

Analisi Matematica I (A.A. 2017/18) – Proff. F. Bucci & L. De Pascale

Importante: Per l'elaborato si utilizzino solo i fogli consegnati dai docenti, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte della seconda parte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita.

I parte: Quesiti preliminari

1. Stabilire per la funzione $\varphi(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x) \sin^2 x$ se essa è pari, dispari, né pari né dispari, ed inoltre se essa è periodica, precisando in tal caso il periodo *minimo*.

$\varphi(x)$ è una funzione *pari*, che *non* è periodica

2. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \log(1 + \frac{1}{n^\pi}) = 0$?

$$\alpha < \pi$$

3. Dato l'insieme

$$E = \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

determinare $\inf E$ e $\sup E$, precisando se essi sono rispettivamente $\min E$ e/o $\max E$.

$$\inf E = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \min E, \quad \sup E = 1 \text{ (non esiste } \max E)$$

4. Determinare due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ per cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(b_n)$.

$$a_n = n\pi, \quad b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi, \text{ ad esempio } (\tan(a_n) = 0 \rightarrow 0, \tan(b_n) = 1 \rightarrow 1)$$

5. Si considerino le funzioni $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che vale $x^2 + 1$ se $x \in [-1, 0)$, e vale 0 se $x = 0$, e infine $h(x) = \log(x+2)$, $x \in (0, 1]$. Per quali di esse vale la tesi del Teorema di Weierstrass?

Unicamente per $h(\cdot)$

6. Esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\log(x+e))}{\tan x}$? (Nel caso, calcolarlo.)

Sì, ed è pari a $\frac{1}{e}$

7. Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^5 - 20x^2 + 1 = 0$?

Esattamente tre

II parte: Problemi

8. Dato

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 < 0 \right\},$$

si consideri l'insieme numerico

$$C = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} : (x, y) \in E \right\}.$$

Si chiede di:

- (a) provare che l'insieme E è contenuto in un rettangolo;
- (b) determinare $\inf C$ e $\sup C$ (stimando quest'ultimo qualora non si riesca a calcolarlo), precisando se essi sono rispettivamente $\max C$ e/o $\min C$.

8a) Per $(x, y) \in E$, si ha $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 < 0$, ovvero $(x + y)^2 + y^2 < 4$; quindi $(x + y)^2 < 4$ e $y^2 < 4$, cioè $|x + y| < 2$, $|y| < 2$, da cui segue

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y| < 2 + 2 = 4.$$

Si deduce che E è contenuto nel rettangolo (privato dei lati) $D := (-4, 4) \times (-2, 2)$.

8b) Si osserva che $\sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza di un generico punto (x, y) dall'origine $O = (0, 0)$: di conseguenza, C è l'insieme numerico delle distanze dei punti di E da O . Poiché $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ e $O = (0, 0) \in E$ ($0 < 2$), si conclude che $\inf C = \min C = 0$, con $\arg \min C = (0, 0)$. Riguardo a $\sup C$, da 8a) sappiamo che la distanza dei punti di E da O non supera la distanza del punto di D più lontano da O . Calcolando la distanza dei vertici, si ottiene $\sup C < \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Con le conoscenze attuali, si considerino al variare di λ in $\mathbb{R}$ le rette per l'origine di equazione $y = \lambda x$: si ha $(x + y)^2 + y^2 < 4$ se e solo se $x^2[\lambda^2 + (1 + \lambda)^2] < 4$ e si comprende che un punto $P = (x, \lambda x)$ sulla retta suddetta appartiene a E se soddisfa $|x| < 4/[\lambda^2 + (1 + \lambda)^2] =: b_\lambda$ (è lecito dividere, ché λ e $1 + \lambda$ non sono mai simultaneamente nulli). Inoltre, il quadrato della distanza d di $P = P(x, \lambda)$ da O è $(1 + \lambda^2)x^2$. Di conseguenza, indicando con I_λ l'intervallo $(-b_\lambda, b_\lambda)$, per λ fissato si ha

$$\sup_{I_\lambda} d^2 = \sup_{x \in I_\lambda} (1 + \lambda^2)x^2 = 4 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2 + (1 + \lambda)^2} =: f(\lambda).$$

Si faccia ora variare λ . Si osserva che $f(\lambda)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, $f(\lambda) \rightarrow 2$, per $\lambda \rightarrow \pm\infty$; inoltre f è derivabile in $\mathbb{R}$, con

$$f'(\lambda) = 8 \frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{[\lambda^2 + (1 + \lambda)^2]^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lo studio del segno di $f'(\cdot)$ e facili calcoli mostrano che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = \frac{2}{3}(5 + \sqrt{5}) =: M, \quad \arg \max_{\mathbb{R}} f = \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

(Nei punti di E sull'asse y , si ha $x = 0$ e $y^2 < 2$, per cui $x^2 + y^2 < 2 < M$.) Si conclude che $\sup C = \sqrt{\frac{2}{3}(5 + \sqrt{5})}$. (Si osservi che effettivamente $\sup C < 2\sqrt{5}$.)

9. Nella fabbricazione dei calorimetri si incontra il problema di costruire recipienti cilindrici che abbiano la minima dispersione termica, e quindi tali che il rapporto [superficie]/[volume] (che è proporzionale alla dispersione) sia minimo. Se il volume del calorimetro è assegnato, quali devono essere le sue dimensioni per ottenere la proprietà cercata?

Le dimensioni del calorimetro sono il raggio r della base (un disco) e l'altezza h del cilindro; evidentemente $r, h > 0$, ch  altrimenti il cilindro degenera. Se S e V indicano rispettivamente la superficie ed il volume del cilindro, si ha

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h), \quad V = \pi r^2 h; \quad (1)$$

poich  il volume   fissato, l'obiettivo   rendere minima la superficie S . Dall'espressione di V e S in (1) si ricava dunque $h = V/(\pi r^2)$, e

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right).$$

Si introduce pertanto la funzione

$$g(r) = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right), \quad r > 0,$$

di cui si cerca – se esiste – il valore minimo. Si noti che g   derivabile in $J = (0, \infty)$, con

$$g'(r) = 2\pi \left(2r - \frac{V}{\pi r^2} \right) = \frac{4\pi}{r^2} \left(r^3 - \frac{V}{2\pi} \right); \quad r \in J;$$

di conseguenza, g risulta decrescente (in senso stretto) nell'intervallo $(0, \sqrt[3]{V/(2\pi)})$, crescente (in senso stretto) in $[\sqrt[3]{V/(2\pi)}, +\infty)$.

Si deduce che $\bar{r} = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$   (l'unico) punto di minimo assoluto per g in J :

$$\min_{r>0} g(r) = g(\bar{r}) = 3\pi \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{2/3} \quad \arg \min_{r>0} g(r) = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}.$$

OSSERVAZIONE:   importante sottolineare che $g'(\bar{r}) = 0$ non implica che la funzione $g(\cdot)$ ha un punto di minimo (relativo o assoluto) in $\bar{r}$, in assenza di altre giustificazioni e informazioni quali ad esempio:

$$g \text{ continua in } J, \quad g(r) \rightarrow +\infty \text{ per } r \rightarrow 0^+, \quad g(r) \rightarrow +\infty \text{ per } r \rightarrow +\infty$$

(Teorema di Weierstrass generalizzato).

In corrispondenza di $\bar{r}$ si ottiene

$$\bar{h} := h(\bar{r}) = \frac{V}{\pi \bar{r}^2} = 2 \frac{\frac{V}{2\pi}}{\left(\frac{V}{2\pi} \right)^{2/3}} = 2 \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3} = 2\bar{r}.$$

Si conclude che la ‘geometria’ del cilindro che rende minima la dispersione richiede l'altezza pari al diametro di base.

10. Si tracci un grafico qualitativo della funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x \log x}}$ (determinare il dominio ‘naturale’ $D \subseteq \mathbb{R}$ di f , stabilire il comportamento asintotico di f (in un intorno dei punti di accumulazione per D , e/o per $x \rightarrow +\infty$, e/o $x \rightarrow -\infty$), determinare eventuali punti critici, stabilendone la natura, ed infine riassumere le informazioni raccolte in un disegno).

Per la presenza di $\log x$ dev’essere $x > 0$; inoltre $x \log x \neq 0$ implica $x \neq 1$. Quindi $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Poiché $e^t > 0$ per ogni t , $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Le funzioni coinvolte sono C^∞ nel loro dominio, per cui $f \in C^\infty(D)$. Poiché $x \log x \rightarrow 0^-$, per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow 1^-$, mentre $x \log x \rightarrow 0^+$, per $x \rightarrow 1^+$, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x \log x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x \log x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x \log x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x \log x}} = 1$$

($x \log x \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow \infty$).

Dal fatto che

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x \log x}} \frac{(-\log x - 1)}{(x \log x)^2} = -\frac{e^{\frac{1}{x \log x}}}{(x \log x)^2} (\log x + 1) \quad \forall x > 0, x \neq 0, 1,$$

si vede che il segno della derivata di f dipende solo dal segno del fattore $(\log x + 1)$; d’altra parte $\log(\cdot)$ è una funzione strettamente crescente, e

$$\log x + 1 < 0 \quad \text{se } 0 < x < \frac{1}{e}, \quad \log x + 1 > 0 \quad \text{se } x > \frac{1}{e}.$$

Di conseguenza $f(x)$ risulta strettamente crescente in $[0, \frac{1}{e}]$ e strettamente decrescente in $[\frac{1}{e}, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Il punto $\frac{1}{e}$ è pertanto un punto di massimo relativo in cui la funzione assume il valore e^{-e} .

