1. $\max_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{++}} \quad \ln x + \ln y + \ln z + x + y + z \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} 2x+3y+z & \leq & 100 \\ x & \geq & 1 \\ y & \geq & 1 \\ z & \geq & 1. \end{array}$

2. $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}} \quad x \cdot y \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} 5x+4y & \leq & 50 \\ 3x+6y & \leq & 40 \\ x & \geq & \cancel{0}\ 1 \\ y & \geq & \cancel{0}.\ 1 \end{array}$

3. $\min_{x,y,z} \quad 3x^2 + y^2 + 8z^2 \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} 2x+y+3z & \leq & 1 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0. \end{array}$

4. Si discuta il seguente problema di massimo

$\max_{x^0,x^1,x^2,m} u^0\left(x^0\right) + \pi u^1\left(x^1\right) + (1-\pi)\, u^2\left(x^2\right)$

$s.t.$

$$\begin{array}{lcl} p^0x^0 + m & \leq & p^0e^0 \\ p^1x^1 & \leq & p^1e^1 + m \\ p^2x^2 & \leq & p^2e^2 + m. \\ x^0, x^1, x^2, m & \geq & 0 \end{array}$$

Si assuma che $u^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(u^i)' > 0$, $(u^i)'' < 0$, per $i = 0,1,2$;

$\pi \in (0,1)$; $p^0, p^1, p^2, e^0, e^1, e^2 > 0$.

Si descriva la soluzione nel caso in cui $x^0 > 0, x^1 > 0, x^2 > 0, m > 0$, mentre gli altri vincoli valgono in forma di uguaglianza.

5. $\max_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \quad -x^2 - y^2 - z^2 + 10xy + 10xz + 10yz \quad s.t. \quad \begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x+y+z \leq 3. \end{array}$

6. $\max_{x,y} \quad xy \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} x^2+y^2 & \leq & 1 \\ x & \geq & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y & \geq & 0. \end{array}$

7. $\max_{x,y} \quad 1 - x^2 - y^2 \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} 3-x-y & \geq & 0\ . \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$

8. $\max_{x,y} \quad -x^2 - xy - y^2 \quad s.t. \quad \begin{array}{l} -x+2y \geq 1\ . \\ -2x+y \geq -2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$

9. $\max_x \quad \left(\frac{1}{2}\log x_1^1 + \frac{1}{4}\log x_1^2\right) + \left(\frac{1}{4}\log x_2^1 + \frac{1}{2}\log x_2^2\right)$

$x_1^2 = x_2^1$

$$\begin{aligned} &s.t.\\ &x_1^1 + x_2^1 - 4 = 0\\ &x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0\\ &x_1^1 + 1 \geq 0\\ &x_1^2 - 3 \geq 0\\ &x_2^1 - 3 \geq 0\\ &x_2^2 + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

10. $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad -x^2 - (y-5)^2 \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} x & \geq & 0\\ y & \geq & 0\\ 2x + y & \leq & 4. \end{array}$

11. $\max_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{++}} \quad \frac{1}{4}\log x + \frac{1}{4}\log y + \frac{1}{2}\log z \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} x + y + z & \leq & 10\\ x & \geq & 1\\ y & \geq & 1\\ z & \geq & 1. \end{array}$

12. $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad 4x - x^2 - y^2 \quad s.t. \quad \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 \leq 1\\ x + 2y \geq 1. \end{array}$

13. $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}} \quad \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log y \quad s.t. \quad \begin{array}{lcl} 10 - x - y & \geq & 0.\\ x & \geq & \cancel{0}\ 1\\ y & \geq & \cancel{0}\ 1 \end{array}$

Sandra Malevolti

ESER.... (1)

1) <u>Esistenza della soluzione</u>

- f continua perché somma di funz. continue
- $C \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_{++} \cdot g(x) \geq 0\} \equiv \mathbb{R}^3_{++} \cap g^{-1}([0,+\infty))$

$\hat{C} \equiv \mathbb{R}^3 \cap g^{-1}([0,+\infty)^4)$ $\quad \mathbb{R}^3$ chiuso e g continua $\Rightarrow \hat{C}$ chiuso

Dimostro che $C = \hat{C}$

$C \subseteq \hat{C}$ ovvio

$\hat{C} \subseteq C$ xché se $(x,y,z) \in C \Rightarrow x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1 \Rightarrow (x,y,z) \in \mathbb{R}^3_{++}$

$\Rightarrow (x,y,z) \in C$

$\Rightarrow \hat{C} = C \Rightarrow C$ è chiuso

- C limitato inferiormente da $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=0$

C è limitato superiormente xché se così non fosse

$\exists\ \{(x^n, y^n, z^n)\}$ t.c. o $x^n \to +\infty$
o $y^n \to +\infty$ ma ciò violerebbe il
o $z^n \to +\infty$
vincolo $2x+3y+z \leq 100$

2) <u>Unicità della soluzione</u>

- $C \neq \emptyset$ xché $(1,1,1) \in C$
- C convesso g^j quasi concave perché lineari e allora

$\bigcap_{j=1}^{n} \{(x,y,z) \in X \cdot g^j(x) \geq 0\}$ è convesso

- f strett. concava $\Rightarrow f$ quasi concava infatti

$Df(x) = \left(\frac{1}{x}+1,\ \frac{1}{y}+1,\ \frac{1}{z}+1\right)$

$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix}$ è una matrice def. negativa $\Rightarrow$
f strett concava $\Rightarrow f$ quasi concava

la soluzione è unica.

3) Problema nella forma canonica

$$\max_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{++}} \ln x + \ln y + \ln z + x + y + z \qquad \begin{matrix} x-1\geq 0 \\ y-1\geq 0 \\ z-1\geq 0 \\ 100-2x-3y-z\geq 0 \end{matrix}$$

4) Necessità delle condizioni di K-T

- g^j pseudo concave per $j=1,\dots,4$ xké concave in quanto lineari

- $x^{++} = (2,2,2) \Rightarrow$ $g^1 = 1$
$g^2 =$
$g^3 = 1$
$g^4 = 88$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- f pseudo-concava perché strett. concava
- g^j quasi concava $\forall j$ xké concava.

6) Cond. di K-T e Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z,\mu) = \log x + \log y + \log z + x + y + z + \lambda_x(x-1) + \lambda_y(y-1) + \lambda_z(z-1) + \mu(100-2x-3y-z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \dfrac{1}{x} + 1 + \lambda_x - 2\mu = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = \dfrac{1}{y} + 1 + \lambda_y - 3\mu = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = \dfrac{1}{z} + 1 + \lambda_z - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_x \geq 0 & x-1\geq 0 & \lambda_x(x-1)=0 \\ \lambda_z \geq 0 & z-1\geq 0 & \lambda_z(z-1)=0 \\ \lambda_y \geq 0 & y-1\geq 0 & \lambda_y(y-1)=0 \\ \mu\geq 0 & 100-3x-2y-z\geq 0 & \mu(100-3x-2y-z)=0 \end{cases}$$

7) Soluzione

Congettura $\quad x=y=1$

$\lambda_z > 0$

$100 = 3x+2y+z$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+\lambda_x-2\mu=0 \\ 2+\lambda_y-3\mu=0 \\ \frac{1}{z}+1-\mu=0 \\ 100-2-3=z \end{cases} \qquad \begin{cases} z=95 \\ \mu=96/95 \\ \lambda_y=98/95 \\ \lambda_x=2/95 \end{cases}$$

L'unica soluzione del problema è $(1,1,95)$

Esercizio 2

1) <u>Esistenza della soluzione</u>

- f continua xchè prodotto di funzioni continue
- $C \equiv \mathbb{R}^2_{++} \cap g^{-1}([0,+\infty)^4)$

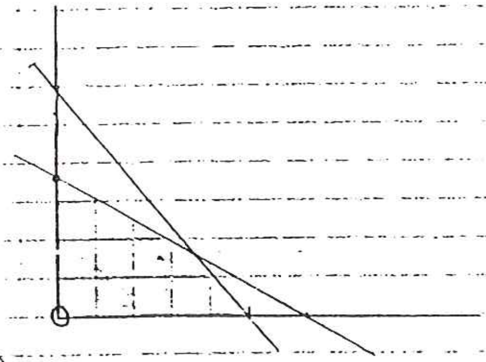
$\hat{C} \equiv \mathbb{R}^2 \cap g^{-1}([0,+\infty)^4)$

$C \subseteq \hat{C}$ ovvio

$\hat{C} \subseteq C$ xchè se $(x,y) \in \hat{C} \Rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \Rightarrow$

C non è chiuso perchè è escluso il punto $(0,0)$

Non posso dire niente sull'esistenza della sol.



2) <u>Unicità della soluzione</u>

- $C \neq \emptyset$ xchè $(1,1) \in C$
- C convesso perchè le g_i sono quasi concave essendo lineari
- f non è strett. quasi concava

$Df(x) = (y, x)$

$D^2f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Det(D^2f) = -1$ $\quad$ Non posso concludere nient

$Det(0) = 0$

3) Problema in forma canonica

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}} xy \qquad \begin{array}{ll} 50-5x-4y\geq 0 & \mu \\ 40-3x-6y\geq 0 & \gamma \\ x\geq 0 & \lambda_x \\ y\geq 0 & \lambda_y \end{array}$$

4) Necessità delle cond. di K-T

- g^j pseudo-concava $\forall_j$ perchè lineari
- $x^+ = (1,1) \Rightarrow g^1 = 41$

$g^2 = 31$

$g^3 = 1$

$g^4 = 1$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- g^j quasi-concave perchè lineari
- f pseudo concava xchè

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Det}(0) = 0 \gtrless 0 \\ \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} = -y^2 \leq 0 \\ \mathrm{Det}(\bar{B}(x)) = 2xy \geq 0 \end{array}$$

6) Lagrangiano e cond. di K-T

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_x,\lambda_y,\mu,\gamma) = xy + \mu(50-5x-4y) + \gamma(40-3x-6y) + \lambda_x x + \lambda_y y$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 5\mu - 3\gamma + \lambda_x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 4\mu - 6\gamma + \lambda_y = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x\geq 0 \quad \lambda_x x = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y = 0 \\ \mu \geq 0 \quad 50-5x-4y\geq 0 \quad \mu(50-5x-4y)=0 \\ \gamma\geq 0 \quad 40-3x-6y\geq 0 \quad \gamma(40-3x-6y)=0 \end{cases}$$

Congettura: $x>0 \quad \lambda_x=0$
$y>0 \quad \lambda_y=0$
$50-5x-4y>0 \quad \mu=0$
$40-3x-6y=0 \quad \gamma\geq 0$

$$\begin{cases} y-3\gamma=0 \\ x-6\gamma=0 \\ 40-3x-6y=0 \\ 50-5x-4y>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=3\gamma \\ x=6\gamma \\ 40-18\gamma-18\gamma=0 \\ 50-5x-4y>0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \gamma=10/9 \\ x=20/3 \\ y=10/3 \end{array}$$

Una soluzione è $\left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right)$

Esercizio 3 $\quad \min f = \max(-f) \Rightarrow$

3) Forma canonica del problema

$$\max_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} -3x^2-y^2-8z^2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} 1-2x-y-3z\geq 0 & \mu \\ x\geq 0 & \lambda_x \\ y\geq 0 & \lambda_y \\ z\geq 0 & \lambda_z \end{array}$$

1) Esistenza della soluzione

- f continua xké somma di funz. continue
- C compatto perché
  $C \equiv \mathbb{R}^3 \cap g^{-1}([0,+\infty)^4)$
  $\mathbb{R}^3$ è chiuso per definizione e g continua $\Rightarrow$ C è chiuso.
- C limitato inferiormente da $\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ $\bar{z}=0$ e superiormente da $\bar{x}=1$ $\bar{y}=1$ $\bar{z}=1$ $\Rightarrow$ C compatto

Il problema ammette soluzione

2) Unicità della soluzione

- $C\neq\emptyset$ perché $C\ni(0,0,0)$
- C convesso perché g^j lineari e quindi quasi concave
- f strett. quasi concava perché

$Df(x)=(-6x, -2y, -16z)$ $\quad D^2f(x)=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$ è def. negativa $\Rightarrow$ f strett. concava $\Rightarrow$ f strett. quasi conc.

da soluzione è unica

4. Necessità delle cond. di K-T.

- g^j pseudo concave perché lineari
- $x^+ = (0.1, 0.1, 0.1)$

5. Sufficienza delle cond. di K-T.

- g^j quasi concava $\forall j$ xké lineare.
- f è pseudo concava perché strett. concava.

6. Lagrangiano e cond. di K-T.

$\mathcal{L}(x, y, z, \mu, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = -3x^2 - y^2 - 8z^2 + \mu(1-2x-y-3z) + \lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -6x - 2\mu + \lambda_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \mu + \lambda_y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -16z - 3\mu + \lambda_z = 0 \\ \mu \geq 0 \quad 1-2x-y-3z \geq 0 \quad \mu(1-2x-y-3z) = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad \lambda_x x = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y = 0 \\ \lambda_z \geq 0 \quad z \geq 0 \quad \lambda_z z = 0 \end{cases}$$

7) Congettura: secondo me la soluzione è $(0,0,0)$ e $\mu = 0$

$$\begin{cases} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = 0 \\ \lambda_z = 0 \end{cases}$$ l'unica soluzione è $(0,0,0)$

$1 \geq 0$

Esercizio (4)

1) Esistenza della soluzione

- le funzioni di utilità sono continue, perciò anche una loro comb. lineare
- $C = \mathbb{R}^4 \cap g^{-1}([0, -\infty)^2)$ g continua [illegible] => C chiuso

- C limitato superiormente xkè se così non fosse ..

$\exists \{(x^1_n, x^2_n, x^3_n, m_n)\}$ t.c. o $x^1_n \to +\infty$
o $x^2_n \to +\infty$
o $x^3_n \to +\infty$
o $m_n \to +\infty$

ma questa violerebbe uno dei vincoli

C limitato inferiormente da $\underline{x}^1 = -1$
$\underline{x}^2 = -1$
$\underline{x}^3 = -1$
$\underline{m} = -1$

$\Rightarrow$ la soluzione esiste

: Unità della soluzione

$C \neq \emptyset$ perchè $(0,0,0,0) \in C$

- C convesso perchè g^j quasi concave perchè lineari $\forall j = 1, \dots, 7$

- u^0, u^1, u^2 sono funz. concave perchè derivate II negative, e f ha l'hessiano definito negativo

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} u_0''(x^0) & 0 & 0 \\ 0 & \pi^2 u_1''(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\pi)^2 u_2''(x_2) \end{pmatrix}$$

3) Forma canonica del problema

$$\max_{x^0, x^1, x^2, m} \; u^0(x^0) + \pi u^1(x^1) + (1-\pi) u^2(x^2) \quad \text{s.t.}$$

g_1	$p^0 e^0 - p^0 x^0 - m \geq 0$	μ_0
g^2	$p^1 e^1 + m - p^1 x^1 \geq 0$	μ_1
g^3	$p^2 e^2 + m - p^2 x^2 \geq 0$	μ_2
g^4	$x^0 \geq 0$	λ_0
g^5	$x^1 \geq 0$	λ_1
g^6	$x^2 \geq 0$	λ_2
g^7	$m \geq 0$	λ_m

4) Necessità delle cond. di K-T

- g^j pseudo concave perchè lineari $\forall j = 1, \dots, 7$

- $x^{*T} = \left(e^0 - \frac{2m}{p_0}, e^1, e^2, \frac{e^0 \cdot p^0}{3} \right)$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- f pseudo concava perchè strett. concava
- g quasi concave perchè linear

6) Lagrangiano e cond. di K-T

$$\mathcal{L} = u^0(x^0) + \pi u^1(x_1) + (1-\pi) u^2(x_2) + \mu^0(p^0e^0 - p^0x^0 - m) + \mu_1(p^1e^1 + m - p^1x^1) +$$
$$+ \mu_2(p^2e^2 + m - p^2x^2) + \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_m m$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0} = u'^0(x^0) - \mu^0 p^0 + \lambda_0 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^1} = \pi u'^1(x^1) - \mu_1 p_1 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^2} = (1-\pi) u'^2(x^2) - \mu_2 p^2 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = -\mu^0 + \mu^1 + \mu^2 + \lambda^m = 0 \\ \lambda_0 \geq 0 \quad x_0 \geq 0 \quad \lambda_0 x_0 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \quad x_1 \geq 0 \quad \lambda_1 x_1 = 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad \lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_m \geq 0 \quad m \geq 0 \quad \lambda_m m = 0 \\ \mu_0 \geq 0 \quad p^0e^0 - p^0x^0 - m \geq 0 \quad \mu_0(p^0e^0 - p^0x^0 - m) = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \quad p^1e^1 + m - p^1x^1 \geq 0 \quad \mu_1(p^1e^1 + m - p^1x^1) = 0 \\ \mu_2 \geq 0 \quad p^2e^2 + m - p^2x^2 \geq 0 \quad \mu_2(p^2e^2 + m - p^2x^2) = 0 \end{cases}$$

7) Congettura $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m = 0$

$$\begin{cases} u'^0(x_0) - \mu^0 p^0 = 0 \\ \pi u'^1(x^1) - \mu^1 p^1 = 0 \\ (1-\pi) u'^2(x^2) - \mu_2 p^2 = 0 \\ -\mu^0 + \mu^1 + \mu^2 = 0 \\ p^0e^0 - p^0x^0 - m = 0 \\ p^1e^1 + m - p^1x^1 = 0 \\ p^2e^2 + m - p^2x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_0 = \frac{u'^0(x_0)}{p_0} > 0 \\ \mu_1 = \frac{\pi u'^1(x_1)}{p^1} > 0 \\ \mu_2 = \frac{(1-\pi) u'^2(x^2)}{p_2} > 0 \\ \mu_0 = \mu^1 + \mu^2 \\ x^0 = \frac{p^0e^0 - m}{p_0} \\ x^1 = \frac{p^1e^1 + m}{p_1} \\ x^2 = \frac{p^2e^2 + m}{p_2} \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è la soluzione del problema.

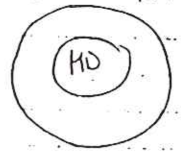
$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2x+10y+10z & -2y+10x+10z & -2z+10x+10y \\ -2x+10y+10z & -2 & 10 & 10 \\ -2y+10x+10z & 10 & -2 & 10 \\ -2z+10x+10y & 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2x+10\cancel{x}+10y \\ -2x+10y+10z & -2 \end{pmatrix} = -(-2x+10y+10x)^2 \geq 0$$

Non posso concludere niente

KT

HD



6) Lagrangiano e cond di K-T

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z,\mu) = -x^2-y^2-z^2+10xy+10xz+10yz+\lambda_x x+\lambda_y y+\lambda_z z + \mu(3-x-y-z)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x+10y+10z+\lambda_x-\mu=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y+10x+10z+\lambda_y-\mu=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -2z+10y+10x+\lambda_z-\mu=0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad \lambda_x x=0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y=0 \\ \lambda_z \geq 0 \quad z \geq 0 \quad \lambda_z z=0 \\ \mu \geq 0 \quad 3-x-y-z \geq 0 \quad \mu(3-x-y-z)=0 \end{cases}$$

7) $(0,0,0)$ non è sol. di HD perché si può incrementare la soluzione. Considero le 3 variabili in modo simmetrico cosicché escludo anche il caso che una delle 3 variabili sia zero $\lambda_x=\lambda_y=\lambda_z=0$

$$\begin{cases} -2x+10y+10z-\mu=0 \\ -2y+10x+10z-\mu=0 \\ -2z+10x+10y-\mu=0 \\ 3-x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3-y-z=x \\ -6+2y+2z+10y+10z-\mu=0 \\ -2y+30-10y-10z+10z-\mu=0 \\ -2z+10y+30-10y-10z-\mu=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12y+30-\mu=0 \\ -12z+30-\mu=0 \\ 12z+12y-6-\mu=0 \\ 3-y-z=x \end{cases} \qquad \begin{cases} y=z \\ 12y+30-\mu=0 \\ 24y-6-\mu=0 \\ 3-2y=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=z \\ 12y+30-24y+6=0 \\ \mu=24y-6 \\ 3-2y=x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ \mu=18 \end{cases}$$

Una soluzione è $(1,1,1)$ delle cond. di K-T.

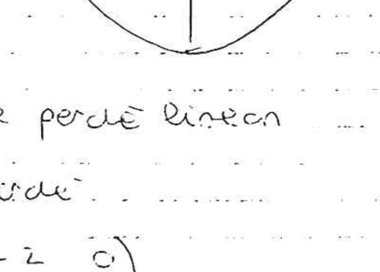
Per vedere se è quella ottima dovrei trovare tutte le sol. di K-T e sostituendole nella funz. obiettivo scegliere quella che da un valore maggiore. Questo perché non so se la soluzione è unica e perché non vale la sufficienza delle cond. di K-T.

Esercizio (6)

1) Esistenza della soluzione

- f continua xké prodotto di funzioni continue

- $\mathbb{R}^2$ chiuso e g continua $\Rightarrow$ $C \equiv \mathbb{R}^2 \cap g^{-1}([0,+\infty)^3)$ è chiuso
- C limitato inf. da $\bar{x}=0$ e $\bar{y}=0$
- C limitato sup da $\bar{x}=1$ $\bar{y}=1$



La soluzione esiste

2) Unicità della soluzione

- C convesso perché g^2, g^3 quasi-concave perché lineari

g^1 quasi-concava perché

$$Dg^1(x) = (-2x, -2y) \qquad D^2 g^1(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ è def. negativa}$$

- $C \neq \phi$ perché $(1,0) \in C$

- f non è strett. quasi concava perché

$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Det $(0) = 0 \not> 0$

Non posso concludere niente sull'unicità della soluzione

3) Problema in forma canonica

$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$

$g^1 \quad 1-x^2-y^2 \geq 0 \qquad \mu$

$g^2 \quad x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \qquad \lambda_x$

$g^3 \quad y \geq 0 \qquad \lambda_y$

4) Necessità delle cond. di K-T

- g^j pseudo concave perché $g^2 g^3$ lineari e g^1 strett. concava
- $x^{**} = \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{4}\right)$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- g^j quasi concava perché pseudo-concava $\forall j$
- f non è pseudo concava perché

$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Det $\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} = -y^2 \leq 0$

Det $(B(x)) = 2xy \geq 0$

	x	y	z
$-2x+10(y+z)$	$\boxed{-2}$	10	10
$-2y+10(x+z)$	10	-2	
$-2z+10(x+y)$	10		-2

6) Lagrangiano e cond. di K-T

$\mathcal{L} = xy + \mu(1-x^2-y^2) + \lambda_x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \lambda_y y$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 2\mu x + \lambda_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 2\mu y - \lambda_y = 0 \\ \mu \geq 0 \quad 1-x^2-y^2 \geq 0 \quad \mu(1-x^2-y^2) = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \quad \lambda_x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y = 0 \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$= -2$

1. Congettura $\lambda_y=0 \quad 1-x^2-y^2=0 \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} y-\sqrt{3}\mu+\lambda_x=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-2\mu y=0 \\ 1-\frac{3}{4}-y^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1/2 \\ 1/2-\sqrt{3}\mu+\lambda_x=0 \\ \sqrt{3}/2=\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1/2 \\ \lambda_x=4 \\ \mu=\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Una soluzione delle condizioni di K-T $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dovrei cercare il max tra tutte le soluzioni possibili di K-T perché non vale l'unicità della soluzione e la sufficienza delle cond. K-T.

1) Esistenza della soluzione

- f continua xké somma di funz. continue
- $C \equiv \mathbb{R}^3 \cap g^{-1}([0,+\infty)^3)$ $\mathbb{R}^3$ chiuso e g continua $\Rightarrow C$ chiuso
- C limitato inf. da $\bar{x}=0$ e $\bar{y}=0$
- C limitato sup da $\bar{x}=4$ $\bar{y}=4$

2) Unicità della soluzione

- $C \neq \phi$ perché $(1,1) \in C$
- C convesso perché g_j quasi concave $\forall j$ perché lineari
- f strett. quasi concava perché strett. concava, infatti:

$Df(x) = (-2x, -2y)$ $\qquad D^2f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ negativa definita

3) Forma canonica del problema

$$\max_{(x,y)} 1-x^2-y^2 \qquad \begin{array}{ll} 3-x-y \geq 0 & \mu \\ x \geq 0 & \lambda_x \\ y \geq 0 & \lambda_y \end{array}$$

4) Necessità delle cond. di K-T

- g_j pseudo concava $\forall j$ perché lineare
- $x^{+T} = (1,1)$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- f pseudo-concava perché strett. concava
- g_j quasi-concava $\forall j$ perché lineare

6) Lagrangiano e cond. di K-T.

$$\mathcal{L} = 1 - x^2 - y^2 + \mu(3-x-y) + \lambda_x x + \lambda_y y$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - \mu + \lambda_x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \mu + \lambda_y = 0 \\ \mu \geq 0 \quad 3-x-y \geq 0 \quad \mu(3-x-y) = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad \lambda_x x = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y = 0 \end{cases}$$

7) Congettura: ipotizzo che $(0,0)$ sia la soluzione $\lambda_x \geq 0$ $\lambda_y \geq 0$ $\mu = 0$

$$\begin{cases} \mu = \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = 0 \\ 3 \geq 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ è l'unica soluzione del problema.

Esercizio 8

1) Esistenza della soluzione

- f continua perché somma e prodotto di funz. continue.
- $C = \mathbb{R}^2 \cap g^{-1}([0,+\infty)^+)$ $\mathbb{R}^2$ chiuso e g continua $\Rightarrow$ C chiuso
- C limitato inf. da $\bar{x}=0$ e $\bar{y}=0$
- C non è limitato sup $\Rightarrow$ non posso dimostrare l'esistenza della soluzione

2) Unicità della soluzione

- $C \neq \emptyset$ perché $(0,1) \in C$
- C convesso perché g lineare e quindi quasi concava $\forall$
- f strett. quasi concava si può dimostrare perché

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\text{Det}(-2) = -2 < 0 \\ &\text{Det}(D^2 f(x)) = 3 > 0 \end{aligned}$$

La soluzione se esiste è unica

3) Forma canonica

$\max_{(x,y)} -x^2 - xy - y^2$ s.t. $-x + 2y - 1 \geq 0$ μ

$-2x + y + 2 \geq 0$ δ

$x \geq 0$ λ_x

$y \geq 0$ λ_y

4) Necessità delle cond. di K-T

- g_i pseudo concave, perché lineari

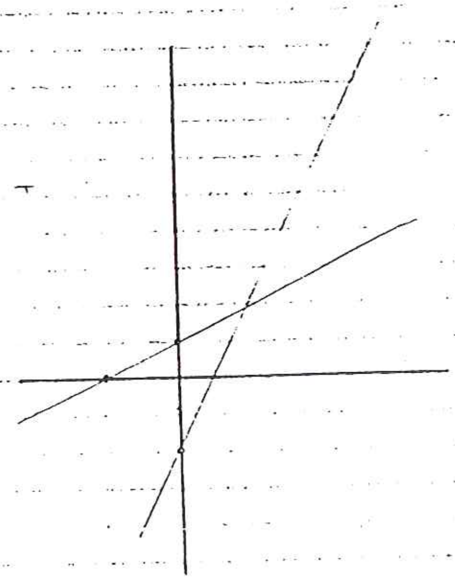
$x^{*T} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- f pseudo concava perché strett. concava

- g_i quasi concave f_i perché lineari

6) Lagrangiano e cond. di K-T



$\mathcal{L} = -x^2 - xy - y^2 + \mu(-x + 2y - 1) + \delta(-2x + y + 2) +$

$+ \lambda_x x + \lambda_y y$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - y - \mu - 2\delta + \lambda_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -x = 2y + 2\mu + \delta + \lambda_y = 0 \\ \mu \geq 0 \quad -x + 2y - 1 \geq 0 \quad \mu(-x + 2y - 1) = 0 \\ \delta \geq 0 \quad -2x + y + 2 \geq 0 \quad \delta(-2x + y + 2) = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad \lambda_x x = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y = 0 \end{cases}$$

7) Congettura $\lambda_y = 0$, $x = 0$, $-x + 2y - 1 = 0$, $\delta = 0$

$$\begin{cases} -y - \mu + \lambda_x = 0 \\ -2y + 2\mu = 0 \\ y = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = 1/2 \\ \lambda_x = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

$(0, 1/2)$ è l'unica soluzione del problema

Esercizio 9

1) Esistenza della soluzione

- f continua xchè somma di funzioni continue
- $C_1 \equiv \mathbb{R}^4_{++} \cap g^{-1}([0,+\infty)^8)$

$\hat{C} \equiv \mathbb{R}^4 \cap g^{-1}([0,+\infty)^8)$ $\mathbb{R}^4$ chiuso, g continua $\Rightarrow$ $\hat{C}$ chiuso

$C_1 \subseteq \hat{C}$ ovvio

$\hat{C} \subseteq C_1$ xchè se $(x,y,z,w) \in \hat{C} \Rightarrow$ $x \geq 1$, $y \geq 3$, $z \geq 3$, $w \geq 1$ $\Rightarrow (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^3_{++}$

$C_1 = \hat{C} \Rightarrow C_1$ è chiuso

- C_1 limitato inferiormente da $\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ $\bar{z}=0$ $\bar{w}=0$
- C_1 limitato sup. xchè se così non fosse

$\exists \{(x^n, y^n, z^n, w^n)\}$ $n \in \mathbb{N}$ t.c.
o $x^n \to +\infty$ A
o $y^n \to +\infty$ B
o $z^n \to +\infty$ C
o $w^n \to +\infty$ D

A e B violerebbero $x+y-4=0$ e C e D violerebbero $z+w-4=0$

2) Unicità della soluzione

- $C_1 \neq \emptyset$ perchè $(1,3,3,1) \in C_1$
- C_1 convesso perchè g^i quasi concava $\forall i$
- f strett. concava, perchè

$$Df(x) = \left(\frac{1}{2x}, \frac{1}{4z}, \frac{1}{4y} + \frac{1}{2w} \right)$$

$$D^2f(x) = \begin{pmatrix} -1/2x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2w^2 \end{pmatrix}$$ è definita negativa

3) Forma canonica

$$\max_{(x,y,z,w)} \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log y + \frac{1}{4}\log z + \frac{1}{2}\log w \quad \text{s.t.}$$

$x+y-4=0$ μ
$z+w-4=0$ γ
$x-1\geq 0$ λ_x
$y-3 \geq 0$ λ_y
$z-3\geq 0$ λ_z
$w+1 \geq 0$ λ_w

4) Sufficienza delle cond. di K-T

- f pseudo concava perché strett. concava.
- i vincoli con disuguaglianze sono funz. quasiconcave perché lineari.
- i vincoli in forma di uguaglianza sono lineari

5) Necessità delle cond. di K-T

Essendo i vincoli in forma di uguaglianza e di disuguaglianza lineari, le cond. di K-T sono necessarie.

6) Lagrangiano e cond. di K-T

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log y + \frac{1}{4}\log z + \frac{1}{2}\log w + \mu(x+y-4) + \gamma(z+w-4) +$$
$$+ \lambda_x(x+1) + \lambda_y(y-3) + \lambda_z(z-3) + \lambda_w(w+1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2x} + \mu + \lambda_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{4y} + \mu + \lambda_y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{1}{4z} + \mu + \lambda_z = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \frac{1}{2w} + \mu + \lambda_w = 0 \\ x + y - 4 = 0 \\ z + w - 4 = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x+1 \geq 0 \quad \lambda_x(x+1) = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y-3 \geq 0 \quad \lambda_y(y-3) = 0 \\ \lambda_z \geq 0 \quad z-3 \geq 0 \quad \lambda_z(z-3) = 0 \\ \lambda_w \geq 0 \quad w-3 \geq 0 \quad \lambda_w(w-3) = 0 \end{cases}$$

7) Congettura $z = 3$, $y = 3$, $\lambda_x = 0$, $\lambda_w = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2x} + \mu = 0 \\ \frac{1}{12} + \mu + \lambda_y = 0 \\ \frac{1}{12} + \gamma + \lambda_z = 0 \\ \frac{1}{2} + \gamma = 0 \\ x = 1 \\ w = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -1/2 \\ \mu = -1/2 \\ x = 1 \\ w = 1 \\ \lambda_z = 5/12 \\ \lambda_y = 5/12 \end{cases}$$

La soluzione $(1,3,3,1)$ è l'unica ammessa dal sistema

Esercizio (10)

3) <u>Problema in forma canonica</u>

$$\max_{(x,y)} \; -x^2-y^2-25+10y \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} x\geq 0 & \lambda_x \\ y\geq 0 & \lambda_y \\ 4-2x-y\geq 0 & \mu \end{array}$$

1) <u>Esistenza della soluzione</u>

- f continua xké somma di funz. continue
- $C \equiv \mathbb{R}^2 \cap g^{-1}([0,+\infty)^3)$ $\mathbb{R}^2$ chiuso e g continua ⇒ C chiuso
- C limitato inf. da $\bar{x}=0$ e $\bar{y}=0$
- C limitato sup. da $\bar{x}=2$ e $\bar{y}=4$

2) <u>Unicità della soluzione</u>

- $C \neq \emptyset$ perché $(0,0) \in C$
- C convesso perché g_j lineare e quindi quasi concava $\forall j$
- f strett. quasi concava perché

$Df(x) = (-2x, -2y+10)$ $\quad D^2f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ è def. negativa ⇒ f strett. concava

4) <u>Necessità delle cond. di K-T</u>

- g_j pseudo concava perché lineare $\forall j$
- $x^{**} = (1,1)$

5) <u>Sufficienza delle cond. di K-T</u>

- f pseudo concava perché strett. concava
- g_j quasi concava perché lineare $\forall j$

6) <u>Lagrangiano e cond. di K-T</u>

$$\mathcal{L} = -x^2-y^2-25+10y+\mu(4-2x-y)+\lambda_x x+\lambda_y y$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x-2\mu+\lambda_x=0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y+10-\mu+\lambda_y=0 \\ \mu\geq 0 \quad 4-2x-y\geq 0 \quad \mu(4-2x-y)=0 \\ \lambda_x\geq 0 \quad x\geq 0 \quad \lambda_x x=0 \\ \lambda_y\geq 0 \quad y\geq 0 \quad \lambda_y y=0 \end{cases}$$

7) <u>Congettura</u> $x=0$ $\lambda y=0$ $4-2x-4=0$

$$\begin{cases} -2\mu+\lambda x=0 \\ -2y+10-\mu=0 \\ 4=y \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x=4 \\ \mu=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$(0,4)$ è l'unica soluzione del problema.

Esercizio (11)

1) <u>Esistenza della soluzione</u>

- f continua xké somma di funz. continue
- $C \equiv \mathbb{R}^3_{++} \cap g^{-1}([0,+\infty)^4)$

$\hat{C} \equiv \mathbb{R}^3 \cap g^{-1}([0,+\infty)^4)$

$C \subseteq \hat{C}$ ovvio

$\hat{C} \subseteq C$ perché $\forall (x,y,z) \in \hat{C} \Rightarrow x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1 \Rightarrow (x,y,z) \in C$

$\mathbb{R}^3$ chiuso e g continua $\Rightarrow \hat{C}$ chiuso $\Rightarrow C$ chiuso.

- C limitato inf. da $\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ $\bar{z}=0$

C limitato sup. da $\bar{x}=10$ $\bar{y}=10$ $\bar{z}=10$

La soluzione esiste

2) <u>Unicità della soluzione</u>

- $C \neq \emptyset$ perché $(2,2,2) \in C$
- C convesso perché g_j quasi concave $\forall j$ xké lineari
- f strett. quasi concava perché strett. concava, infatti:

$$Df(x) = \left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}, \frac{1}{4z}\right)$$

$$D^2f(x) = \begin{pmatrix} -1/4x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2z^2 \end{pmatrix}$$ definita negativa

La soluzione è unica

3) <u>Problema in forma canonica</u>

$$\max_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_{++}} \frac{1}{4}\log x + \frac{1}{4}\log z + \frac{1}{2}\log t \qquad \begin{array}{ll} 10-x-y-z\geq 0 & \mu \\ x-1\geq 0 & \lambda_x \\ y-1\geq 0 & \lambda_y \\ z-1\geq 0 & \lambda_z \end{array}$$

4) <u>Necessità delle cond. di K-T</u>

- g^j pseudo concava xchè lineare $\forall j$
- $x^{+T} = (2,2,2)$

5) <u>Sufficienza delle cond. di K-T</u>

- f pseudo-concava perchè strett. concava
- g^j quasi concava $\forall j$ perchè lineare

6) <u>Lagrangiano e cond. di K-T</u>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\log x + \frac{1}{4}\log y + \frac{1}{2}\log z + \mu(10-x-y-z) + \lambda_x(x-1) + \lambda_y(y-1) + \lambda_z(z-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{4x} - \mu + \lambda_x = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{4y} - \mu + \lambda_y = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = \frac{1}{2z} - \mu + \lambda_z = 0 \\ \mu\geq 0 \quad 10-x-y-z\geq 0 \quad \mu(10-x-y-z)=0 \\ \lambda_x\geq 0 \quad x-1\geq 0 \quad \lambda_x(x-1)=0 \\ \lambda_y\geq 0 \quad y-1\geq 0 \quad \lambda_y(y-1)=0 \\ \lambda_z\geq 0 \quad z-1\geq 0 \quad \lambda_z(z-1)=0 \end{cases}$$

7) <u>Congettura</u> : $10 = x+y+z$, $x,y,z>1$, $\lambda_x=\lambda_y=\lambda_z=0$

$$\begin{cases} \frac{1}{4x} - \mu = 0 \\ \frac{1}{4y} - \mu = 0 \\ \frac{1}{2z} - \mu = 0 \\ 10 = x+y+z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{4\mu} \\ y = \frac{1}{4\mu} \\ z = \frac{1}{2\mu} \\ 10 = \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{2\mu} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = 1/10 \\ x = 5/2 \\ y = 5/2 \\ z = 5 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(5/2, 5/2, 5)$

Esercizio (12)

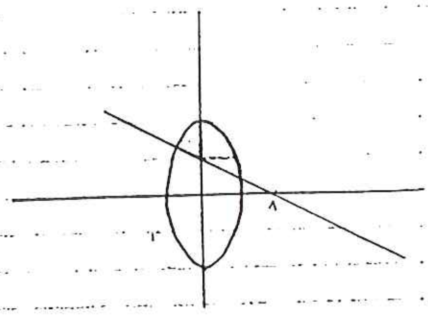
1) <u>Esistenza della soluzione</u>

- f continua xké somma di funzioni continue
- C chiuso xké $C = \mathbb{R}^2 \cap g^{-1}([0,+\infty)^2)$

$\mathbb{R}^2$ chiuso e g continua $\Rightarrow$ C chiuso

- C limitato sup da $\bar{x} = 5$ e $\bar{y} = 5$

C limitato inf da $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = -2$



La soluzione esiste

2) <u>Unicità della soluzione</u>

- $C \neq \emptyset$ xké $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in C$
- C convesso perché g^2 quasi concava in quanto lineare e

g^1 strett. concava perché

$Dg^1(x) = (-2x, -8y)$ $\quad D^2 g^1(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ definita negativa

3) $\max\limits_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} 4x - x^2 - y^2$ s.t. $\quad 1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \quad g^1 \quad \mu$

$\qquad x + 2y - 1 \geq 0 \quad g^2 \quad \gamma$

4) <u>Necessità delle cond. di K-T</u>

- g^j pseudo concave perché g^1 strett. concava e g^2 lineare
- $x^{**} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

5) <u>Sufficienza delle cond. di K-T.</u>

- f pseudo concava perché f strett. concava, infatti

$D[f(x)] = (4 - 2x, -2y)$

$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Definita negativa

- g^j quasi-concave perché lineari

6) Lagrangiano e cond. di K-T.

$\mathcal{L} = 4x - x^2 - y^2 + \mu(1 - 4y^2 - x^2) + \gamma(x + 2y - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4 - 2x - 2\mu x + \gamma = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - 8\mu y + 2\gamma = 0 \\ \mu \geq 0 \quad 1 - 4y^2 - x^2 \geq 0 \quad \mu(1 - 4y^2 - x^2) = 0 \\ \gamma \geq 0 \quad x + 2y - 1 \geq 0 \quad \gamma(x + 2y - 1) = 0 \end{cases}$$

7) Congettura : $1 - x^2 - 4y^2 = 0$, $\gamma = 0$

$$\begin{cases} 4 - 2x - 2\mu x = 0 \\ -2y - 8\mu y = 0 \\ 1 - 4y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow 2y(1 + 4\mu) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ \mu = -\frac{1}{4} \text{ NO} \end{cases}$$

$$y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 4 - 2x - 2\mu x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ NO} \end{cases}$$

$x = 1 \longrightarrow \mu = 1$

L'unica soluzione è $(1,0)$

Esercizio 13

1) Esistenza della soluzione

- f continua xké somma di funz. continue
- $C = \mathbb{R}^2_{++} \cap g^{-1}([0,+\infty)^3)$

$\hat{C} = \mathbb{R}^2 \cap g^{-1}([0,+\infty)^3)$

$\mathbb{R}^2$ chiuso, g continua $\Rightarrow \hat{C}$ chiuso

$C \subseteq \hat{C}$ vero per def.

$\hat{C} \overset{?}{\subseteq} C$ perché $(x,y) \in \hat{C} \Rightarrow x \geq 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^3_+$

- Non posso dire niente sulla chiusura di C perché $(0,0)$ non appartiene a C ma il suo intorno sì.

2) Unicità della soluzione

- $C \neq \phi$ xché $(1,1) \in C$
- C convesso perché g_j quasi concava $\forall_j$ perché lineare.
- f strett. quasi concava xché f strett. concava, infatti:

$Df(x) = \left(\frac{1}{2x}, \frac{1}{4y}\right)$ $\quad D^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4y^2} \end{pmatrix}$ definita negativa

3) Problema in forma canonica

$$\max_{(x,y)} \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{4} \log y \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} 10-x-y \geq 0 & \mu \\ x \geq 0 & \lambda_x \\ y \geq 0 & \lambda_y \end{array}$$

4) Necessità delle cond. di K-T

- g_j pseudo concava perché lineare $\forall_j$
- $x^{++} = (1,1)$

5) Sufficienza delle cond. di K-T

- f pseudo-concava perché strett. concava
- g_j quasi concave $\forall_j$ perché lineari

6) Lagrangiano e cond. di K-T

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{4} \log y + \mu (10 - x - y) + \lambda_x x + \lambda_y y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2x} - \mu + \lambda_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{4y} - \mu + \lambda_y = 0 \\ \mu \geq 0 \quad 10 - x - y \geq 0 \quad \mu(10-x-y) = 0 \\ \lambda_x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad \lambda_x x = 0 \\ \lambda_y \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \lambda_y y = 0 \end{cases}$$

7) Congettura $\quad 10-x-y=0, \quad \lambda_x = \lambda_y = 0$