f\cdot g}) : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $CE_{f\cdot g} = CE_f \cap CE_g$.

Ex. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \log(x) : CE_{f\cdot g}$
Es. fz identità $id(x) = x \Rightarrow (id^2)(x) = id(x) \cdot id(x) = x^2$;
per $n \in \mathbb{N}$ fissato: $(id^n)(x) = x^n$ potenza intera;
Es. **monomi**, grado, CE; **polinomi**, grado, CE

generico polinomio di gr n: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$
a_0 termine noto
due polinomi $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ sono **uguali** (la stessa fz) sse hanno: 1) stesso grado $m = n$, 2) stessi coeffic.: $a_i = b_i$, $\forall i = 0..n$.

• fz **reciproca** di g: $(\frac{1}{g}, D_{\frac{1}{g}}, C_{\frac{1}{g}}) : (\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)}$, $CE_{\frac{1}{g}} = CE_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.

Ex. $g(x) = \log(x)$: CE di $\frac{1}{g}$: $x > 0$ e $x \neq 1$

Es. $(\frac{f}{g}, D_{\frac{f}{g}}, C_{\frac{f}{g}}) : (\frac{f}{g})(x) = (f \cdot \frac{1}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $CE_{\frac{f}{g}} = CE_f \cap CE_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.
Es. fz **razionali**
Es. x^{-n}

Es. fz quoziente di due polinomi di primo grado $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ha come graf. una IPERBOLE con assi (asintoti) $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$

• **Composizione** $(f \circ g, D_{f\circ g}, C_{f\circ g}) : (f \circ g)(x) = f\Big(g(x)\Big)$

Es. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \log(x) : (f \circ g)(x) = f\Big(g(x)\Big) = f(\log(x))$, il nuovo argomento è $\log(x)$ al posto di x, SI RIMPIAZZA x con $\log(x)$ dovunque compaia x
$f(\log(x)) = \sqrt{\log(x) + 2}$

Es. $f(x) = |x+2|, g(x) = \log(x) : |x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ se } x \geq -2 \\ -x-2 \text{ se } x < -2 \end{cases}$
$(f \circ g)(x) = f(\log(x)) = |\log(x) + 2| = \begin{cases} \log(x) + 2 \text{ se } \log(x) \geq -2 \\ -\log(x) - 2 \text{ se } \log(x) < -2 \end{cases}$

ma al posto di " $\log(x) \geq -2$" va data condiz esplicita su x: elevando e a ciascuno dei due esponenti la disuguaglianza mantiene lo stesso verso, $e^{\log(x)} \geq e^{-2}$, $x \geq e^{-2}$. Quindi
$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \log(x) + 2 \text{ se } x \geq e^{-2} \\ -\log(x) - 2 \text{ se } x < e^{-2} \end{cases}$
GRAF: graf(f+c), Graf($|f|$)
$CE_{f\circ g} = \{x \in CE_g : g(x) \in CE_f\}$: devo poter calcolare $f(y)$ con $y = g(x)$.
Nell'es sopra: $CE_{f\circ g} = \{x \in CE_g : \log(x) + 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_{++}$

!!!! ATTENZIONE !!!!: $f = 1 + \frac{1}{x}$, $CE(f) = \mathbb{R}_\star$; $g = \frac{1}{x}, CE = \mathbb{R}_\star$: $g \circ f = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ uno poi semplifica $= \frac{x}{x+1}$. Ma $CE(\frac{x}{x+1}) = \mathbb{R} - \{1\}$, mentre $CE(g \circ f) = \{x \in CE_f$:

$f(x) \in CE_g\} = \{x \neq 0 : 1 + \frac{1}{x} \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$.
Quindi NON si può stabilire il $CE(g \circ f)$ a posteriori, dopo aver scritto e semplif $g \circ f$, ma bisogna **PARTIRE DALLA DEF** di $CE(g \circ f)$.
Il punto è che NON è vero che $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$: sono = sulle $x \neq 0, -1$, su cui entrambe sono definite, ma NON sono due fz = perché hanno CE $\neq$

EX eserciziario. 59,63
EX Zwirner p.606, n. 24 (dominio di composiz), NB che $\log \sin x$ signif $\log(\sin(x))$; 12, 14, 17, 20, 21

30/10/2017 LEZIONE 19

Pb.3. Sono un'azienda produttrice di un bene. La produzione del bene ha costi che dipendono dalla quantità prodotta $C(q) = 200 + 50q$,
la quantità prodotta che poi riesco a vendere dipende dal prezzo che impongo al bene. Sia la retta del consumatore data da $q = 200 - p$, con dominio $D = (0, 200]$.
1) Ricavare il costo $c(p)$ in funzione di p.
$c(p) = C \circ q = 200 + 50 \cdot [200 - p] = 10200 - 50p$.
2) Il mio guadagno è dato da ricavi - costi. Scrivere ricavi, e guadagno in funzione di p.
Ricavi $R(p) = p \cdot q = p \cdot [200 - p]$, allora $g(p) = R(p) - c(p) = -p^2 + 250p - 10200$.
3) Quale prezzo devo imporre per massimizzare il mio guadagno?
PLOT di $g(p)$ su D, $p_1 = 51.35, p_2 = 198,65$
per $p \leq p_1$ ho csoti alti e ricavi $p(200 - p)$ bassi; per $p \geq p_2$ ho costi bassi ma ricavi ancora più bassi. $\hat{p} = 125, \hat{g} = 5'425$

SUNTO PROBLEMI DI CE: radici, quozienti, log,
base delle elevazioni a potenza: se esponente > 0 che può assumere valori irrazionali o razionali $\frac{p}{q}$ ai minimi termini con q pari $\Rightarrow$ base ≥ 0; se esp $< 0 \Rightarrow$ base > 0; quindi esponenziali: base > 0

Ex. CE di $(g(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$: $CE(g)$

Ex. CE di $(g(x))^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_{++} : (g(x))^\alpha = f(g(x))$, con $f(x) = x^\alpha$. $CE_{f \circ g} = \{x \in CE_g : \ g(x) \in D_f\}$ se ad es. α irrazionale $= \{x \in CE_g : \ g(x) \geq 0\}$

Ex. CE di $(g(x))^x$: x può variare in $\mathbb{R}$, e può anche assumere valori < 0, quindi serve base > 0: $CE = \{x \in CE_g : g(x) > 0\}$

Ex. Vedremo $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$: CE? $x \neq 0$ e $1 + \frac{1}{x} > 0$, cioè $\frac{1}{x} > -1$: se $x > 0$ ok; se $x < 0$ reciproci e $x < -1$: quindi $CE = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Ex Siano $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 + x + 1$. Determinare $g(f(x)), f(g(x)), f(f(x)), g(g(x))$

EX Giusti 4.22, p.140 (composiz + fz inversa).

NB: $f \circ g \neq g \circ f$
Es. $f(x) = \sqrt{x+2}, \ g(x) = \log(x)$:
$f\Big(g(x)\Big) = \sqrt{\log(x) + 2}$, mentre $g\Big(f(x)\Big) = \log(\sqrt{x+2})$,
e le due fz sono diverse perché $CE_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } \log(x) + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x \geq e^{-2}\} = (e^{-2}, +\infty) : e^{-2} \approx 3^{-2} = \frac{1}{9} > 0$ quindi $CE_{f \circ g} \approx (\frac{1}{9}, +\infty)$

invece $CE_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \geq 0 \text{ e } \sqrt{x+2} > 0\}$, cioè $x+2>0, x>-2$, quindi $CE_{g\circ f} = (-2, +\infty)$.

Proprietà. Sia $f : D \subset CE(f) \to Im(f)$: valgono $f \circ f^{-1} = id$, $f^{-1} \circ f = id$.
Es. $x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ha $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, e si ha che, per $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x, \sqrt{x^2} = x$.

ATT!! Riocordiamo invece che se $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ e $\sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ aritmetica, allora $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, e NON x, perché x può assumere anche valori negativi

Grafici di trasformazioni di una fz. Se conosco il graf di $f(x)$, allora posso facilmente disegnare il graf di:
$c + f(x)$, es. $f(x) = |x| \Rightarrow$ GRAF di $c + |x|$
$f(x+c)$, es. GRAF di $|x+2|$; GRAF di $\sin(x + \frac{\pi}{2})$= GRAF di $\cos(x)$
$-f(x)$, es. GRAF di $-|x|$
$|f(x)|$, es. $f(x) = x$, GRAF di $|x|$; $f(x) = \sin(x) \Rightarrow$ GRAF di $|\sin(x)|$

EXX **Proprietà delle fz.**
1) $f \uparrow, g \uparrow \Rightarrow f + g \uparrow$
Sol.: chiamo $f_i = f(x_i), g_i = g(x_i)$. *Ho* $x_1 < x_2 \Rightarrow f_1 \leq f_2$ *e* $g_1 \leq g_2 \Rightarrow$ *(propr. C3 dei n. reali)* $f_1 + g_1 \leq f_2 + g_2$.

2) casa. Sia $f \uparrow$: se $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha f \uparrow$; se $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha f \downarrow$
3) casa. $f \uparrow, g \uparrow, f > 0, g > 0 \Rightarrow fg \uparrow$; $f \uparrow, g \uparrow, f < 0, g < 0 \Rightarrow fg \uparrow$;
4) casa. $f \uparrow$ e $f > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \downarrow$;
Sol. Ho $x_1 < x_2 \Rightarrow f_1 \leq f_2$ *e* $f_i > 0 \Rightarrow$ *(passo ai reciproci di n. concordi)* $\frac{1}{f_1} \geq \frac{1}{f_2}$.

5) $f \uparrow, g \uparrow \Rightarrow f \circ g \uparrow, g \circ f \uparrow$; $f \uparrow, g \downarrow \Rightarrow f \circ g \downarrow, g \circ f \downarrow$
Sol. Chiamo $y_i = g(x_i)$. *Se* $f, g \uparrow$ *ho* $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 = g_1 \leq g_2 = y_2$; *ma* $f \uparrow \Rightarrow f(y_1) \leq f(y_2)$ *ossia* $f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$.
Se $f \uparrow, g \downarrow$ *ho* $y_1 = g_1 \geq g_2 = y_2$ f *conserva l'ordine* $\Rightarrow f(y_1) \geq f(y_2)$ *ossia* $f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$.

EX. Giusti 5.10 pti 2,4,5 (p.184, dire se certe fz monotone, sup, inf)
[Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ è limitata inferiorm su $\mathbb{R}$, inf?, min?
[Es. E' $\log(x)$ limitata inf sul suo CE?
[Es. $sgn(x)$ limitata sul CE, $|x|$ limitata inf ed ha min sul CE, $[x]$ illimitata

EXX eserciziario 53, 54 (fz monotone),
55 pto b) (iniettività, inversa, $f^{-1}(A)$, fz superiorm limitate; contiene $I_{(0,2)}(x)$ che è lì definita),
58 (iniettività, invrsa)
64 (monotonia, dim che graf f^{-1} simmetrizzato),
67 (fz def a tratti: $f^{-1}(x_0), \max, \min$)