

ORGANIZZAZIONE DEL CORSO

14/9/17

PROGRAMMA PREVISTO per 2017-18

- ★ Concetti fondamentali in finanza, operazioni di arbitraggio
 - ★ Complementi sui regimi di capitalizzazione: richiami sui regimi di capitalizzazione semplice e composta; sconto commerciale, capitalizzazione mista; confronto tra tutti i regimi; regime esponenziale come limite del regime misto. Valutazione di un flusso di importi, scindibilità della legge esponenziale
 - ★ Complementi su valutazione di rendite. Complementi su ammortamenti di prestiti: ammortamento di un prestito con pagamento di capitale ed interessi in unica soluzione, ammortamento con rimborso unico del capitale ma pagamento periodico degli interessi; richiami sugli ammortamenti francese e italiano e sulle varianti tedesca e con preammortamento, costituzione di capitale e di pensione integrativa, mutui a tasso variabile, estinzione anticipata di mutui
 - ★ Indici di rendimento di una operazione finanziaria: tasso interno di rendimento di una operazione finanziaria: esistenza, unicità, algoritmo di Newton; richiami su TAN e TAEG; rendimento semplice, composto, logaritmico; rendimento ex post
 - ★ Titoli obbligazionari, titoli obbligazionari di Stato. BOT: funzionamento, tassazione, rendimento effettivo netto. BTP: funzionamento, corso secco e corso tel quel, TIR, rendimento ex post. Funzionamento di CTZ, CCT e CCT Eu. BTP Euro-i: potere di acquisto del denaro, inflazione, tasso reale di rendimento di un investimento, funzionamento del BTP Euro-i, quotazione, rateo interessi
- SE ENTRA
- ★ Teoria del portafoglio finanziario: richiami di probabilità, insiemi possibili di portafogli con 2 titoli, selezione di un portafoglio di 2 titoli

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

G.Scandolo, MATEMATICA FINANZIARIA, Ed. Amon 2013

G.Scandolo, MATEMATICA FINANZIARIA, esercizi svolti, Ed. Amon 2013

Documenti sui titoli di Stato, reperibili su

http://www.dt.tesoro.it/it/debito_pubblico/titoli_di_stato/

MATERIALE/INFO sul moodle del corso

www.unifi.it – > Cecilia Mancini – > insegnamenti; e-learning

Ho inserito "Parti del libro di testo da studiare" indicate nel 2015, per darvi una idea orientativa. Le indicazioni verranno aggiornate in base al

programma che riusciremo a fare
Stesso discorso per gli "suggeriti dal libreo di Scandolo, 2015".

RICEVIMENTO

INVIARE UNA EMAIL a cecilia.mancini@unifi.it per fissare un appuntamento:
orientativamente nel giorno Giovedì ore 16.30 in D6/2.36

ESAME

Orale, eventualmente integrato da scritto (secondo la numerosità degli iscritti all'appello)

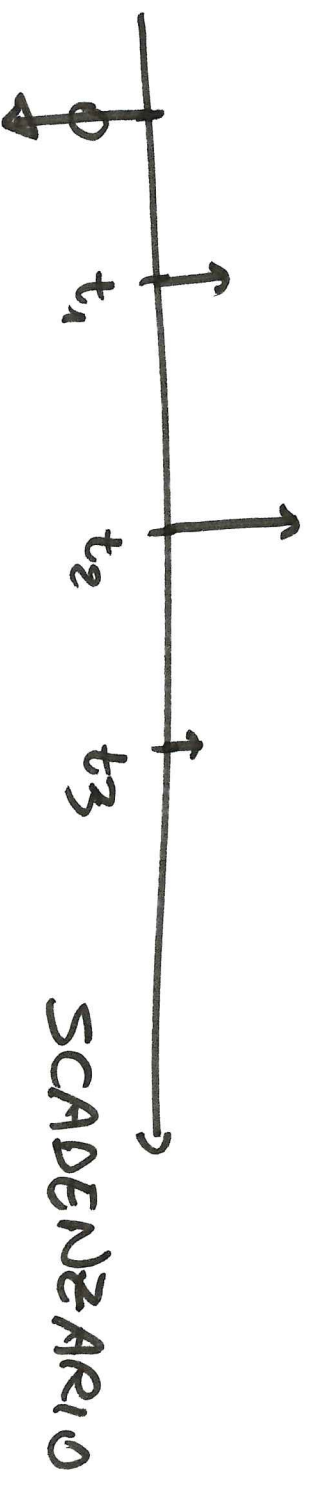
www.dt.torco.it / it / delitto-pubblico / titoli-di-stato

CONCETTI BASE

OPERAZIONE FINANZIARIA = FLUSSO DI

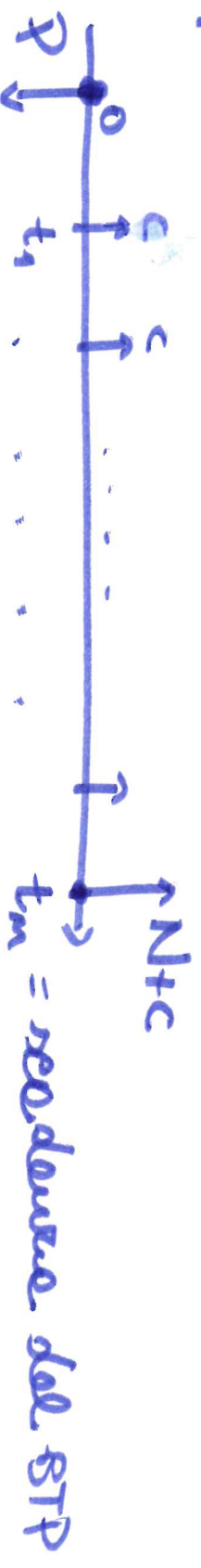
IMPORTI, dove ciascun importo è caratterizzato

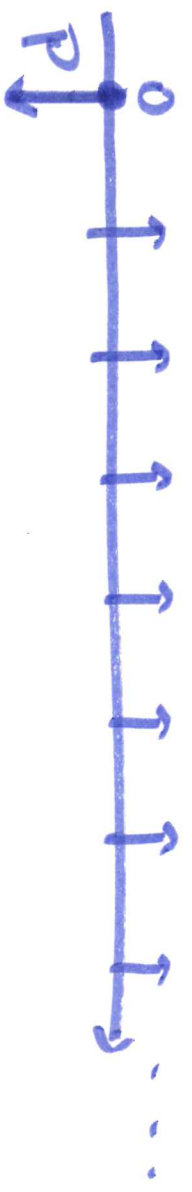
dall'ammontare e dalla data della sua esigibilità



$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} / \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

ES. sequenza di un RTP

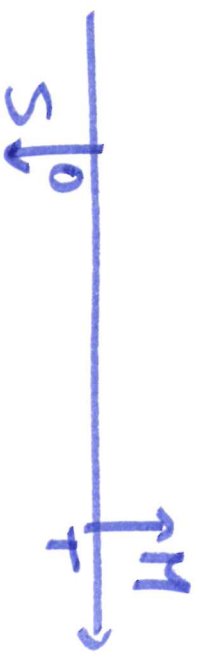


ES.

esistono
operatori finanziari con infiniti importi,

es. acquisto di una RENDITA PERPETUA

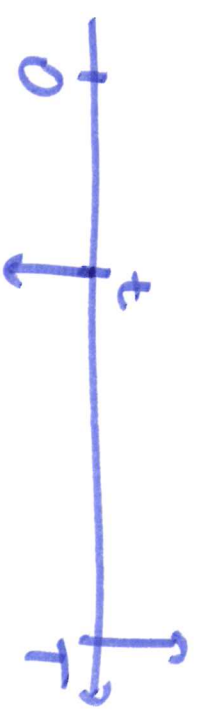
OPERAZ. SEMPLICE : lo cedentario ha 2 importi



ES. acquisto di un BOT : $M=100$

$T =$ SCADENZA del titolo

$T-t =$ durata



OPERAZ. COMPOSTA : cedente ha più di 2 importi,

infatti ~~per~~ operare una tale operazione. può essere ottenuta
 come somma di p. semplici

OPERAZ. SOMMA di

$$\{x_0, \dots, x_n\} / \{t_0, \dots, t_n\} \quad , \quad \{x'_0, \dots, x'_n\} / \{t'_0, \dots, t'_n\}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline t_0 & t_1 & t_2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad m = 2$$

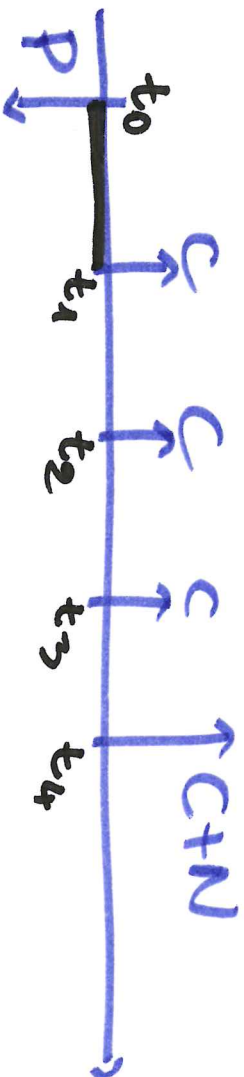
$$\begin{array}{c|c|c|c} x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \hline t'_0 & t'_1 & t'_2 & t'_3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad K = 3$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x'_0 & x'_0 & x'_1 & x'_1 & x'_2 \\ \hline t'_0 & t_0 & t_1 & t_1 & t_2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} x'_2 + x'_3 \\ t'_3 = t_2 \end{array}$$

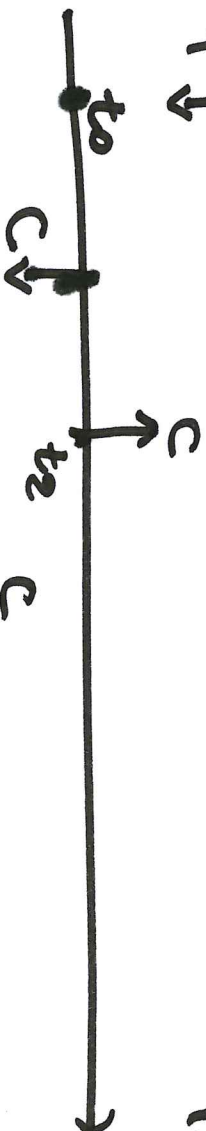
Il oper. ^{$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$} normale ^{$\Delta_5$} ha come date

$$\{ \Delta_0, \dots, \Delta_m \} = \{ t_0, \dots, t_n \} \cup \{ t'_0, \dots, t'_k \}$$

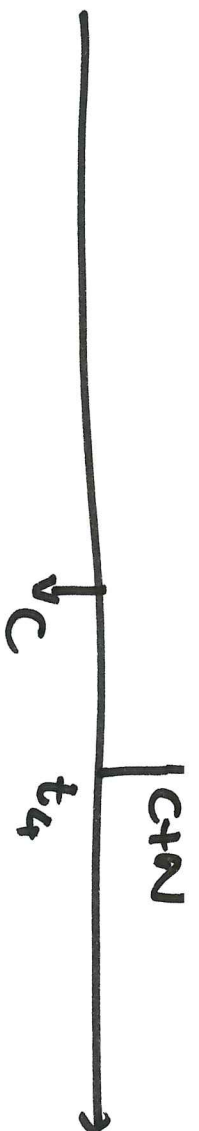
ES. acquisito di un BTP può essere visto come ~~l'acquisto~~ acquisto di tanti BOT



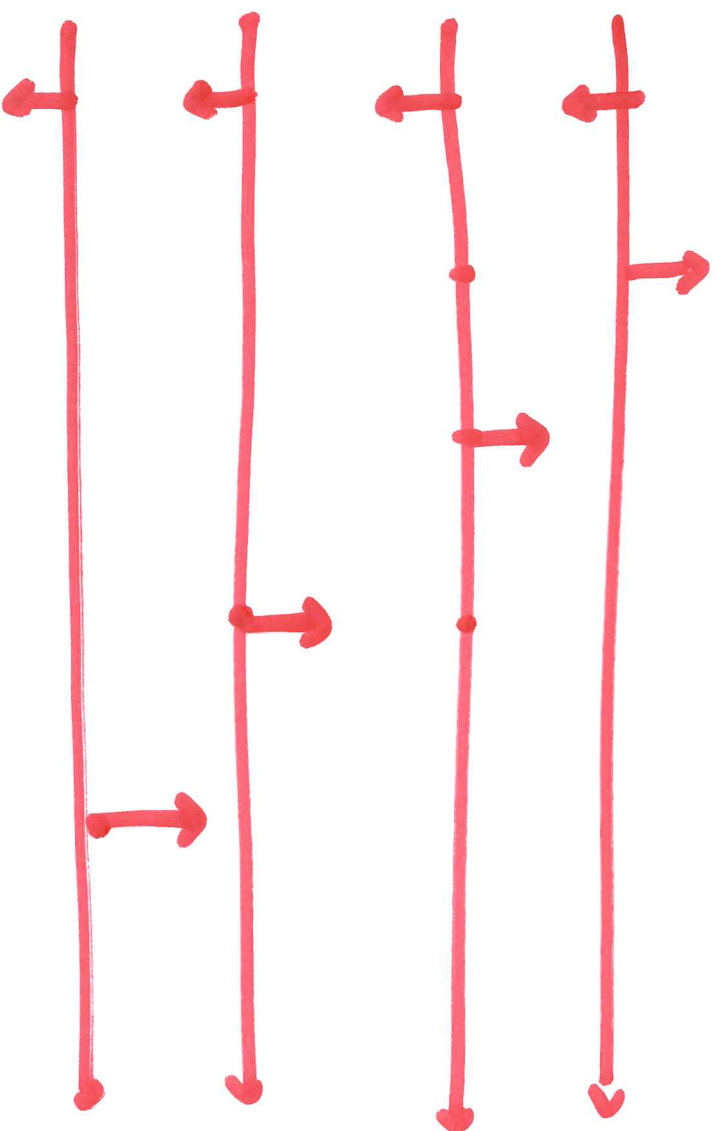
OPERAZ. ^{**APPONTI:**}
stipulata oggi; pagam.
immediato



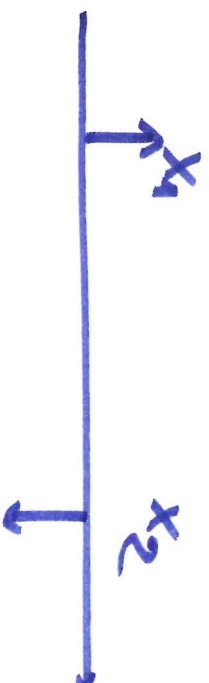
OPERAZ. ^{**A TERLINE:**}
stipulata oggi; ma
pagam. differita



oppara



OPER. di FINANZIAR.



$$x_1 > 0, x_2 < 0$$

OPER. di INVESTIMENTO



$$x_1 < 0, x_2 > 0$$

OPERAZ. di INVESTIM.



$$M - S = \text{INTERESSE} = I$$

in genere $I > 0$

ma ci sono casi in cui $I = 0$

- costi per zero-interesti zero

- se presto ad un'azienda che fallisce
così con $I < 0$

- es. dal 2015 ^{ci sono} Tassi EURIBOR di prestiti interbancari che sono negativi
per effetto del Quantitative easing

$$i = \frac{M-S}{S} \quad \text{Tasso di inter. dell'opera} \quad \frac{f_0}{f_0} \rightarrow \frac{f_1}{f_1}$$

EFFETTIVO

o TASSO DI RENDIMENTO

$$i \geq -1 : M \geq 0 \Rightarrow \frac{M-S}{S} \geq -\frac{S}{S} = -1$$

$$i = -1 \Leftrightarrow M = 0$$

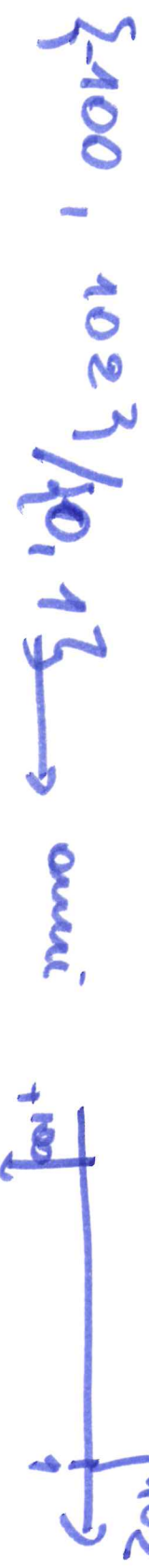
Limite di minima di i = durata
dell'oper. fin.

es. se il minimo per 3 mesi, $t_0 = 0$

0 f_1

$\Rightarrow i = \frac{M-S}{S}$ è TRIMESTRALE
 dove PERIODALE

es

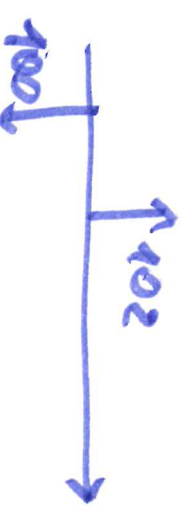


$$S=100$$

$$i = \frac{102-100}{100} = \frac{2}{100} = 2\% \text{ annuale}$$

es

$\{ -100, 102 \} / \{ 0, \frac{1}{4} \}$ anni

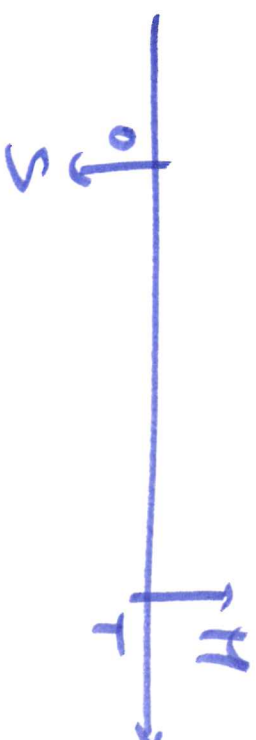


$$i = \frac{102-100}{100} = 2\% \text{ trimestre}$$

stipulare un contratto per operare.
 semp. significa abilitare una

EQUIVALENZA INTERTEMPORALE tra importazioni

$\{-S, M\}_{t=0, T}$
spese e ricavi



$$(S, 0) \equiv (M, T)$$

S = valore ATTUALE e SCONTATO di M in T
 $in 0$

M = valore COSTANTE $in T$ di $(S, 0)$

$$i = \frac{M-S}{S} \rightarrow Si = M-S, \quad S(1+i) = M, \quad \boxed{S = \frac{1}{1+i} M}$$

$$\frac{1}{1+i} = v, \quad S = v \cdot M, \quad v = \text{FATTORE di sconto}$$

v è PERIODALE

$$M = S \cdot (1+i)$$

$u = 1+i$ FATTORE COSTANTE
 $\bar{i}$ PERIODALE

$$M - S = S(1+i) - S = iS \text{ interesse}$$

in denaro anche SCONTO $D = M - S$

$$M - D = S$$



TASSO di SCONTO $\frac{D}{M} = \frac{M-S}{M} = d$ **$\bar{i}$ PERIODALE**

per $i = \frac{M-S}{S}$

$$d = i \cdot v = 1 - v$$

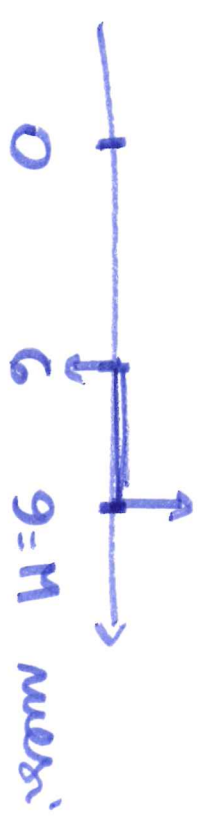
$$d = i \cdot v : v \cdot M = S, v = \frac{S}{M}$$

$$d = \frac{H-S}{H} = \frac{H-S}{S} \cdot \frac{S}{H} = i \cdot v$$

$$d = 1-v : d = \frac{H-S}{H} = 1 - \frac{S}{H} = 1-v$$

TASSO e PRONTI = tasso effettivo di una op. sempre e PRONTI

TASSO e TERMINE = tasso effett. di una op. sempre e TERM



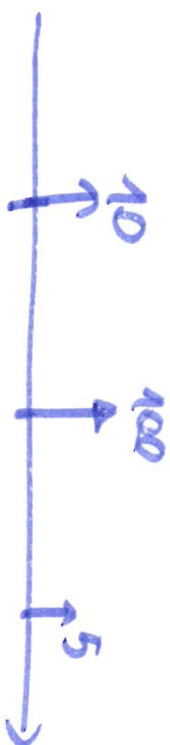
durata dell'op. $= \frac{H-S}{S}$

Tasso su base $\frac{1}{m}$ di anno : i_m

es. Tasso trimestrale i_t : 4 trim. in 1 anno

eventuale i_2
quadrum. i_3

OPERAZ. DI ARBITRAGGIO : quando si può
ricambiare o accelerazione con $x_i > 0$



ES. è possibile eseguire le 2 oper.

OP1 $\{ 1000, -600, -600 \} / \{ 0, 1, 2 \}$ anni

OP2 $\{ -1000, 700, 700 \} / \{ 0, 1, 2 \}$

e realizzato entrambi, realizzato la somma delle op

OP1 + OP2 $\{ 0, 100, 100 \} / \{ 0, 1, 2 \}$

13

$$\text{ARBITRAGGIO} \quad \{100, 100\} / \{1, 2\}$$

nel mercato si trovano spesso opport. di arbitrage,
ma velocemente queste spariranno:

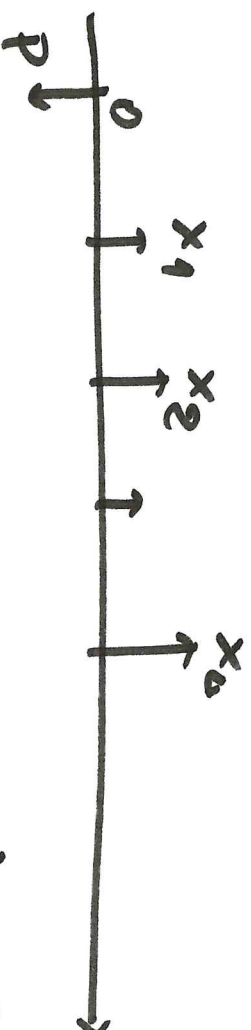
oppure interviene l'opport., tutti entrano a
acquistare il titolo 2 e vend. il titolo 1

$\Rightarrow$ prezzo del tit. 2 $\uparrow$, prezzo del tit. 2 $\downarrow$

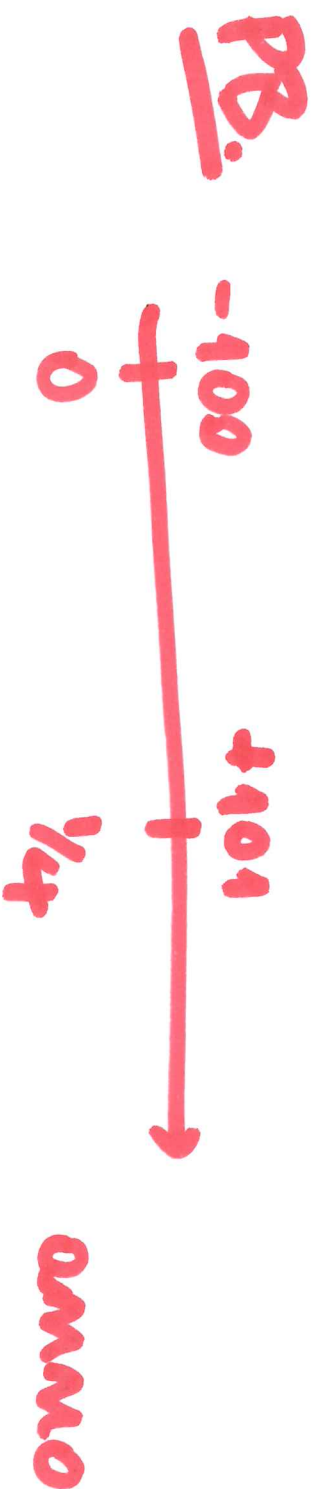
$\Rightarrow x_0 + x_0' < 0$ e non ho più opport.
di arbitrage.

18/9/17

FLUSSO di IMPORTI ALTEATOREI



non tutti gli importi sono nulli da 0



$$i_{eff.} = \frac{101 - 100}{100} = 1\% \text{ trimestr. } i_4$$

e quale tasso ANNUALE corrisponde?
DIPENDE dal regime di capitalizzazione

Lib. netto

Rinposte nel Regime di capitalizzazione semplice.
al tasso $i_{(n)}$

$$\frac{-S}{t} \quad \frac{M}{T}$$

caratterizzato dal seguente legame
tra $S, M, T-t, i_{(n)}$

$$M = S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot (T-t))$$

negliere unità di mis. dei tempi, poi

TASSO e T-t stessa u.m.

Es. u.m. anni

$\frac{0}{0} \quad \frac{1/12}{1/12} \rightarrow$ anni 2

$t=0, T = 1 \text{ trim.}$

$\rightarrow i_{(n)} \text{ annuella} \rightarrow H = S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot \frac{1}{4})$

ex. 2 u. m. trimestri:

$\rightarrow i_{(n)} \text{ trimestri.}$ 

$\rightarrow H = S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot 1)$

• inst. reverse $I = S \cdot i_{(n)} \cdot (T-t)$
dirett. propor. a S e a $T-t$

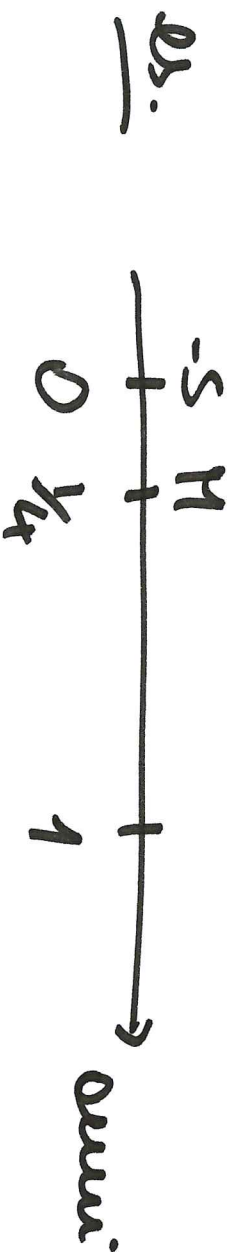
• $i_{(n)} =$

$M-S = S \cdot i_{(n)} \cdot (T-t) \Rightarrow$

$$i(n) = \frac{H-S}{S \cdot (T-t)}$$

per tasso effettivo $i = \frac{H-S}{S \cdot 1}$

- * i espresso in a.m. T-t
- * $i(n)$ i espr. nelle a.m. stante
per lo scadenza.



$$i_{eff} = \frac{H-S}{S \cdot 1} \text{ trimestr.}$$

$$i(n) = \frac{H-S}{S \cdot (T-t)} \text{ annuale}$$

x { -100, 101 } / { 0, $\frac{1}{4}$ } anni

$\Rightarrow i_{eff} = 1\%$ trim

$$e \quad i_{(n)} = \frac{11-S}{S \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{100 \cdot \frac{1}{4}} = 1\% \cdot 4 = 4\%$$

$$i_{(n)} = \frac{11-S}{S} \cdot \frac{1}{T \cdot t} = i_{eff} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot i_{eff}$$

TASSI EQUIVALENTI $i_{(n)}$ e i_4

tassi di inter. che sullo stesso S e ~~per lo~~ stesso
durata danno lo stesso interesse I

$i_{(n)}$ e i_4 sono equival.

$$I = 11-S$$

$$i_{eff} = \frac{N-S}{S} \Rightarrow \boxed{N-S} = i_{eff} \cdot S = i_4 \cdot S$$

$$i_{(n)} = \frac{N-S}{S \cdot (T-t)} \Rightarrow \boxed{N-S} = i_{(n)} \cdot S \cdot (T-t) = i_{(n)} \cdot S \cdot \frac{1}{4}$$

$$i_4 \cdot S = i_{(n)} \cdot S \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{i_{(n)} = 4 \cdot i_4}$$

$$\underline{\text{all' or.}} \quad \{-100, 101\} / 10, \frac{1}{4}, 3 \quad \text{anni}$$

$$i_{eff} = 12\% \text{ trim} = i_4$$

foro equivel. in regime sempl., annale i

$$4 \cdot i_4 = 4\% = i_{(n)}$$

ATT in regime diversi: foro equiv.
 Loro diversi

PB2 se se un trimestre il Mont.
maturato è M , quanto maturato
se 1 anno?

in capitaliz. semplice:

es. $T-t$ in anni:

$$\text{se } T-t = 1 \text{ anno} \Rightarrow M = S \cdot \left(1 + i_{\text{co}} \cdot \frac{1}{4}\right) = S \cdot (1 + i_{\text{eff}})$$

$$\text{se } T-t = 1 \text{ anno} \Rightarrow M' = S \cdot (1 + i_{\text{co}} \cdot 1)$$

$$i_{\text{eff}} = \frac{M-S}{S} \Rightarrow S \cdot i_{\text{eff}} = M-S, \quad M = S \cdot (1 + i_{\text{eff}})$$

equivalenza di impatti

$$(t, S) \equiv (T, M) \equiv (T', M')$$

Ex. $\{-100, 101\} / \{0, \frac{1}{4}\}$ over $\mathbb{Z}_{10}$

$$(101, \frac{1}{4}) \equiv (100, 0) \quad , \quad i_{\text{eff}} = 1\% \text{ trim.}$$

drop 1 over

$$M' = S \cdot (1 + i_{\text{eff}} \cdot 1) = S \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot i_{\text{eff}}}{4\%} \cdot 1\right) = 104$$

$$\Rightarrow (100, 0) \equiv (101, \frac{1}{4}) \equiv (104, 1)$$

EX $i_q = 0,5\%$ trimestro.:

qual è il M di $(100, 0)$ in $T = 1$ anno?
regime nuovo.

$$M = 100 \cdot \left(1 + i_q \cdot 4\right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 102$$

qual è il M' in $T' = 1,5$ anni?

$$M' = 100 \cdot (1 + i_q \cdot 6) = 103$$

$$0,5\% = \frac{0,5}{100}$$

EX $i_a = 2\%$ annuale

qual è il M di $(100, 1)$ in $T = 1,5$ anni?

$$M = 100 \cdot \left(1 + i_a \cdot \frac{1}{2}\right) = 101$$



i_k = tasso d'inter. nell' n.m. $\frac{1}{k}$ di anno

es. i_2 tasso semestrale.

i_{12} " mensile

equivalenza tra i_k e i_a

$$\boxed{i_a = k \cdot i_k}$$

in regime sempl.

infatti se $T = 1$ anno, $t = 0$:

se n.m. $\tilde{x}$ 1 anno I

$$M = S (1 + i_a T) = S + \boxed{S \cdot i_a} I$$

se n.m. $\tilde{x}$ $\frac{1}{k}$ di anno I

$$M = S \cdot (1 + i_k \cdot k) = S + \boxed{S \cdot i_k \cdot k} I$$

stesso interesse $\Rightarrow i_e = k \cdot i_k$

come emerge l'u.m. tempo nei taxa d'inter.?
nella loro def.

$$i_{(n)} = \frac{H-S}{S \cdot (T-t)}$$

$$[i_{(n)}] = \left[\frac{\cancel{H-S}}{\cancel{S} (T-t)} \right] = \left[\frac{1}{T-t} \right] = \frac{1}{\text{tempo}}$$

$$[i_{qt}] = \left[\frac{H-S}{S \cdot \textcircled{1}} \right] = \frac{1}{\text{tempo}}$$

$\uparrow$
 $T-t = 1 \Leftrightarrow \text{u.m. tempo} = T-t$

$$[i_e] = [k \cdot i_k] = \frac{1}{\text{tempo}}$$

Ragione sempre.

Potenza montante u

$$u = M = 1 \cdot (1 + i_{(n)}) \cdot (T - t)$$

Potenza di sconto v : $M \cdot v = 1 \rightarrow u \cdot v = 1$

$$v = \frac{1}{u} = \frac{1}{1 + i_{(n)} \cdot (T - t)}$$

$$x \text{ ho } S \neq 1 \Rightarrow M = S \cdot u$$

$$x \text{ ho } M \text{ generico} \Rightarrow S = M \cdot v$$

EX date $M, S, T-t, i_{(n)}$: qual è l'aspettativa del tasso di sconto d ?

$$d = \frac{M - S}{M \cdot 1} = \frac{S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot (T - t)) - S}{S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot (T - t))}$$

$$d = \frac{i_m \cdot (T-t)}{1 + i_m \cdot (T-t)} \quad \text{Periodale}$$

se overxi scritto $\frac{R-S}{R \cdot (T-t)}$ invece ottenuto
un loro espresso nella stessa u.m. dello
scontatore

$$\underline{\text{EX}} \quad \{ 100, -102 \} / \{ 12.18 \} \quad \text{mesi}$$

$i_{\text{eff}} = 29\%$ ~~inter.~~ annua.

i_2 equiva? regime sempl.

$$i_E = \frac{M-S}{S \cdot (T-E)} = 2\% \cdot \frac{1}{6} = 0,33\% \text{ mens.}$$

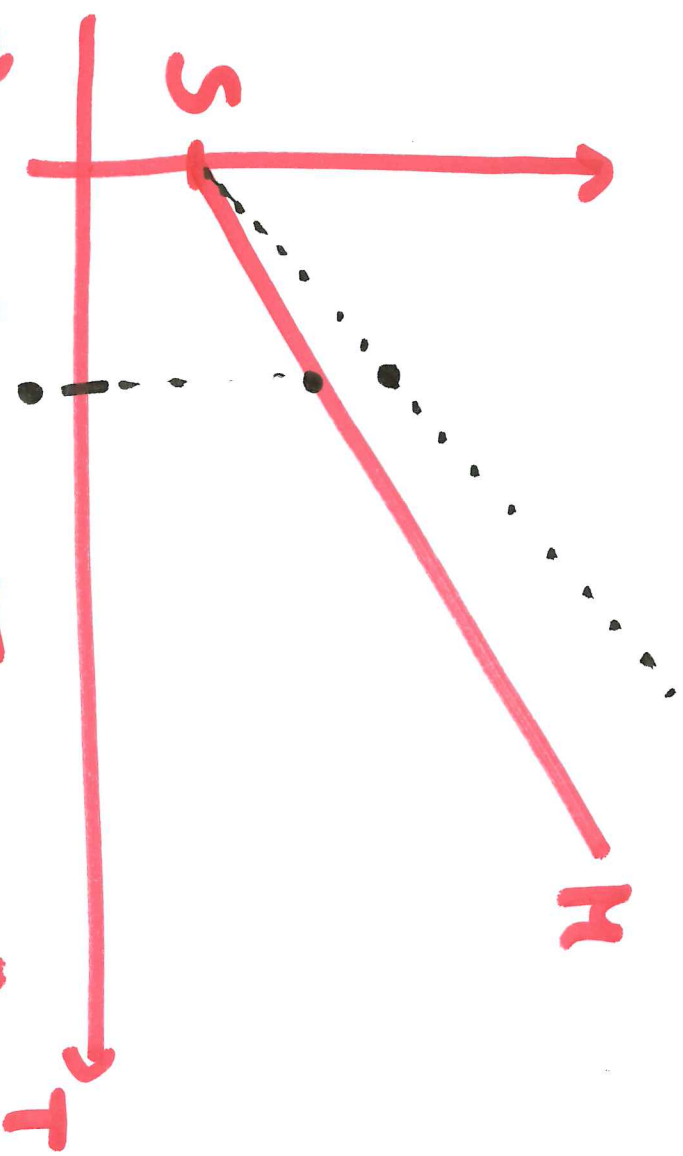
$$M = S \cdot (1 + i \cdot T)$$

EX

$S = 1000 \text{ €}$ e o 1% a. capit. semp. $t = 0$
 quanto tempo devo esperar off-inde-
 S maturar a 1200 €?

$$T = \left[\frac{M}{S} - 1 \right] \cdot \frac{1}{i} = 20 \text{ anni!}$$

↑
anni



$$M(T) = S + S \cdot i \cdot T \text{ retta}$$

2

$$M(T=1) = S + \underline{Si}$$

$$M(T=2) = S + Si_2 = M(T=1) + \underline{iS}$$

$$M(T=3) = S + Si \cdot 3 = M(T=2) + \underline{iS}$$

$$\text{OP1} \quad \{ -100, 105 \} / \{ 0, 1.5 \} \quad \text{over}$$

$$\text{OP2} \quad \{ -100, 103 \} / \{ 0, \frac{1}{4} \} \quad \text{over}$$

$$i_{\text{OP1}} = \frac{5}{100} \quad \text{on base 1.5 over}$$

$$i_{\text{OP2}} = \frac{3}{100} \quad \text{on base 1.5 over}$$

$$\underline{\text{OP1}} \quad 105 = 100 \cdot \left(1 + \frac{5\% \cdot 1}{\underline{\underline{\underline{1,5 \text{ anni}}}}} \right)$$

$$= 100 \cdot \left(1 + x \cdot \frac{3}{2} \right)$$

1,5 anni

$$\Rightarrow x = \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{3} = 3,33\% \text{ a.}$$

$$\underline{\text{OP2}} \quad 103 = 100 \cdot \left(1 + \frac{3\% \cdot 1}{\underline{\underline{\underline{1 \text{ anno}}}}} \right)$$

1 anno

$$= 100 \cdot \left(1 + x' \cdot \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow x' = 3\% \cdot 4 = 12\% \text{ a.}$$

CONVENZIONI per conteggio dei giorni

$$M = S \cdot (1 + i \cdot \underline{(T-t)})$$

1) anno civile Act/Act : conta i giorni effettivi

es: $t = 3/2/2011$ deposito S su cc

$T = 25/5/2011$ prelievo S

il primo giorno FRUTTA interessi
l'ultimo (se prelievo) NO

$$T-t = \frac{28-2 + 31 + 30 + 24}{365} \quad \text{anni} \approx 0,3$$

5

$$\underline{\text{D.}} \quad t = 3/2/2011$$

$$T = 23/5/2012$$

$$T-t = \frac{28-2+31+30+31+30+31+31+30+31+30+31}{365}$$

$$+ \frac{31+29+31+30+22}{366} = 1,3 \text{ anni}$$

2) **anno commerciale** $30/360$

$$\text{anni mese} = 30 \text{ gg}$$

$$\text{anni anno} = 360 \text{ gg}$$

$$\underline{\text{D.}} \quad t = 3/2/2011, \quad T = 23/5/2011$$

$$T-t = \frac{30-2+30+30+22}{360} = 0,306$$

APPROX :

 $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$

$$x \quad Q_3 \geq 5 \Rightarrow Q_0, Q_1 (Q_{2+i})$$

$$5,246 \leadsto 5,25$$

$$x \quad Q_3 < 5 \Rightarrow Q_0, Q_1, Q_2$$

$$5,241 \leadsto 5,24$$

EX 1.1 , 1.3 b, c , 1.4
 j owned

REGIME dello SCONTO COMMERCIALE

$$S = M - D$$

$$D = M \cdot d_a (T - t)$$

$$d = \frac{M - S}{M \cdot 1} \text{ periodale} , \quad d_a = \frac{M - S}{M \cdot (T - t)}$$

$$S = M \cdot (1 - d_e \cdot (T - t))$$

es: Tizio ha contabile che lo informa e
 risente M alla data T
 la perd in banca e risente $S < M$



la banca invece (M, T) avrebbe ~~pagato~~
 fatto uno scudo su M, perché oggi in O paga
 $S < M$

es: $d_e = 7\%$, $M = 15.000$, $T = \frac{3}{12}$

$$S = M \cdot \left(1 - 7\% \cdot \frac{3}{12} \right) = 14.737,5 \text{ €}$$

Sur une durée opérée. remplit. $\frac{t}{-s}$ $\frac{t}{+s}$ $\frac{t}{+s}$

$$15.000 = 14.737,5 \cdot \left(1 + i_{in} \cdot \frac{3}{12} \right)$$

$$\Rightarrow i_{in} = 7,12\% \neq d_a$$

$$M = S \left(1 + i_{in} \cdot (T-t) \right) = \frac{M \cdot \left(1 - d_a (T-t) \right)}{S} \cdot \left(1 + i_{in} (T-t) \right)$$

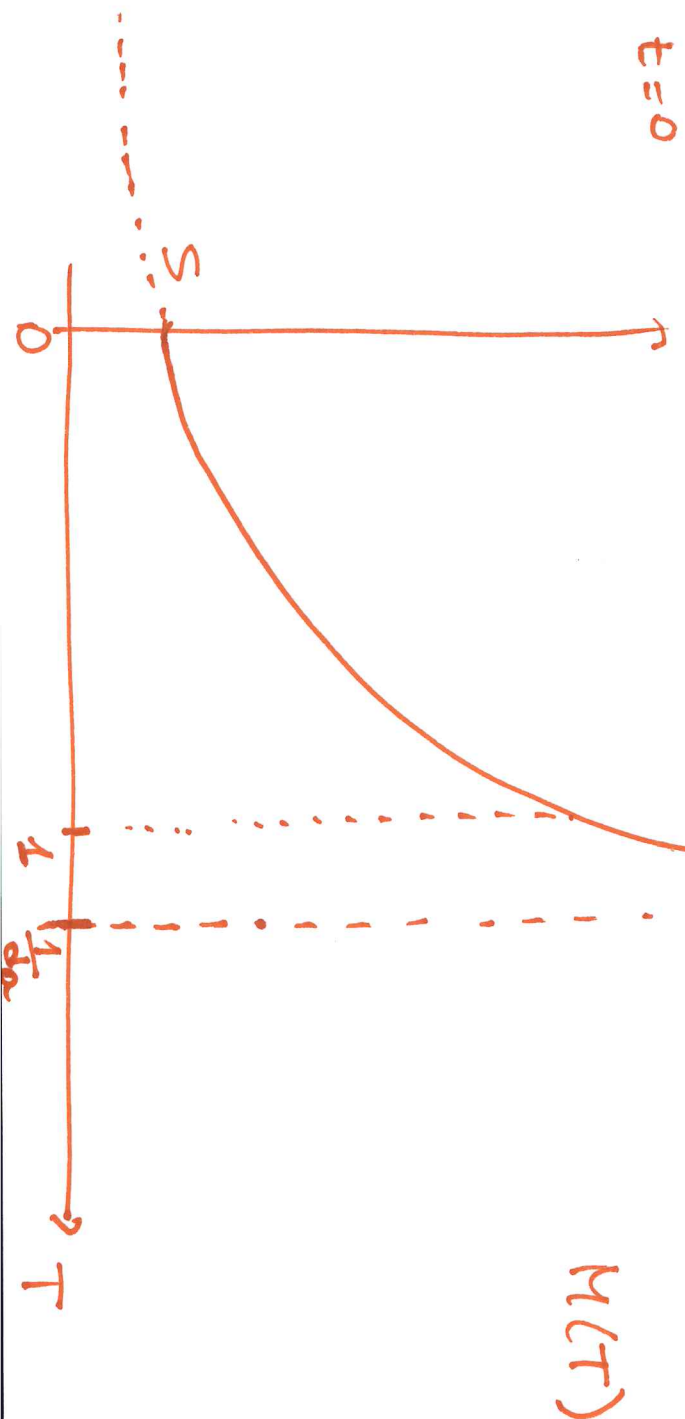
$$\Rightarrow 1 + i_{in} \cdot (T-t) = \frac{1}{1 - d_a (T-t)}$$

N.B. $H = \frac{S}{1 - d_0(T-t)} \geq 0$

$$\Rightarrow 1 - d_0(T-t) > 0, \quad 1 > d_0 \cdot (T-t)$$

$$T-t < \frac{1}{d_0}$$

$\Rightarrow$ posso usare questo regime solo per durate brevi (tipica ≤ 1 anno)



$$d = i \cdot v = \frac{i}{1+i} < 1$$

$$i > -1 \rightarrow 1+i > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} > 1$$

Pathra di sconto $v = 1 - d \cdot (T-t)$

$$u = \frac{1}{1 - d \cdot (T-t)}$$

per capit. sempl. $v = \frac{1}{1+i_m(T-t)}$

$$u = 1 + i_m(T-t)$$

TASSI EQUIVALENTI

$$\frac{M-S}{M \cdot 1} = d \text{ semestrale}$$



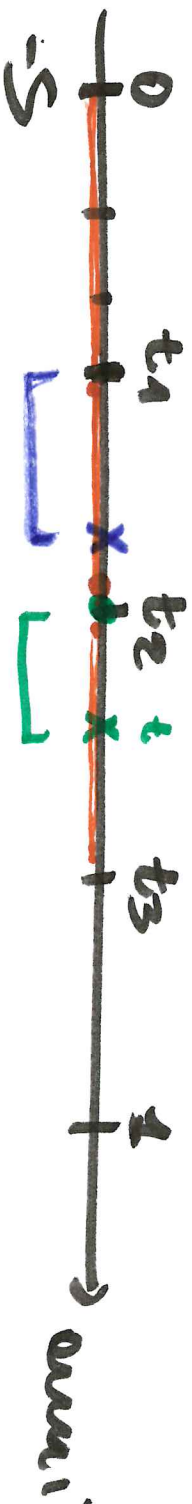
$$\frac{M-S}{M \cdot \frac{1}{2}} = d_a \text{ annuale} = 2 \cdot \frac{M-S}{M}$$

$$d_a = 2 \cdot d_{sem.}$$

③ REGIME DI CAPITALIZZ. MISTA

Un anno è diviso in sottoperiodi

es. (Banco) in trimestri



All'interno di ogni sottoperiodo la capitaliz. è SEMPLICE
ma allo scadere di ogni sottoper. gli interessi CAPITALIZZANO

12

deposit S in 0, i annuo

$$t \in (0, t_1]$$

$$M(t) = S \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$M(t_1) = S (1 + i \cdot t_1)$$

$$t \in (t_1, t_2]$$

$$M(t) = M(t_1) \cdot [1 + i \cdot (t - t_1)]$$

$$M(t_2) = M(t_1) \cdot [1 + i \cdot (t_2 - t_1)]$$

$$t \in (t_2, t_3]$$

$$M(t) = M(t_2) \cdot [1 + i \cdot (t - t_2)]$$

$$\vdots$$

EX capitaliz. anual, capitaliz. trimestral, taxa $i_n > 0$.
entao ogni trimestre
deposito S em $t = 0; t = \frac{1}{12}, M_1 = S \cdot (1 + i_n)^{\frac{1}{12}}$

$$t = \frac{2}{12}, M_2 = S \cdot (1 + i_n)^{\frac{2}{12}}$$

$$t = \frac{3}{12}, M_3 = S \cdot (1 + i_n)^{\frac{3}{12}}$$

$$t = \frac{4}{12}, \underline{M_4} = M_3 \cdot (1 + i_n)^{\frac{1}{12}}$$

$$t = \frac{5}{12}, M_5 = M_3 \cdot (1 + i_n)^{\frac{2}{12}}$$

$$t = \frac{7}{12}, M_7 = M_6 \cdot (1 + i_n)^{\frac{1}{12}}$$

$$\begin{aligned} M_6 &= M_3 \cdot (1 + i_n)^{\frac{3}{12}} \\ &= S \cdot (1 + i_n)^{\frac{3}{12}}^2 \end{aligned}$$

$$M_T : M_0 = S$$

$$x \quad T \in (0, \frac{3}{12}] , \quad M_T = S \cdot (1 + i_n)^{\cdot T}$$

$$x \quad 1 \in \left(\frac{3}{12}, \frac{6}{12}\right], \quad M_T = S \cdot \left(\frac{1+i_{12}}{12} \cdot \frac{3}{12} \right) \cdot \left(1 + \underline{i_{12}} \cdot \left(T - \frac{3}{12}\right) \right)$$

$$x \quad T \in \left(\frac{6}{12}, \frac{9}{12}\right], \quad M_T = \underline{S} \cdot \left(\frac{1+i_{12}}{12} \cdot \frac{3}{12} \right)^2 \cdot \left(1 + \underline{i_{12}} \cdot \left(T - \frac{6}{12}\right) \right)$$

...

III caso: M_T la graf. nella

cell. orig.

$$\text{per } T \rightarrow \left(\frac{6}{12}\right)^+ : M_T \rightarrow M_6$$

Se capitalizzazione degli inter. avviene ogni periodo di

lunghezza $\tau \Rightarrow$

per $t \in (0, \tau]$,

$$M_t = S \cdot (1 + i_{12} \cdot t)$$

per $t \in (\tau, 2\tau]$,

$$M_t = S \cdot (1 + i_{12} \cdot (t - \tau))$$

...

EX capit. mista, capit. inter. TRIMESTRE, $i_{12} = 2\%$ e.

di $\{50 \in\} / 1 \frac{1}{12}$

M attuale in $T = \frac{8}{12}$?

$$M_T = C \cdot (1 + D \cdot (T - E))$$

$$= A + B \cdot T$$

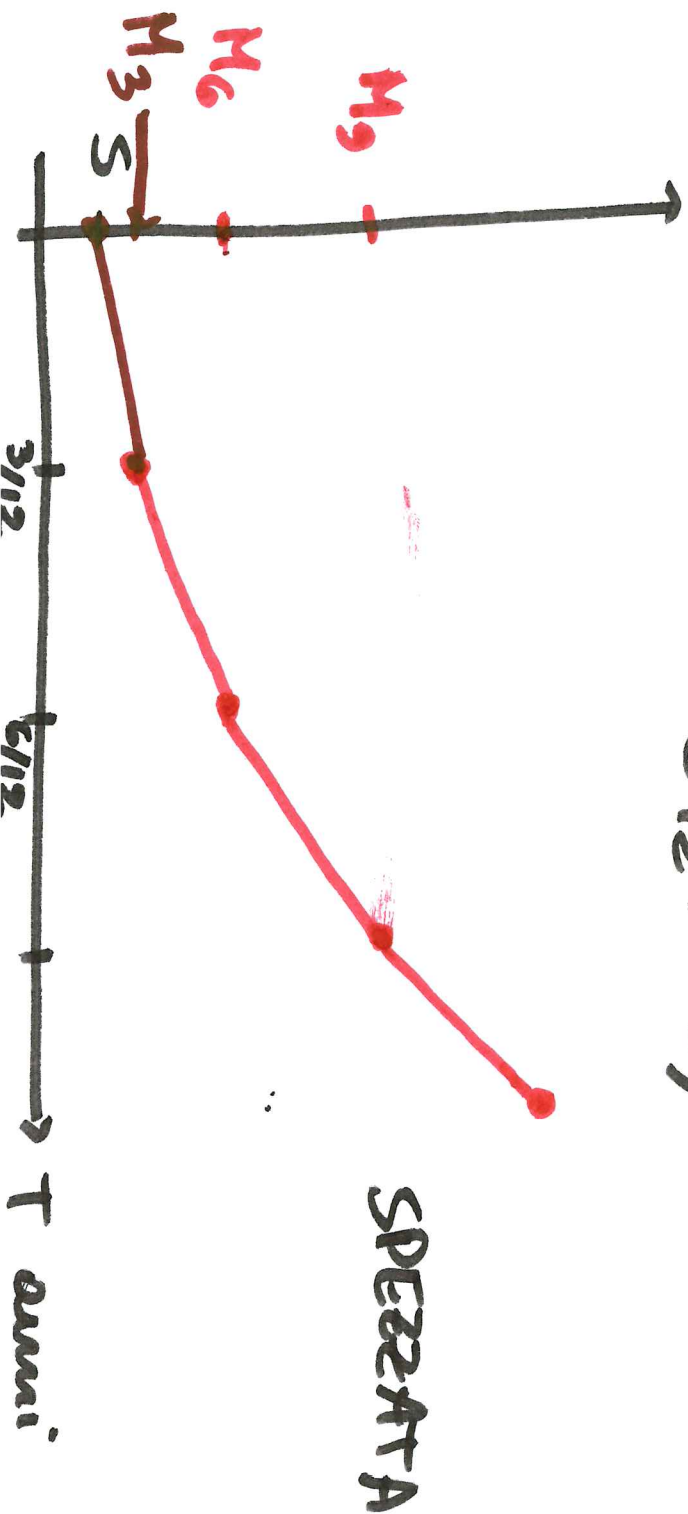
I trim. eff. angl. $\bar{e}$ $S \cdot i_{(n)}$

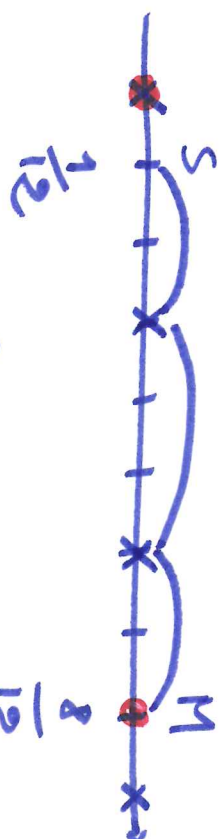
II trim.

$$S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot \frac{3}{12}) \cdot i_{(n)} > S \cdot i_{(n)}$$

II trim. per $T \rightarrow (\frac{3}{12})^+$, $M_T \rightarrow S \cdot (1 + i_{(n)} \cdot \frac{3}{12}) = M_3$

$\Rightarrow$ graf. relativo al I trim. e graf. al II trim.
si trovano in $(\frac{3}{12}, M_3)$





$$M_{\frac{8}{12}} = S \cdot \left(1 + i_{(n)} \cdot \frac{2}{12}\right)^2 \cdot \left(1 + i_{(n)} \cdot \frac{3}{12}\right) = 50,59 \text{ €}$$

EX Valore attuale (VA) in 0 di $\{100\} / \frac{1}{12}$

$$S \cdot \left(1 + i_{(n)} \cdot \frac{3}{12}\right)^2 \cdot \left(1 + i_{(n)} \cdot \frac{2}{12}\right) = M' = 100$$

$$\rightarrow S = 99,34 \text{ €}$$

EX stesso regime sopra: quanto tempo devo aspettare affinché $\{100\} / \frac{1}{12}$ aumentino a $\{101,4\} / \frac{1}{12}$?

es. se fosse $T = \frac{4}{12}$ anni

$$M = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{12}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{1}{12}\right)$$

conviene scrivere T come somma di un multiplo del trimestre + resto

$$T = \frac{3}{12} \cdot K + \frac{r}{12} \quad , \quad r \in \{0, 1, 2\}$$

$$\text{allora } M_T = S \cdot \left(1 + i_m \cdot \frac{3}{12}\right)^K \cdot \left(1 + i_m \cdot \frac{r}{12}\right)$$

$$\text{Se } K=1 \Rightarrow M_{\frac{3}{12}} = 100 \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{12}\right) = 100,5$$

$$\text{se } K=2 \Rightarrow M_{\frac{6}{12}} = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{12}\right)^2 = 101,0025$$

$$\text{se } K=3 \Rightarrow M_{\frac{9}{12}} = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{12}\right)^3 = 101,51$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\text{soluzione}} = 2}$$

$$101,4 = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{12}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{2}{12}\right)$$

$$\left[\frac{101,4}{M_{\frac{6}{12}}} - 1 \right] \cdot 600 = r$$

$$\pi = 2,3613 \dots$$

mes

$$0,36 \text{ mes} \sim 11 \text{ ss.}$$

$$S \cdot \left(1 + i \cdot \frac{3}{12}\right)^k = 101,4$$

$$k = 2,$$

$$k = \frac{\ln \frac{101,4}{100}}{\ln \left(1 + \frac{3}{100} \cdot \frac{31}{12}\right)} = \frac{\lg 1,014}{\lg \left(1 + \frac{1}{200}\right)} = 2,79 \dots$$

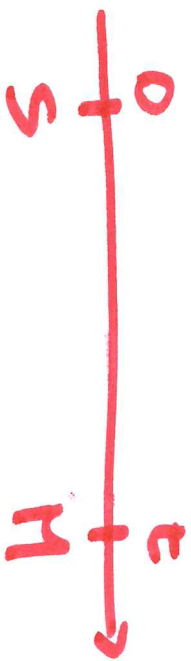
se pose

$$S \cdot \left(1 + i \cdot \frac{3}{12}\right)^k \cdot \left(1 + i \cdot \frac{3}{12}\right)^{0,79} = 11$$

$$\Rightarrow \left(1 + i \cdot \frac{3}{12}\right)^{0,79} = \left(1 + i \cdot \frac{3}{12}\right)$$

CAPITALIZZAZ. COMPOSTA

= legge di capit. esponenz.



$$M = S \cdot e^{\delta \cdot t} = S \cdot (1+i)^t$$

dove $e^{\delta} = 1+i$

- considero la capitalizz. annua con capitalizz. degl. inter. ogni $\frac{1}{n}$ di anno

(es. trimestre, $n=4$; mese, $n=12$; 15 giorni, $n=24$; 1 giorno, $n=360$)

- torso annuo della capit. sempl. altro caso con periodo: δ

$$S \text{ in } 0 \text{ diventa in } t = \frac{1}{n} : M = S \cdot \left(1 + \delta \cdot \frac{1}{n}\right)^n$$

$$t = \frac{2}{n} : S \cdot \left(1 + \delta \cdot \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{3}{n} & S \cdot \left(1 + \delta \cdot \frac{1}{n}\right)^3 \\
 &\vdots & \\
 t &= \frac{M}{n} & S \cdot \left(1 + \delta \cdot \frac{1}{n}\right)^M \\
 t &= K & S \cdot \left(1 + \delta \cdot \frac{1}{n}\right)^{M \cdot K}
 \end{aligned}$$

Se voglio capitalizz. ISTANTE per ISTANTE: $n \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow M \rightarrow ? \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S \cdot \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nK}$$

dopo K anni

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \quad ; \quad \text{devo ricordare } \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nK} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

costo variab. iniettivo

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\cdot \frac{\delta}{n} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{M} \Rightarrow M = n \cdot \delta \\
 \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nK} &= \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{M \cdot \delta \cdot K} \\
 &= \left[\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M \right]^{\delta \cdot K} \xrightarrow{\delta \cdot K} e^{\delta \cdot K}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\delta k} = (e^{\delta})^k$$

$$e^{\delta} = 1 + i_{cc} \quad i_{cc} \text{ tasso annuo}$$

Montante di S in 0 dopo k anni è $S \cdot (1 + i_{cc})^k$

RIASSUMENDO:

- se voglio capitalizz. int per inf. $\Rightarrow n \rightarrow +\infty$
- capisco il funzionamento di un regime quando conosco il montante di S in 0 ed un generico $T > 0$

Allora vedo e pervengo il mont. di S in 0 dopo k anni nel regime che capitalizza int. per inf.:

• Quando cosa diventa $S \cdot \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nk}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S \cdot \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nk} = S \cdot e^{\delta k}$$

de $\bar{e}$ il mont. dopo k anni nel regime di capitalizzazione ist per ist.

- $\text{foupp } e_S = 1 + i_{(c)}$

$$\Rightarrow \text{mont. dopo } k \text{ anni } \bar{e} \quad S \cdot (1 + i_{(c)})^k$$

- me. riscuote da questo $\bar{e}$ il mont. di S in 0 dopo k anni nel regime della capital. composta al tasso annuo $i_{(c)}$.

Quindi la capitaliz. comp. $\bar{e}$ ottenete come limite della capit. mista, quando il periodo di capitaliz. degli interessi ha lunghezza $\frac{1}{n}$ di anni $\rightarrow 0$