Università degli Studi di Firenze – Scuola di Scienze
Laurea triennale in Fisica e Astrofisica
Analisi Matematica I (A.A. 2015/16)
Integrali – 16 Dic. 2015

1. Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_0^{x^2} f(s) ds = x^2(1+x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che $f(1) = 5/2$.

(Tratto da M. Giaquinta, G. Modica, Note di Analisi Matematica, Pitagora Editrice Bologna, 2005, per gentile concessione degli autori.)

2. Utilizzando metodi opportuni caso per caso, determinare gli integrali indefiniti che seguono:

$$\int \sinh^2 x dx, \int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} dx, \int \frac{\log(1+x)}{x^2} dx, \int \frac{x}{(x-2)^2} dx, \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

3. Calcolare l'area della figura piana delimitata dai grafici delle funzioni

$$\cos x \quad \text{e} \quad \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

4. Per ogni punto $P = (x, y)$ del ramo dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ nel primo quadrante, verificare che l'area A del *settore iperbolico* delimitato dalla retta per $(0, 0)$ e P , dall'asse delle ascisse e dall'arco di iperbole congiungente $(1, 0)$ a P , vale

$$A = \frac{1}{2} \sinh^{-1} y = \frac{1}{2} \cosh^{-1} x.$$

Dedurre che il ramo di iperbole suddetto è parametrizzabile come

$$\begin{cases} x = \cosh(2A) \\ y = \sinh(2A) \end{cases}.$$

(Questo spiega l'utilizzo dei simboli *settsinh* e *settcosh* in luogo di $\sinh^{-1}$ e $\cosh^{-1}$ e della terminologia *settore seno iperbolico* e *settore coseno iperbolico*, rispettivamente.)

5. Scrivere la primitiva di e^{-x^2} , il cui grafico passa per $(0, 28)$.
6. Determinare la primitiva di $\sqrt{e^x - 1}$ che vale $-\pi/2$ in $\log 2$.

7. Stabilire se le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$$

sono integrabili (secondo Riemann o in senso improprio) rispettivamente in $(1, \infty)$ e in $(-4, 0)$, calcolando l'integrale quando possibile.

8. Considerando che per $a > 0$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

calcolare

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-ax^2} dx \quad \text{per } n = 2, 4, 9$$

e

$$J = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-a(x-x_0)^2} dx \quad (x_0 \text{ fissato}).$$

9. (*Integrali di Fresnel*) Gli integrali

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx \quad (1)$$

scaturiscono nella teoria della diffrazione della luce e prendono il nome dal fisico A.-J. Fresnel (1788-1827).

Si chiede di provare che la funzione $f(x) = \sin(x^2)$ è integrabile in senso improprio in $[1, \infty)$; lo stesso vale per $\cos(x^2)$. Si completi l'analisi con le argomentazioni necessarie a confermare l'esistenza (convergenza) degli integrali in (1).

Suggerimento: Si utilizzi la definizione, che richiede il computo – oppure una stima – dell'integrale di f in $[1, c]$, $c > 1$; si introduca la sostituzione $u = x^2$ e si integri per parti ...

Attenzione: Questo esempio evidenzia in particolare il fatto che una funzione integrabile in senso improprio in $[1, \infty)$ non ammette necessariamente limite per $x \rightarrow +\infty$. Se poi il limite esiste, dovrà essere zero; *cfr.* esercizio successivo.

10. Dimostrare che se f è integrabile in senso improprio in $[1, \infty)$ ed esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

necessariamente $L = 0$.

Suggerimento: Si proceda per assurdo, supponendo $L \neq 0$: dalla definizione di limite – pure con le dovute distinzioni tra i casi $L = +\infty$ e $L > 0$ (finito) – e per la monotonia dell'integrale si trae la stessa contraddizione; i casi $L = -\infty$ e $L < 0$ si trattano in modo del tutto analogo.

11. (*Criterio integrale di convergenza per le serie*) Sia $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente. Si provi che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ è convergente se e solo se f è integrabile in senso improprio in $[1, \infty)$.