Prova intermedia I - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)
17 Novembre 2017.

Avete due ore e un quarto a disposizione. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Sia

$$S := \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Giustificare il fatto che S sia un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e trovane una base e la dimensione. Determinare l'equazione cartesiana di S. In base a quanto ottenuto si può concludere che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S$ e che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S$?

2. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + y - z = a \\ x + y - az = -2 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui il sistema ha infinite soluzioni e in tal caso esplicitare le soluzioni. Esistono valori di a per i quali il sistema risulti omogeneo?

3. Calcola la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Controlla il risultato ottenuto verificando che, effettivamente, $A\,A^{-1} = I$.

Dimostra, possibilmente senza fare calcoli, che non esiste la matrice inversa di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 16 \\ 1 & -1 & 100 \end{pmatrix}.$$

Calcola $\mathrm{rank}(A)$ e $\mathrm{rank}(B)$ sfruttando le informazioni già ottenute.

4. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{R}^4$. Formano anche un sistema di generatori?

Dire se è possibile esprimere il vettore v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 e, in caso affermativo, esplicitare tale combinazione lineare.

5. Provare, senza fare calcoli, che l'insieme S delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 34y - z - t = 170 \\ 78x + y + z + 34t = -23 \\ x + 2y - 3z - 28t = 56 \end{cases}$$

non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, mentre lo è

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^4 \quad | \quad x + z = 0, \; y + t = 0 \right\}.$$

dove F_2 è il campo costituito dai soli due elementi 0 e 1. Provare che Z è finito ed esprimerlo per elencazione.

Svolgimento 1.

$$S := \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché ogni Span sappiamo esserlo. Troviamone base e dimensione. Sicuramente i due vettori

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

lo generano. Ma sono anche indipendenti perché palesemente non proporzionali. Quindi una base per S è

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Ne segue che $\dim S = 2$. Troviamo l'equazione cartesiana si S imponendo la compatibilità del sistema di matrice completa

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x\\ 2 & 2 & y\\ 0 & 1 & z\\ -1 & 0 & t \end{array}\right)$$

Usiamo EG ottenendo

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x\\ 0 & 2 & y-2x\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & t+x \end{array}\right)$$

e poi

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x\\ 0 & 2 & y-2x\\ 0 & 0 & z-\frac{1}{2}(y-2x)\\ 0 & 0 & t+x \end{array}\right)$$

Dato che vogliamo che le soluzioni esistano dobbiamo chiedere che siano 0 le espressioni che fronteggiano le ultime due righe nulle nella incompleta. Imponendo tale condizione otteniamo l'equazione cartesiana di S che dunque è data dal sistema

$$\begin{cases} z-\frac{1}{2}(y-2x) = 0\\ t+x = 0 \end{cases}$$

Semplificando e riordinando, otteniamo quindi l' equazione cartesiana di S

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$$

Ora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$ se e solo se le sue componenti sostituite al posto delle variabili x, y, z, t del sistema ne sono soluzione. Poiché $1 + 1 \neq 0$, tale vettore non sta in S. Passiamo a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Abbiamo che $2 - 1 + 2 \cdot 0 \neq 0$ e quindi neanche tale vettore sta in S.

2. Scriviamo la matrice completa B del sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + y - z = a \\ x + y - az = -2 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

dopo aver scambiato la prima riga con la terza in modo da incontrare il parametro a il più tardi possibile, ossia

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 & a \end{array}\right)$$

Usiamo EG ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & -2 & 4a-3 & 8 \\ 0 & -a & a^2+a+1 & 3a+2 \end{array}\right)$$

e poi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & -2 & 4a-3 & 8 \\ 0 & 0 & -a^2+\frac{5}{2}a-1 & 2-a \end{array}\right)$$

Ci sono due pivot certi: 1 e -2. Vediamo quando anche $-a^2 + \frac{5}{2}a - 1$ è o no un pivot, risolvendo l'equazione $-a^2 + \frac{5}{2}a - 1 = 0$ che equivale alla $2a^2 - 5a + 2 = 0$. Le soluzioni sono $a = 2, 1/2$. Quindi se $a \notin \{2, 1/2\}$ abbiamo 3 pivot e soluzione unica per il sistema. Se $a = 2$ l'ultima riga diventa $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ che esprime una identità ossia una equazione inutile per il sistema. In tal caso i pivot sono solo i due certi e z è variabile libera. Si hanno ∞^1 soluzioni. Infine se $a = 1/2$ l'ultima riga diventa $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}\right)$ che esprime una equazione impossibile e quindi il sistema è impossibile.

Tirando le fila: **per $a \neq 2, 1/2$ soluzione unica; per $a = 2$, ∞^1 soluzioni; per $a = 1/2$ nessuna soluzione.**

Troviamo ora le soluzioni nell'unico caso in cui siano infinite, ossia per $a = 2$ continuando con EG in salita. Sappiamo che z è libera e il sistema è stato ridotto a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2+2z \\ 0 & -2 & 8-5z \end{array}\right)$$

Prepariamoci a EG$\uparrow$ dividendo per -2 l'ultima riga

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2+2z \\ 0 & 1 & -4+\frac{5}{2}z \end{array}\right)$$

e poi facciamo un passo di EG$\uparrow$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-\frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & -4+\frac{5}{2}z \end{array}\right)$$

Ora leggiamo le soluzioni $x = 2 - \frac{1}{2}z$ e $y = -4 + \frac{5}{2}z$. Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni del sistema per $a = 2$ è

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{2}z \\ -4+\frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il sistema non è mai omogeneo perché almeno la seconda equazione ha sempre termine noto $-2 \neq 0$.

3. Per calcolare la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usiamo EG e poi EG$\uparrow$ su

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

semplifichiamola un po' prima di proseguire

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ancora un EG in discesa fornisce

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array}\right)$$

Attiviamo EG$\uparrow$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array}\right)$$

e poi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array}\right)$$

Pertanto abbiamo che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

E' immediato controllare che effettivamente accade quello che deve, ossia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

come pure

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In verità uno dei controlli è sufficiente a garantire anche l'altro (è un teorema di cui non abbiamo parlato che lo garantisce!).

Abbiamo ora che $\text{rank}A = 3$ perché sappiamo che una matrice in $M_n(\mathbb{F})$ è invertibile se e solo se il suo rango è n.

Per quanto riguarda B si vedono due colonne proporzionali quindi $\text{rank}B \neq 3$. Ma due colonne indipendenti ci sono sicuramente e sono la prima e la terza. Quindi $\text{rank}B = 2$.

4. Vediamo se i vettori dati formano un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ esaminando la compatibilità del sistema di completa

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 4 & 1 & 1 & 5 & y \\ 1 & 3 & -2 & -6 & z \\ 0 & -1 & 0 & -1 & t \end{array}\right)$$

per ogni $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Usiamo EG ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & -3 & -3 & y-4x \\ 0 & 2 & -3 & -8 & z-x \\ 0 & -1 & 0 & -1 & t \end{array}\right)$$

semplifichiamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{-y+4x}{3} \\ 0 & 2 & -3 & -8 & z-x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -t \end{array}\right)$$

proseguiamo con EG

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{-y+4x}{3} \\ 0 & 0 & -5 & -10 & z-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -t+\frac{y-4x}{3} \end{array}\right)$$

Dato che l'incompleta è triangolare non singolare, abbiamo che qualunque siano $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, le soluzioni esistono. Quindi i vettori dati sono indipendenti ed essendo $4 = \dim \mathbb{R}^4$ essi formano una base. Di conseguenza non è possibile esprimere il vettore v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3.

5. L'insieme S delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 34y - z - t = 170 \\ 78x + y + z + 34t = -23 \\ x + 2y - 3z - 28t = 56 \end{cases}$$

non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché non contiene il vettore nullo.

Passiamo a

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^4 \quad | \quad x + z = 0,\ y + t = 0 \right\}.$$

Esso è un sottospazio perché è un insieme di soluzioni di un sistema omogeneo su un campo. Sicuramente esso è incluso in $\mathbb{F}_2^4$ che ha $2^4 = 16$ elementi e dunque lui stesso è finito e conterrà al massimo 16 elementi. Vediamo quali esattamente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

La sua matrice completa è

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

e si presenta a scala con variabili libere z e t. Si ha $y = t$ e $x = z$. Pertanto i suoi elementi sono $|F_2|^2 = 2^2 = 4$ e precisamente, per elencazione, abbiamo

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ t \\ z \\ t \end{pmatrix} : t, z \in F_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$