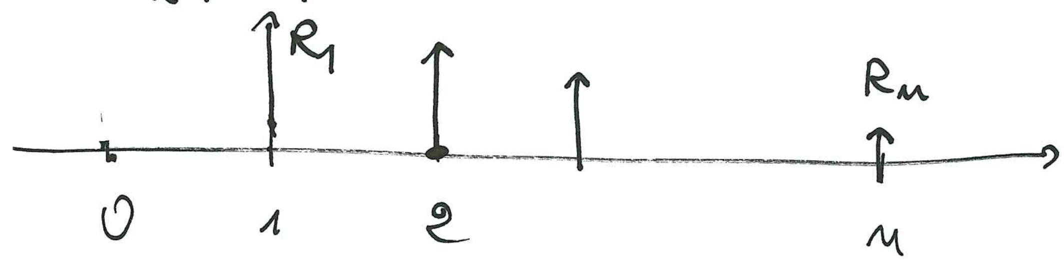
$\vec{r}$ con rate in PROGRESS. ARITMET.

$R_1 \quad , \quad k \geq 2 \quad R_k = R_{k-1} + p$

es.



$p < 0$

$$V_0(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{m} R_k \cdot v^k$$

$$R_k = R_{k-1} + p = (R_{k-2} + p) + p = R_{k-2} + 2p = \dots$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ k-(k-1)}}{R_1} + (k-1)p$$

$$V_0(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{m} \left[R_1 + (k-1)p \right] v^k$$

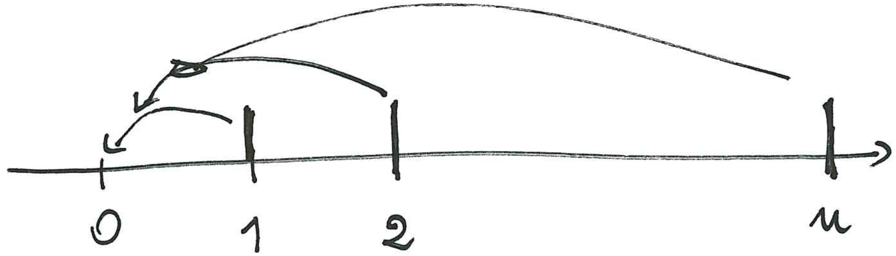
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} R_1 v^k}_{R_1 \cdot a_{\overline{m}|i}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} p\,(k-1)\,v^k}_{p \cdot S}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\cdot v^k = v^2 + 2v^3 + 3v^4 + \dots + (n-1)v^n$$

$$u\cdot S = v + 2v^2 + 3v^3 + \dots + (n-2)v^{n-2} + (n-1)v^{n-1}$$

$$\underbrace{uS - S}_{iS} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} \underbrace{-(n-1)v^n}_{-nv^n + v^n}$$

$$iS = \sum_{k=1}^{n} v^k - nv^n$$



$$(u-1)\cdot S = (1+i-1)S = iS$$

$$iS = a_{\overline{n}|i} - nv^n$$

$$i \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{a_{\overline{n}|i} - nv^n}{i}}$$

$$\Rightarrow V_0(\vec{\pi}) = R_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + p \cdot \frac{a_{\overline{n}|i} - nv^n}{i}$$

EX 3.4

EX costituzione di un capitale

Verso 150 € a inizio di OGNI TRIMESTRE a partire dall' 1/1/2015

capitalizzaz. mista, capitaliz. degli inter. a fine di ogni anno,

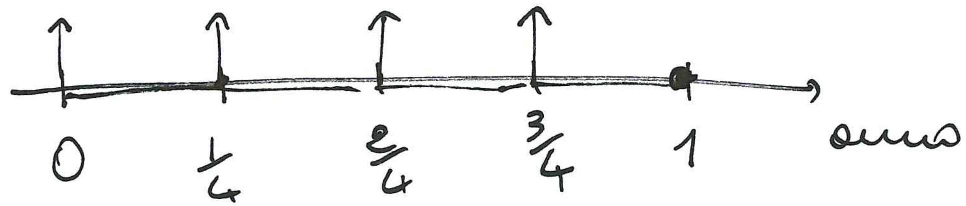
$i_s = 2,1\%$ lordo annuo

1) calcolare montante al 31/12/15

2) montante netto al 31/12/15, tasse = 26% · interessi

3) continuo gli stessi versamenti ~~fino~~ per altri 39 anni: di quanto potrò disporre dopo 40 anni dal primo versam.?

ANNO COMMERCIALE $\frac{30}{360}$



Sol.

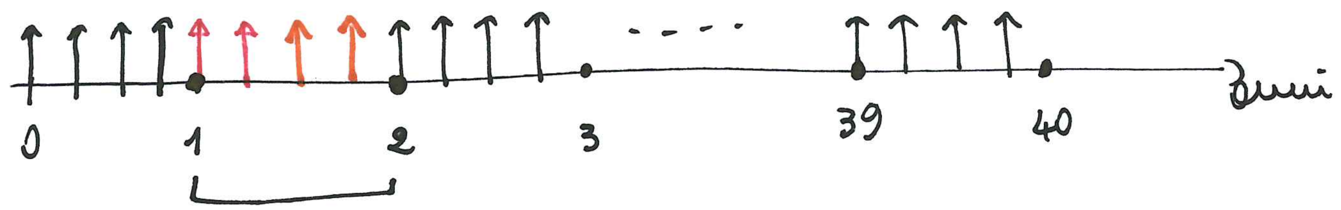
1) $$M_{31/12/15} = 150 \cdot (1 + i_s \cdot 1) + 150 \cdot \left(1 + i_s \cdot \frac{3}{4}\right) + 150 \cdot \left(1 + i_s \cdot \frac{1}{2}\right) + 150 \cdot \left(1 + i_s \cdot \frac{1}{4}\right)$$
$$= 607,875 \text{ lordo}$$

2) $$I = 7,875 = M_{31/12/15} - 150 \cdot 4$$

$I \cdot \left(1 - \frac{26}{100}\right) = 5.8275$ netto

$M^{netto}_{31/12/15} = 150 \cdot 4 + 5,8275 = 605,8275 \simeq 605,83$

3)



$M^{netto}_{31/12/16}\left(\{R_5, R_6, R_7, R_8\} / \{1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}\} \right) = M^{netto}_{31/12/15} \doteq M$

$M \cdot (1+i_m)^{39}$ valore in $t=40$ di $\{R_1, R_2, R_3, R_4\} / \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\}$

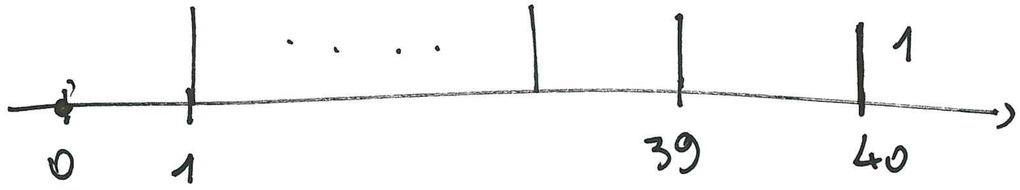
$i_m = i_s \cdot \left(1 - \frac{26}{100}\right) = 0,01554$ tasso netto

$M \cdot (1+i_m)^{38}$ valore di $\{R_5, R_6, R_7, R_8\} / \{1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}\}$ in $t=40$

per ogni gruppo di 4 rate dello stesso anno calcolo il Montante netto a fine di quell'anno, e poi capitalizzo fino a $t=40$

$$M^{n}_{t=40} = M \underbrace{\left(u_m^{39} + u_m^{38} + \dots + u_m^{1} + 1\right)}_{\text{valore in } t=40 \text{ di una rendita unitaria}} , \quad u_m = 1 + i_m$$

posticip. con ~~rate~~ 40 rate



$$= M \cdot s_{\overline{40}|i_m} = M \cdot \frac{u_m^{40} - 1}{i_m} = 33'255{,}23 \text{ €}$$

$$150 \cdot 4 \cdot 40 = 600 \cdot 40 = 24'000$$

EX chiedo a prestito S, mutuo con rata R cost., periodale, tasso i periodale, posticipate

1) dim. che più vogliamo $R \downarrow$ più $n \uparrow$
2) si riesce a diminuire a piacere la rata ?

Sol. S = prezzo equo in 0 della rendita $\{R, R, \dots R\} / \{1, 2, \dots, n\}$ al tasso i

$$S = R \, a_{\overline{n}|i} \Rightarrow R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{S \cdot i}{1 - v^n}$$

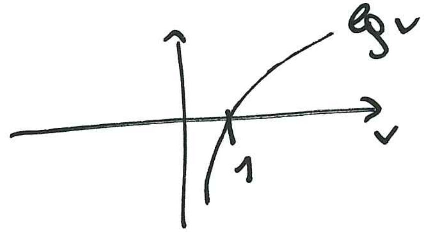
$$n \uparrow, \quad v^n \downarrow, \quad 1 - v^n \uparrow, \quad \frac{1}{1 - v^n} \downarrow, \quad R \downarrow$$

$$\frac{dR}{dn} = \frac{d}{dn}\left(Si \cdot \frac{1}{1-v^n} \right) = Si \, \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{f} \right)$$

$f(n) = 1 - v^n$,

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-f'}{f^2} = \frac{0 \cdot f - f' \cdot 1}{f^2}$$

$$f'(x) = (1 - v^x)' = - v^x \cdot \ln v$$



$$-\frac{f'}{f^2} = - \frac{-v^x \ln v}{(1-v^x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dR}{dn} = S \cdot i \cdot \left(\frac{1}{f}\right)' = Si \cdot \left(-\frac{f'}{f^2} \right) = Si \, \frac{v^n \ln v}{\underset{>0}{f^2}} < 0$$

$n \uparrow \Rightarrow R \downarrow$

$$\left(Si\,\frac{1}{1-v^n}\right)' = Si\left(\frac{1}{1-v^n}\right)' = Si\cdot\frac{-(1-v^n)'}{(1-v^n)^2}$$

$$= +Si\,\frac{+v^n\overset{<0}{\ln v}}{(\quad)^2} < 0 \qquad\qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

2)

$$R = \frac{Si}{1-v^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} R = Si$$

$$\Rightarrow \quad R \geq Si$$

es. ~~mutuo~~ rate mensile, $S = 100\cdot000$, $i_a = 5\%$, $i_{12} \approx \frac{5}{12} = 0{,}4\%$ mensile

$$\Rightarrow \quad R \geq 100\cdot\cancel{000}\cdot\frac{0{,}4}{\cancel{100}} = 400$$

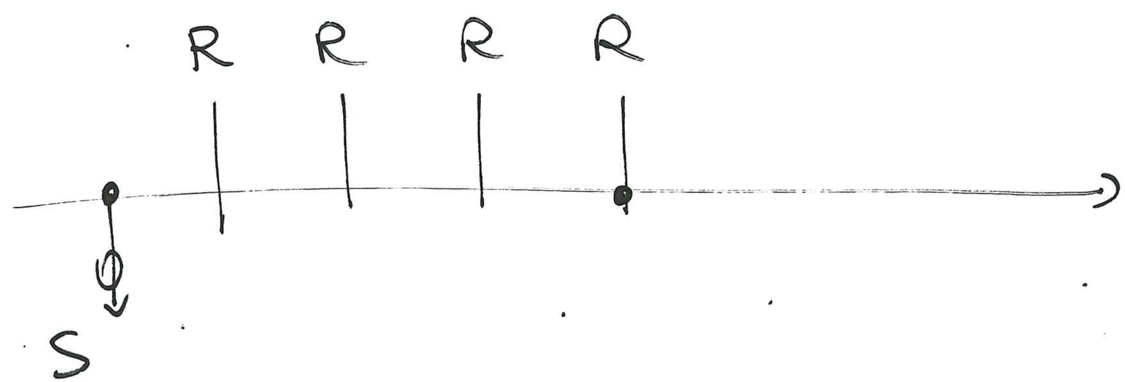
EX $R \leq \frac{1}{3}\cdot$stipendio mensile, R mensile

Quanto S posso chiedere alla banca se mio stip. mens. è 1800 €, $n = 15$ anni, $i_a = 4\%$ a., rate cost, posticip, immediate

$$R_r \leq 600 = \frac{1800}{3}$$

$$S = R\, a_{\overline{n}|i} = R \cdot a_{\overline{180}|i_{12}} \leq 600 \cdot a_{\overline{180}|i_{12}}$$

$$R = \frac{S}{a_{\overline{180}|i_{12}}} \leq 600$$



$$\Rightarrow S \leq 600 \cdot \frac{1 - v_a^{15}}{i_{12}} = 600 \cdot \frac{1 - v_{12}^{180}}{i_{12}} = 81\cdot509{,}62 \text{ €}$$

$$\frac{1 - v_a^{15}}{i_a}$$

Prestito di S in 0, restituz. di capitale + pagam. interessi in n rate costanti periodiche posticip., immed.,:

$i = 4\%$ periodale

se $R \leq 600 \Rightarrow S \leq 81.509,62$

se invece $i' = 3\%$ periodale $\Rightarrow S \leq 87.128,67$:

vale infatti che a parità di R e n :

$i \searrow \;,\; S \nearrow$

$S(i) \searrow$

infatti: tutto quanto io avrò pagato fino alla data n è sempre $n \cdot R$

ma questa contiene: $\nearrow$ restituz. di S

$\searrow$ pagam. di inter.

1

se $i \downarrow$ la parte degli interessi $\downarrow$

$\Rightarrow S \uparrow$

giustificaz. matemat. : la fz $S(i) \downarrow$ $i \uparrow$

$$S = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{1-v^n}{i} = R \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}$$ non imm.

mediato da qui capire se S aumenta o dimin. quando $i \uparrow$

$$S = R \cdot \frac{1-v^n}{i} = R \cdot \sum_{k=1}^{n} v^k = R \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^k$$

$$\frac{d}{di}\left(R \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^k\right) = -R \cdot \sum_{k=1}^{n} +k \cdot \underbrace{(1+i)^{-k-1}}_{>0} < 0$$

$(1+i)^{-k}$

$i > 0$

Se invece sono fissati S, n:

$i \downarrow \Rightarrow R \downarrow$

<u>giustificaz. finanziaria</u> : la quantità $n \cdot R$ contiene tutto il capitale da restituire S + tutti gli interessi da pagare I :

$$i \downarrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow n \cdot R \downarrow \Rightarrow R \downarrow$$

<u>giustificaz. mat.</u> $\quad R(i) \uparrow$

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} \quad : \quad \underset{i \uparrow}{a_{\overline{n}|i} \downarrow} \Rightarrow \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \uparrow$$

infatti: $\quad a_{\overline{n}|i} = f(i) \downarrow \iff f'(i) < 0 \quad$ (visto sopra)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(i)}\right)' = -\frac{f'}{f^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{f(i)} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \uparrow$$

3

Se fisso i, n: se per avere S in prestito devo pagare R, se voglio $2S \Rightarrow R'$?

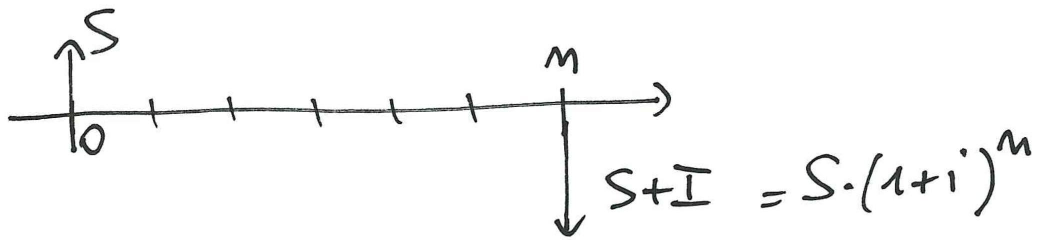
$$S = R\, a_{\overline{n}|i}$$

$$2S = (2R)\, a_{\overline{n}|i} \Rightarrow R' = 2R$$

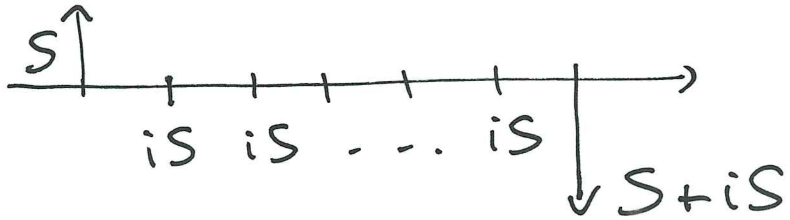
PIANI DI AMMORTAMENTO

Restituz. del capitale prestato S in UNICA SOLUZ.

es. BOT
CTZ



es. BTP alla pari:

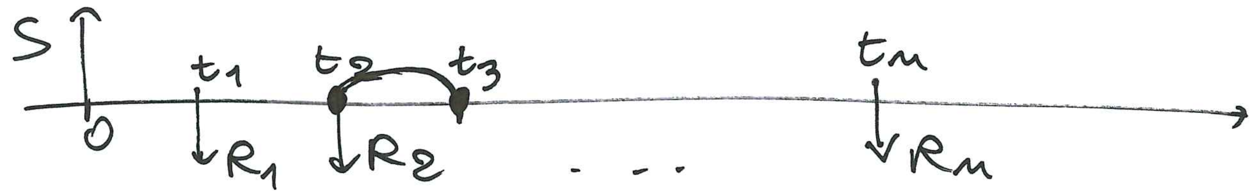


la differenza col BOT è che gli interessi qui non sono pagati in unica soluz., ma saldati via via

Restituz. del capitale rateale:

ogni rata $R_K = C_K + I_K$

C_K = quota capitale = porzione di S restituita all'istante t_K



in t_n il capitale deve essere stato tutto restituito:

$$\sum_{K=1}^{n} C_K = S$$

I_K = quota interesse

5

= interesse cumulato ~~[illegible]~~ sulla parte di capitale ancora non restituito in t_{k-1}

D_k DEBITO RESIDUO = parte di capitale prestato non ancora restituito in t_k +

$$= \sum_{j=k+1}^{n} C_j = S - \sum_{j=1}^{k} C_j$$

es. $D_2 = C_3 + C_4 + \dots C_n$

in t_3: $I_3 = i \cdot D_2$

$$\boxed{I_k = i \cdot D_{k-1}}$$

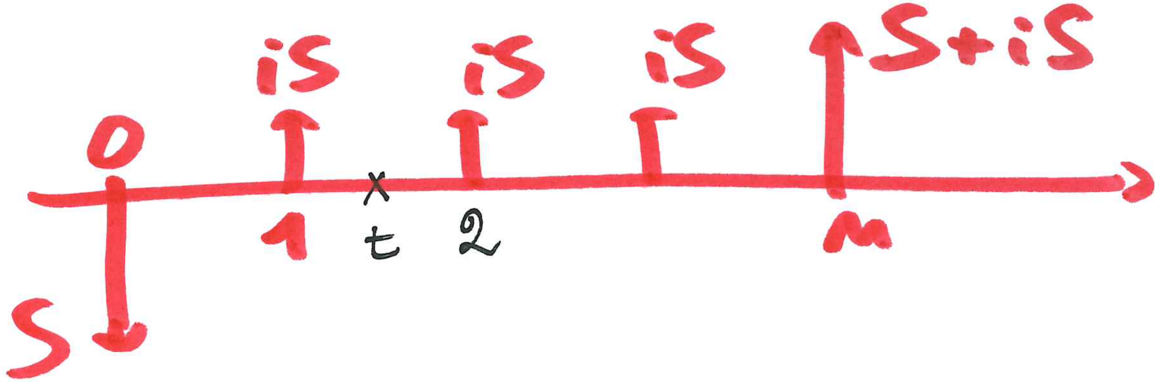
PdA serve per:

- **calcolare la somma degli inter.**

$\sum_{k=1}^{12} I_k$ pagati nell' anno preced. al momento della dichiaraz. dei redditi per avere una detraz. fiscale nel caso io abbia acquistato la prima casa

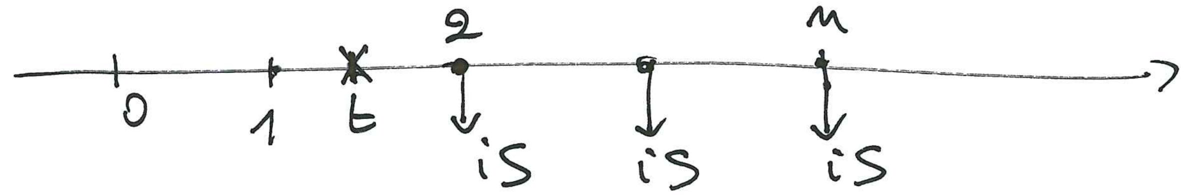
- scrivere il bilancio di una azienda (debiti)
- ci sono situazioni (es. estinzione del mutuo) in cui devo calcolare il valore delle I_k, o delle C_k o delle R_k, ad una data successiva a quella di stipula del mutuo, ad un tasso $i_1 \neq i$, dove i è il tasso del mutuo

8 <u>Es.</u> acquisto BTP alla pari



è possibile fare BOND STRIPPING = separazione delle I_k dalle C_k

quindi posso decidere in un certo $t>0$ di <u>vendere</u> per es. le I_k ancora da riscuotere



vendo $\{iS, iS, iS\}/\{2, \dots, m\} = \vec{r}$

a quale prezzo P?

il valore in t del flusso, al tasso i_1 vigente all'istante t per quel tipo di titoli

USUFRUTTO in t al tasso i_1 = valore in t al tasso i_1 delle quote I_k ancora da riscuotere di un mutuo

~~ex~~

$$P = V_t(\vec{r}) = iS \cdot \sum_{k=2}^{n} (1+i_1)^{-(k-t)}$$

$$= \underbrace{iS \cdot a_{\overline{n-1}|\, i_1}}_{\text{valore di } t_1} \cdot (1+i_1)^{t-1}$$

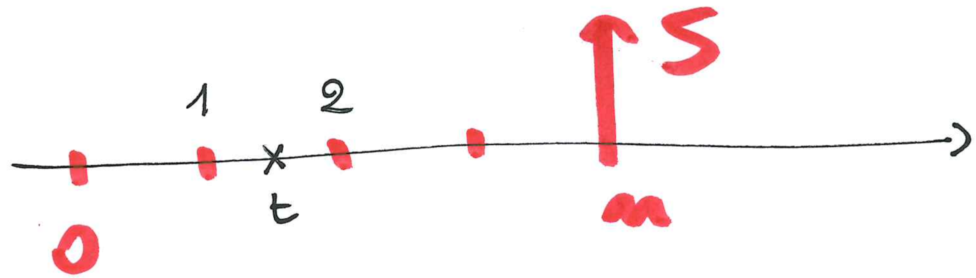
0

NUDA PROPRIETÀ (di un mutuo), in t al tasso i_1 = valore in t al tasso i_1 delle C_k ancora da riscuotere di un mutuo

VALORE RESIDUO = valore in t al tasso i_1 delle R_k

ancora da riscuotere

es.



nel BTP con cui ho fatto bond stripp.

se vendo $\{S\}/\{n\}$ il prezzo al tasso i_1 è

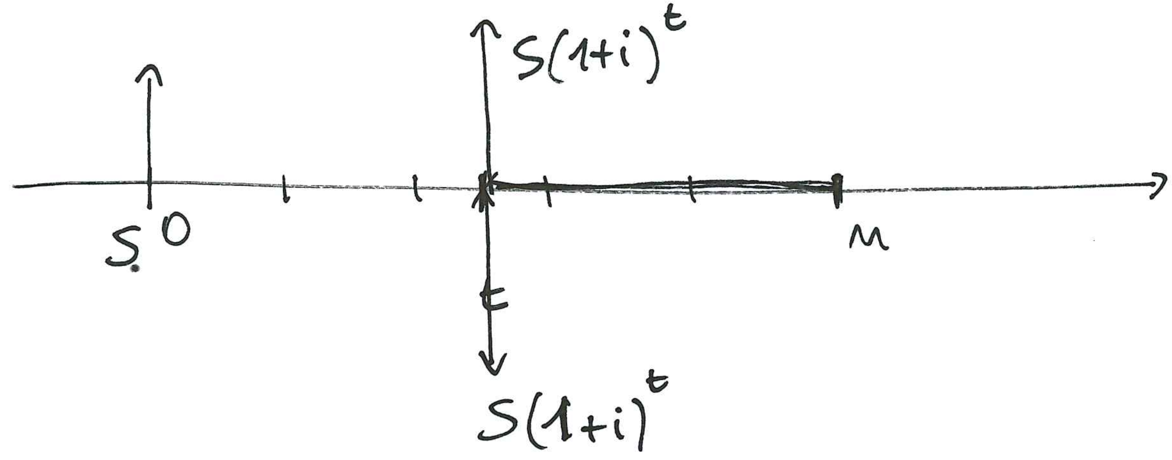
$$\bar{P} = S\,(1+i_1)^{-(n-t)}$$

ex valore residuo in t del BTP, tasso i_1:

$$V_t\,(BTP) = V_t\,(\{I_k\}_k) + V_t\,(\{C_k\}_k) = P + \bar{P}$$

Estinzione anticipata di un mutuo e Rinegoziazione di un mutuo:

Se io stipulo contratto di mutuo in 0 ad un tasso i,
e se in $t > 0$ i tassi di mutui analoghi sono
$i_1 < i$ mi conviene RINEGOZIARE



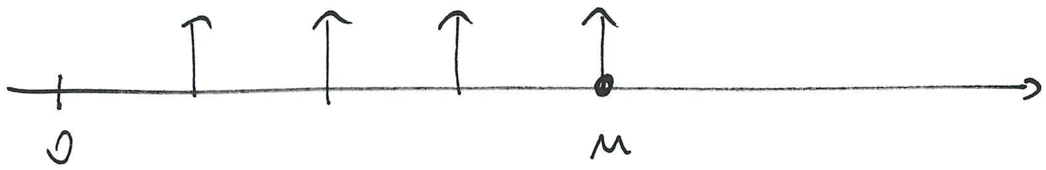
estinguo ~~saldo~~ in t il mutuo : pago $S(1+i)^t$
e stipulo altro mutuo al tasso i_1 per un capitale
$S(1+i)^t$
in n devo restituire

$$S(1+i)^t \cdot (1+i_1)^{n-t} < S \cdot (1+i)^t \cdot (1+i)^{n-t} = S(1+i)^n$$

se non avessi rinegoziato avrei dovuto restit. in n
$S(1+i)^n$

$\Rightarrow$ rinegoziare in t mi avvantaggia <u>se</u> $i_1 < i$

Valore residuo in m : tasso i_1



$$V_m(\{R_k\}_k) = 0$$

AMMORTAM. FRANCESE :

$R_k = C_k + I_k \quad \forall k = 1 .. m$

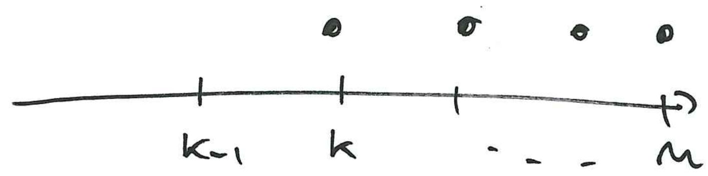
rate $R_k = R_{k+1} \quad \forall k$

vale che le C_k si susseguono in progress. geometrica

$$C_k = C_{k-1}(1+i)$$

infatti:

$$R_k = C_k + I_k = C_k + D_{k-1} i = C_k + \left(\sum_{j=k}^{m} C_j \right) \cdot i$$



$$= \underline{C_k} + \left(\underline{C_k} + C_{k+1} + \ldots + C_m \right) i$$

$$= \underline{C_k (1+i) + D_k \cdot i}$$

$$R_{k+1} = C_{k+1} + I_{k+1} = \underline{C_{k+1} + D_k \cdot i}$$

ma $R_k = R_{k+1} \Leftrightarrow C_k (1+i) + \cancel{D_k i} = C_{k+1} + \cancel{D_k i}$

$$\Rightarrow C_{k+1} = C_k \cdot (1+i) \quad \blacksquare$$

ammortam. FRANCESE :

$c_k = c_{k-1} \cdot (1+i)$

$\Rightarrow$ dentro le R pagate la quota interesse è più alta per le date t_k iniziali :
la maggior parte degli inter. pagata nella prima fase dell'amm.to

EX calcolare in $t_k > 0$ la NUDA PROPRIETÀ di un amm.to francese, stipulato al tasso i, usando tasso i_1

$$\text{NUDA PROPR.} = \sum_{j=k+1}^{m} c_j \cdot (1+i_1)^{-(j-k)} =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{m} c_1 \cdot (1+\underline{\underline{i}})^{j-1} \cdot v_1^{j-k} \quad (*)$$

$j-k = \ell \rightarrow j = \ell + k$
$j-1 = \ell + k - 1$

$R_1, \; R_j = R_1 \cdot q^{j-1}$: $\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left(R_1 \cdot q^{j-1}\right) \cdot v^j} = \frac{R_1}{q} \cdot \sum_{j=1}^{n} (qv)^j =$

$= \frac{R_1}{q} \cdot \frac{1-(qv)^n}{\frac{1}{qv} - 1} = \boxed{R_1 v \cdot \frac{1-(qv)^n}{1-qv}}$

$$\circledast = \sum_{\ell=1}^{n-k} C_1 \cdot (1+i)^{\ell+k-1} \cdot v_1^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n-k} \underbrace{C_1 \cdot (1+i)^k} \cdot \underbrace{(1+i)^{\ell-1}} \cdot v_1^{\ell}$$

$$= \tilde{R}_1 \cdot \tilde{v} \cdot \frac{1-(\tilde{q}\tilde{v})^{\tilde{n}}}{1-\tilde{q}\tilde{v}}$$

$$= C_1 \cdot (1+i)^k \cdot v_1 \cdot \frac{1-(1+i)^{n-k} \cdot v_1^{n-k}}{1-(1+i) \cdot v_1} \quad \blacksquare$$

$\tilde{R}_1 = C_1 \cdot (1+i)^k$

$\tilde{n} = n-k$

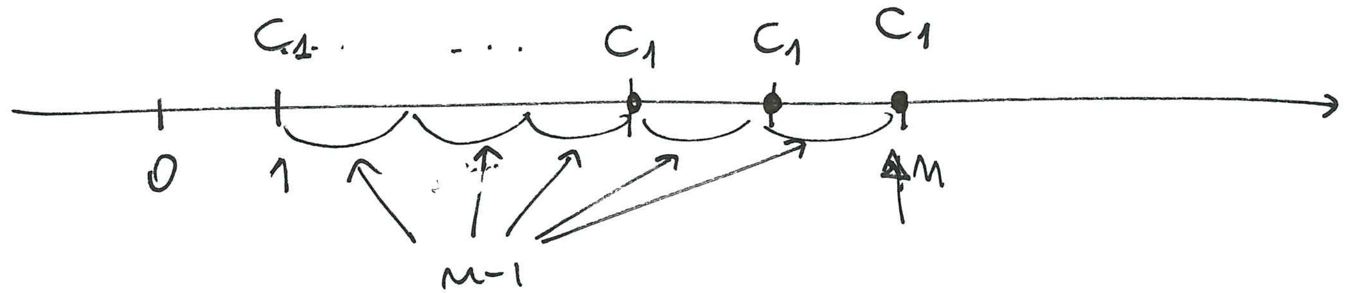
$\tilde{q} = 1+i$

$\tilde{v} = v_1$

nell' amm.to francese vale che $C_1 = \frac{S}{a_{\overline{m}|i}}$

<u>dim.</u> $S = \sum_{j=1}^{m} C_j = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{C_1 \cdot (1+i)^{j-1}}_{C_j} = \sum_{j=1}^{m} C_1 \cdot u^{j-1}$ $\quad j-1 = \ell$

$= \sum_{\ell=0}^{m-1} C_1 \cdot u^{\ell} = C_1 \cdot a_{\overline{m}|i}$



$\Rightarrow C_1 = \frac{S}{a_{\overline{m}|i}}$ $\quad \blacksquare$

AMMORTAM. ITALIANO $C = C_k = C_{k-1} \quad \forall k = 1 \dots m$

$\underline{\underline{R_k}} = C_k + I_k \qquad : \quad \sum_{k=1}^{m} C_k = S = C \cdot m \Rightarrow C = \frac{S}{m}$

$= \frac{S}{m} + i \cdot (m - \underline{\underline{k+1}}) \cdot C \qquad I_k = i \cdot D_{k-1} = i \cdot \Big((m-k+1) \cdot C \Big)$

$$= \underbrace{\frac{S}{m} + i\cancel{m}\cdot\frac{S}{\cancel{m}} + i\cdot\frac{S}{m}}_{fisso} - k\cdot\frac{iS}{m}$$

$$R_k - R_{k-1} = \cancel{fisso} - k\,\frac{iS}{m} - \left(\cancel{fisso} - (k-1)\,\frac{iS}{m}\right) = -\frac{iS}{m}$$

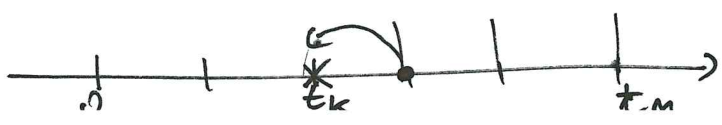
$$R_k = R_{k-1} - \frac{iS}{m}$$ progr. aritm. di ragione $p = \frac{-iS}{m} < 0$ se $i > 0$

$$R_k = C + I_k$$

$$R_{k-1} = C + I_{k-1} \quad : \quad R_k \downarrow \Rightarrow I_k \downarrow$$

EX **Valore residuo dell'amm.to ITA, stipulato al tasso i, ma il val. residuo al tasso i_1, ad un istante t_k di pagam. rata**

$$\text{Val. residuo} = \sum_{j=k+1}^{m} R_j \cdot (1+i_1)^{-(j-k)} \quad ⊛$$



$$R_k - R_{k-1} = \cancel{\text{fisso}} - \cancel{k}\,\frac{iS}{n} - \cancel{\text{fisso}} + (\cancel{k}-1)\,\frac{iS}{n} = -\frac{iS}{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(R_1 + q(j-1)\right) \cdot v^j = R_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + q \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (j-1) v^j}_{S}$$

$$= R_1\, a_{\overline{n}|i} + q \cdot \frac{a_{\overline{n}|i} - n v^n}{i}$$

(*) $j-k = \ell$, $R_j = R_1 + (j-1)q$

$j-1 = \ell + k - 1$

$$\text{Lw} \sum_{\ell=1}^{n-k} \left[R_1 + (\ell + k - 1) q\right] \cdot v_1^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n-k} \Big[\underbrace{R_1 + kq}_{\tilde{R}_1} + (\ell-1) q\Big]\, v_1^{\ell}$$

$\tilde{R}_1 = R_1 + kq$

$\tilde{n} = n-k$

$\tilde{v} = v_1$

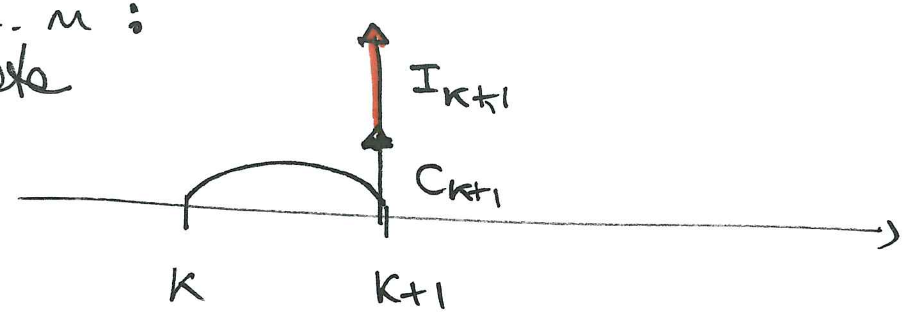
$q = -\dfrac{iS}{n}$

$$= \tilde{R}_1\, a_{\overline{\tilde{n}}|i_1} + q \cdot \frac{a_{\overline{\tilde{n}}|i_1} - \tilde{n}\, v_1^{\tilde{n}}}{i_1}$$

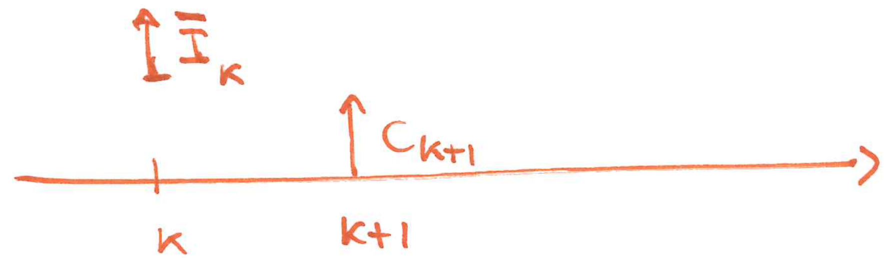
$\blacksquare$

VARIANTE TEDESCA di un piano di amm.to con rate $R_k = C_k + I_k$, $k = 1 \dots n$:

la quota interesse di ogni rata viene pagata ANTICIPATAM. alla data precedente



$$\bar{I}_k = v \cdot I_{k+1}$$
$$= v \cdot i \cdot D_k$$
$$= d \cdot D_k$$



n+1 Rate :

$$\bar{R}_0 = I_1 \cdot v$$
$$\bar{R}_1 = C_1 + \bar{I}_1 = C_1 + v \cdot I_2$$
$$\vdots$$
$$\bar{R}_k = C_k + \bar{I}_k = C_k + v \cdot I_{k+1} \qquad k = 1 \dots n-1$$
$$\bar{R}_n = C_n$$

per le C_K : $\sum_{K=1}^{m} C_K = S$

$$D_m = 0$$

$$D_K = \sum_{j=K+1}^{m} C_j$$ come sempre

EX mutuo di $S = 100\,K$ €, che ammortizzo con 4 rate annuali, postic., tasso $i = 0{,}1$ annuo : pdA

FRANCESE

	R_K	C_K	I_K	D_K
0				100
1	31.55	21.55	10	78,45
2	31.55	23,74	7,85	54,75
3	31.55	26,07	5,48	28,68
4	31.55	28,68	2,87	0

$$R = \frac{S}{a_{\overline{m|}i}} = \frac{100}{a_{\overline{4|}0.1}} = 31{,}55$$

$$I_1 = i \cdot 100$$

$$C_k \uparrow \;,\; I_k \downarrow \;:\; I_1 + I_2 \simeq 18 \;,\; I_3 + I_4 \sim 7$$

EX mutuo di $S = 100$ K€, 4 rate annuali, tasso $i = 10\%$ a.,
durata 4 a.

ammorto ITALIANO: pdA

	R_K	C_K		I_K		D_K
0	0	0		0		100
1	35	25	21,55	10	10	75
2	32,5	25	23,70	7,5	7,85	50
3	30	25	26,07	5	5,48	25
4	27,5	25	28,68	2,5	2,87	0

pdA FRA

OSS1 a parità di S, m, i: $\sum_{K=1}^{m} I_K^{FRA} > \sum_{K=1}^{m} I_K^{ITA}$

perché le C_K^{ITA} tutte uguali, mentre le $C_K^{FRA} \nearrow_K$ quindi

$C_1^{FRA} < C_1^{ITA} \Rightarrow D_1^{FRA} > D_1^{ITA} \Rightarrow I_2^{FRA} > I_2^{ITA}$

e così anche per $j = 2 \dots \bar{J}$ fino a che $C_{\bar{J}+1}^{FRA} > C_{\bar{J}+1}^{ITA}$

OSS 2: le I_k^{ITA} decrescono di 2,5 ad ogni k, perché le $R_k^{ITA} \downarrow$ in progr. aritm. con $p = -\frac{iS}{n} = -\frac{10}{100} \cdot 25 = -2{,}5$ e le C_k sono ~~fisse~~ costanti.

VARIANTE TEDESCA sull'Amm.to FRA

	$\bar{R}_k$	C_k	$\bar{I}_k$	D_k
0	9,09	0	9,09	100
1	28,68	21,55	7,13	78,45
2	28,68	23,70	4,98	54,75
3	28,68	26,07	2,61	28,68
4	28,68	28,68	0	0

$$\bar{I}_0 = v \cdot I_1 = \frac{10}{1.1} = 9{,}09$$

$$\bar{I}_1 = D_1 \cdot i \cdot v = D_1 \cdot d = 7{,}13$$

$$C_1 = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} \quad , \quad C_j = C_{j-1} \cdot (1+i)$$

OSS. anche nell'Amm.to FRANCESE con anticip. degli inter.. le rate $R_1 \dots R_n$ sono costanti:

infatti: $\bar{R}_k = C_k + \bar{I}_k$

$$\bar{I}_k = d D_k = d(C_{k+1} + \underbrace{C_{k+2} + \dots C_n}_{D_{k+1}}) = d\, C_{k+1} + d\, D_{k+1}$$

$$= \underline{d\, C_{k+1}} + \bar{I}_{k+1}$$

$$\bar{R}_k = d\, C_{k+1} + \bar{I}_{k+1} + C_k \qquad C_k = \frac{C_{k+1}}{1+i} = C_{k+1} \cdot v$$

$$= \underline{d\, C_{k+1}} + \bar{I}_{k+1} + C_{k+1} \cdot v$$

$$= C_{k+1} \cdot (d + v) + \bar{I}_{k+1} \qquad d+v = iv + v = (i+1)v = 1$$

$$= C_{k+1} + \bar{I}_{k+1} = \bar{R}_{k+1} \qquad \blacksquare$$

VARIANTE TEDESCA dell' Amm.to ITA

k	$\bar{R}_k$	C_k	$\bar{I}_k$	D_k
0	9,09		9,09	100
1	31,81	25	6,81	75
2	29,55	25	4,55	50
3	27,27	25	2,27	25
4	25	25	0	0

$I_1 = \frac{10}{100} \cdot 100 = 10$

$\bar{I}_0 = v \cdot 10 = 9,09$

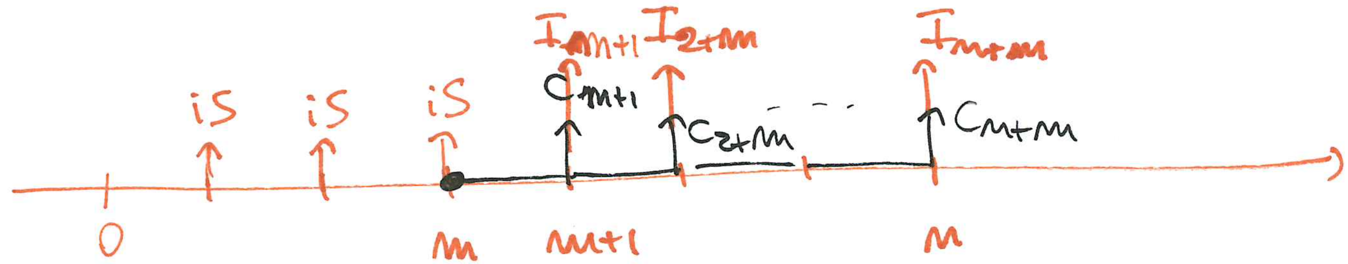
$\bar{I}_1 = 75 \cdot d = 6,81$

$\bar{I}_2 = 50 \cdot d$

$\bar{I}_3 = 25 \cdot d$

PRE AMMORTAMENTO: differimento di m periodi della restituz. del solo capitale prestato:

caso posticipato



comincio a pagare le C_k a partire dalla data m+1 per il periodo da 0 a m pago solo quote interesse :

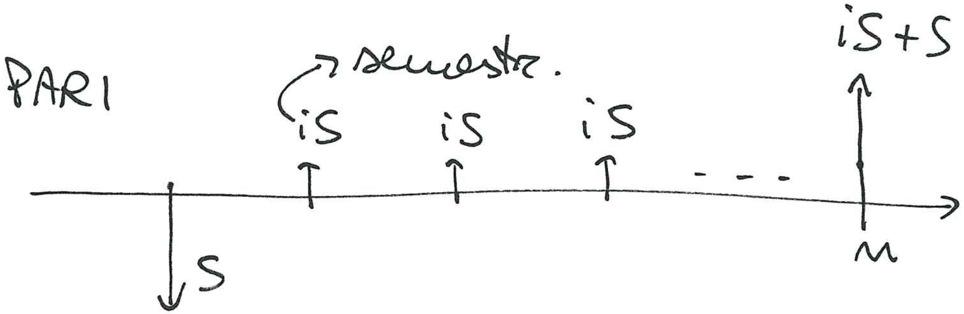
$k = 1 .. m$ ho $R_k = I_k = i \cdot D_{k-1} = iS$

OSS. la sequenza $R_{m+1} \; .... \; R_{m+n}$

è esattamente quella che avrei avuto da 1 a n

se non avessi differito

ES. Se compro un BTP alla PARI



la restituz. di S viene differita →

è fatta con PREAMMORTAM. di n-1 periodi = semestri

EX $S = 100\text{K}$ €, $i = 10\%$ a. , 4 rate annuali differim. con C_k

di 3 anni , FRA

	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	100
1	10	0	10	100
2	10	0	10	100
3	10	0	10	100
4	31,55	21,55	10	78,45
5	31,55	23,70	7,85	54,75
6	31,55	26,07	5,48	28,68
7	31,55	28,68	2,87	0

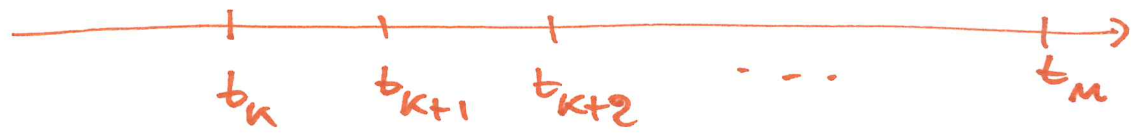
$R = S / a_{\overline{4}|0,1} = 31,55$

<u>Proprietà</u> ad ogni istante l'ammortamento è EQUO:

$\forall t_k$ si ha D_k = valore in t_k delle RATE ancora da pagare:

$$D_k = \sum_{j=k+1}^{m} R_j \cdot v^{j-k} \quad , \quad v = \frac{1}{1+i} \,,$$

i tassi del mutuo



quindi se in t_k volessi estinguere il mutuo, restituendo D_k avrei saldato tutto il dovuto, perché ~~gli~~ interessi via via maturati sono già tutti pagati, dopo aver pagato anche R_k

<u>dim</u> che $\boxed{D_k = \sum_{j=k+1}^{m} R_j v^{j-k}}$ $\forall k = 1 \dots m$

procedo per <u>induzione</u>

<u>OSS.</u> $k = m$: $D_k = 0$, Rate ancora da pagare non ce ne sono

$$\Rightarrow \sum_{j=k+1}^{m} R_j v^{j-k} = 0$$

devo dim. la relaz. per : $k = m-1 \dots\dots 1$

① mostro che è vera per $k = m-1$

② mostro che <u>se</u> è vera per un qls $\bar{k}$ $\Rightarrow$

è vera anche per $\bar{k}-1$

ma allora: è vera per $n-1 = \bar{k}$

ma allora è vera anche per $n-2 = \bar{k}-1$

ma vera per $n-2 = \bar{k}$

allora vera per $n-3 = \bar{k}-1$

⋮

ma vera per $2 = \bar{k}$

allora vera per $1 = \bar{k}-1$

verifico la ①: $\underline{k = n-1}$ è vero che

$$D_{n-1} = \sum_{j=n}^{n} R_j v^{j-k} \ ?$$

$$\sum_{j=n}^{n} R_j \cdot v^{j-k} = R_n \cdot v^{n-(n-1)} = R_n \cdot v$$

è vero che $D_{n-1} = R_n \cdot v$?

sse $C_n = (C_n + I_n) \cdot v$

$I_m = i D_{m-1} = i C_m$

la relaz. vale sse

$C_m = (C_m + i C_m) \cdot v$

sse $C_m = C_m \cdot (1+i) \cdot v$ ok