Università degli Studi di Firenze
Corso di Studio triennale in Fisica e Astrofisica

Insegnamento ANALISI MATEMATICA I – **A.A. 2017/18**

Funzioni additive (29 Ott. 2017)

Problema. Sia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Provare che se

i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

ii) f è monotona in $\mathbb{R}$,

allora

$$f(x) = f(1)\, x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

ovvero $f(\cdot)$ è necessariamente una funzione *lineare*.
La tesi resta valida se in luogo di ii) si assume

ii)' f è continua in $\mathbb{R}$.

Soluzione. **0.** Dall'ipotesi *i*) segue immediatamente che

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

ovvero $f(-x) = -f(x)$ per ogni x: f è una funzione *dispari*, e in particolare, con $x = 0$ si ottiene $f(0) = 2\, f(0)$ e $f(0) = 0$. Non risulta restrittivo limitare l'analisi a $x > 0$.
1. Applicando la proprietà in *i*) con m addendi pari a 1, si ottiene

$$f(m) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = \underbrace{f(1) + f(1) + \cdots + f(1)}_{m \text{ volte}} = m\, f(1)$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$, e la (1) è soddisfatta per ogni x *naturale*.
2. Applicando invece l'ipotesi in *i*) con n addendi pari a $1/n$, si ottiene $f(1) = f(1/n + 1/n + \cdots + 1/n) = n\, f(1/n)$, cioè $f(1/n) = f(1)/n$, e la (1) è soddisfatta per $x = 1/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$.
Sia ora $q \in \mathbb{Q}^+$: si può esprimere $q = m/n$, con $m,\ n \in \mathbb{N}$ opportuni. Si ha

$$f(q) = m\, f\Big(\frac{1}{n}\Big) = m\, \frac{1}{n}\, f(1) = \frac{m}{n}\, f(1) = f(1)\, q\,,$$

che prova la validità della (1) per ogni x *razionale*.
3. Sia infine $x \in \mathbb{R}^+$: esistono due successioni di numeri razionali $\{q_n\}_n$, $\{r_n\}_n$, entrambe convergenti a x, tali che $q_n \le x \le r_n$, con q_n crescente, r_n decrescente.

Poiché f è monotona, supponendo (per 'fissare le idee', come si dice, intendendo per far mente locale, ma senza perdita di generalità) f crescente si deduce

$$q_k\, f(1) = f(q_k) \le f(q_{k+1}) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le f(r_{k+1}) \le f(r_k) = r_k\, f(1)\,,$$

che fornisce $q_k\, f(1) \le f(x) \le r_k\, f(1)$ per ogni k. Passando al limite per $k \to +\infty$ nell'ultima disuguaglianza, si ottiene $xf(1) \le f(x) \le xf(1)$ e la validità della (1) è estesa ai numeri reali positivi.

Se poi x è un numero reale negativo, tenendo conto delle osservazioni preliminari in 0., si ottiene nuovamente

$$f(x) = -f(-x) = -f(1)\,(-x) = f(1)\,x\,,$$

che conclude la dimostrazione.

Se in luogo della monotonia si assumesse la continuità di f, per ogni successione $\{q_k\}_k$ a valori in $\mathbb{Q}$ e convergente a x, si avrebbe, utilizzando il *Teorema di collegamento*,

$$f(x) = f(\lim_{k\to\infty} q_k) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} \big(f(1)q_k\big) = f(1) \lim_{k\to\infty} q_k = f(1)\,x\,.$$