Università degli Studi di Firenze – Scuola di Scienze

Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16)

Applicazioni delle derivate: equazioni algebriche e trascendenti, problemi di max/min, grafici, disuguaglianze/stime, sviluppi asintotici – 23 Nov. 2015

1. Verificare che l'unico punto ξ per cui vale l'assunto del Teorema di Lagrange (anche detto punto di Lagrange) per la funzione $\frac{1}{x}$ in un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, è la media geometrica $\sqrt{ab}$ dei due numeri a e b.

2. (*Approfondimento*) Una funzione f si dice *Lipschitziana* in un intervallo I se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \qquad \forall x, y \in I\,;$$

L è detta costante di Lipschitz (*migliore* costante di Lipschitz, quando la stima è ottimale).
Si chiede di (i) dimostrare che se f è derivabile in I e $f'(x)$ è una funzione *limitata* in I, allora f è Lipschitziana in I; (ii) dedurre che ogni funzione appartenente a $C^1(I)$ è *localmente* Lipschitziana in I; (iii) esibire una funzione che è derivabile ma non Lipschitziana in un qualche intervallo.
Note: Per (i) si utilizzi il Teorema di Lagrange. Per (ii), si ricordi che il simbolo $C^1(I)$ denota la classe delle funzioni derivabili in I, con derivata continua (naturalmente, $C^1(I) \subset C^0(I) \equiv C(I)$). Per (iii), si osservi che per definizione una funzione Lipschitziana in I ha rapporto incrementale ivi limitato.

3. Provare che $\sin^2 x$ è Lipschitziana in $\mathbb{R}$. La costante di Lipschitz ottenuta è migliorabile?

4. Determinare il numero di soluzioni delle equazioni seguenti:

$$\frac{1}{1-x} = 2 + \arctan x\,, \quad \log(1+x^2) = x\,, \quad 1 + 8x^2 \log x = 0\,, \quad 1 + \log x = \sqrt{x}\,.$$

5. Dimostrare che $x^8 - 4x^2 + 4 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. Determinare il numero di zeri della funzione $x^8 - 32x^4 + 1$, fornendo un'approssimazione degli stessi alla prima cifra decimale.

7. (*Problemi di minimo/massimo*) Un uomo si trova su una barchetta in mare (in un punto P) a distanza h dalla riva, e deve raggiungere un punto O sulla riva nel tempo più breve possibile (si assuma che la riva sia rettilinea, almeno nel tratto di interesse). Detto H il punto sulla riva a distanza minima (h) da P, si indichi con d la distanza di H da O. Si chiede di determinare in quale punto della riva conviene sbarcare all'uomo, se la sua velocità a remi è v_1 e quella (a piedi, o meglio) di corsa è v_2. (Si inizi la disamina del problema assumendo, ad esempio, $v_2 > v_1$.)

8. (*Problemi di minimo/massimo*) Fra tutti i cilindri a base rotonda inscritti in una sfera, determinare quello di volume massimo.

9. (*Attenzione: inverse delle funzioni iperboliche*) Si verifichi che la restrizione della funzione $\cosh x$ all'intervallo $[0, \infty)$ (per la quale, con un piccolo abuso di notazione, si utilizza lo stesso simbolo $\cosh x$) è biettiva da $[0, \infty)$ in $[1, \infty)$, e se ne scriva la funzione inversa[1]. Si provi poi che
$$D(\operatorname{settcosh} y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \qquad \forall y > 1\,.$$

10. (*Applicazioni della convessità/concavità*) Verificare che se $p > 1$ e $q = p/(p-1)$ (cioè $1/p + 1/q = 1$), per ogni $u > 0$ si ha
$$u^{\frac{1}{p}} < \frac{u}{p} + \frac{1}{q}\,. \tag{1}$$
Dedurre da (1) la *disuguaglianza di Young*
$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \forall x, y \ge 0\,. \tag{2}$$
Suggerimento: al fine di provare (1), si utilizzi il fatto che u^α è una funzione strettamente concava se $0 < \alpha < 1$. Successivamente, salvo verificare la validità di (2) per $x = 0$ o $y = 0$, porre nella (1) $u = x^p y^{-q}$.

11. Disegnare i grafici delle funzioni
$$xe^{-x}\,, \quad x^2e^{-x}\,, \quad xe^{-x^2}\,, \quad e^{-x^2}\,, \quad x^2e^{-x^2}$$
nei rispettivi domini, non mancando di evidenziare gli intervalli di monotonia ed i punti in cui vi è un cambio di concavità.
Suggerimento: si utilizzino le eventuali proprietà di simmetria delle funzioni per semplificare l'analisi.
Importante: In questo esercizio, come in altri che seguono, si chiede di tracciare un grafico qualitativo di alcune funzioni: si proceda considerando l'insieme di definizione D, i limiti alla frontiera di D, la crescenza, la convessità, i punti di massimo e di minimo relativo, i punti di flesso, gli asintoti, il valore di f' nei punti limite e nei punti di flesso.)

12. Disegnare i grafici delle funzioni $\sqrt{1 - x^2}$ e $\sqrt{x^2 - 1}$ nei rispettivi domini.

13. Disegnare il grafico delle funzione seguenti:
$$(i)\ \max\{x^2, 5x - 4\}\,, \quad (ii)\ \sqrt{x}\Big(1 + \frac{1}{\log x}\Big)\,, \quad (iii)\ \Big(5 + \frac{1}{x^2}\Big)^2 - \frac{8}{x^3}\,,$$
$$(iv)\ x + 4\arctan(\sqrt{|x - 1|}) \quad (v)\ x + \arcsin\frac{2x}{x^2 + 1}\,.$$

[1] Le funzioni inverse delle funzioni iperboliche $\cosh x$ e $\sinh x$ si chiamano rispettivamente *settore coseno iperbolico* e *settore seno iperbolico*, e si indicano comunemente con i simboli settcosh e settsinh, termini che risulteranno più chiari una volta affrontati gli integrali. La notazione $\cosh^{-1}$ e $\sinh^{-1}$ è ugualmente diffusa, ove l'apice -1 ha il significato di "funzione inversa di". Infine, altri simboli che – seguono standard ISO, ed – è possibile incontrare sono arcosh e arsinh, in cui il prefisso "ar" sta appunto per *area* (di un opportuno settore iperbolico).

14. Senza usare calcolatrici, stabilire chi è più grande tra e^π e π^e.

15. Fornire un'approssimazione di e^{-1} con un errore non superiore a 10^{-4}.

16. (*Sviluppi asintotici*) Calcolare il limite per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

$$\frac{(e^{(x^2)}-1)(1-\cos^2 x)}{(e^x-\cos x-\sin x)^2}, \qquad \frac{e^{(x^4)}-1}{x^2-x\sin x}, \qquad x\frac{(e^x)^2-e^{(x^2)}}{e^x-e^{-x}-2},$$

$$\frac{(2e^x-2\sin x-2-x^2)^2}{x^3\sin^3 x}, \qquad \frac{x^2-\sin(x\sin x)}{1-\cos(1-\cos x)}, \qquad \frac{\log(1+\log(1+x))}{x^2}-\frac{1}{x},$$

$$\frac{x-\sin\sin x}{x-x\cos\sin x}, \qquad \frac{\sin(\sqrt[3]{\cos(x^2)}-1)}{\arctan^4 x}, \qquad \frac{(\sin^2 x-\sin(x^2))^2}{x^5(x-\arctan x)},$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}-2}{x^2\log(1+x^2)}.$$

17. Dire se la funzione $f(x) = e^x - \tan x$ nel punto $x = 0$ ha un massimo/minimo relativo (si provi a risolvere l'esercizio tramite lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ centrato in $x = 0$.

18. Calcolare $f^{(v)}(0)$ (derivata quinta in $x = 0$) per $f(x) = e^x \sin x$.

19. Determinare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 7 della funzione $f(x) = \sin^3 x$.