Università degli Studi di Firenze – Scuola di Scienze

Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

***Analisi Matematica I* (A.A. 2017/18)**

Funzioni derivabili, applicazioni delle derivate, problemi di massimo/minimo – 3 Nov. 2017

1. Discutere la derivabilità delle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

esprimendo esplicitamente la rispettiva funzione derivata prima $f'(\cdot)$, assieme al dominio. Successivamente, discutere la continuità di $f'(\cdot)$.

2. Dimostrare la seguente conseguenza del Teorema di Lagrange:
PROPOSIZIONE. *Sia f una funzione a valori reali continua in (a, b), derivabile in $(a, b) \setminus x_0$, e tale che $f'(x) \longrightarrow \ell$, per $x \to x_0$. Allora f è derivabile in x_0, e si ha $f'(x_0) = \ell$.*
(Se invece il limite di $f'(x)$ (esiste ma) non è finito, allora f non è derivabile in x_0. Invece il fatto che il limite non esista non esclude l'esistenza di $f'(x_0)$.)
Rivisitare l'esercizio precedente, alla luce di questo risultato.

3. Stabilire in quali punti $(x_0, f(x_0))$ del grafico della funzione $f(x) = \log \sqrt{|x|}$ esiste la retta tangente, e scriverne l'equazione.

4. Determinare gli eventuali punti del grafico della funzione

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 54x^2 + 216x - 7$$

a tangente orizzontale.

5. Stabilire gli intervalli in cui la funzione $h(x) = (x-1) \log x$ risulta crescente/decrescente.

6. Determinare 'un punto di Lagrange' per la funzione $u(x) = x + \arctan x$ nell'intervallo $[0, 1]$, precisando perché esso esiste.

7. Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione $2e^x - 2x - 5 = 0$.

8. Provare la validità della disuguaglianza

$$\log x \leq x^2 - x \qquad \forall x > 0\,.$$

Fornire un grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^2 - x - \log x$, definita nel suo dominio naturale.

9. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$2x^4 + x = 4x^3 \,.$$

Quante soluzioni appartengono all'intervallo $[-1, 1]$?

10. Si dice che $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è *uniformemente* continua in A se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\colon \quad x, x_0 \in A\,,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

(Si confronti la definizione introdotta con quella di funzione continua in A, cioé continua in ogni punto x_0 di A, in cui δ dipende in generale da x_0 (oltre che da ϵ). Evidentemente una funzione *uniformemente* continua in A è ivi continua; non vale, in generale, il viceversa.)

Per risultati che garantiscano l'uniforme continuità di f in insieme A, si veda il Teorema di Heine-Cantor.
Per esercizio: Verificare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua in $(0, 1)$.

11. Si dice che f è *Lipschitziana* in un intervallo I se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \qquad \forall x, y \in I\,;$$

L è detta costante di Lipschitz. Provare che *(i) una funzione Lipschitziana in I risulta uniformemente continua in I; (ii) una funzione derivabile in I, con derivata limitata, è Lipschitziana in I.*
Fornire un esempio di funzione Lipschitziana in un intervallo I che non è derivabile in I.

12. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$, e siano A e B i punti di intersezione della retta tangente al grafico G_f di f, in un suo punto P_0, con gli assi coordinati (rispettivamente, con l'asse x e l'asse y). Stabilire qual è il punto che rende massima l'area del triangolo OAB.

13. Una grondaia è ottenuta curvando un foglio di rame rettangolare (lungo il lato più corto) in maniera che la sezione trasversale della grondaia sia un trapezio isoscele. Se la capacità (con riempimento 'fino all'orlo') e la profondità della grondaia sono date, provare che la larghezza minima del foglio di rame – e quindi il massimo risparmio, ché il rame è costoso – si ha quando il trapezio degenera in un triangolo. (Si consideri lo spessore della grondaia trascurabile rispetto alle altre dimensioni; si trascurino inoltre eventuali bordature o rinforzi.)

©2017 Francesca Bucci