LIMITI DI FUNZIONI
21 novembre 2017

30/10/2017 LEZIONE 19
$\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$

Dati $f : D \to C$ e $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$: quanto farà f quando $x \sim x_0$?
CONCETTO DINAMICO
se $x_0 \in D$, si ha $f(x_0)$ e ci si aspetta che $f(x) \sim f(x_0)$. Molte volte in effetti è così, ma NON sempre

ES. $f(x) = x + 1$, $x_0 = 1$: PLOT
A quale valore si avvicina f quando x si avvicina a 1?

ES2. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x = 1 \\ (x-1)^3 + 1 & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$: PLOT

ES3. $f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}$ PLOT
•$x_0 = 0 \notin D$: a quale valore si avvicina la quota $f(x)$ se x si avvicina a 0?
• $x_0 = +\infty \notin D$: a quale valore si avvicina f quando x diventa sempre più grande (si "avvicina" a $x_0 = +\infty$)?

Diremo che la funzione *tende* a $L \in \bar{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0 \in \bar{R}$.
Intendiamo che quando x è molto vicino a x_0 allora i valori assunti da $f(x)$ sono molto vicini a L
Più precisam: possiamo rendere f vicino a L **quanto vogliamo** purché si prenda x **abbastanza** vicino a x_0.
In questo caso chiamiamo L il **limite** di f per $x \to x_0$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

NB: **se già conosciamo il graf** f è facile rispondere alla domanda. In generale però data una certa espressione per f non abbiamo idea a priori del grafico, e anzi cerchiamo di capire le caratt salienti di f per disegnarlo almeno approsssimativam

Traduciamo in modo rigoroso (quindi non ambiguo) la dinamica dell'avvicinam.
CASO $L, x_0 \in \mathbb{R}$ FINITI
vicinanza = distanza piccola; distanza di $f(x)$ da L è $|f(x) - L|$, dist di x da x_0 è $|x - x_0|$
Vogliamo tradurre che f è tale per cui $|f(x) - L|$ si può rendere piccolo a piacere purché si prenda $|x - x_0|$ sufficientem piccolo

Def. Sia f def in $D \subset \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathbb{R}$ p. di accum per D e $L \in \mathbb{R}$. Diremo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se cmq piccola si prenda la dist che vogliamo realizz tra f e L è possibile trovare degli $x \in D$ con $|x - x_0|$ piccola e per cui in effetti i valori $f(x)$ assunti realizzano $|f(x) - L|$ piccola
DISEGNO
ossia: $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$ t.c. $\forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si abbia $|f(x) - L| < \varepsilon$

31/10/2017 LEZIONE 20
COMMENTI
1. $0 < |x - x_0|$ significa che $x \neq x_0$, vd ES2 sopra.
$|x - x_0| < \delta$ signif che x è distante da x_0 NON più di δ, x è nell'*intorno* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0
quindi $0 < |x - x_0| < \delta$ sse $x \in D \cap (B(x_0, \delta) - \{x_0\}) =$
INTORNO FORATO di x_0

2. Poiché vogliamo poter calcol f sugli x che realizzano
   $0 < |x - x_0| < \delta$, bisogna che $x \in D$. Serve dunque che comunque piccolo io trovi δ esistano degli $x \neq x_0$ vicini a x_0 più di δ e che siano in D. Questo signif esattam
   che x_0 di accum per D, ma x_0 può NON appartenere a D

   ESS. $D = (0, 2) \cup (2, 4)$, $x_0 = 2$; $D = \{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, x_0 = 0$.

3. ε e δ danno distanze $\Rightarrow > 0$
   ε dice quanta distanza ci deve essere tra f e L. Poiché vogliamo che questa possa essere *arbitrariam* piccola, ε deve poter essere **qualsiasi** $\forall$
   invece δ misura quanto possiamo prend x vicino a x_0 aff. sia verif $|f(x)-L| < \varepsilon$.
   δ non potrà essere scelto arbitrariam, ma dipenderà dalla scelta arbitraria fatta di ε: $\forall\varepsilon\exists\delta$
   più piccolo è ε, più, tipicam, sarà piccolo δ
4. Attenzione all'**ordine** dei quantificatori: prima si sceglie a piacere un ε, in corrisp di questo si deve poi lavorare per trovare un δ che soddisfi le richieste.
   Se scrivessimo $\exists\delta > 0 : \forall\varepsilon > 0$ staremmo chiedendo che gli $x \neq x_0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ realizzo distanza cmq piccola di $f(x)$ da L, ma allora (propr. dei n. reali) $f(x) \equiv L$ su B_{x_0}
   Se sbagliassimo quantif, pure esprimeremmo tutto altro fatto: es. $\forall\varepsilon > 0\forall\delta > 0$

EX. $f(x) = x^2 \to 0$, per $x \to 0$.
Dim. $|x^2 - 0| < \varepsilon$ sse $x^2 < \varepsilon$ sse $|x| < \sqrt{\varepsilon}$: l'ins delle soluz x contiene un intorno forato di 2, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Il lim è verificato.

NB: la verifica di un limite consiste SEMPRE nella RISOLUZ di una diseq. Poi il LIM è VERIF se tra le sol si trovano tutte le $x \neq x_0$ in un intorno di x_0, il lim NON è verif altrimenti.

EX. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$.
Dimostrare che $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.
Sol. Si ha $x_0 = 2, L = 4$. Si osservi che in $x_0 = 2$ si ha $|f(x_0) - L| = 3$, e quindi x_0 non soddisfa la disequazione $|f(x) - L| < \varepsilon$ nel caso in cui sia $\varepsilon < 3$. Risulta perciò che

$$|f(x) - 4| < \varepsilon$$

$\star$ per $\varepsilon > 4$: sse $x \in S_1 = (-\sqrt{\varepsilon + 4}, \sqrt{\varepsilon + 4})$, e questo contiene un intorno forato di 2, con $\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$;
$\star$ per $3 \leq \varepsilon \leq 4$: sse $x \in S_2 = (-\sqrt{\varepsilon + 4}, -\sqrt{4 - \varepsilon}) \cup (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{\varepsilon + 4})$, e questo contiene un intorno forato di 2, con $\delta = \min\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{\varepsilon + 4} - 2\}$;
$\star$ per $\varepsilon < 3$: sse $x \in S_2 = (-\sqrt{\varepsilon + 4}, -\sqrt{4 - \varepsilon}) \cup (\sqrt{4 - \varepsilon}, 2) \cup (2, \sqrt{\varepsilon + 4})$, e questo contiene un intorno forato di 2, con $\delta = \min\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{\varepsilon + 4} - 2\}$.
Il lim è dunque verificato.

MA NB: **basta prendere** ε **piccolo**, perché se per le $x \in B(x_0, \delta)$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$ a maggior ragione avremo $|f(x) - L| < \varepsilon'$ per ogni $\varepsilon' > \varepsilon$.

Quindi da ora in poi non dovremo controllare tutti i casi (ε piccoli, ε grandi), ma basterà limitarsi agli ε **arbitrariamente piccoli**

EX. Dimostrare che $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{x-2} = -4$. In qs caso $x_0 = 2 \notin D_f$.

$|\frac{4-x^2}{x-2}+4| = |-(x+2)+4| = |x-2| < \varepsilon, \delta = \varepsilon$. Soluzioni $(2-\varepsilon, 2) \cup (2, 2+\varepsilon)$

EX PER CASA. (p.153 Giusti) Dim che, fissato $\underline{a > 0}$ si ha $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Vale lo stesso se $a = 0$?

Sol. $D = [0, +\infty)$, ogni $a \geq 0$ è p. di accumulaz per D: il lim ha senso.
Vogliamo vedere se, dato $\varepsilon > 0$, con gli x che risolvono $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ posso costituire almeno un intorno forato di a.
$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$
quindi se $\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$, ho che $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ è verificata.
Per avere $\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$ basta prendere le x: $|x - a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Se prendo dunque $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ soddisfo la def di lim.

Se $\underline{a = 0}$, $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x}$ è $< \varepsilon$ sse $x < \varepsilon^2$, quindi le $x \in D$ soluzioni di $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$ sono quelle in $[0, \varepsilon^2)$, quindi con $\delta = \varepsilon^2$ vale che per ogni $x \in D \cap \Big((-\delta, 0) \cup (0, \delta)\Big)$ si ha $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$, e la def. è verif.

2/11/2017 LEZIONE 21

NB Per la verifica di un lim **POSSO SEMPRE** stabilire a priori che **prenderò** $\delta \leq k$, con $k > 0$ fissato: devo trovare UN qlc $\delta > 0$, se lo trovo $\leq k$ è ok

EX. Riverifichiamo il $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ con la $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
dell'altra volta, usando l'accorgimento appena detto.

Sol. Si ha $x_0 = 2, L = 4$. Prendiamo $\varepsilon < 3$, allora $|f(x) - 4| < \varepsilon$ sse $(x \neq 2$ e $|x^2 - 4| < \varepsilon)$, ossia $(x \neq 2$ e $|x-2||x+2| < \varepsilon)$.

IDEA: se potessi dire che $|x + 2| < c$ per un opportuno numero c, allora avrei $|x-2||x+2| < |x-2|c$ e se x soddisfa $|x-2|c < \varepsilon$ allora soddisfa anche $|x-2||x+2| < \varepsilon$, perché $|x-2||x+2| < |x-2|c < \varepsilon$
andrei allora a risolvere $|x-2|c < \varepsilon$ che è facilissima e fornisce immediatamente un intorno di 2, perché $c|x-2| < \varepsilon$ sse $|x-2| < \frac{\varepsilon}{c}$ sse $x \in (2 - \frac{\varepsilon}{c}, 2 + \frac{\varepsilon}{c})$ e avrei finito la verifica del lim.

Ora: per quali x e per quale c posso dire che $|x + 2| < c$? Devo stare attenta a scegliere delle x intorno a 2.
Intanto se prendo $x > 0$ ho che $|x + 2| = x + 2$, poi se prendo $x < 4$ ho che $x + 2 < 6$ e allora è fatta.

RICAPITOLANDO: anziché cercare TUTTE le soluzioni x reali di $|x^2 - 4| < \varepsilon$ mi accontento di quelle tra 0 e 4. $(0, 4)$ è un intorno di $x_0 = 2$ di raggio 2, quindi sto cercando un intorno forato di 2, le cui x siano tutte soluzioni, con raggio $\delta \leq k = 2$.
Per le $x \in (0, 4)$ ottengo che $|x^2 - 4| = |x-2||x+2| < 6|x-2|$. Impongo allora la condizione più restrittiva $6|x-2| < \varepsilon$ e trovo le sue soluzioni $x \in (2 - \frac{\varepsilon}{6}, 2 + \frac{\varepsilon}{6})$.
Ricordo che $x_0 = 2$ non risolve $|x^2 - 4| < \varepsilon$ se $\varepsilon < 3$.
Quindi tutte le $x \in S = (2 - \frac{\varepsilon}{6}, 2) \cup (2, 2 + \frac{\varepsilon}{6})$ sono soluzioni di $|x^2 - 4| < \varepsilon$.
Devo garantire che $\frac{\varepsilon}{6} \leq k = 2$: ok perchè $\varepsilon < 3 < 12$.
Poiché S è un intorno forato di 2, il lim è verificato. ■

NB. Abbiamo evitato di trovare TUTTE le soluz di $|x^2-4|<\varepsilon$, ci bastava trovare che tutte le x in UN int forato di 2 la risolvessero

ES$\star$. $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{se } x\in[0,2] \\ -3x+9 & \text{se } x\in(2,+\infty) \end{cases}$, $x_0=1$
PLOT
$f(1)=3$
E' $\lim_{x\to1} f=2$? Ci sono degli $x\in D$ per cui $|f(x)-2|<0.1$?
SI ma NON sono vicini a x_0

Vale invece che $\lim_{x\to1} f=3$. Dim: fissato $\varepsilon>0$ voglio vedere che esiste UN intorno forato di 1 le cui x sono TUTTE soluzioni di $|f(x)-3|<\varepsilon$.
Mi restringo a cercare un intorno forato di 1 con raggio $\delta<1$, così $1-\delta>0$ e $1+\delta<2$ e allora $\forall x\in(1-\delta,1+\delta)$ ho $f(3)=3\Rightarrow|f(x)-3|=0<\varepsilon$ per OGNI $\varepsilon>0$.■

EX. Dim se vero che $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x-1}=2$
$\left|\frac{1-x^2}{x-1}-2\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{-(x-1)(1+x)}{x-1}-2\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|-1-x-2|=|x+3|<\varepsilon$,
x in un int di -3, e NON di 1

[EX. Dimostrare che $\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x+1}=2$ [p.152 Giusti]

[*Sol.* Devo far vedere che, preso $\varepsilon>0$ arbitrario, $\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|<\varepsilon$ per x suff vicini
[a 1.
[Devo mostrare che $\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|=\left|\frac{1-x}{x+1}\right|$ è piccolo:
[se fosse $|x+1|>1$ potrei dire $\left|\frac{1-x}{x+1}\right|<|1-x|$, e per x suff vicino a 1 otterrei
[che $\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|$ è piccolo.
[Se considero solo le $x>0$ ho $|1+x|=1+x>1$ e ok.
[Se voglio che tutte le x di $B(1,\delta)=(1-\delta,1+\delta)$ siano $x>0$ basta che prenda
[il raggio $\delta\le1$
[Quindi cerco $\delta\le1$ tale che ogni $x\in B(1,\delta)-\{1\}$ soddisfi $|1-x|<\varepsilon$:
[$\star$ se $\varepsilon\le1$ prendo $\delta=\varepsilon$, così per ogni $x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ ho $x>0$
[$\Rightarrow 1+x>1>0\Rightarrow\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|=\left|\frac{1-x}{x+1}\right|=\frac{|1-x|}{1+x}<|1-x|<\delta=\varepsilon$ e ok
[$\star$ se $\varepsilon>1$ prendo $\delta=1$, così $\forall x\in(0,1)\cup(1,2)$ posso dire che $1+x>1>0\Rightarrow$
[$\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|=\left|\frac{1-x}{x+1}\right|=\frac{|1-x|}{1+x}<|1-x|<1<\varepsilon$. ■

EX per casa. Dim che $\lim_{x\to0}e^x=1$. (Giusti p. 154)

NB. **Nomi muti**: posso cambiare nomi a ε,δ,x, ecc.
Ad es. $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ se $\forall t>0\exists\delta>0:\forall x\in D$ con $0<|x-x_0|<\delta$ si abbia $|f(x)-L|<t$
Opp. $\lim_{x\to a}f(x)=L$ sse $\lim_{z\to a}f(z)=L$

[Quindi vale anche che $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ sse $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x\in D$ con
[$0<|x-x_0|<\delta$ si abbia $|f(x)-L|<10\varepsilon$ perché $t=10\varepsilon$ allora $t>0$ sse $\varepsilon>0$

TRADUCIAMO la def di limite nel LINGUAGGIO DEGLI INTORNI: ricordo che $x\in B(x_0,\delta)$ sse $|x-x_0|<\delta$, sse $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ e $|f(x)-L|<\varepsilon$ signif che $y=f(x)\in B(L,\varepsilon)$, cioè $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

Chiamiamo $I_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $I^f_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
e $I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Allora vale che: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ sse per ogni intorno I_L posso trovare un intorno $I_{x_0} = B(x_0, \delta)$ tale che $\forall x \in D \cap I^f_{x_0}$ si abbia $f(x) \in I_L$.

NB: I_L si trova sull'asse y, mentre I_{x_0} sull'ass x

EXX verif di limiti Zwirner p. 611, n.2,4,11, 13 (x_0, L finiti)

NB il **lim NON necess esiste**

ES 2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [1, 2) \\ 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \end{cases}$

PLOT

$\lim_{x\to 1} f =?$

$\lim_{x\to 3} f =?$

Teorema. Il $lim_{x\to x_0} f(x)$ se esiste è **unico**.

Dim. Per assurdo. Se $lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ e $lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$ con $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ posso trovare 2 intorni I_{L_1}, I_{L_2} suff. piccoli da NON intersecarsi: $I_{L_1} \cap I_{L_2} = \emptyset$.
$lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow$ posso trovare $I^1_{x_0} : \forall x \in D, \in I^1_{x_0} - \{x_0\}$ si ha $f(x) \in I_{L_1}$;
$lim_{x\to x_0} f(x) = L_2 \Leftrightarrow$ posso trovare $I^2_{x_0} : \forall x \in D, \in I^2_{x_0} - \{x_0\}$ si ha $f(x) \in I_{L_2}$;
DISEGNO
$I^1_{x_0} \cap I^2_{x_0}$ sarà l'int più piccolo dei 2, e $\forall x \in D, x \in I^1_{x_0} \cap I^2_{x_0} - \{x_0\}$ sono verif entrambe $f(x) \in I_{L_1}, f(x) \in I_{L_2}$, ma allora $f(x) \in I_{L_1} \cap I_{L_2}$. Ma quest'ultima è $\emptyset \Rightarrow$ assurdo.$\blacksquare$

Limiti destro e sinistro [p. 156 libro rosa]

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ p. di accum per $D(f) \cap (x_0, +\infty)$. Diciamo che il limite dx di f per $x \to x_0$ è L, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, se f si avvicina a L quando x si avvic a x_0, ma $x > x_0$: ci interessa guardare solo i pti x a dx di x_0.

OSS: Se $f : D \to C$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ è di fatto il $\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)$, dove $\tilde{f}$ è f ristretta a $D \cap (x_0, +\infty)$

Def. CON GLI INTORNI Se $x_0 \in \mathbb{R} : I^+_{x_0} = (x_0, x_0 + \delta)$ intorno dx di x_0

OSS: $x \in I^+_{x_0} \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$

Def. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ se $\forall I_L \exists I^+_{x_0} : \forall x \in I^+_{x_0}$ si ha $f(x) \in I_L$.

Es. $f =$ fz segno. $\lim_{x\to 0} f =?$
f si avvicina a 1 e -1 per $x \sim 0$. E' lim=1? $\forall \varepsilon > 0$, soluz di $|f - 1| < \varepsilon$ sono tutte le $x > 0$: costituiscono queste un int di 0? NO $\Rightarrow$ lim $\neq 1$. Idem $\Rightarrow$ *lim* $\neq -1$. Allora lim $\nexists$.
Però esiste il lim dx: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 1$, perché $\forall \varepsilon > 0$ le soluz di $|f - 1| < \varepsilon$ sono tutte le $x > 0$, che costituiscono un int dx di 0.

6/11/2017 LEZIONE 22

Def. Se $x_0 \in \mathbb{R} : I^-_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0)$ intorno sx di x_0

OSS: $x \in I^-_{x_0} \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0$.

Def. per x_0 p di accum per $D(f)\cap(-\infty, x_0)$: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ se $\forall I_L \exists I^-_{x_0} : \forall x \in I^-_{x_0}$ si ha $f(x) \in I_L$.

Es. $\lim_{x\to 0^-} sgn(x) = -1$

Teorema. Esiste il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ed è $\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

Quindi, per vedere se una funzione f ha limite per $x \to x_0$, basta controllare i lim dx e sx. Se tali 2 lim o non esistono o non coincidono $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f \not\exists$

ES. $\lim_{x\to 0} 1 + x$

EX. $f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ 1 + x & x < 0 \end{cases}$
$\lim_{x\to 0} f$?
Sol: lim dx: $e^x \to 1$. Lim sx: $1 + x \to 1$. Coincidono $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f = 1$.
DISEGNO

EXX Giusti p.182 5.8, pti 5,6,9,10,11,12 (calcolo di limm con val assol, segno)

Se anche il lim esiste, non necessariam succede che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Visto anche ES2. a pag 1

[EX. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}_\star \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
[PLOT
[$\lim_{x\to 1} f = ?f(0)$?

Def. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ fz. Quando $x_0 \in D$ e x_0 di accumulaz per D e:
1) $\exists \lim_{x\to x_0} f$
2) $L = f(x_0)$,
diciamo che f è **continua** in x_0.

ES. x^3 è cont in $x_0 = 1$: $f(1) = 1$, è $\lim_{x\to 1} f = 1$?
Dato $\varepsilon > 0$, devo risolv $|x^3 - 1| < \varepsilon$, ossia $\begin{cases} x^3 - 1 < \varepsilon \\ x^3 - 1 > -\varepsilon \end{cases}$ che è soddisfatta dalle $x \in ([3]\sqrt{1-\varepsilon}, [3]\sqrt{1+\varepsilon})$: questo è un intorno (e anche completo anziché forato) di 1 $\Rightarrow$ lim verificato.$\blacksquare$

ES. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ NON è cont in 1, perché $\lim_{x\to 1} f = 1$, mentre $f(1) = 3$.
Solo il valore $f(1) = 1$ renderebbe f cont in 1, DISEGNO

Il **graf di una f cont** in x_0 non ha INTERRUZIONE in x_0

OSS se $f : D = [a, b) \to \mathbb{R}$ e calcolo $\lim_{x\to a} f$ posso solo avvicinarmi ad a dagli $x > a$
di fatto calcolo $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Def. f **cont in** $E \subseteq D$ se f cont in ogni $x \in E$

OSS. f cont in $[a, b] \Rightarrow$ la parte di graf f in corrisp di $[a, b]$ sull'asse delle ascisse può esser disegnata senza MAI STACCARE LA PENNA dal foglio

Def. quando diciamo che $f : D \to \mathbb{R}$ è continua signif che f è ct in tutto D

Ci sono vari tipi di disct di una fz:

nell'Es $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [1, 2) \\ 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \end{cases}$

la fz è disct in 1 perché il $\lim_{x\to 1} f \nexists$

f è disct anche in 2

OSS: f è cont in 3

Non posso fare un tratto continuo nel disegnare il graf, perché ad un certo p. ho un SALTO

nell'Es $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

il $\lim_{x\to 1} f$ esiste, ma la fz è disct in 1 perché il lim $\neq f(1)$

ecc. Non sottilizzeremo sui diversi generi

OSS: la continuità è MOLTO IMPORTANTE: se sappiamo che una f è ct in un E e dobbiamo calc $\lim_{x\to x_0} f$ con $x_0 \in E$, non dobbiamo calcolare altro che $f(x_0)$

Teorema. Tutte le **fz elem** seguenti sono **cont** nel loro D: costanti, potenze, $|x|$, esponenziali, logaritmi, trigonometriche

ES. $x, x^3, \log_2(x)$, ecc.

$\lim_{x\to 1} \log_2(x) =?$

In part NON stacco mai la penna quando disegno i loro graff in corrispondenza di intervalli sull'asse x: quando una fz è cont l'immagine di intervalli è tutto un intervallo (non ha buchi)

ES graf x^3

NB!!! graf $\frac{1}{x^2}$: la fz è cont nel suo CE, ma in 0 f NON è definita: non posso pretendere di disegnare il grafico da $-\infty$ a $+\infty$ senza interruzioni, quando passo da 0 per forza devo staccare la penna dal foglio

ES. sgn(x)

EX. Dal graf di $|x^2 - 2x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ riconoscere se la fz è cont

Teorema: permanenza del segno. Sia $(f, D_f, \mathbb{R})$ una fz, con $D_f \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 p. di accum per D_f. Se $\exists \lim_{x\to x_0} f = L \neq 0$ allora, almeno in un intorno I_{x_0}, f assume lo stesso segno di L:

se $L > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) > 0$;

se $L < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) < 0$.

DISEGNO

EX $sgn(x) + \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$: può essere $\lim_{x \to 0} f = \frac{1}{2}$? no
dim: $f(0) = \frac{1}{2} > 0$, ma in ogni I_0 esistono sia pti x su cui $f(x) > 0$ che pti z su cui $f(z) < 0$. Allora il $\lim_{x \to 0} f$ non può essere $\frac{1}{2}$, infatti NON esiste
f è DISCT in 0.

7/11/2017 LEZIONE 23

Limite $L = +\infty$, con $x_0 \in \mathbb{R}$

Quando, per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, i valori $f(x)$ assunti da f sono positivi e diventano sempre più grandi in modo da superare man mano ogni fissato numero reale, diciamo che $f \to +\infty$.

DISEGNO con $x_0 \in \mathbb{R}$

Def. Sia f fz def in $D \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ p. di accum per D. Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se quando x si avvicina a x_0 f supera ogni costante:
DISEGNO
$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall\, x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $f(x) > M$.

La disuguaglianza da risolvere ora per verificare il limite è $f(x) > M$.
A livello pratico: dato un generico $M \in \mathbb{R}$ vogliamo ris. $f(x) > M$. Il lim è verif se tra le sol troviamo tutte le $x \in D, x \neq x_0$ di un int di x_0.

OSS: possiamo stabilire di prendere un $M >$ di un livello prefissato $\bar{M}$, ad es.
$M > 0$ o $M > 1$, ecc:
se verifico la def. con $M > \bar{M}$ allora automaticam. la def è verificata per OGNI $M' \leq \bar{M}$
perché se $M' \leq \bar{M}$ e sono in grado di trovare un int I_{x_0} per cui ogni $x \in I^f_{x_0} \cap D$ soddisfa $f(x) > \bar{M}$, poiché $\bar{M} \geq M'$ di sicuro ogni $x \in I^f_{x_0} \cap D$ soddisfa anche $f(x) > M'$

ES. Verifichiamo che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
DISEGNO
Prendiamo un generico $M > 0$. Vogliamo ris. $f(x) > M$. Il lim è verif se tra le sol troviamo tutti gli $x \neq 0$ di un int di 0: $\frac{1}{x^2} > M$ sse $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$:
$I_0 = (-\frac{1}{\sqrt{M}} . \frac{1}{\sqrt{M}})$.

OSS: è $f(x) = \frac{1}{x^2} : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}$ cont in 0? NO, nemmeno è definita in 0, quindi non ha senso chiedere se è continua in un punto in cui non è definita.
Se mi viene chiesto un esempio di funzione definita in $x_0 = 0$ ma discontinua in $x_0 = 0$ NON posso fornire $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

EX. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$?
Sol: preso $M > 0$, $\frac{1}{x} > M$ sse $0 < x < \frac{1}{M}$: questo non cosituisce un intorno forato di 0 che sia completo e fatto di punti di $D_f \Rightarrow$ lim non verificato.

Intorni di ∞. Per tradurre che f supera ogni costante posso dire che si *avvicina sempre più a* $+\infty$, ossia x va a finire *intorno* a $+\infty$.

Def. **intorno di** $+\infty$ un qualunque intervallo del tipo $(M, +\infty)$, o $(a, +\infty)$, con $M, a \in \mathbb{R}$ (positivi o non)

Analogamente, **intorno di** $-\infty$ un qualunque intervallo del tipo $(-\infty, K)$, o $(-\infty, a)$, con $K, a \in \mathbb{R}$ (negativi o non)

Ricordiamo che $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. La scrittura $a \in \bar{\mathbb{R}}$ riassume 3 diverse situazioni: che a possa essere finito, o $+\infty$, o $-\infty$

Def. **lim con $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $L \in \bar{\mathbb{R}}$ con gli intorni**:
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ sse $\forall I_L\ \exists I_{x_0} : \forall x \in I^f_{x_0} \cap D_f$ si ha $f(x) \in I_L$.

è quindi possibile prendere anche $x_0 = +\infty$: ciò corrisponde a domandarsi a quale valore f si avvicina quando x si avvicina a $+\infty$

Si noti che se $x_0 = +\infty$ ogni intorno $I_{+\infty} = (M, +\infty)$ di x_0 è già forato, perché non contiene x_0

IMPORTANTISSIMO: $f(x) \in I_L$ ci indica la disuguaglianza da risolvere quando dobbiamo verificare un limite, mentre $x \in I^f_{x_0} \cap D_f$ indica quale tipo di soluzioni devo poter trovare per sancire che il limite è verificato. Il lim è verif se TRA LE SOLUZ di $f(x) \in I_L$ ci sono ALMENO tutte le $x \in I^f_{x_0} \cap D_f$

Caso $x_0 \in \mathbb{R}, L = -\infty$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
Abbiamo $I_L = (-\infty, K)$, perciò $f(x) \in I_L$ significa $f(x) < K$, e quindi la disug che devo risolvere è $f(x) < K$.
Inoltre $I_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, perciò $x \in I^f_{x_0} \cap D_f$ significa $x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, e quindi il limite è verificato se TUTTE le $x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ sono soluzioni della disuguagl $f(x) < K$.

> Si noti che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ significa che quando x si avvicina a x_0, f VA AL DI SOTTO di ogni costante
> DISEGNO
> $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0 : \forall\ x \in D$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $f(x) < K$.

Anche in questo caso possiamo stabilire di prendere un $K <$ di un livello prefissato, ad es. $K < 0$ o $K < -1$, ecc.

> ES. $\lim_{x\to 0} \log(x)$
> NB si tratta di un lim dx.
> $\log x < K$ sse $x < e^K$, ma deve anche essere $x > 0$
> per il CE.
> Le soluzioni sono $x \in (0, e^K)$, che è un intorno dx di 0. Lim verificato.

> EX. Verificare che $\lim_{x\to 0} \log(|x|) = -\infty$.
> DISEGNO: fz pari
> $D_f = \mathbb{R}_\star$. Dato $K \in \mathbb{R}$, devo ris. $f(x) < K : \log(|x|) < K$, $|x| < e^K$ sse $-e^K < x < e^K$. Tutte le $x \neq 0$ nell'intorno $(-e^K, e^K)$ soddisf la dis $\Rightarrow$ il lim è verif.

OSS: come nel caso di limite finito, anche per $L = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) l'ampiezza dell'intorno I_{x_0} che si troverà nel verificare il limite dipenderà in genere da M (rispettivamente, da K). Per esempio, se $I_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, il δ dipenderà da M (rispettivamente, da K)

9/11/2017 LEZIONE 24

Limiti all'infinito: quando $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$.

Se $x_0 = +\infty$ (rispettivamente a $x_0 = -\infty$), f deve essere calcolabile su punti che si possono avvicinare indefinitam a $x_0 = +\infty$ (rispettivamente a $x_0 = -\infty$).

In ciascun caso ($x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$), se il lim esiste si possono avere 3 casi: $L \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty$.

Ad es. per $x_0 = -\infty$ e $L = +\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$:
abbiamo $I_{x_0} = (-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, allora anche $I^f_{x_0} = (-\infty, a)$, e $x \in I^f_{x_0} \Leftrightarrow x < a$; inoltre $I_L = (K, +\infty)$, con $K \in \mathbb{R}$, allora la disuguaglianza da risolvere per verificare il limite è $f(x) > K$, ed il limite è verificato sse tra le soluzioni troviamo tutte le $x \in D$ con $x < a$, per un opportuno a che in genere dipenderà da K.
DISEGNO

Altro esempio, per $x_0 = +\infty$ e $L \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to+\infty} f = L \in \mathbb{R}$:
abbiamo $I_{x_0} = (b, +\infty)$, con $b \in \mathbb{R}$, allora anche $I^f_{x_0} = (b, +\infty)$, e $x \in I^f_{x_0} \Leftrightarrow x > b$
Invece $I_L = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, perciò la disuguaglianza da verificare è quella che traduce $f(x) \in I_L$, ossia $|f(x) - L| < \varepsilon$. Il lim è verif sse tra le soluzioni troviamo tutte le $x \in D$ con $x > b$, per un opportuno b che in genere dipenderà da ε.
DISEGNO

E così anche per gli altri 4 casi.

In tutto abbiamo 9 def di limiti (per ogni possibile scelta di x_0 finito, $+\infty, -\infty$ abbiamo 3 scelte L finito, o $+\infty$, o $-\infty$). La def con gli intorni è invece una sola, e comprende tutti e 9 i casi

EX per casa: dim che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ e anche $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.

EX. (p.176 Giusti) Verif $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0 : CE = \mathbb{R}_+$
$|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon$ sse $|\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}| < \varepsilon$ sse $|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}| = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
$< \varepsilon$. Ma $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$: se allora $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ sono ok, ossia $\sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}$, $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$.
$|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon$ è soddisfatta da tutte le $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$, che formano un int di $+\infty \Rightarrow$ ok.

EX per casa. (Giusti p. 174) verif $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1$: $|\frac{x-1}{x} - 1| = \frac{1}{|x|}$. Dato $\varepsilon > 0$ ho $|\frac{x-1}{x} - 1| < \varepsilon$ sse $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ sse $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$: la dis è verif da TUTTI gli $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, che formano un int di $-\infty \Rightarrow$ ok.

Lim dx/sx quando $L \in \bar{\mathbb{R}}$: tutto analogo al caso visto con $x_0 \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che per $x_0 \in \mathbb{R}$ $I^+_{x_0} = (x_0, x_0 + \delta), I^-_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0)$.

Siano più in generale $x_0 \in \mathbb{R}, L \in \bar{\mathbb{R}}$: si dice che
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ quando $\forall I_L \exists I_{x_0} : \forall x \in I^+_{x_0} \cap D_f$ si ha $f(x) \in I_L$

Per la verifica risolviamo come al solito la disug che traduce $f(x) \in I_L$, ma poi ci basta trovare, tra le soluzioni, un intorno destro di x_0 fatto di punti di D_f

Si dice che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ quando $\forall I_L \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0}^- \cap D_f$ si ha $f(x) \in I_L$

OSS: Scrivere $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ è polivalente (signif che il lim è o $+\infty$ o $-\infty$)
e può andare bene in certi contesti (come sotto),
ma è anche ambiguo, e NON VA BENE ad es. nello studio di una fz

OSS: "Per $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} f = \ell \Leftrightarrow$ sia $\lim_{x\to x_0^+} f = \ell$ che $\lim_{x\to x_0^-} f = \ell$" vale anche nei casi $L = +\infty$ o $L = -\infty$

ES. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.
Sol: lim dx: $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$. Lim sx: $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty$.
Il lim $\nexists$: $\ell_1 \neq \ell_2$

OSS2: permanenza del segno vale anche nei casi con $x_0 = \infty$ e/o $L = \infty$

ES. Se $\lim_{x\to+\infty} f = L \neq 0 \Rightarrow$ su tutto un intorno $(b, +\infty) \cap D$ di $+\infty$ si ha che $sgn(f(x)) = sgn(L)$.

EX per casa: Verificare che $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1$.
Sol. $|\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon$ sse $-\varepsilon < \sqrt{1+x} - 1 < \varepsilon$: CE $x \geq -1$;
1. $\sqrt{1+x} - 1 < \varepsilon$ sse $\sqrt{1+x} < \varepsilon + 1$ basi positive, quindi sse $x + 1 < (\varepsilon+1)^2$, sse $x < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$
2. $\sqrt{1+x} - 1 > -\varepsilon$ sse $\sqrt{1+x} > -\varepsilon + 1$ prendo $\varepsilon < 1$, così basi positive, quindi sse $x + 1 > (-\varepsilon+1)^2$, sse $x > \varepsilon^2 - 2\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon - 2) < 0$.
L'insieme $(\varepsilon(\varepsilon-2), \varepsilon^2 + 2\varepsilon)$ delle soluzioni contiene un intorno forato di 0, il lim è dunque verificato.■

Non sempre dobbiamo fare verifiche: in moltissimi casi qualcuno le ha fatte per noi in generale

Teorema: operazioni tra funzioni e limiti. Siano $(f, D_f, \mathbb{R}), (g, D_g, \mathbb{R})$ due fz, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ p. di accum per $D_f \cap D_g$. Se $\exists \lim_{x\to x_0} f = F$ finito e $\exists \lim_{x\to x_0} g = G$ finito $\Rightarrow$
1) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = F \pm G$; idem per una SOMMA FINITA di fz con lim finito
2) $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$.

ES. $P(x)$ polin $a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n : \lim_{x\to x_0} P(x)$?
ogni x^k cont $\Rightarrow x^k \to x_0^k$, a_k costante $\Rightarrow$ cont $\Rightarrow a_k \to a_k \Rightarrow a_kx^k \to a_kx_0^k \Rightarrow P(x) \to P(x_0)$, e qs vale $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow P(x)$ cont su $\mathbb{R}$.

3) se $\lim_{x\to x_0} g = G \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$.
4) se $\lim_{x\to x_0} f = F > 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = F^G$, $\forall G >=< 0$

[ATT: se $F = 0$ lim f^g può non essere finito (es. $x \to 1^+, f = \log x \to 0^+$,
[$g = sgn(1-x) \to -1 \Rightarrow f^g \sim 0^{-1} \to +\infty$)

EX. Calcolare $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x}{x^3-2}$. Abbiamo visto che se P polin $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Poiché il polin a denom ha $\lim_{x\to 1} x^3 - 2 = -1 = G \neq 0$, e $L = 4$, si ha che il lim richiesto è -4.

In partic si ha:
• somma (e differenza) e prodotto di fz cont è cont

• quoz di fz cont è cont nell'ins in cui il denom $\neq 0$, cioè nel D del quoz
• composiz di fz cont è cont: siano $f : D_f \to C_f, g : D_g \to D_f$ continue, se $x \to x_0$, allora $f(g(x)) \to \ell = f(g(x_0))$.

[EXX 5.3 Giusti, p. 161: in caso si calcoli il limite semplicemente facendo $f(x_0)$,
[giustificare SEMPRE cosa autorizza a farlo e perché la f in questione sia conti
[nua!!

13/11/17 LEZIONE 25

L'ultimo dei risultati sopra può essere usato per facilitare il calcolo di limiti complicati operando un **cambiamento di variabile** ed utilizzando limiti che nella nuova variabile sono più semplici

ES: $\lim_{x\to 1} \log(x^4)$? $g(x) = x^4$, $f(x) = \log(x)$: f, g continue $\Rightarrow (f \circ g)(x) \to \log(1^4) = 0$.

Quale meccanismo c'è sotto: avevamo da calcolare $\lim_{x\to x_0} F(x)$, ma potevamo riscriverla come $F(x) = f(g(x))$. Al posto della var x consideriamo $z = g(x)$:
· se $x \to x_0$ allora $z = g(x) \to z_0$ (che è $g(x_0)$ perché g cont), perciò
· guardiamo $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$ (che è $f(z_0)$ perché f è cont)
· (in questo caso) possiamo concludere che $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \ell = \lim_{z\to z_0} f(z)$.

ATT!! se f, g non cont, non necess il **cambiamento di variabile** consente di conclud che se $x \to x_0$, $g(x) = z \to z_0$, e se per $z \to z_0$ si ha $f(z) \to \ell$ allora $f(g(x)) \to \ell$.

ES. $f(x) = sgn^2(x), g(x) \equiv 0$, allora $F(x) = f(g(x)) \equiv f(0) = 0 \Rightarrow$
$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = 0$ qls sia x_0
invece per $x \to 0$ abbiamo $g(x) \to 0 = z_0$, e per $z \to z_0 = 0$ si ha $f(z) = sgn^2(z)$
$\to 1 = \ell \neq 0$ ■

La conclusione $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ dopo il cambiam di variabile è lecita SOLO SOTTO PRECISE ipotesi: il teo sopra ci dice che se f, g continue $\Rightarrow$ ok.

Teo 2 sul cambiam di var: se il cambiam di var g è ineittivo $\Rightarrow$
$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{z\to z_0} f(z)$

in partic vale se $g \uparrow\uparrow$ opp. $g \downarrow\downarrow$

ES. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{1}{x}$:
$\lim_{x\to 2} f(g(x))$? g iniettiva, $g(x) \to \frac{1}{2}, f(z) \to \frac{1}{4}$ per $z \to \frac{1}{2} \Rightarrow f(g(x)) \to \frac{1}{4}$.

Teo 3 di cambiam di var [facilitato] Se il cambiam di var g è tale per cui $g^{-1}(z_0)$ è costituito da al più un numero finito di punti $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{z\to z_0} f(z)$

ES. $g(x) = x^2$ e $x \to 0$: g non iniettiva, ma $z = g(x) \to 0 = z_0$, e $g^{-1}(z_0) = 0$ singoletto $\Rightarrow$ soddisfa l'ipot

ES. Se $g(x) \to \infty$ per $x \to x_0$ le ipotesi del teo 3 sono soddisfatte: $g^{-1}(\infty) = \emptyset$

Teor. Limite di fz monotone. [serve per il calcolo di $Im(f)$]
Se $f \uparrow$ su $(a, +\infty)$ per un certo $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f = \sup_{(a,+\infty)} f$

Se $f \downarrow$ su $(a, +\infty)$ per un certo $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f = \inf_{(a,+\infty)} f$

Es. NOTEVOLE (p.175 Giusti): $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in [0,1) \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

vd graf

[EX PER CASA. $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \geq 0 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$
[$\lim_{x\to 0} f$? è f cont in 0?
[Sol: lim dx: $\cos(x) \to 1$. Lim sx: $1 + x \to 1$. Coincidono $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f = 1$,
[$f(0) = 1 \Rightarrow f$ cont in 0.
[DISEGNO

Es. NOTEVOLE. $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & a < 1 \end{cases}$

Teor2. Limite di fz monotone.
Se $f \uparrow$ su $(-\infty, a)$ per un certo $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f = \inf_{(-\infty,a)} f$
Se $f \downarrow$ su $(-\infty, a)$ per un certo $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f = \sup_{(-\infty,a)} f$

Es. NOTEVOLE $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a < 1 \end{cases}$

Oss. Se scriviamo $\lim_{x\to\infty} f = L$ intendiamo che sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ il lim è L

[EXX casa Zwirner p. 610-611 (verifiche di lim): n.18,19 (lim infiniti), 23, 25,
[26, 29 ($x_0 \to \infty$)

Limiti L^+, L^- [p.158 libro rosa] Quando $L \in \mathbb{R}$, e quando possibile, **si specifica** se $f(x)$ tende ad L scendendovi dal di sopra o salendovi dal di sotto, scrivendo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L^+ \text{ e rispettivamente } L^-.$$

Es. Sia $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Si ha $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$: infatti
$\frac{1}{x} : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ è fz $\downarrow \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \inf_{(0,+\infty)} \frac{1}{x} = 0$, ma $x > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2^+$
$\frac{1}{x} : \mathbb{R}_{--} \to \mathbb{R}$ è fz $\downarrow \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \sup_{(-\infty,0)} \frac{1}{x} = 0$ ma $x < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2^-$

Sapere se $\lim g(x) = \ell^+$ o ℓ^- fondamentale in alcuni casi. Per es. se devo calcolare $\lim \frac{1}{g(x)}$ e so che $g(x) \to 0$.

Teo carabinieri [p. 163 Giusti, 179 rosa]
$\star$ Siano f, g, h tre fz e $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, tali che $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ per ogni $x \neq x_0$ in un intorno di x_0. Se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L \in \bar{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.
$\star$ $g \leq f$ per ogni $x \neq x_0$ in un intorno di x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} g = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f = +\infty$.

Es. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \to 0$.

[Es. [5.16 p. 164 Giusti] Calcolare $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\cos(\frac{1}{x})$.
[$\sqrt{x}$ ha CE=$\mathbb{R}_+$, mentre $\cos(\frac{1}{x})$ ha CE= $\mathbb{R}_\star$, quindi CE di $\sqrt{x}\cos(\frac{1}{x})$ è $(0,+\infty)$,
[e $x\to 0$ solo per valori $x>0$. $\cos(\frac{1}{x})$ non ha lim, però è fz limitata: $-1\le\cos(\frac{1}{x})$
[≤ 1 $\forall x>0$. Allora $-\sqrt{x}\le\sqrt{x}\cos(\frac{1}{x})\le\sqrt{x}$. $-\sqrt{x},\sqrt{x}\to 0\Rightarrow\sqrt{x}\cos(\frac{1}{x})\to 0$.

Ancora su operazioni tra funzioni e limiti

Quando si fanno operaz tra 2 fz f,g e i $\lim_{x\to x_0}$ sono o 0 o 1 o ∞, si possono presentare casi NON IMMEDIATI da risolvere.

Sia vero che: $\exists\lim_{x\to x_0} f\in\bar{\mathbb{R}}$ ed $\exists\lim_{x\to x_0} g\in\bar{\mathbb{R}}$, $x_0\in\bar{\mathbb{R}}$

notazione: se $\lim_{x\to x_0} f\in\mathbb{R}$ scrivo $\lim_{x\to x_0} f=F$, se $\lim_{x\to x_0} g\in\mathbb{R}$ scrivo $\lim_{x\to x_0} g=G$

1. SOMMA:

l'unico caso NON IMMEDIATO (anche detto *indeterminato*) è $+\infty-\infty$, quando cioè $\lim_{x\to x_0} f=+\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g=-\infty$: nulla si può dire a priori sul risultato del $\lim_{x\to x_0} f+g$

Es. Se $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $g=-\frac{1}{x^2}$ e $x\to 0$: si ha $f+g\sim+\infty-\infty$, ma poi $f+g=1\Rightarrow\lim f+g=1$.
Es2. Invece se $f(x)=\frac{2}{x^2}$, $g=-\frac{1}{x^2}$ e $x\to 0$: (già visto che $\frac{1}{x^2}\to+\infty$) si ha $f+g\sim+\infty-\infty$, ma poi $f+g=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\lim f+g=+\infty$.

[Es3. Se $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g=-\frac{2}{x^2}$ e $x\to 0$: si ha $f+g\sim+\infty-\infty$, ma poi
[$f+g=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow\lim f+g=-\infty$.
[Es4. [usa il teorema dei carabinieri con $f\ge g\to+\infty$ e che $\infty+G=\infty$]
[Se $f(x)=\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x}$,
[$g=-\frac{1}{x^2}$ e $x\to 0$: si ha $f+g\sim+\infty-\infty$, ma poi $f+g=\cos\frac{1}{x}$ e il lim
[nemmeno esiste!

In tutte le altre situazioni che si possono presentare si dimostra che il risult del $\lim_{x\to x_0} f+g$ è IMMEDIATO [TABELLA p.172 Giusti]:
$\star$ $F+(\pm\infty)=\pm\infty$
[ossia: se $F\in\mathbb{R}$ e $\lim g=\pm\infty\Rightarrow f+g\to\pm\infty$ rispettivamente]
$\star$ $\pm\infty+(\pm\infty)=\pm\infty$
[ossia: $\lim f=\pm\infty$ e $\lim g=\pm\infty$ concordi $\Rightarrow f+g\to\pm\infty$ rispettivamente]
$\star$ naturalmente $\pm\infty-(\mp\infty)=\pm\infty$

14/11/17 LEZIONE 26

2. PRODOTTO:

L'unico caso NON IMMEDIATO è $0\cdot\infty$, forma non immediata n.2. Invece sono casi IMMEDIATI per $\lim_{x\to x_0} fg$
$\star$ $F\neq 0$: $F\cdot\infty=\infty$

$\star$ $\infty\cdot\infty=\infty$
[ossia se $\lim f=\infty$ e $\lim g=\infty$ concordi o discordi: $fg\to\infty$): sgn dip da
[sgn($\lim f$) e sgn($\lim g$):
[$\lim f=\pm\infty$ e $\lim g=\pm\infty\Rightarrow fg\to+\infty$ (rispettivamente)

[$\lim f = \pm\infty$ e $\lim g = \mp\infty \Rightarrow fg \to -\infty$

[ES. Per $x \to +\infty$ ho $-2 + \frac{1}{x^2} \to -2$, $x \to +\infty \Rightarrow \Big(-2 + \frac{1}{x^2}\Big)x \to -\infty$

[ossia se $F \in \mathbb{R}$ e $\lim g = \infty : fg \to \infty$): sgn dip da sgn(F) e sgn(∞):
[$F > 0$ e $\lim g == \pm\infty \Rightarrow fg \to \pm\infty$ (rispettivamente)
[$F < 0$ e $\lim g = G = \pm\infty \Rightarrow fg \to \mp\infty$ (rispettivamente)

ES. Osservando che per il teo sul lim di fz monotone su $\mathbb{R}_{++}$ e su $\mathbb{R}_{--}$ si ha, per $n \in \mathbb{N}$:
· per $x \to +\infty \Rightarrow x^n \to +\infty$
· $x \to -\infty \Rightarrow x^n \to \pm\infty$ dove il segno dipende da se n pari o dispari
· $x \to \infty \Rightarrow x^{-n} \to 0$
allora risulta che se $x \to \infty$ e $a_n \neq 0$,
$p(x) = x^n(a_n + a_{n-1}x^{-1} + ... + a_1x^{-n+1} + a_0x^{-n}) \to \infty$,
con sgn del lim che dipende da sgn(x), n e sgn(a_n)

ES. $\lim_{x\to-\infty} 3x^5 - 2x^2 + 1$

3. QUOZIENTE:
Le sole forme NON IMMEDIATE: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, caso non immediato n.3

Es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x-1} \sim \frac{\infty}{\infty}$: $\frac{2x^2+1}{x-1} = \frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{x(2+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x}} \to +\infty$.
Es. Invece $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x^2+1}$: $\frac{x-1}{2x^2+1} = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x^2(2+\frac{1}{x^2})} \to 0$.

NB. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2x^2+1}} \sim \frac{0}{0}$: ma $\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{x-1} \to +\infty$ come sopra

[e così in generale: la forma $\frac{\infty}{\infty}$ è SEMPRE riconducibile a quella $\frac{0}{0}$: possiamo
[adottare gli stessi metodi che adottiamo per affrontare la forma $\frac{0}{0}$,
[riscrivendo $\frac{f(x)}{g(x)}$ (forma $\frac{\infty}{\infty}$) come $\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ (forma $\frac{0}{0}$)

[OSS. Anche la forma $0 \cdot \infty$ è riconducibile alla $\frac{0}{0}$: infatti se $f \to 0$ e $g \to \infty$,
[allora $\frac{1}{g} \to 0 \Rightarrow fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} \sim \frac{0}{0}$.

Invece è IMMEDIATO $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ nei seguenti casi [Tabella p. 172 sul Giusti]:

⋆ $\frac{F}{\infty} = 0$ ($F \in \mathbb{R}_\star$ e $\lim g = \infty \Rightarrow \frac{f}{g} \to 0$),
il segno poi dipende dal segno di f, g:
[$F > 0$ e $G = \pm\infty \Rightarrow \frac{f}{g} \to 0^\pm$
[$F < 0$ e $G = \pm\infty \Rightarrow \frac{f}{g} \to 0^\mp$

⋆ $\frac{0}{\infty} = 0$: quantità piccola diviso per quantità sempre più grande
[$F = 0^\pm$ e $\lim g = \pm\infty \Rightarrow \frac{f}{g} \to 0^+$
[$F = 0^\pm$ e $\lim g = \mp\infty \Rightarrow \frac{f}{g} \to 0^-$

⋆ $\frac{\infty}{G}$: se $G \neq 0 \Rightarrow \frac{\infty}{G} = \infty$
[$\lim f = \infty$ e G finito $\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \to \infty$),
segno dipende dal segno di f, g:
[$\lim f = \pm\infty$ e $G > 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \to \pm\infty$, ecc

⋆ $\frac{\infty}{0^+} = \infty$ e $\frac{\infty}{0^-} = \infty$: g resta sempre > 0 (o < 0) in TUTTO un intorno forato di $x_0 \cap D$

[ma se $g \to 0$ e oscilla, assumendo sia segno + che - in ogni intorno $I_{x_0} - \{x_0\}$
[di x_0, mentre $f \to +\infty$ o $f \to -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ **NON esiste**
[ES. $g = \frac{\sin x}{x}, x \to +\infty,\ f(x) = x \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{x^2}{\sin(x)}$

$\star$ $\frac{F}{0^{\pm}}$: se $F \neq 0$, $\frac{F}{0^+} = \infty, \frac{F}{0^-} = \infty$, segno dipende dal segno di f, g:

[$F > 0(< 0)$, $G \to 0^+$ opp. $G \to 0^-$ (quindi g resta > 0 (o < 0) in tutto un int
[$I_{x_0} - \{x_0\}) \Rightarrow \frac{f}{g} \to \pm\infty(\mp\infty)$
[se $F \neq 0$ finito e $g \to 0$ ma g oscilla assumendo sia valori + che - in ogni intorno
[$I_{x_0} - \{x_0\}$ di $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ **non esiste**, come per $\frac{\infty}{0}$: (immediato saperlo)

EX Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ [p. 163 Giusti: razionalizzo, ris = $\frac{1}{2}$]

E' possibile precisare **quanto velocemente** una fz f tenda a 0 o a ∞, ponendola a confronto con un'altra g di riferimento

Siano $\lim_{x\to x_0} f = \infty, \lim_{x\to x_0} g = \infty$. Se $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \infty$ (o anche $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g}{f} = 0$) diciamo che $f \to \infty$ **più velocemente** di g per $x \to x_0$, mentre $g \to \infty$ **più lentamente** di f.

Se invece $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = L$ finito e $\neq 0$, diciamo che le due fz tendono a ∞ con lo **stesso ordine di infinito**

[In part se $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{x^\alpha} = L$ finito e $\neq 0$ diciamo che $f \to \infty$ con ordine α.

ES. Siano $n > k > 0$ e $x \to \infty$: si ha $x^n \to \infty$ e $x^k \to \infty$, ma $\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k} \to \infty$
$\Rightarrow x^n \to \infty$ più velocemente di x^k

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, poiché $x^n \to \infty$ più velocem di tutti gli altri termini per $x \to \infty$, abbiamo che $p(x) \to \infty$ con stesso ordine di $a_n x^n : p(x) \sim a_n x^n$
Perciò se $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$ e $m < n$, abbiamo che
$q(x) \sim b_m x^m$ e $\frac{p(x)}{q(x)} \to \infty$. Quindi:

LIMITI DI QUOZIENTI DI POLINOMI per $x \to \infty$, m, n qls, $a_n, b_m \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{se grado di } p > \text{grado di } q \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{se grado di } p = \text{grado di } q = n\text{: } p(x), q(x) \text{ han stesso ordine} \\ 0 & \text{se grado di } p < \text{grado di } q. \end{cases}$$

ATT!! l'info che sto dando è incompleta, non è qui specificato il segno di ∞. Ad esempio, se nel primo dei tre casi si tratti di $+\infty$ o di $-\infty$ dipende dal segno di $a_n x^n$ e dal sgn di $b_m x^m$

Es. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3-2x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$

Se invece $\lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g = 0$:

se $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}=0$ diciamo che $f\to 0$ più velocem di g, e $g\to 0$ più lentamente

Es. $x\to 0$: $\frac{x^4}{x^2}\to 0: x^4\to 0$ più velocem di x^2 perché x è piccolo ($|x|<1$) e la potenza è più grande

se $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}=L$ finito e $\neq 0$ diciamo che f e g tendono a 0 con lo stesso ordine

[In part se $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f}{x^\alpha}=L$ finito e $\neq 0$ diciamo che $f\to 0$ con ordine α.

$x\to 0$ **Es. NOTEVOLE** $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ ■

Dunque $\sin(x)\sim x$, per $x\to 0$

EX. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{|x|}$ $\Big($Oppure $\frac{\sin(x)}{x^2}=\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{x}$, che tende a $+\infty$ se $x\to 0^+$, mentre tende a $-\infty$ se $x\to 0^-$, $\Big)$

Sol: lim dx: $x>0$, ho $\frac{\sin(x)}{x}\to 1$. Lim sx: $x<0$, ho $\frac{\sin(x)}{-x}\to -1$. Lim $\nexists$

$x\to 0$ **Es. NOTEVOLE** $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ ■

EX. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$

$\sin^2(x)\sim x^2, 1-\cos x\sim x^2 \Rightarrow$ mi aspetto che il quoz abbia lim $L\in\mathbb{R}$,
infatti: $\frac{\sin^2(x)}{x^2}\frac{x^2}{1-\cos(x)}\to 1\cdot 2$,
oppure uso la relazione $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
$\Rightarrow \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}=\frac{1-\cos^2(x)}{1-\cos(x)}=\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1-\cos(x)}=1+\cos(x)\to 2$.

EX. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^3}=+\infty : \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{x^2}$.

$x\to 0$ **Es. NOTEVOLE** $0\cdot\infty$: Per $a,\alpha>0$ si ha $\lim_{x\to 0}x^\alpha\log_a(x)=0$ ■

NB x può solo essere >0

Es. $\lim_{x\to 0}x\log(x)=0$

NB: $x\log(x)=\frac{\log(x)}{1/x}$, quindi, per $x\to 0$, $\log(x)\to\infty$ più lentam di $\frac{1}{x}$, ossia più lentam di quanto x tenda a 0.

$x\to\infty$ **Es. NOTEVOLE** $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. [usa che $x^\alpha\log_a(x)\to 0$]

Infatti $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}\ln(x^{-1})$

CAMBIO VARIABILE: $F(x)=-\frac{1}{x}\ln(x^{-1})=f(z)=-z\log z$, $z=g(x)=\frac{1}{x}$ $\to 0^+$: poiché g INIETTIVA, sono autorizz a dire che

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(g(x))=\lim_{z\to 0}f(z)=0.$$

Quindi per $x\to+\infty$, $\log(x)\to+\infty$ PIù LENTAM di x: $\log(x)<<x$

16/11/17 LEZIONE 27

$x\to\infty$ **Es. NOTEVOLE** $\frac{\infty}{\infty}$: più in gen, per $a,\alpha>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln_a x}{x^\alpha}=0$. ■

EX: Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$: forma $+\infty-\infty$

$x(1-\frac{\ln x}{x})\to+\infty$, coerente con $x>>\log(x)$

$x\to\infty$ **Es. NOTEVOLE** $\frac{\infty}{\infty}$: per $a>1,\alpha>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$ ■

Quindi $\forall\alpha > 0$ per $x \to \infty$, $x^\alpha \to \infty$ più lentam di e^x: $x^\alpha << e^x$

Gerarchia degli infiniti: $\log_a(x) << x^\alpha << b^x$, $\forall a > 1, b > 0$

$x \to 0$**Es. NOTEVOLE** $\frac{0}{0}$: $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ ■

EX. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$: $\alpha = \frac{1}{2}$.
$\frac{1}{x}\left[2\sqrt{1+\frac{x}{4}} - 2\right]$ con $z = \frac{x}{4}$, CAMBIAM di var INIETT ho $2\frac{\sqrt{1+z}-1}{4z} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4. POTENZA: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$
Le sole forme NON IMMEDIATE n.4 sono 1^∞, 0^0, ∞^0, TUTTE LE ALTRE sono immediate ed al risultato si arriva facilmente riflettendo: [p. 172, 228 Giusti]

⋆ F^G: già detto

⋆ F^∞: $(0 < F < 1)^{+\infty} = (F > 1)^{-\infty} = 0$
ES (visto): $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
[ottengo il risultato anche con cambio di variabile iniettivo $z = -x$
$(0 < F < 1)^{-\infty} = (F > 1)^{+\infty} = +\infty$

⋆ $(+\infty)^G$: $(+\infty)^{(G>0)} = (0^+)^{(G<0)} = +\infty$
[NB la base a 0^- non può andare: si esce dal CE di f^G
ES. $\lim_{x\to+\infty} x^{2+\frac{1}{x}}$
$(+\infty)^{(G<0)} = (0^+)^{(G>0)} = 0$

⋆ $(\infty)^\infty$: $(+\infty)^{+\infty} = (0^+)^{-\infty} = +\infty$
ES. $\lim_{x\to+\infty} x^x$
$(+\infty)^{-\infty} = (0^+)^{+\infty} = 0$
ES. $\lim_{x\to+\infty} x^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^x}$

Capiamo perché $(0^+)^{+\infty} = 0$ (le altre forme risultano più naturali): già se ho $a \in (0,1)$ ottengo $a^x \to 0$ quando $x \to +\infty$, perché una quantità piccola, moltiplicata per se stessa tante volte, diventa sempre più piccola (ad esempio i valori $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^{100}, \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$ si schiacciano sempre più a 0). A maggior ragione $[f(x)]^x \to 0$ se, man mano che l'esponente aumenta, anche la base positiva $f(x)$ diminuisce.

Ex. (forma ∞^0): $\lim_{x\to+\infty}(e^x)^{\frac{1}{\ln x}}$
Sol: $(e^x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{x}{\ln x}}$, e poiché $\frac{\ln x}{x} \to 0^+ \Rightarrow \frac{x}{\ln x} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{x}{\ln x}}$ forma $e^{+\infty} \to +\infty$.

$x \to \infty$ **Es. NOTEVOLE** (1^∞): $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^x = e^k$. ■

[ho $\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{f(x)}$, pongo $\frac{f}{x} = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{x}{f} \sim \frac{\infty}{k} = \infty \Rightarrow$ le
[ipot del teo 3 soddisfatte $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}} = \lim\limits_{z\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$.
[Ora: $e > 0$, $f(x) \to k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ condizioni per calcolo di $\lim h(x)^{f(x)}$, con $h(x) =$
$\left[\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]$, sono soddisfatte (lim della base > 0 e lim dell'esp finito)
[$\Rightarrow \lim h(x)^{f(x)} = e^k$ ma allora $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^x = e^k$.

In partic
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
è la DEF. di e

[si dim che $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è fz $\uparrow\uparrow$ su $\mathbb{R}_{++}$ e limitata sup $\Rightarrow$ lim = sup e sup
[finito per $x\to+\infty$

EX. (forma 0^0): $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$ (non sul formulario):
$x^x = e^{x\log(x)}$, $x\log(x)\to 0$: CE=$\mathbb{R}_{++}$,
siamo nel caso $f(x)\equiv e, g(x)=x\log x$, $F>0, G$ finito $\Rightarrow e^{x\log(x)}\to e^0=1$.

[EX. $\lim\limits_{x\to+infty}(x^{-1})^x = 1$:
[EX. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x^4}\right)^{\frac{1}{x^2+x^3}} = 0$.
[Sol: $\left(e^{-x^4}\right)^{\frac{1}{x^2+x^3}} = e^{\frac{-x^4}{x^2+x^3}} \sim e^{-\infty} = \left(\frac{1}{e}\right)^{+\infty}\to 0$.

[EX. $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
[$F(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} = f(g(x))$, $x=g(x)=\frac{1}{x}$ CAMBIO DI VAR INIETT,
[$f(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$: $g(x)\to\pm\infty$ se $x\to 0^\pm \Rightarrow \lim_{x\to 0^\pm} f(g(x)) =$
[$\lim_{z\to\pm\infty} f(z) = \lim_{z\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$.

[EX. $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$:
[$\frac{\log(1+x)}{x} = \log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$, CAMBIO VAR $u=(1+x)^{\frac{1}{x}} = g(x)$:
[$g(x)=\frac{1}{x}\downarrow\downarrow$ perché [$g(x)=G(h(x))$ con $G(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\uparrow\uparrow$ e $h(x)\downarrow\downarrow\Rightarrow g$
[iniett;
[$u\to e$ per $x\to 0\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\log[(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \lim_{u\to e}\log(u) = 1$

$x\to 0$ **ES. NOTEVOLE** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$:
[$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a[(1+x)^{\frac{1}{x}}]$ con lo stesso cambio di var di sopra ho
[$\to \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$

In partic. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$:

$x\to 0$ **ES. NOTEVOLE** $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$
[CAMBIO VAR: $a^x = y$, iniett, $y\to 1$, ottengo $\frac{y-1}{\log_a y}$;
[altro CAMBIO VAR iniett: $y-1=z\to 0$, ottengo $\frac{z}{\log_a(1+z)}\to\ln a$
[in pratica ho fatto $F(x)=f(g(x)), g(x)=y, h(y)=z, h(g(x))$ è composiz di fz
[iniett è iniett

In part. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1$

[messi tutti i lim notev del formulario]

EXX. CASA Giusti
5.6 (calcolare limiti con $x_0\in\mathbb{R}, L=\infty$, usando anche i notevoli), p.173
5.7 (calcolare limiti con $x_0=\infty$), p.177; 5.8 p.182, pti 5,6, e da 9 a 12

EX. per casa. Sia $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{(x-1)^2}$: determinare il comport di f ai bordi

EX per casa: sia $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x-1}$ [Compito 13/7/15]: determinare il comport di f ai bordi del suo CE

del suo CE

Compiti passati: exx sui limiti
eserciziario: n.88/91, 93/128, 130, 132, 134/146

Asintoti

Chiamiamo *asintoto* di f una retta a cui il graf f si avvicina per $x \sim x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$

Def. Quando $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ (può essere $+\infty$ oppure $-\infty$), allora la retta di equazione $x = x_0$ si chiama **asintoto verticale** di f. Idem se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$

ES. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ha asintoto verticale $\{x = 0\}$. PLOT
ES. $f(x) = \frac{1}{\log(x)}$ ha asintoto verticale $\{x = 1\}$. PLOT

Def. Quando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, e $\ell \in \mathbb{R}$, oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, e $\ell \in \mathbb{R}$, si dice che f ha un **asintoto orizzontale** di eq. $y = \ell$ per $x \to +\infty$ (rispettivam. per $x \to -\infty$).

ES. La funzione $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ ha asintoto orizzontale $y = 2$ per $x \to \pm\infty$.

NON parliamo di asintoti OBLIQUI.

EX. $f(x) = \frac{x}{x+1}$: determinare gli asint.
Sol: gli x_0 candidati per $x = x_0$ asintoto vertic sono gli $x_0 \in \mathbb{R}$ ai bordi del D
$x = -1$ asit vertic; asint orizz $y = 1$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

EX. per casa [Giusti p. 186]: asintoti vertic o orizz della fz $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
[no as. vertic (obliquo $y = x$).]

EX. casa Dire se la funzione $f(x) = x + \ln x$ ha asintoti e determinarli.

EX Giusti 5.11

Altre proprietà delle funzioni continue

EX. dire per quali valori del param. $b \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = \begin{cases} \log(x+2) & x \geq -1 \\ |x| + b & x < -1 \end{cases}$ è cont.

[EX Giusti 7.1 p.231 (verif se fz cont) NO classificare i p. di disct, no pti 5,6,10

[EX Eserciziario: n.147, 148 (parametriche), 149 (Im f ct, 150/154)

Teor di Weierstrass
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fz continua in $[a, b]$ (chiuso e limitato) $\Rightarrow$ f assume SEMPRE massimo e minimo assoluti in $[a, b]$.■

[Non può succedere, per una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, che il can

[didato valore massimo non sia assunto.

[ES. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, calcolare $\max_{[0,1.5]} f$, $\min_{[0,1.5]} f$.
[Sol: $f(x) = (x-3)(x-1), x_V = 2 \Rightarrow$ su $[0, 1.5]$ f decresc.

ES. $f(x) = x : [-1, 1] \to \mathbb{R} : \max_{[-1,1]} f = f(1)$

20/11/17 LEZIONE 28

Ma NB la tesi NON è garantita se le ipo non sono tutte soddisf

ES. $\max_{(-1,1)} x$ non esiste: x è cont, l'interv è limitato ma NON CH

[ES. $\max_{\mathbb{R}} x$ non esiste: l'interv è $(-\infty, +\infty)$ è NON limitato

[ES $f(x) = \begin{cases} 0 & x = -1, 1 \\ x & x \in (-1, 1) \end{cases}$ $\max_{[-1,1]} f$ non esiste: l'interv è ch e limit, ma f
[non è cont. PLOT

Teorema: zeri delle fz continue Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ct [NB che $lim_{x \to a} f =$ solo lim dx] tale che $f(a), f(b)$ discordi (quindi $\neq 0$) $\Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f(c) = 0$. ■

INTUIZIONE: non stacco mai la penna $\Rightarrow$ graf f deve attraversare asse x

ES $f(x) = e^x + x : f(0) = 1, f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$ PLOT
NOTA anche che $f(\bar{x}) = 0$ sse $e^{\bar{x}} = -\bar{x} : \bar{x}$ è p. dove si incontrano graff di e^x e di $-x$ PLOT
ES $sgn(x) - \frac{1}{2}$: in $[-10, 10]$ assume valori + e -, ma NON tocca 0, perché salta

[APPLICAZZ: esistenza di soluz a equazioni. $x^5 - 4x^2 + x - 1 = 0$: non esistono
[formule esplicite delle soluz simili al caso di eq di II grado. Chi mi dice che sol
[esiste (ciò che per le eq. di II gr è garantito da $\Delta \geq 0$)? quante ($\Delta > 0$ o 0)?

[esistenza: dal teo degli 0. Nell'es. sopra: $f(x) = x^5 - 4x^2 + x - 1$,
[$f(0) < 0, f(2) = 32 - 16 + 2 > 0 \Rightarrow$ soluz esiste

[Una volta poi scoperta esistenza, come trovo una sol? ci sono dei metodi (che
[non vediamo) che consentono di trovare una APPROX della soluz, ma tipicam
[NON la soluz esatta.

[ES: $1200(1 + x)^{-10} + 1200(1 + x)^{-9} + 1200(1 + x)^{-8} + ... + 1200(1 + x)^{-3} +$
[$1200(1 + x)^{-2} + 1200(1 + x)^{-1} = 10'000$
[è un'eq che traduce un importante fatto finanziario: si chiede un mutuo ad una
[banca di 10'000 Eu che si rimborsa pagando rate di 1200 Eu a fine di ogni anno
[per 10 anni. Saremo in gardo di vd che qs eq ha sol e 1 sola in $(-1, +\infty)$. La
[soluzione $x^\star$, è il TASSO degli interessi che la banca ci fa pagare per prestarci
[quel denaro ($\sim 3.4\%$).

Teorema dei valori intermedi ATT. Enunciato diverso dal libro, ma equivalente nella sostanza.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fz ct. Detti $m \doteq \min_{[a,b]} f$ e $M \doteq \max_{[a,b]} f$, allora la fz assume TUTTI i valori y compresi tra m e M,
cioè per ogni valore $y \in [m, M]$ esiste sempre $c \in [a, b] : f(c) = y$,

ossia ogni numero $y \in [m, M]$ ha controimmagine in $[a, b]$.

ES. $\log(x)$ su $[e^{-1}, e]$ PLOT
DUNQUE: se f è continua in $[a, b] \Rightarrow f$ è limitata in $[a, b]$.

Dim del teorema dei valori intermedi. Si usa il teo degli zeri. Prendo $y \in [m, M]$, voglio vedere che sia assunto dalla funzione.
Se $y = m$ (o $y = M$) allora il valore è raggiunto almeno sul pto di min $\underline{x}$ (risp. sul pto di max $\bar{x}$).
Se $y \in (m, M)$ considero la fz $g(x) = f(x) - y$,
che è ct perché somma di fz cont. Nel p. di min $\underline{x}$ per f la nuova fz vale
$g(\underline{x}) = f(\underline{x}) - y < 0$, nel p. di max $\bar{x}$ per f la nuova fz assume valore
$g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - y = M - y > 0 \Rightarrow$ (per il teo degli zeri) $\exists c \in (\underline{x}, \bar{x})$:
$g(c) = f(c) - y = 0$ ossia $f(c) = y$, ma $c \in (\underline{x}, \bar{x}) \subseteq [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$.■

[OSS: non è detto che una fz che assume tutti i valori intermedi tra il suo max
[e il suo min sia cont.

[ES. $f(x) : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [1, 4] \\ 1, & \text{se } x \in (4, 5] \end{cases}$ PLOT

NB se $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, ma I NON è chiuso o non è limitato, ed f cont $\Rightarrow$ non nec f assume max o min su I, vale però che f assume tutti gli y compresi tra il suo $\inf_I f$ e il suo $\sup_I f$.

[E si noti che f NON può assumere valori al di fuori di $[\inf_I f, \sup_I f]$, altrimenti
[non sarebbero più l'inf e il sup. Quindi se f cont l'Im(f) è un intervallo con
[estremi $\inf_I f$ e $\sup_I f$. Se poi tali estremi siano inclusi nell'Im dipende da se
[questi sono min e max.

[EX. Calcolare l'Im(f) per $f : (-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
[Sol. f ct su $(-1, 0]$. Si ha $f = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$: $x + 1 \uparrow$ e su $(-1, 0]$
[abbiamo $x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} \downarrow$ (si fece ex) $\Rightarrow -\frac{1}{x+1} \uparrow$ e $1 - \frac{1}{x+1} \uparrow \Rightarrow$ (per teo sul
[lim di fz monotone) $\inf f = \lim_{x \to -1} f = -\infty$, $\sup f = f(0) = 0$, il sup è quindi
[un max e $Im(f) = (-\infty, 0]$.

EX. Dim che un'eq di grado dispari $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ ha SEMPRE almeno una radice reale.
Sol. $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ è fz cont su $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} P = -\infty \Rightarrow$ (permanenza del segno) $\exists x_1 : f(x_1) < 0$; $\lim_{x \to +\infty} P = +\infty \Rightarrow \exists x_2$:
$f(x_2) > 0$; allora $f(x_1)$, $f(x_2)$ discordi $\Rightarrow \exists x^\star \in (x_1, x_2)$ su cui $P(x^\star) = 0$.

[EX eserciziario: n. 55 (esistenza zeri e se unico): NO bisezione

[n. 156, 159, 160, 161: NO approx