

Università degli Studi di Firenze
Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica
Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini
SECONDA PROVA INTERCORSO (21 Dicembre 2015)

1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$3x^2 + 3 \cos^2 x - x^4 \leq 3,$$

e che la stima è ottimale.

2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{\sqrt{1 + \cos(\pi x)}}.$$

3. Disegnare i grafici G_f e G_g delle funzioni $f(x) = x\sqrt{|x-2|}$ e $g(x) = \max\{0, 3x-6\}$, e calcolare l'area della figura piana delimitata da quelli (i grafici) delle restrizioni di f e g all'intervallo $[0, 3]$.

4. Data $f(t) = \frac{\log(1+t)}{\sqrt{t}}$, si consideri la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt. \quad (1)$$

Si chiede di

- (a) stabilire in che senso va inteso l'integrale in (1), precisando il dominio e la regolarità della funzione F ;
- (b) determinare eventuali asintoti della funzione $F(x)$, per $x \rightarrow +\infty$;
- (c) stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Svolgimento

Esercizio 1. Allo scopo di provare la disuguaglianza del testo, è utile introdurre la funzione h definita da

$$h(x) := 3x^2 + 3\cos^2 x - x^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

ed indagarne le proprietà (globali), quali monotonia e/o convessità (concavità).

Si osservi preliminarmente che h è una funzione pari: è pertanto sufficiente analizzare la sua restrizione a $\mathbb{R}_+$. Si nota subito che $h(0) = 3$, e che $h(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, come segue immediatamente riscrivendo

$$h(x) = -x^4 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3\cos^2 x}{x^4} \right)$$

per $x \neq 0$. Il limite mostra in particolare che la stima cercata $h(x) \leq 3$ è certamente soddisfatta per $|x|$ ‘sufficientemente grande’.

Si ha $h \in C^1(\mathbb{R})$, con

$$h'(x) := 6x - 6\cos x \sin x - 4x^3 = 6x - 3\sin(2x) - 4x^3, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Al fine di determinare il segno della derivata $h'(x)$, si osserva che una più accurata riscrittura di (2) produce

$$h'(x) = 3 \left(2x - \sin(2x) - \frac{4}{3}x^3 \right) = 3 \left(2x - \sin(2x) - \frac{(2x)^3}{6} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

da cui segue

$$h'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0,$$

richiamando la nota stima dal basso per la funzione *seno*:

$$\sin t \geq t - \frac{t^3}{6}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

(Si ricorda che la stima (3) si dimostra provando la convessità della funzione $\sin t + \frac{t^3}{6}$ per $t \geq 0$, in virtù della stima elementare $\sin t \leq t$, $t \geq 0$.)

In conclusione, h è monotona *decrecente* in $[0, \infty)$ e di conseguenza $h(x) \leq h(0) = 3$ per ogni $x \geq 0$; poiché h è pari, essa risulta *crescente* in $(-\infty, 0]$ e la validità della stima su tutto $\mathbb{R}$ è provata. Infine, la stima risulta *ottimale* poiché $h(0) = 3$.

In alternativa, si poteva osservare che si ha anche $h \in C^2(\mathbb{R})$: derivando nuovamente in (2), si ricava

$$h''(x) = 3 \left(2 - 2\cos(2x) - 4x^2 \right) = 6 \left(1 - \cos(2x) - \frac{1}{2}(2x)^2 \right)$$

per ogni x ; utilizzando in questo caso la stima $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$, con $2x$ in luogo di x , si ottiene immediatamente che $h''(x) \leq 0$ su $\mathbb{R}$. Dunque h è *concava* in $\mathbb{R}$ ed il suo grafico G_h sta *sotto* a tutte le rette ad esso tangenti; in particolare, alla retta tangente passante per $(0, 3)$, che ha equazione $y = 3$ dato che $h'(0) = 0$ ($x_0 = 0$ è un punto critico per h). Si conclude di nuovo che $h(x) \leq 3$ per ogni x .

(È importante sottolineare che anche nel caso non ci si avvallesse delle stime richiamate per le funzioni circolari, la tesi si ottiene ugualmente e facilmente calcolando la derivata (terza e quarta di $h(x)$). I calcoli sono omessi e lasciati al lettore.)

Esercizio 2. Poniamo $x = 1 + t$ cosicché per $x \rightarrow 1$ si ha $t \rightarrow 0$. Si ha

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x} &= e^{\frac{\log x}{1-x}} - e^{-x} = e^{-1-t} (e^{\frac{\log(1+t)}{-t} + 1+t} - 1) \\ &= e^{-1-t} (e^{\frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{-t} + 1+t} - 1) = e^{-1-t} (e^{-1 + \frac{t}{2} + o(t) + 1+t} - 1) \\ &= e^{-1-t} (e^{\frac{3}{2}t + o(t)} - 1) = e^{-1-t} (1 + \frac{3}{2}t + o(t) - 1) \\ &= \frac{3}{2} e^{-1-t} (t + o(t)) \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cos(\pi x)} &= \sqrt{1 + \cos(\pi + \pi t)} = \sqrt{1 - \cos(\pi t)} \\ &= \sqrt{1 - (1 - \frac{(\pi t)^2}{2} + o(t^2))} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} t^2 + o(t^2)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} |t| \sqrt{1 + o(1)}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{\sqrt{1 + \cos(\pi x)}} &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\frac{3}{2} e^{-1-t} (t + o(t))}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} |t| \sqrt{1 + o(1)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{\frac{3}{2} e^{-1-t} (1 + o(1))}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + o(1)}} \\ &= \pm \frac{\frac{3}{2} e^{-1}}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2e\pi}. \end{aligned}$$

Si evince che il limite richiesto *non* esiste in quanto limite destro e limite sinistro sono tra loro diversi. (I valori dei limiti destro e sinistro sono ottenuti sopra.)

Esercizio 3. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = 0$ e $x = 2$ ed è negativa per $x < 0$.

Per $x < 2$ si ha

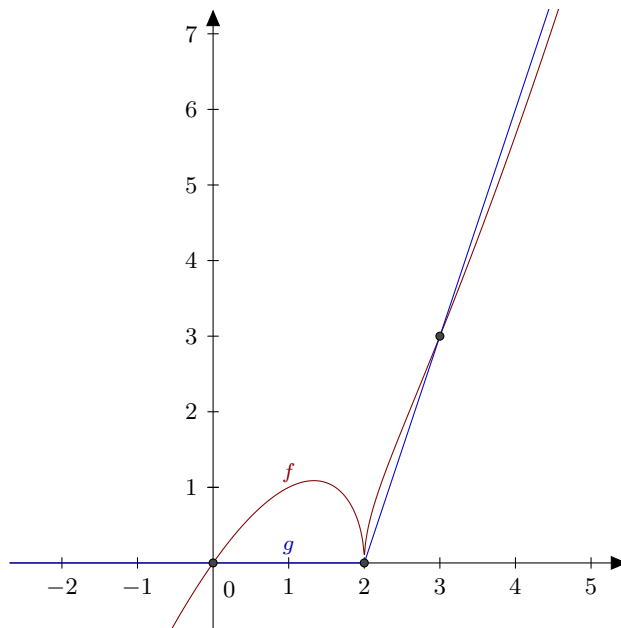
$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

da cui

$$f'(x) = \sqrt{2-x} + x \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-3(2\sqrt{2-x}) - (4-3x)\frac{-1}{\sqrt{2-x}}}{4(2-x)} = \frac{-6(2-x) + (4-3x)}{4(2-x)\sqrt{2-x}} \\ &= \frac{3x-8}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$



Dunque sull'intervallo $(-\infty, 4/3]$ la funzione è crescente, e su $[4/3, 2]$ è decrescente. Su tutto l'intervallo $(-\infty, 2]$ la funzione è concava.

Mentre per $x > 2$ si ha

$$f(x) = x\sqrt{x-2}$$

da cui

$$f'(x) = \sqrt{x-2} + x \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3(2\sqrt{x-2}) - (3x-4)\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{4(x-2)} = \frac{6(x-2) - (3x-4)}{4(x-2)\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{3x-8}{4(x-2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Dunque sull'intervallo $[2, +\infty)$ la funzione è crescente, su $[2, 8/3]$ è concava e su $[8/3, +\infty)$ è convessa.

Nel punto $x = 2$ c'è una cuspide, infatti la derivata destra tende a $+\infty$ e la derivata sinistra a $-\infty$. Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui, in quanto sia $f(x)$ che $f(x)/x$ tendono a $\pm\infty$.

Il grafico della funzione g è l'unione di due semirette: per $x < 2$ si ha $y = 0$ per $x > 2$ si ha $y = 3x - 6$. Per $x = 2$ si ha un punto angoloso.

I grafici delle due funzioni f e g si incontrano nei punti $x = 0$, $x = 2$ e $x = 3$ (lo si verifica per sostituzione). Per il calcolo dell'area ci interessa sapere se ci sono altri punti, nell'intervallo $[0, 3]$ in cui le due funzioni si toccano. Per $x < 2$ non ci sono altri punti di intersezione in quanto f è positiva. Per $x > 2$ osserviamo che si ha $f'(3) = 5/2 < 3 = g'(3)$.

Essendo f convessa tra $8/3$ e 3 sappiamo quindi che il grafico di f sta sopra la retta tangente in $x = 3$ che a sua volta sta sopra il grafico di g (che è una retta più ripida della tangente). Nell'intervallo $[2, 8/3]$ la funzione g è invece concava e quindi sta sopra alla retta secante. Di nuovo la retta secante sta sopra al grafico di g (in quanto le due rette si intersecano in $x = 2$ mentre in $x = 3$ la retta secante abbiamo già visto che è sopra il grafico di g).

Dunque l'area cercata è data da:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |f(x) - g(x)| dx &= \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_0^2 x\sqrt{2-x} dx + \int_2^3 x\sqrt{x-2} dx - \int_2^3 (3x-6) dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i tre integrali. Nel primo facciamo la sostituzione $t = \sqrt{2-x}$ da cui $x = 2 - t^2$ e $dx = -2t dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2-x} dx &= \int_{\sqrt{2}}^0 (2-t^2)t(-2t) dt = \int_{\sqrt{2}}^0 (-4t^2 + 2t^4) dt \\ &= \left[-\frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{2} = \frac{16}{15}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Nel secondo facciamo la sostituzione $t = \sqrt{x-2}$ da cui $x = 2 + t^2$ e $dx = 2t dt$:

$$\begin{aligned}\int_2^3 x\sqrt{x-2} dx &= \int_0^1 (2+t^2)t2t dt = \int_0^1 (4t^2 + 2t^4) dt \\ &= \left[\frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{26}{15}.\end{aligned}$$

Il terzo integrale:

$$\int_2^3 (3x-6) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_2^3 = \frac{27}{2} - 18 - 6 + 12 = \frac{3}{2}.$$

Dunque, in conclusione:

$$\int_2^3 |f(x) - g(x)| dx = \frac{16}{15}\sqrt{2} + \frac{26}{15} - \frac{3}{2} = \frac{32\sqrt{2} + 7}{30}.$$

In alternativa i primi due integrali potevano essere svolti per parti. Ad esempio:

$$\int x(x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x(x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x-2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}x(x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-2)^{\frac{5}{2}}.$$

Esercizio 4. 4a) La funzione $f(t) = \frac{\log(1+t)}{\sqrt{t}}$ è definita e continua in $\mathbb{R}^+$. Di fatto f è estendibile con continuità in $t = 0$, ponendo $f(0) = 0$, poiché

$$f(t) = \frac{\log(1+t)}{t} \sqrt{t} \longrightarrow 1 \cdot 0 = 0, \quad \text{per } t \rightarrow 0^+;$$

in particolare, f è limitata in ogni intervallo chiuso di estremi 0 e x e l'integrale in (1) va inteso *secondo Riemann*¹. La continuità di f assicura che la funzione integrale F è definita per ogni $x \geq 0$, e pertanto

$$\text{dom } F = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Inoltre, indicando con $\tilde{f}$ l'estensione continua di f su $\mathbb{R}_+$, il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale assicura che $F \in C^1$, con

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) = \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ F'_+(0) &= \tilde{f}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \end{aligned}$$

4b) Al fine di stabilire se F ammette asintoti per $x \rightarrow +\infty$, si indaga innanzitutto se esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Si riscrive, ad esempio per $x > 1$,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt, \quad (4)$$

ove il primo addendo è un numero, mentre per il secondo si ha

$$\int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \frac{\log 2}{\sqrt{t}} dt \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Ne consegue che $F(x) \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow +\infty$ e se vi è un asintoto, questo dovrà essere obliquo.

Si discute pertanto l'esistenza del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}, \quad (6)$$

ed è qui naturale esplorare l'applicabilità del Teorema di de L'Hôpital: si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} = 0, \quad (7)$$

da cui segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \quad (8)$$

e F non ha asintoti obliqui (l'esistenza di asintoti orizzontali era già stata esclusa).

4c) Il carattere della serie di termine generale $a_n = F(1/n)$ scaturisce dall'analisi del comportamento asintotico di a_n . Si osserva innanzitutto che a_n è infinitesima:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(1/n) = F(0) = 0; \quad (9)$$

d'altra parte, utilizzando ancora una volta il limite notevole $[\log(1+x)]/x \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{\frac{d}{dx} \frac{2}{3} x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \quad (10)$$

¹La domanda “in che senso va inteso ...” è stata generalmente mal interpretata: i possibili sensi sono *secondo Riemann* oppure *in senso improprio*.

Dal Teorema di de L'Hôpital (forma 0/0) segue che anche

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{\frac{2}{3}x^{3/2}} = 1, \quad (11)$$

cioè $F(x) \sim \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \rightarrow 0^+$.

Si conclude che $a_n = F(1/n)$ è asintotica a $b_n := \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ converge.