Matematica per le Applicazioni Economiche I
A.A. 2017/2018

Esercizi con soluzioni
Numeri reali, topologia e funzioni

1 Numeri reali

Esercizio 1. *Risolvere la disequazione* $x^6 - 4x^3 + 3 \geq 0$.

Soluzione. Poniamo $y = x^3$ e troviamo per quali y risulta

$$y^2 - 4y + 3 \geq 0.$$

Poiché $y^2 - 4y + 3 = 0$ per $y = 3$ e $y = 1$, si ha che

$$y^2 - 4y + 3 = (y - 3)(y - 1),$$

pertanto $y^2 - 4y + 3 \geq 0$ se e solo se $y - 3$ e $y - 1$ hanno lo stesso segno, cioè, se e solo se $y \leq 1$ oppure $y \geq 3$. Ricordando che $y = x^3$, la disequazione $x^6 - 4x^3 + 3 \geq 0$ è soddisfatta per

$$x^3 \leq 1 \quad \text{oppure} \quad x^3 \geq 3.$$

La disequazione $x^3 \leq 1$ è equivalente a $x^3 - 1 \leq 0$ e quest'ultima è equivalente a $(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) \leq 0$ che è soddisfatta se e solo se $x \leq 1$. In modo analogo si verifica che la disequazione $x^3 \geq 3$ è soddisfatta se e solo se $x \geq \sqrt[3]{3}$. Quindi la disequazione proposta è soddisfatta se e solo se

$$x \leq 1 \ \text{oppure} \ x \geq \sqrt[3]{3}.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è quindi $(-\infty, 1] \cup [\sqrt[3]{3}, +\infty)$. □

Esercizio 2. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{7x - 2}{8x - 3} > 0.$$

Soluzione. Un numero reale è soluzione della disequazione considerata se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} 7x - 2 > 0, \\ 8x - 3 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 2 < 0, \\ 8x - 3 < 0, \end{cases}$$

ossia se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} x > \dfrac{2}{7}, \\[2ex] x > \dfrac{3}{8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{2}{7}, \\[2ex] x < \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Quindi, l'insieme delle soluzioni della disequazione è $(-\infty, \frac{2}{7}) \cup (\frac{3}{8}, +\infty)$. □

Esercizio 3. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{6x-1}{3x-1}-\frac{1}{3x+1}>0,$$

Soluzione. $(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},+\infty)$. $\square$

Esercizio 4. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2+1}\geq 0.$$

Soluzione. $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$. $\square$

Esercizio 5. *Risolvere la disequazione*

$$|x-1|<|x-2|.$$

Soluzione. Un numero reale è soluzione della disequazione $|x-1|<|x-2|$ se e solo se è soluzione di uno dei quattro sistemi seguenti

$$\begin{cases} x-1<x-2, \\ x-1\geq 0, \\ x-2\geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1-x<x-2, \\ x-1<0, \\ x-2\geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1<2-x, \\ x-1\geq 0, \\ x-2<0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1-x<2-x, \\ x-1<0, \\ x-2<0, \end{cases}$$

Poiché i primi due non ammettono soluzioni, un numero reale è soluzione della disequazione $|x-1|<|x-2|$ se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} 2x<3, \\ 1\leq x<2, \end{cases} \quad \begin{cases} x<1, \\ x<2, \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del primo sistema è $[1,\frac{3}{2})$; l'insieme delle soluzioni del secondo sistema è $(-\infty,1)$. Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione iniziale è $[1,\frac{3}{2})\cup(-\infty,1)$, ossia $(-\infty,\frac{3}{2})$.

È possibile anche risolvere la disequazione osservando che, poiché per ogni possibile valore di x si ha che $|x-1|\geq 0$ e $|x-2|\geq 0$, si ha che $|x-1|<|x-2|$ se e solo se $(|x-1|)^2<(|x-2|)^2$ ossia $(x-1)^2<(x-2)^2$. Risolvendo tale disequazione otteniamo come insieme delle soluzioni $(-\infty,\frac{3}{2})$.

Infine, è possibile risolvere la disequazione anche attraverso un ragionamento geometrico. Infatti, la disequazione proposta richiede di trovare i punti della retta reale la cui distanza dal punto 1 sia minore della distanza dal punto 2. Pertanto si può comprendere che tutti e soli i numeri reali che soddisfano questa condizioni sono gli elementi di $(-\infty,\frac{3}{2})$. $\square$

Esercizio 6. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{x+1}{x|x|+2}>0.$$

Soluzione. Un numero reale è soluzione della disequazione considerata se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x|x|+2>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1<0, \\ x|x|+2<0, \end{cases}$$

ossia se e solo se è soluzione di uno dei quattro sistemi seguenti

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x^2+2>0, \\ x\geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1>0, \\ -x^2+2>0, \\ x<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1<0, \\ x^2+2<0, \\ x\geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1<0, \\ -x^2+2<0, \\ x<0. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del primo sistema è $[0,+\infty)$, l'insieme delle soluzioni del secondo sistema è $(-1,0)$, l'insieme delle soluzioni del terzo sistema è $\varnothing$, l'insieme delle soluzioni del quarto sistema è $(-\infty,-\sqrt{2})$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione iniziale è $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-1,+\infty)$. $\square$

Esercizio 7. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{2x^2-4x}\leq x-1.$$

Soluzione. Un numero reale è soluzione della disequazione considerata se e solo se è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ 2x^2 - 4x \leq (x-1)^2, \end{cases}$$

che ha come insieme delle soluzioni l'intervallo $[2, 1+\sqrt{2}]$. □

Esercizio 8. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} > x - 2.$$

Soluzione. Un numero reale è soluzione della disequazione considerata se e solo se è soluzione di almeno uno dei due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 > (x-2)^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x - 2 < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come insieme delle soluzioni $(\frac{7}{2}, +\infty)$, il secondo ha come insieme delle soluzioni $(-\infty, -1]$. L'insieme delle soluzioni della disequazione è dunque $(-\infty, -1] \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$. □

Esercizio 9. *Risolvere la disequazione*

$$|x - 1| - 3 > \sqrt{(x-1)(x-3)}.$$

Soluzione. La disequazione va studiata nel suo campo di esistenza ossia nell'insieme $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Tale insieme infatti corrisponde all'insieme di tutti e soli i numeri reali per i quali l'argomento della radice è non negativo.

Poiché quando $|x-1| - 3 < 0$ la disequazione non è soddisfatta, si ha che un numero reale in $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ è soluzione della disequazione considerata se e solo se è soluzione del sistema

$$\begin{cases} |x-1| - 3 \geq 0, \\ (|x-1| - 3)^2 > (x-1)(x-3), \end{cases} .$$

ossia se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x \geq 1, \\ (x-4)^2 > (x-1)(x-3), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -2 - x \geq 0, \\ x < 1, \\ (x+2)^2 > (x-1)(x-3). \end{cases} . \tag{2}$$

Il sistema (1) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ -4x + 13 > 0, \end{cases}$$

che non ha soluzioni.
Il sistema (2) è equivalente

$$\begin{cases} x \leq -2, \\ 8x + 1 > 0, \end{cases}$$

che non ha soluzioni. Quindi la disequazione proposta non ha soluzioni. □

Esercizio 10. *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$\max\left\{x, x^2 - 1\right\} = 5x - 7.$$

Soluzione. Un numero reale è soluzione dell'equazione considerata se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi

$$\begin{cases} x \le x^2 - 1, \\ x^2 - 1 = 5x - 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 1 < x, \\ x = 5x - 7. \end{cases} \tag{3}$$

Il primo sistema che ha come insieme delle soluzioni l'insieme

$$\left(\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)\right) \cap \{2,3\} = \{2,3\},$$

il secondo sistema ha come insieme delle soluzioni

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cap \left\{\frac{7}{4}\right\} = \varnothing.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione iniziale è $\{2,3\}$. □

Esercizio 11. *Si determini l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $x^2 = 2|x| + 3$.

Soluzione. $\{-3, 3\}$. □

Esercizio 12. *Si determini l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $x^2 + |x| = 6$.

Soluzione. $\{-2, 2\}$. □

Esercizio 13. *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$|x(x+2)| - 2|x+2| \ge 0.$$

Soluzione. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. □

Esercizio 14. *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$|x(x-2)| - |x-2| \le 0.$$

Soluzione. $[-1, 1] \cup \{2\}$. □

Esercizio 15. *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$(x-2)^2 \le 2|x-2| + 3.$$

Soluzione. $[-1, 5]$. □

Esercizio 16. *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$(x+2)^2 \ge 6 - |x+2|.$$

Soluzione. $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$. □

Esercizio 17. *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$|x| + 1 \le 4 + 2x$$

Soluzione. $[-1, +\infty)$. □

Esercizio 18. *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$|x+2| \le -2x - 1$$

Soluzione. $(-\infty, -1]$. □

Esercizio 19. *Determinare l'estremo superiore dell'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 1 + \sin(n\pi)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 1 - \cos(n\pi)\}$$

Soluzione. 2. □

Esercizio 20. *Stabilire quale dei seguenti punti è interno all'insieme*

$$\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{18}{7}, \frac{\pi}{41}\right) \cup \{e\}$$

(a) $-\frac{18}{7}$
(b) 3
(c) e
(d) $-\frac{3}{17}$

Soluzione. (d). □

Esercizio 21. *Sia $A = (1,8] \cup \{0\}$ e sia B un insieme tale che $A \cup B$ è chiuso. Allora necessariamente deve essere:*

(a) $B \neq \{1\}$
(b) $B \neq \left[\frac{1}{2}, 2\right]$
(c) $B \neq (-\infty, 0]$
(d) $B \neq \mathbb{R}$

Soluzione. (c). □

Esercizio 22. *Sia $A = (1,3] \cup [5,7)$ e sia B un insieme tale che $A \cup B$ è aperto. Allora necessariamente deve essere:*

(a) $B \neq (2,4)$
(b) $B \neq [2,5)$
(c) $B \neq (3,6] \cup \{2\}$
(d) $B \neq (3,5)$

Soluzione. (a). □

Esercizio 23. *Per ciascuno dei seguenti insiemi si studi la limitatezza superiore ed inferiore.*

(a) $[0,1)$,

(b) $(-\infty,4) \cup (7,10]$,

(c) $(4,+\infty)$,

(d) $(-\infty,1) \cup [4,+\infty)$,

(e) $(1,2] \cup (3,4] \cup (7,10)$,

(f) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 2x-1\}$,

(g) $\left\{x = n - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Soluzione. (a) $[0,1)$ è limitato superiormente e inferiormente.
(b) $(-\infty,4) \cup (7,10]$ è limitato superiormente e non inferiormente.
(c) $(4,+\infty)$ è limitato inferiormente e non superiormente.
(d) $(-\infty,1) \cup [4,+\infty)$ non è limitato né inferiormente né superiormente.
(e) $(1,2] \cup (3,4] \cup (7,10)$ è limitato superiormente e inferiormente.
(f) Osserviamo innanzitutto che

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 2x-1\} = (1,+\infty).$$

Infatti, un numero reale è soluzione dell'equazione $|x| < 2x - 1$ se e solo se è soluzione di uno dei due sistemi

$$\begin{cases} x < 2x - 1, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x < 2x - 1, \\ x < 0, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < 3x \\ x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Poiché il primo sistema ha come insieme delle soluzioni $(1, +\infty)$ e il secondo sistema non ha soluzioni, si conclude che la disequazione $|x| < 2x - 1$ ha come insieme delle soluzioni $(1, +\infty)$.
Poiché $(1, +\infty)$ è limitato inferiormente ma non superiormente, così risulta l'insieme proposto in (f).

(g) L'insieme $\left\{ x = n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è limitato inferiormente, ma non superiormente. È limitato inferiormente poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$0 \leq n - \frac{1}{n}.$$

Si consideri adesso $M \in \mathbb{R}$. Se consideriamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > M + 1$ si ha che

$$n - \frac{1}{n} \geq n - 1 > (M + 1) - 1 = M.$$

Quindi l'insieme proposto in (g) non è limitato superiormente. □

Esercizio 24. *Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$. Dimostrare che se $A \subseteq B$ allora*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Soluzione. Le uniche disuguaglianze da verificare sono $\sup A \leq \sup B$ e $\inf B \leq \inf A$. Infatti $\inf A \leq \sup A$ è una immediata conseguenza della definizione. Dimostriamo che $\sup A \leq \sup B$. Indichiamo con

$$L_1 = \sup A \quad \text{e} \quad L_2 = \sup B.$$

Se fosse $L_1 > L_2$ allora esisterebbe $x \in A$ tale che $x > L_2$, ma allora si avrebbe che $x > L_2 \geq y$ per ogni $y \in B$, e ciò implica che $x \notin B$, il che è assurdo perché $A \subseteq B$. La dimostrazione $\inf B \leq \inf A$ è analoga ed è lasciata al lettore. □

Esercizio 25. *Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme*

$$A = \left\{ \frac{1}{n^3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione. L'insieme A è limitato. Infatti:

$$0 < \frac{1}{n^3} \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'estremo superiore di A è 1 poiché 1 è il massimo di A in quanto $1 \in A$.
Per quanto riguarda l'estremo inferiore, osserviamo che l'insieme dei minoranti di A è $(-\infty, 0]$. Infatti se $x \leq 0$ allora $x \leq 0 < \frac{1}{n^3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Viceversa, sia x è un minorante di A. Se per assurdo fosse $x > 0$, si consideri $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n^3} < x$, a tale scopo basta prendere $n > \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ e si contraddice l'assunto che x sia minorante di A. Poiché $0 = \max(-\infty, 0]$, si ha che $\inf A = 0$. □

Esercizio 26. *Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera*

(a) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ *è un numero negativo,* *(b)* $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ *è un numero naturale*
(c) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ *è un numero irrazionale,* *(d) nessuna delle altre affermazioni è vera*

Soluzione. (b). □

Esercizio 27. *Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera*

(a) $7\sqrt{3}$ *è un numero negativo,* *(b)* $7\sqrt{3}$ *è un numero naturale*
(c) $7\sqrt{3}$ *è un numero irrazionale,* *(d) nessuna delle altre affermazioni è vera*

Soluzione. (c). □

Esercizio 28. *Stabilire per quale dei seguenti insiemi* $x_0 = 3$ *è punto interno.*

(a) $\mathbb{N}$; *(b)* $[0, 3]$; *(c)* $[-2, 4)$; *(d)* $(3, 6)$

Soluzione. (c). □

Esercizio 29. *Stabilire per quale dei seguenti insiemi* $x_0 = 1$ *è punto interno.*

(a) $\mathbb{Z}$; *(b)* $[1, 5]$; *(c)* $[0, 1)$; *(d)* $(-1, 9]$

Soluzione. (d). □

Esercizio 30. *Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme*

$$A = (-2, 0) \cup \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Soluzione. $\inf(A) = -2, \ \sup(A) = 1.$ □

Esercizio 31. *Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme*

$$A = (0, 3) \cup \{\cos(\pi n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Soluzione. $\inf(A) = -1, \ \sup(A) = 3.$ □

Esercizio 32. *Stabilire quale dei seguenti insiemi coincide con l'insieme dei suoi punti interni.*

(a) $(0, 1) \cup \{3\}$; *(b)* $\mathbb{N}$; *(c)* $(-\infty, 4) \cup (\pi, +\infty)$; *(d)* $[-2, 1] - \{0\}$

Soluzione. (c). □

Esercizio 33. *Determinare l'estremo superiore e il massimo dell'insieme* $A = (-1, 3] \cap [-2, 2)$.

Soluzione. $\sup(A) = 2$, $\max(A)$ non esiste. □

Esercizio 34. *Stabilire per quale dei seguenti insiemi* π *è un punto interno.*

(a) $[-1, 3]$; *(b)* $(5, 9]$; *(c)* $[0, 10)$; *(d)* $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$.

Soluzione. (c). □

Esercizio 35. *Determinare l'estremo inferiore e il minimo dell'insieme* $A = (2, 5] \cap [1, 4)$.

Soluzione. $\inf(A) = 2$, $\min(A)$ non esiste. □

Esercizio 36. *Stabilire per quale dei seguenti insiemi* e *è un punto interno.*

(a) $[-2, 1]$; *(b)* $(3, 10]$; *(c)* $[1, 5)$; *(d)* $\{0, 1, e, e^2\}$.

Soluzione. (c). □

Esercizio 37. *Si dica quale dei seguenti numeri è razionale*

(a) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{20}$; *(b)* $4\sqrt{5} - 2\sqrt{20}$; *(c)* $3\sqrt{3} - 6\sqrt{12}$; *(d)* $3\sqrt{3} + 6\sqrt{12}$.

Soluzione. (b). □

Esercizio 38. *Si dica quale dei seguenti numeri è irrazionale*

(a) $2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{18}$; *(b)* $\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{18}$; *(c)* $\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; *(d)* $2\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

Soluzione. (b). □

2 Funzioni

Esercizio 39. *Siano date tre funzioni reali f, g, h definite su $\mathbb{R}$ e di cui si sa che: f è positiva e superiormente limitata,* $\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x) = 3$, *$h$ è limitata. Stabilire se ciascuna delle seguenti funzioni è superiormente limitata sul proprio dominio, dando una dimostrazione in caso positivo ed esibendo un controesempio in caso negativo:*

$$\frac{f(x)}{h(x)}, \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x)+h(x), \quad f(g(x)), \quad g(x)h(x).$$

Soluzione. Le ipotesi implicano che esiste M costante positiva tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leq M, g(x) \geq 3, |h(x)| \leq M$.

$\frac{f(x)}{h(x)}$ non è necessariamente superiormente limitata. Si consideri ad esempio $f(x) = 3$ ed h definita da $h(x) = x$ per gli $x \in (0,1)$ e $h(x) = 0$ per gli $x \notin (0,1)$. In tal caso $\frac{f(x)}{h(x)}$ è illimitata superiormente.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ è superiormente limitata perché $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{3} \leq \frac{M}{3}$.

$f(x) + h(x) \leq M + M$ quindi è superiormente limitata.

$f(z) \leq M$ qualunque sia il valore assunto da z, quindi anche per $z = g(x)$, quindi $f(g(x))$ è superiormente limitata.

$g(x)h(x)$ non è necessariamente superiormente limitata. Ad esempio si consideri $g(x) = 3 + x^2$ e $h(x) = 1$. □

Esercizio 40. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si determini un intervallo in cui la funzione è strettamente crescente:*

$$f_1(x) = \tan(x^2 - 2x + 1), \quad f_2(x) = \tan(\ln(x)), \quad f_3(x) = 2\ln(x), \quad f_4(x) = \ln(x^2), \quad f_5(x) = \ln(x^3).$$

Soluzione. Ricordando che $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, f_1 è strettamente crescente nell'insieme delle x che risolvono il sistema

$$\begin{cases} (x-1)^2 > \pi/2 \\ (x-1)^2 < 3\pi/2 \\ x \geq 1, \end{cases} \tag{5}$$

dove f_1 risulta composizione di funzioni strettamente crescenti. Il sistema ha come insieme delle soluzioni $\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$.

f_2 è strettamente crescente nell'insieme delle x che risolvono il sistema

$$\begin{cases} \ln(x) > \pi/2 \\ \ln(x) < 3\pi/2 \\ x > 0, \end{cases} \tag{6}$$

dove f_2 risulta composizione di funzioni strettamente crescenti. Il sistema ha come insieme delle soluzioni $(e^{\pi/2}, e^{\frac{3}{2}\pi})$.

f_3, f_5 sono strettamente crescenti su tutto il loro dominio $(0, +\infty)$, perché $\ln(x)$ e x^3 sono strettamente crescenti sul loro dominio.

$f_4(x) = 2\ln|x|$ è strettamente crescente su $(0, +\infty)$, dove $\ln(x)$ e $|x|$ sono strettamente crescenti. □

Esercizio 41. *Si determini la controimmagine di $[5, 10]$ tramite la funzione $f(x) = 3x^2 + 1$.*

Soluzione. $f^{-1}([5,10]) = [-\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$.

□

Esercizio 42. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ kx + q & \text{se } x < 0: \end{cases}$$

si stabilisca per quali valori dei parametri k, q la funzione risulta monotona su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Per ogni $(k, q) \in [0, +\infty) \times (-\infty, 1]$. □

Esercizio 43. *(a) Si disegni il grafico (immediato) di*

$$f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|.$$

(b) Guardando il grafico si dica se la funzione è iniettiva sul suo insieme di definizione, ed in caso negativo si determini un intervallo su cui lo è.
(c) Per ogni $y \in \mathbb{R}$, si calcoli $f^{-1}(\{y\})$. Si stabilisca quindi l'immagine di f.

Soluzione. (a) Il grafico è riportato in figura.

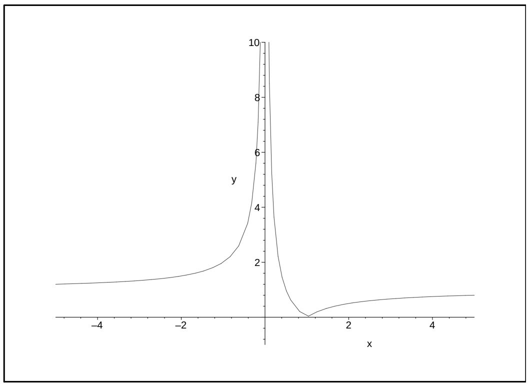

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$.

(b) f non è iniettiva su $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Lo è ad esempio sull'intervallo $[1, +\infty)$.

(c) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, inoltre $f^{-1}(\{y\}) = \left\{\frac{1}{1-y}, \frac{1}{1+y}\right\}$ se $y \in [0,1) \cup (1, +\infty)$, $f^{-1}(\{y\}) = \frac{1}{1+y}$ se $y = 1$, $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$ se $y \in (-\infty, 0)$. Dunque $Imf = [0, +\infty)$. □

Esercizio 44. *Si disegni il grafico (immediato) di*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \textit{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ |\sin(x)| & \textit{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \textit{se } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e si determini $f^{-1}(\{1\})$.

Soluzione. Il grafico è riportato in figura. Si ha che $f^{-1}(\{1\}) = \{-\pi/2\} \cup [\pi/2, +\infty)$ □

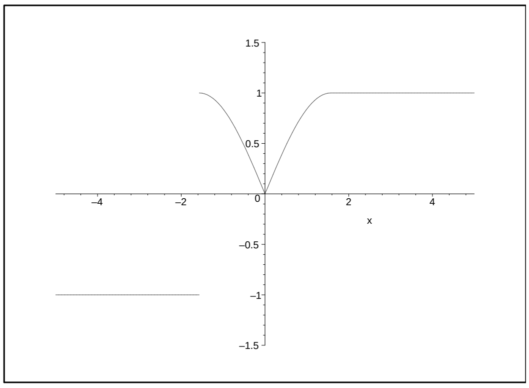

Figura 2: Grafico della funzione f dell'esercizio 44.

Esercizio 45. *Sia $f(x) = 2x^2 + bx - 3$. Determinare* $\max_{[1,2]} f$ *al variare del parametro reale b.*

Soluzione. Il grafico della funzione è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e con due radici per ogni $b \in \mathbb{R}$. In $[1,2]$ la funzione è o crescente, o prima decrescente e poi crescente, o decrescente a seconda che (rispettivamente) l'ascissa $x_V = -b/4$ del vertice sia $x_V \leq 1$, o $x_V \in (1,2)$, o $x_V \geq 2$. In ogni caso $\max_{[1,2]} f = \max\{f(1), f(2)\} = \max\{b-1, 2b+5\}$. □

Esercizio 46. *Sia* $g(x) = \ln(2x+1)$.
(a) Disegnare il grafico (immediato) di g *e dedurre l'immagine di* g *e l'iniettività di* g.
(b) Calcolare l'inversa di g.

Soluzione. (a) Il grafico, riportato in figura, è costruito grazie alla conoscenza del grafico di $\ln(x)$.

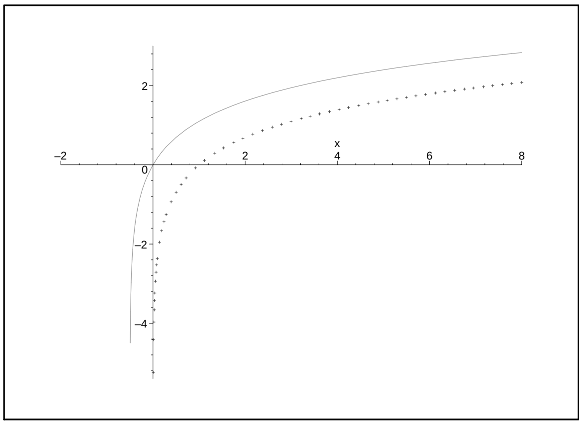

Figura 3: Grafico di $g(x) = \ln(2x+1)$ (linea continua) e grafico di $\ln(x)$ (linea a puntini).

Geometricamente si osserva che, tracciando una qualunque linea orizzontale, questa interseca il grafico di g in un solo punto. Ciò significa $Im(g) = \mathbb{R}$ e che g è iniettiva.
(b) Dal precedente punto sappiamo che la funzione g ammette funzione inversa. Per determinare g^{-1} si deve risolvere, fissato y, l'equazione $\ln(2x+1) = y$ nella variabile x. Si conclude dunque che $g^{-1}(y) = \frac{e^y - 1}{2}$. □

Esercizio 47. *Disegnare il grafico (immediato) della funzione*

$$f(x) = x + |x^2 + 4x - 3|$$

e determinare massimi e minimi della funzione nell'intervallo $[-4, 1]$.

Soluzione. Si tratta del rincollamento di 3 parti di due diverse parabole. Infatti

$$|x^2 + 4x - 3| = \begin{cases} x^2 + 4x - 3 & \text{se } x \in (-\infty, -2-\sqrt{7}] \cup [-2+\sqrt{7}, +\infty) \\ -x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \in (-2-\sqrt{7}, -2+\sqrt{7}) \end{cases}$$

perciò

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 3 & \text{se } x \in (-\infty, -2-\sqrt{7}] \cup [-2+\sqrt{7}, +\infty) \\ -x^2 - 3x + 3 & \text{se } x \in (-2-\sqrt{7}, -2+\sqrt{7}) \end{cases}$$

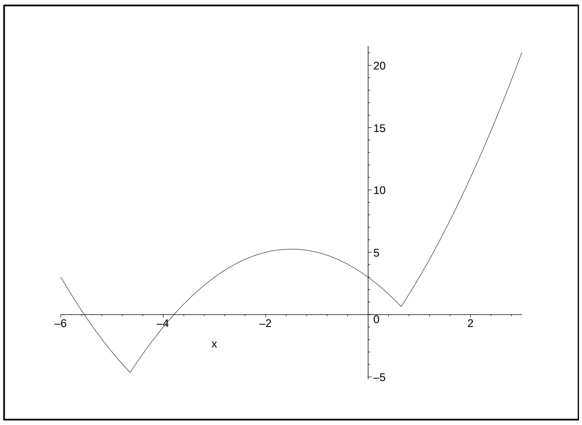

Figura 4: Grafico di $f(x) = x + |x^2 + 4x - 3|$.

Risulta dunque che $\max_{[-4,1]} f = f(-3/2) = 21/4$ e $\min_{[-4,1]} f = f(-4) = -1$. Il grafico è riportato in figura. □

Esercizio 48. *Si consideri* $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$*:*
(a) determinare l'insieme di definizione di f*,*
(b) verificare che f *è iniettiva, determinare* $Im(f)$ *e scrivere l'espressione esplicita della funzione inversa di* f*,*
(c) trovare dominio e immagine della funzione inversa di f*.*

Soluzione. (a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

(b) Per ogni $y \neq 3$, si ha che $f^{-1}(\{y\}) = \left\{-\frac{6+2y}{3-y}\right\}$, mentre $f^{-1}(\{3\}) = \varnothing$. Quindi f è iniettiva e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$. Si ha inoltre che

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto -\frac{6+2y}{3-y}$$

(c) $D(f^{-1}) = Im(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $Im(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. □

Esercizio 49. *Si tracci il grafico (immediato) della seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & se\ x < -1 \\ -x+1 & se\ -1 \leq x < 1 \\ \ln x & se\ x \geq 1. \end{cases}$$

Si determinino poi:
(a) $f^{-1}(\{-1\})$
(b) $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$
(c) $\max_{[0,2]} f, \min_{[-1,1]} f$*.*

Soluzione. (a) $\varnothing$; (b) $\{\frac{1}{2}, \sqrt{e}\}$; (c) $\max_{[0,2]} f = 1$, $\min_{[-1,1]} f = 0$. Il grafico è in figura. □

Esercizio 50. *(a) Può una funzione con insieme di definizione* $\mathbb{R}$ *essere sia pari che iniettiva?*
(b) Può una funzione dispari non essere iniettiva sul suo dominio?

Soluzione. (a) No. Si consideri infatti $x \in (0, +\infty)$. Allora $x \neq -x$ e $f(x) = f(-x)$, quindi f non è iniettiva. (b) Sì. Si consideri ad esempio $f(x) = \sin(x)$. □

Esercizio 51. *Tra tutti i rettangoli con perimetro pari a 8 m, determinare quello di area massima.*

Soluzioni. Siano a, b le dimensioni di un rettangolo di perimetro 8 m. Si ha dunque che $a, b > 0$ e che $2a + 2b = 8$, ossia $b = 4 - a$. L'area di tale rettangolo è quindi ab ossia $a(4-a)$. Determiniamo dunque $\max a(4-a)$ dove $a \in (0,4)$. Il valore massimo della funzione $f(a) = a(4-a)$ in $(0,4)$ è 4 ed è realizzato dal punto $a = 2$. Si osservi che il rettangolo di area massima è un quadrato. □

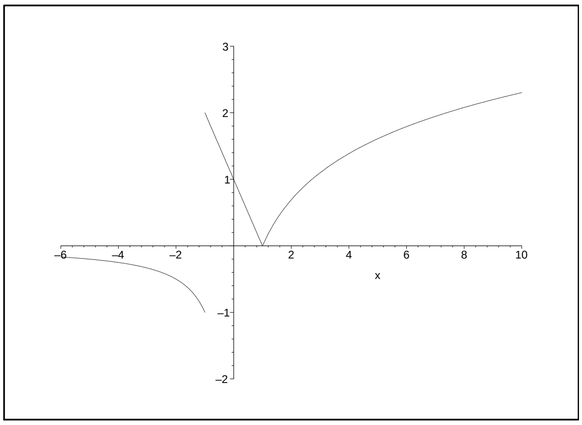

Figura 5: Grafico di della funzione f dell'esercizio 49

Esercizio 52. *Per la funzione* $f(x) = \sqrt{x} - 1$*, si determini la controimmagine dell'insieme* $[-4, 3]$.

Soluzione. $[0, 16]$. □

Esercizio 53. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è pari.*

$$\text{(a) } f(x) = \sin(x); \qquad \text{(b) } f(x) = 2^x; \qquad \text{(c) } f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \qquad \text{(d) } f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$$

Soluzione. (d). □

Esercizio 54. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è dispari.*

$$\text{(a) } f(x) = \cos(x); \qquad \text{(b) } f(x) = 3^x; \qquad \text{(c) } f(x) = x + |x|; \qquad \text{(d) } f(x) = 2\tan(x)$$

Soluzione. (d). □

Esercizio 55. *Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione*

$$f(x) = 1 + \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Soluzione. $\sup f = 2, \ \inf f = 1$. □

Esercizio 56. *Si dica quali delle seguenti funzioni sono dispari.*

$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{x^2}}; \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{x^2}};$$

$$f_3(x) = \sin^2(x) + \cos(x); \qquad f_4(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Soluzione. $f_1, \ f_4$. □

Esercizio 57. *Si dica quali delle seguenti funzioni sono pari.*

$$f_1(x) = \tan(x^2); \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{x^2}};$$

$$f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{x^2}}; \qquad f_4(x) = \cos^2(x) + \sin(x).$$

Soluzione. $f_1, \ f_2$. □

Esercizio 58. *Data* $f(x) = x^2 - 4x + 7$*, si determini l'immagine di* $[1, 5)$ *attraverso* f.

Soluzione. $[3, 12)$. □

Esercizio 59. *Data* $f(x) = -x^2 + 4x + 2$*, si determini l'immagine di* $[1, 5)$ *attraverso* f*.*

Soluzione. $(-3, 6]$. □

Esercizio 60. *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$f(x) = x^2 + 4x + \alpha.$$

Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ *in modo che* $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$*.*

Soluzione. $\alpha = 3$. □

Esercizio 61. *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$f(x) = -x^2 + 6x + \alpha.$$

Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ *in modo che* $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$*.*

Soluzione. $\alpha = -8$. □

Esercizio 62. *Sia* $f(x) = 2x^2 - 3$*. Si calcoli* $f([-1, 3])$

Soluzione. $[-3, 15]$. □

Esercizio 63. *Sia* $f(x) = -3x^2 + 1$*. Si calcoli* $f([-2, 1])$

Soluzione. $[-11, 1]$. □

Esercizio 64. *Siano* $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = x^2 - 2x - 3$*. Quale dei seguenti numeri reali è soluzione dell'equazione* $(g \circ f)(x) = 0$

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

Soluzione. (b). □

Esercizio 65. *Siano* $f(x) = x + 2$ *e* $g(x) = x^2 - x - 6$*. Quale dei seguenti numeri reali è soluzione dell'equazione* $(g \circ f)(x) = 0$

(a) -1
(b) 0
(c) 1
(d) 2

Soluzione. (c). □

Esercizio 66. *Sia* $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$*. Calcolare* $\sup f^{-1}(\{0\})$*.*

Soluzione. 1. □

Esercizio 67. *Sia* $f(x) = (x^2 - 1)(e^x - 1)$*. Calcolare* $\inf f^{-1}(\{0\})$*.*

Soluzione. -1. □

Esercizio 68. *Sia* $f(x) = x^2$*. Quale dei seguenti punti è interno a* $f([-1, 2])$*?*

(a) -2
(b) 0
(c) 2
(d) 4

Soluzione. (c). □

Esercizio 69. *Sia* $f(x) = |x| + 1$*. Quale dei seguenti punti è interno a* $f([-2, 6])$*?*

(a) 4
(b) -2
(c) 1
(d) 7

Soluzione. (a). □

Esercizio 70. *Si rappresenti il grafico qualitativo della funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & se \quad x \in (-\infty, 0], \\ 7 & se \quad x \in (0, 2), \\ x^2 - 4 & se \quad x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Si deducano dal grafico $\sup f$ *e* $\inf f$ *ed* $f([1,3])$. *Si discuta l'esistenza del massimo e del minimo della funzione.*

Soluzione. $\sup f = +\infty$ e dunque non esiste $\max f$; $\inf f = \min f = 0$ e 2 è l'unico punto di minimo; $f([1,3]) = [0,5] \cup \{7\}$. □

Esercizio 71. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è tale che 0 è soluzione dell'equazione* $f(f(x)) = 0$.

(a) $f(x) = e^x + x$
(b) $f(x) = |x^2 - 1|$
(c) $f(x) = \sin^2(x) + 1$
(d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Soluzione. (b). □

Esercizio 72. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è tale che 1 è soluzione dell'equazione* $f(f(x)) = 0$.

(a) $f(x) = e^x - e$
(b) $f(x) = \cos(\pi x) + 1$
(c) $f(x) = x^2 - x$
(d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Soluzione. (c). □