DERIVATE

12 dicembre 2017

Derivata prima di una fz

Sia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una fz, siano $c, d \in D,\ c < d$
incremento di f nel passare da c a d: $f(d) - f(c)$, DISEGNO parabola
rapporto incrementale di f nel passare da c a d: $\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$
retta **secante** al graf f per $(c, f(c)), (d, f(d))$: $(y - f(c))(d - c) = (x - c)(f(d) - f(c))$ ossia $y = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x - c) + f(c)$
il rapp increm è il coeff angol della retta, DISEGNO

Siano ora $D = (a, b)$, $c \in (a, b)$, $d = c + h$, con $h > 0$ o $h < 0$, purché $c + h \in (a, b)$:
rapp increm $= R_c(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$
si prende h sempre più piccolo: $\lim_{h\to 0} R_c(h)$.

Def. Se $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ **esiste** ed **è finito,** si dice che f è **derivabile** in c, ed il lim lo si chiama **derivata prima** di f in c, $f'(c)$.
Oss: quando f è cont, il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$

Es. $f(x) = 2x^2$, $D = \mathbb{R}$: preso qualunque $c \in \mathbb{R}$, $R_c(h)$,
lim esiste finito, qualunque sia $c \Rightarrow 2x^2$ è derivabile in qualunque c,
ed $f'(c) = 4c$

Signif geom della deriv prima di una f derivabile in c: def **retta tangente** al graf f in $c = lim_{h\to 0}$ delle secanti al graf per $(c, f(c))$, $(c + h, f(c + h))$ DISEGNO
secanti $y = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}(x - c) + f(c)$, per $h \to 0$ solo il coeff angolare si muove e tende a $f'(c) \Rightarrow$ la retta lim è $y = f'(c)(x - c) + f(c) \Rightarrow f'(c)$ è il coeff angol della tg a graf f nel pto c

Ex. Eq della retta tg a $y = 2x^2$ in $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$?
$y = f'(c)(x - c) + f(c) = 4c(x - c) + 2c^2 = -2(x - \frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2})^2 = -2x + 1 + \frac{1}{2} = -2x + \frac{3}{2}$

[Es. $C(x)$ **fz costo**, $x \geq 0$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: produrre quantità x costa $C(x)$
[incremento di costo nel passare dal produrre quant x_1 a quant $x_2 > x_1$ è
[$C(x_2) - C(x_1)$, il rapporto increment. $\frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}$ = **costo marginale medio**
[**costo marginale** $= \lim_{x_2\to x_1} \frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1} = C'(x_1)$

21/11/2017 LEZIONE 29

Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$: 1) verificare se f derivabile in $c \neq 0$ e calcolare $f'(c)$.
2) Determinare l'eq della retta tg a graf f in c.
Sol. CE: $x \neq 0$; 1) $\lim_{h\to 0} R_c(h) = \lim_h (\frac{1}{c+h} - \frac{1}{c}) \cdot \frac{1}{h} = \lim_h \frac{c-c-h}{c(c+h)} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{c^2}$
2) Retta tg in $(c, \frac{1}{c})$: $y = -\frac{1}{c^2}(x - c) + \frac{1}{c}$. DISEGNO ■

[Es. La fz $s(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spazio percorso da un oggetto in moto da un istante iniziale 0

[a t $\Rightarrow R(h) =$ *velocità media* in $[a, b]$, $s'(t) =$ *velocità istantanea* in t

[EX 8.1 Giusti, 8.2 (velocità, p. 247)

Oss: per la derivata il limite di $R(h)$ è globale, ma

Def. $f'(c^+), f'(c^-)$
Ex. $f(x) = |x|$ in $c = 0$ non derivabile, DISEGNO

Teo $f : (a, b) \to \mathbb{R},\ c \in (a, b)$. Esiste $f'(c)$ sse esistono $f'(c^+), f'(c^-)$ e coincidono,

perché il lim globale di $R(h)$ esiste sse $\exists$ lim dx e sx e coincidono

Es. $f(x) = |x|, c = 1$: $|x|$ è derivab in ogni $c \neq 0$.

Oss: $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset D_f$: per poter def. la derivata completa $f'(x_0)$ bisogna che x_0 sia *interno* ad A

Ex. Sia $f(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ radice aritmetica. 1) Calcolare $\lim_h R_c(h)$ con $c > 0$.
2) Calcolare $\lim_h R_c(h)$ con $c = 0$.
Sol: 1) $R_c(h) = \frac{\sqrt{c+h}-\sqrt{c}}{h} = \frac{c+h-c}{h(\sqrt{c+h}+\sqrt{c})} = \frac{1}{\sqrt{c+h}+\sqrt{c}} \to \frac{1}{2\sqrt{c}}$
quindi $\sqrt{x}$ è derivabile in qualunque $c > 0$.
2) Posso SOLO cercare $f'(0^+)$, quindi solo $h > 0$: $R_0(h) = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$
quindi $\sqrt{x}$ NON è derivabile in 0,
significa che la retta tg in 0 a graf f è **verticale**

Analogamente accade per x^q con $q \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$.

Teo: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivab in $c \in (a, b) \Rightarrow f$ è cont in c
Dim: preso $h \neq 0$, $f(c + h) = f(c + h) - f(c) + f(c) = h\frac{f(c+h)-f(c)}{h} + f(c)$, $\lim_h$ ■

Ex. è $sgn(x)$ derivab in 0? in 3?

Ex. f cont in $c \in (a, b) \subseteq CE$ (Campo di Esistenza) $\Rightarrow$ derivab in c: vero? $|x|$

Def $f : (a, b) \to \mathbb{R},\ E \subseteq (a, b)$. Diciamo che f è **derivabile in E** se è deriv in ogni pto di E.
Se diciamo "f è derivab", senza aggiungere dove, intendiamo che lo sia su TUTTO il suo CE
Es: $f(x) = |x|$ è derivab in $\mathbb{R} - \{0\}$

Oss: al variare di c, $f'(c)$ è una fz, $f'(x)$:
ES $f(x) = 2x^2 \to f'(x) = 2x$; $f(x) = \frac{1}{x} \to f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$CE(f')$

$CE(|x|') = \mathbb{R} - \{0\}$

Fz derivab in $x_0 \Rightarrow$ graf **stondato, o liscio,** in x_0 e **mai pendenza** ∞ DISEGNI: x^2, retta
Caratteristica di fz NON derivabili: in corrisp dei punti x_0 di non derivab nel graf compare una PUNTA o un pto a TG VERTICALE

Es. $|x|$ ha una pta in 0, dovuta al fatto che $f'(0^{\pm})$ diverse
Es: Grafico di $f(x) = \sqrt{|x-2|}$:
conosco graf $\sqrt{x}$ DISEGNO, $\sqrt{|x|}$ è fz pari DISEGNO,
$\sqrt{|x-2|}$ traslato DISEGNO: ha punta in 2, dovuta al fatto che $\lim_h R_h^{\pm}(2) = \pm\infty$

[Es. è $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ derivab in 0? Non ha punte, ma ha tg verticale in 0.

EX Giusti 8.3, pti 1,2,3 (calcolare f', fare dimos.), 8.4, 8.5, 8.6 (dimos. $\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$), 8.7 ($f$ pari $\Rightarrow f'$ dispari)

f' è una fz, con il suo $CE_{f'}$: possiamo calcol $\left(f'\right)'$: chiamiamo questa (derivata prima di f') **derivata seconda** f'' di f

Def. Se x_0 interno a $D(f')$ ed $\exists \lim_h R_{x_0}(h)(f')$ finito si dice che f' è derivab in x_0 e che f è derivab 2 volte in x_0, e il lim si chiama $f''(x_0)$.

Notaz. diciamo che f è derivab 2 volte su un ins $E \subseteq \mathbb{R}$ se f è der 2 v in ogni pto di E
Se diciamo "f der 2 v" e basta intendiamo "f der 2 v su tutto il suo CE"

Es. $f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x : f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)-4x}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h} = 4.$

NB anche $f'' : CE(f'') \to \mathbb{R}$ è una fz, si può def la sua derivata: **derivata terza di** f, e così si possono def le **derivate quarta** e di ordine superiore

Derivate delle fz elementari continue

Teo. Tutte le fz elem cont (costanti, potenze, $|x|$, espp, logg, trigonometriche) sono derivab su *tutto* il loro CE, tranne $|x|$ e $x^q, q \in (0,1)$, che sono der nel $CE - \{0\}$:

$\bullet f(x) \equiv k,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} : R_{x_0}(h), \lim_h$

$\bullet\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, per ogni x interno al CE ■

ESS. $x', (x^2)', (\frac{1}{x})', (\sqrt{x})'$

ES. $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -(x^{-2})' = -(-2)x^{-3}$

[**Ex.** casa. A partire dalla def di derivata prima, dim che $(-\frac{1}{x^2})' = -(-2)x^{-3}$
[*Sol.* $\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \left[-\frac{1}{(x+h)^2} + \frac{1}{x^2}\right]\frac{1}{h} = \frac{-x^2+x^2+2xh+h^2}{(x^2+2hx+h^2)x^2h} = \frac{2x}{x^4+2hx^3+h^2x^2} + \frac{h}{(x^2+2hx+h^2)x^2}$

•$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a \ \forall x \in \mathbb{R}$:
[$R_{x_0}(h) = \frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h} = a^{x_0}\frac{a^h-1}{h}$ lim notev $\frac{a^h-1}{h}\left[= \frac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a}\ln a\right] \to \ln a$

es. $(3^x)'$

per $a = e$: $(e^x)'$: l'unica fz che fa 1 in 0 e che ha $f' = f$

•$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln a} \ \forall x > 0$:
[$R_{x_0}(h) = \frac{\log_a(x_0+h)-\log_a(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\log_a(\frac{x_0+h}{x_0}) = \log_a\left((1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}\right) = \frac{\ln\left((1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}\right)}{\ln a}$
[$h = \frac{1}{z}$ trasf iniettiva: $h \to 0^{\pm} \Leftrightarrow z \to \pm\infty$, $k = \frac{1}{x_0}$, sappiamo che $(1+\frac{k}{z})^z \to e^k$,
[per $z \to \pm\infty$, allora si ha $\frac{\ln\left((1+\frac{k}{z})^z\right)}{\ln a} \to \frac{\ln(e^k)}{\ln a} = \frac{k}{\ln a} = \frac{1}{x_0\ln a}$

per $a = e$ ...

•$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

•$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos'(3) =?$

Teo. Operazioni tra fz e derivabilità: per gli x nei CE delle seguenti espressioni, se f e g derivabili in x le fz risultanti dalle op seguenti sono derivab in x e si ha:
1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
ES. $(x^3 + \ln(x))'$
2) se $k \in \mathbb{R}$ cost $\Rightarrow (kf)'(x) = kf'(x)$
ES. $(3x^3)'$; $(3x^3 + 2x + 1)'$; $(-\ln(x))'$
ES. $(f-g)' = (f+(-g))' = f' + (-g)' = f' - g'$
3) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;
ES. $(x\log(x))' = 1 + \log(x)$;
[ES. se $g \equiv k$ allora $fg = kf$ e, con regola del prodotto, $(kf)' = kf'$, coerente con la
[regola per $(kf)'$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, ricordando che deve essere $g(x) \neq 0$
EX. $\left(\frac{e^x+1}{x}\right)''$:
$\left(\frac{e^x+1}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x - 1}{x^2} \Rightarrow$

$\left(\frac{e^x+1}{x}\right)'' = \left(\frac{e^x x - e^x - 1}{x^2}\right)' = ...$

23/11/2017 LEZIONE 30

ES. $(\tan(x))' = \left(\frac{\sin}{\cos}(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

5) derivata della composiz: se f der in x e g der in $f(x) \Rightarrow g \circ f$ der in x con
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

ES. $\left(\sqrt{5x^3+2}\right)'$

conseg: $(e^f)'(x)$

ES. $(e^{2x})'$

[EX Giusti 8.8, no p.ti 5,9,11,16,17,19,24; Exx. n. 8.9, 8.10, 8.11, 8.36 (no pto 11)

Visto che le fz element cont NON derivab su tutto il loro D sono $|x|$ e x^q con $q \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$, **possono essere non derivab funzioni composte** del tipo:
$|g(x)|$ nei punti x dove $g(x) = 0$
$\sqrt{g(x)}$ o più in gen $\left(g(x)\right)^q$, $q \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$, nei punti x dove $g(x) = 0$.

Es: $|x^2 - 2|$ DISEGNO: NON è der dove $x^2 = 2$, ossia in $\pm\sqrt{2}$
invece $|(x-2)^2|$ è der in $\mathbb{R}$, perché $= (x-2)^2$ che ha un graf senza punte

[Es. $\sqrt[3]{x-2}$ DISEGNO (da $\sqrt[3]{x}$ traslo): ha tg verticale in 2, non der in 2;
[invece $\sqrt{x^4}$ è der in 0 perché $= x^2$.

[**Ex.** [DISEGNO $-|x-2|+3$] è qs fz derivab? di quale fz si potrebbe trattare?

[Perché f sia derivab bisogna che il suo graf sia liscio o stondato in x_0, non a punta, e non
[sia a tg verticale

[**Ex.** E' $\sqrt{x-3}$ derivab nel suo CE?

Ex. E' $H(x) = \sqrt{x + \cos(x)}$ deriv in 0? $H'(0)$?
$\sqrt{x+\cos(x)} = (g \circ f)(x)$ dove $g(x) = \sqrt{x}$:
$\sqrt{x}$ non è derivab in 0, ma $x + \cos(x)$ in 0 fa 1, e $\sqrt{x}$ derivab in $1 \Rightarrow H(x)$ derivab in 0, e
$H'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\cos(x)}} \cdot (1 - \sin(x))$ che in $x = 0$ fa $\frac{1}{2}$.

Ex. compito 11/9/2014: sia $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 + 3x - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ f_2(x) = ax - b & \text{altrimenti} \end{cases}$
dire se esitono a, b in modo che f risulti derivabile in tutto $\mathbb{R}$.
Sol. Zona 1) $x \leq 1$: su $(-\infty, 1)$ polin cont e der; zona 2) $x > 1$: su $(1, +\infty)$ polin cont e der. L'unico punto in cui a priori non sappiamo se f cont o der è $x = 1$.
Si noti che si hanno 2 parametri, ci servirà allora imporre 2 condizioni.
Continuità è condiz necess alla derivab: deve essere $\lim_{x\to 1^+} f = \lim_{x \to 1^-} f = f(1)$.

$f(1)$? 2
$\lim_{x\to 1^-} f = \lim_{x\to 1^-} f_1 = f_1(1) = 2$, per la cont di x^2+3x-2 su tutto $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to 1^+} f = f_2(1) = a-b$, per la cont di $ax-b$ su tutto $\mathbb{R}$.
Allora per avere la cont in 1 serve $2 = a-b$.
Derivabilità: f è deriv in 1 sse $f'(1^+) = f'(1^-)$ (che, in particolare, sono valori finiti).
Calcolo $f'(1^\pm)$ applicando la def. di derivata dx/sx:
a sx ho il rapp increm sx di $f_1 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} Rh(f) = \lim_{h\to 0^-} Rh(f_1)$, f_1 è derivab in 1
$\Rightarrow$ ho $\lim_{h\to 0} Rh(f_1) = f_1'(1) = 5$
Per $f'(1^+) : \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f_2(1+h)-f_1(1)}{h}$, poiché abbiamo già imposto la cont in 1, ho $f_1(1) = f_2(1)$, quindi ho $\lim_{h\to 0+} \frac{f_2(1+h)-f_2(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} Rh(f_2)$, poiché f_2 derivab in 1 ho $= f_2'(1) = a$
Per avere la derivab in 1 serve dunque $a-b = 2$ e $a = 5$.
Ma allora ricavo che $b = a-2 = 3$. Ossia: Per i valori $a = 5$ e,$b = 3$
la fz è cont e der anche in 1.■

OSS: di fatto quindi abbiamo guardato $Rh(f_1)$ per gli $x < 1$ e $Rh(f_2)$ per gli $x > 1$ ed eguagliato i limiti. Ma ATT!!! per $x > 1$, $Rh(f)$ NON coincide con $Rh(f_2)$ SE f NON è CONT in 1!!

EX. E' $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = e^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ f_2(x) = x-1 & \text{altrimenti} \end{cases}$ derivab in 0?
Sol: $f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} Rh(f_1) = f_1'(0) = 1$
avremmo poi $\lim_{h\to 0^-} Rh(f_2) = f_2'(0) = 1$, INVECE
$\lim_{h\to 0^-} Rh(f) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h-1-0}{h} \to +\infty$!
perché f NON è cont in 0.■

Ricerca dei punti di min/max locali di una fz

punti estremali di una fz $f : A \to \mathbb{R}$: p di A che sono o di max loc, o di min loc o di max glob o di min glob. **Valore estremale** $= f(x_0)$ dove x_0 è un p. estremale.

Teor. di Fermat. Siano $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e $x_0 \in I$ pto estremale INTERNO, sia f derivab in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Dim. x_0 fissato, ad es. x_0 di **max** loc: $\exists B(x_0,\delta) \subset I : x_0$ è di max ass in B, allora $R_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ha num ≤ 0 :
1) se $h > 0 \Rightarrow R_{x_0}(h) \leq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} R_{x_0}(h) \leq 0$ [se fosse $\lim_{h\to 0^+} > 0$, per la permanenza del segno, avrei $R_{x_0}(h) > 0$ in un intorno dx di $h = 0$, invece sui pti $h > 0$ vicini a 0 ho $R_{x_0}(h) \leq 0$.]
2) se $h < 0 \Rightarrow R_{x_0}(h) \geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} R_{x_0}(h) \geq 0$
ma f derivab in x_0 signif che $\lim_{h\to 0^-} R_{x_0}(h) = \lim_{h\to 0^+} R_{x_0}(h) = f'(x_0)$, ed ho $0 \leq \lim_{h\to 0^-} R_{x_0}(h) = \lim_{h\to 0^+} R_{x_0}(h) \leq 0$ allora $f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} R_{x_0}(h) = \lim_{h\to 0^+} R_{x_0}(h) = 0$.
Analogamente ragionerei se x_0 di min loc (vd libro), o di max ass interno o di min ass interno.■

[Signif geometrico del fatto che se $\left.\begin{array}{c} x_0 \text{ è di max loc} \\ x_0 \text{ interno} \\ \exists f'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$:

[se fosse $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ pendenza del graf > 0 in x_0, DISEGNO, poiché $f(x) \approx f(x_0)+$
$[f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$ per x vicini a dx di x_0 f crescerebbe ancora, con x sempre in $(a, b) \Rightarrow$
[x_0 non di max.
[Se fosse $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ pendenza < 0, DISEGNO $\Rightarrow f$ potrebbe ancora crescere a sx di x_0

Def. un x_0 su cui $f'(x_0) = 0$ si dice **p. stazionario** per f.
Dove cercare i possibili pti c estremali, locali o assoluti (che sono anche locali), per una f cont su $[a, b]$:

$$\begin{cases} \text{o sui } c \text{ al bordo di [a,b]} \\ \text{o sui } c \text{ dove } f'(c) \text{ non esiste} \\ \text{o sui } c \text{ interni stazionari} \end{cases}$$

DISEGNI delle 3 diverse situaz

27/11/2017 LEZIONE 31

Ex. $f(x) = 1 + |x - 3|$: determinare max/min ass in [-1,4].
Sol. f non è der in 3: se lo fosse allora $f - 1 = |x - 3|$ lo sarebbe: assurdo
I punti estremali si trovano

$$\begin{cases} \text{o al bordo: -1 e 4} \\ \text{o nel pto 3 di non derivabilità} \\ \text{o tra i pti staz. interni} \end{cases}$$

$f' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 3 \\ -1 & \text{se } x < 3 : \end{cases}$ non fa mai $0 \Rightarrow$ non esistono pti staz.
Cerco allora i valori estremali tra $f(-1), f(4), f(3) : f(-1) = 5, f(4) = 2, f(3) = 1 \Rightarrow$
-1 è p. di max ass su $[-1, 4]$ e 3 è p. di min ass., infatti DISEGNO.

[NB: nel pb $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ se x_0 è di bordo non posso pretendere in gener che se è di max allora
$[f'(x_0) = 0$. Infatti x_0 può essere di max perché la fz non può più crescere solo perché limito il
[dominio e se non limitassi il dominio x_0 non sarebbe di max

NB: per $f(x) = x^2 \in [-1, 1]$ il max ass è $f(1) = 1$: 1 NON è STAZ, ma stando in [-1,1] più in ALTO NON POSSO ANDARE. Su $\mathbb{R}$ f(1) non sarebbe il max
Oss: **viceversa del teo di Fermat** non vale, ossia: se $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ p. estremale

ES. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Test di monotonia

Esiste un legame tra l'andamento cresc/decresc di f e il sgn(f'). Vediamo ora una serie di tasselli necessari per mostrare tale legame.

Teor. di Rolle. Sia f **ct** in $[a, b]$, **der** in (a, b) e t.c. $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.
DISEGNO

E' una conseg dei teo di Weierstrass e Fermat.

Dim. Poiché f cont su [a,b], per Weier. ammette max e min ass in [a,b], quindi pti $x_M, x_m \in [a,b]$ su cui f assume val max ass e min ass

1) se entrambi x_M, x_m ai bordi di [a,b]$\Rightarrow$ sono a e b, ma $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ è costante su [a,b] DISEGNO $\Rightarrow f' = 0$ in (a,b), e ok, c è un qls pto in (a,b).
2) altrimenti uno dei due tra x_M e x_m è interno. Sia ad es x_m quello interno DISEGNO. Per Fermat allora (x_m di min loc, interno e f der in x_m) $f'(x_m) = 0$ e ok, $c = x_m$. ■

NB: se f non cont in [a,b] il teo non garantisce di poter trovare c interno ad [a,b] su cui $f'(c) = 0$
ES. DISEGNO

Conseguenza del teor. di Rolle:
Teor. di Lagrange, o del valor medio. Sia f **ct** in $[a,b]$, **der** in $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Significato geometrico: DISEGNO: la secante al graf f in $(a, f(a)), (b, f(b))$ ha la stessa pendenza $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ della tg in un opportuno $c \in (a,b)$

[Significato pratico quando esista $f'(b) : f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$ sappiamo che il rapp
[increm $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ di una fz è $\approx f'(a)$. Qui si dice in più che coincide con $f'(c)$ con un
[opportuno $c \in (a,b)$.

Dim. Applico il teo di Rolle a $F(x) = f(x) -$secante $= f(x) - \left[\mathbf{f(a)} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$
DISEGNO:
si ha $F(a) = 0 = F(b)$, F è cont in [a,b] e der in (a,b) $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : F'(c) = 0$,
ma $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e fa $0 \Rightarrow$ ok.■

NB: in gen non so dove si trovi esattamente c

[**Ex.** se graf f è una retta, dov'è il c del teo di Lagrange? DISEGNO

Possiamo ora mostrare il legame tra monotonia di una fz e segno della sua f'.

[Premesse: def. f cont in [a,b] (già detto che $\lim_{x\to a} = \lim$ dx)

Teor.: Criterio di monotonia di una fz. Sia f ct in [a,b], der in (a,b), allora si ha :
- $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$ sse $f \uparrow$ debolm in $[a,b]$
- $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$ sse $f \downarrow$ debolm in $[a,b]$

Dim della prima affermazione, implicazione $\Rightarrow$: sappiamo che $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a,b)$, presi $x_1 < x_2$ in $[a,b]$ vv che $f(x_1) \leq f(x_2)$. In $[x_1, x_2]$ sono verif le ipot del teor di Lagrange

$\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$. Poiché $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, si ha
$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, e ok.
Implicazione $\Leftarrow$: se f è (deb) cresc in [a,b] allora $\forall x_0 \in [a,b], \forall h : x_0 + h \in [a,b]$ si ha
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow$ (come visto anche nella dim del teo di Fermat) si ha
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$.
Analogam si dim la seconda affermazione■

NB: enunciato sul libro di Giusti leggerm diverso, ma questa formulaz utile negli exx:
se $I = (a,b)$ ma f cont in [a,b] ed $f' \geq 0$ (risp. ≤ 0) in (a,b) si ha non solo che f cresce deb (risp decresce deb) in (a,b), ma anche in $[a,b]$

[perché se ad es. $x_1 \in (a,b)$ si ha $\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1} = f'(c) \geq 0$ (risp. ≤ 0) e quindi
[anche $f(b) \geq f(x_1)$ (risp $\leq$).

Ex. $f(x) = |x-3| + x^2$: determinare max/min rel/ass in [-1,4].
Sol. f non è der in 3: se lo fosse allora $f - x^2 = |x-3|$ lo sarebbe: assurdo
Per $x \in (-1,3)$ ho $f' = -1 + 2x$ che è ≥ 0 sse $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f \downarrow$ su
$[-1, \frac{1}{2}]$, mentre $f \uparrow$ su $[\frac{1}{2}, 3] \Rightarrow \frac{1}{2}$ è p. di min loc.
Per $x \in (3,4)$ ho $f' = 1 + 2x$ che è ≥ 0 sse $x \geq -\frac{1}{2}$, il che è ok $\forall x \in (3,4) \Rightarrow f \uparrow$ su $[3,4]$.
Poi f è cont in 3 DISEGNO $\Rightarrow -1$ è p. di max loc, $\frac{1}{2}$ p. di min loc e ass, 4 p. di max loc., mentre 3 non è né di min, né di max.
Il max ass è il $\max\{f(-1), f(4)\} = \max\{5, 17\} = 17 \Rightarrow 4$ è p. di max anche ass. ■

[**Ex.** per casa: Per $f(x) = |x-3| + x^2$ determinare CE, segno, grafico.
[*Sol.* $CE = \mathbb{R}$, $f \geq 0$,
[se $x \geq 3$ ho la parabola $y = x^2 + x - 3$ che ha radici $\frac{3}{2}$ non accettab, $-\frac{5}{2}$ non accettab;
[per $x = 3$ ho $y = 9$; $V = (-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$;
[se $x < 3$ ho la parabola $y = x^2 - x + 3$ che ha $\Delta = -11 < 0$, quindi non ha radici;
[$\lim_{x\to 3^-} f = 9$; $V = (\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$
[$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} 1 + 2x = 7$, $\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} -1 + 2x = 5 \Rightarrow$
[in 3 abbiamo una punta■

28/11/2017 LEZIONE 32

Corollario del teo preced:
se $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo illimitato; $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$) all'interno di $I \Rightarrow$ vale ancora che $f \uparrow$ (risp. $f \downarrow$) in I: per es.
se $I = [a + \infty)$ e $f' \geq 0$ in $(a, +\infty) \Rightarrow f \uparrow$ in $[a, +\infty)$.

Infatti per vd se f cresce su tutto $[a, +\infty)$ prendo generici $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ con $x_1 < x_2$ e
devo vedere che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Guardo allora f su $[x_1, x_2]$: qui dentro per ipot $f' \geq 0 \Rightarrow$ per
il teor sopra ho che $f \uparrow$ in $[x_1, x_2] \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.■

NB2: se f ct in [a,b], der in (a,b), e
1) $f'(x) > 0$ in $(a,b) \Rightarrow f \uparrow\uparrow$ in $[a,b]$
2) $f'(x) < 0$ in $(a,b) \Rightarrow f \downarrow\downarrow$ in $[a,b]$.■

NB3: non vale il viceversa di queste due ultime affermazioni:
1) $f \uparrow\uparrow$ in $[a,b] \not\Rightarrow f'(x) > 0$ in (a,b)
2) $f \downarrow\downarrow$ in $[a,b] \not\Rightarrow f'(x) < 0$ in (a,b)

Es. $f(x) = x^3$ è $\uparrow\uparrow$ ad es. su $[-1,1]$, ma f' non è sempre solo > 0

[ciò succede perché se $f \uparrow\uparrow$ si ha $R_{x_0}(h) > 0$, ma il lim potrebbe essere 0, e quindi $f'(x_0) = 0$.
[Ad es. $f(x) = x^3, x_0 = 0$ allora $R_{x_0}(h) = h^2 > 0$, ma $lim_h R_{x_0}(h) = 0$.

Ex. Determinare dove $f(x) = x^3 - 3x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cresce e dove decresce, determinare max/min loc/glob
Sol. f der su $\mathbb{R}$, $f' > 0$ se $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0$ ossia $|x| > 1$; $f' < 0$ se $|x| < 1$;
$f' = 0$ se $x = \pm 1$
GRAFICO SEGNI e ANDAMENTO
si deduce che -1 è p di max loc, è anche di max glob? $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty \Rightarrow$
max globale non c'è, si ha $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ e -1 è solo di max loc;
+1 è p di min loc, e non glob perché $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$. ■

NB per trovare i max e min loc di f NON BASTA trovar dei p. staz di f: per stabilire se un p stazionario di una f è di min/max per f dobbiamo sapere l'andam di f: basta studiare il $\text{sgn}(f')$.

OSS: Determinare dove $f(x) = \frac{1}{x}$ cresce e dove decresce.
$CE = \mathbb{R}_\star$, per $x \in \mathbb{R}_\star$ si ha $f' < 0$: il teo è applicabile solo sugli INTERVALLI su cui $f' < 0 \forall\, x \in I$, quindi non su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Possiamo solo dedurre che $f \downarrow$ in $(-\infty, 0)$ e $f \downarrow$ in $(0, +\infty)$. Mentre in effetti passando da $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ la f non va a scendere

Ex. $\max_{[2,10]} \frac{x}{1+x^2}$. Si intende *max assol*
Sol. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$: CE= $\mathbb{R}$, $f' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ sse $x^2 \leq 1$, $|x| \leq 1$
PROSPETTO DEI SEGNI e ANDAM di f, indicare [2,10]
su [2,10] la fz è sempre decresc (e strett)$\Rightarrow \max_{[2,10]} \frac{x}{1+x^2} = f(2) = \frac{2}{5}$. ■

[EXX Giusti: 8.16 (no pti 12, 22), 8.17, 8.24, 8.29, 8.35 (tempo=$\frac{spazio}{vel}$)

Ex. Stabilire se l'eq $\frac{1}{x+1} - \log(x) = 0$ ha soluz e quante.
Sol. $f(x) = \frac{1}{x+1} - \log(x)$: si cercano i p di incontro con l'asse x del graf di f: si studia molto sommariamente f: ci interessa l'andamento
CE= $\{x \neq -1\} \cap \{x > 0\} = (0, +\infty)$, $\lim_{x\to 0^+} f = +\infty$ PLOT
$\Rightarrow \exists a > 0 : f(a) > 0$;

$\lim_{x\to+\infty} f = -\infty \Rightarrow \exists b > 0 : f(b) < 0$, f ct in CE $\Rightarrow$ (teor degli zeri) graf f attraversa l'asse $x \Rightarrow$ esiste soluz all'eq.
quante sol? $f' = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}$ sempre $< 0 \Rightarrow f \downarrow\downarrow \Rightarrow$ iniett $\Rightarrow$ una sola x su cui f fa $0 \Rightarrow$ soluz unica.■

OSS: $f = 0$ sse $\frac{1}{x+1} = \log(x)$: in qs caso facile vedere graficamente cosa succede

Teo di de l'Hôpital

Quando dobbiamo calcolare $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, con $c \in \bar{\mathbb{R}}$, che si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ può essere utile il

Teo di de l'Hôpital [si può dim con Cauchy, che si dim con Rolle, p.180 Zezza]:
siano f, g
• derivabili in $I_(c) - \{c\}$, $c \in \bar{\mathbb{R}}$,
• tali che $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ (oppure $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$) e
• g e $g' \neq 0$ per TUTTi gli $x \in I_\delta(c) - \{c\}$;
• $\exists \lim_{x\to c} \frac{f'}{g'}(x) = L \in \bar{\mathbb{R}}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f}{g}(x) = L \quad \blacksquare$$

Es. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ è un lim notevole e sappiamo che fa 1.
* Si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, vediamo se possiamo applicare il teo:
* $f(x) = e^x - 1, g(x) = x$ derivab dappertutto
* $g, g' \neq 0$ per ogni $x \neq 0$
* $\lim_{x\to 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f}{g} = 1$ ok■

[OSS: se non ricordo il risultato di un limite notevole, spesso con l'Hopital lo ritrovo (al
[compito cmq c'è il formulario)

OSS: Teo di de l'Hôpital per il solo limite dx o il solo lim sx, ad es.:
siano f, g
• derivabili in I_c^+, $c \in \bar{\mathbb{R}}$,
• tali che $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} g(x) = 0$ (oppure $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c^+} g(x) = \infty$) e
• g e $g' \neq 0$ per TUTTi gli $x \in I_c^+$;
• $\exists \lim_{x\to c^+} \frac{f'}{g'}(x) = L \in \bar{\mathbb{R}}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f}{g}(x) = L \quad \blacksquare$$

Limite sx analogo.

Ex. $\lim_{x\to 0^+} x\log(x)$, già visto: forma $0 \cdot \infty$, H. NON applicab, trasformo
* $\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$ forma $\frac{\infty}{\infty}$:

* $\frac{1}{x}$, $\log(x)$ derivab nei loro D
* $\frac{1}{x} \neq 0$ sempre sul D; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ sempre
* $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0.\blacksquare$

[Es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x}$ è un lim notev, sappiamo che fa 0.
[* Si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, vediamo se possiamo applicare il teo:
[* $f(x) = \log(x), g(x) = x$ derivab su tutto il loro rispettivo D
[* $g, g' \neq 0$ per ogni $x \neq 0$
[* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$
[$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = 0$ ok$\blacksquare$

[**Ex.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}}{\tan(\frac{1}{x})}$: CE $x \neq 0$
[* $\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow$ con il cambio di variab. iniettivo $z = \frac{1}{x}$ ho $\lim_{x\to-\infty} \tan(\frac{1}{x}) = \lim_{z\to 0} \tan(z)$
[$= 0 \Rightarrow$ forma $\frac{0}{0}$
[* e^{3x}, $\tan(\frac{1}{x})$ derivab nei loro D
[* $x \to -\infty$, e per $x < -\frac{2}{\pi}$ ho $0 > \frac{1}{x} > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\frac{1}{x}) \neq 0$.
[$\left(\tan(\frac{1}{x})\right)' = \frac{1}{\cos^2(\frac{1}{x})}\frac{-1}{x^2} \neq 0$ sempre, e NB il denom è $\neq 0$, perché per $x < -\frac{2}{\pi}$ ho $\cos(\frac{1}{x}) \neq 0$
[* $\lim_{x\to-\infty} \frac{3e^{3x}}{\frac{1}{\cos^2(\frac{1}{x})}\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -3e^{3x}x^2\cos^2(\frac{1}{x})$: $\cos^2(\frac{1}{x}) \to 1$, ma $e^{3x}x^2 \sim 0\cdot\infty$, ma l'esp
[va più forte della potenza: $\frac{x^2}{e^{-3x}}$ con $z = -x$ ho $= \frac{z^2}{e^{3z}} \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} -3e^{3x}x^2\cos^2(\frac{1}{x}) = 0$
[$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}}{\tan(\frac{1}{x})} = 0$ $\blacksquare$

Ex. eserciziario: calcolare $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$
Sol. Forma $\frac{0}{0}$, fz derivabili nei D, $g, g' \neq 0$ in $I_\delta(1) - \{1\}$, $\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{1}{x}}{2x} \to \frac{1}{2}$ se $x \to 1$
$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

Oss: se applico H. a **forme limite non appropriate** ottengo ris sbagliato!
Es. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{x}$: forma $\frac{-\infty}{0^+} \to -\infty$
ma se applicassi H. avrei $\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} \to +\infty$

Oss2: qualche volta il teo di H. **non aiuta**
Es. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(x+1)\log(x)}}{x}$: forma $\frac{0}{0}$
$\frac{f'}{g'} = e^{(x+1)\log(x)}\left(\log(x) + \frac{x+1}{x}\right)$: più complicato del lim originario
invece in modo diretto: $\frac{f}{g} = \frac{x^{x+1}}{x} = x^x \to 1$, limite visto $\blacksquare$

30/11/2017 LEZIONE 33

OSS3: qualche volta l'H. **non necessario**!
Es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-1}{x}$: forma $\frac{\infty}{\infty}$,
ma $\frac{3^x-1}{x} = \frac{3^x}{x} - \frac{1}{x} \to +\infty$

cmq in qs caso l'H sarebbe ok perché le ipot sono rispettate, e $\frac{f'}{g'} = 3^x \ln(3) \to +\infty$■

Qlc volta utile **applicare H. 2 volte**

Ex. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}$.

Sol. Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Si può fare cambiam di var INIETTIVO $\frac{1}{x} = z \to +\infty$

$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{e^z}{z^2} \to +\infty$.

Ma se non lo vedo, posso applic. l'H.: * f, g derivab nel D; * $g, g' \neq 0$ sempre;

* $\frac{f'}{g'} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ e si è diminuita la potenza a denom (semplificato il lim).

Si riapplica allora H.: $\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \sim \frac{1}{2}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$.

[EXX Giusti p.285 n.8.37 (no p.ti 18,20, 29, 35), 8.38 (limiti parametrici)

Fz convesse o concave

Una fz è convessa su I intervallo (chiuso o aperto o semiaperto) quando sopra I il graf di f è **arcuato** come o più di una retta, con la conca rivolta verso l'alto

DISEGNO

Come descriverlo? presi qualsiasi $P_1, P_2 \in$ Graf(f), con $x_1, x_2 \in I$, la porzione di graf(f) tra P_1 e P_2 rimane **sotto** la secante al graf per P_1, P_2

formalizzazione: se $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in$ graf f allora $y_i = f(x_i)$, la retta secante in P_1, P_2 è la retta per $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (il coeff angol è il rapp increm di f):

$$y = r(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

si vuole che per qualunque ascissa $x \in [x_1, x_2]$ sia $f(x) \leq r(x)$

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : CE \to \mathbb{R}$, con $I \subset CE$, si dice

• **convessa** su I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ si ha che $\forall x \in [x_1, x_2]$, $f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$.

NB in $x = x_1$ ho $r(x_1) = f(x_1)$, in $x = x_2$ ho $r(x_2) = f(x_2)$, ovviamente, uindi in x_1 e x_2 vale sempre l'uguale: $f(x) = r(x)$

CASO LIMITE: se graf f è una retta (f fz affine) $\Rightarrow$ la secante è la retta stessa $\Rightarrow$ vale $f(x) = r(x)$ per OGNI $x \in [x_1, x_2]$

• **strettamente convessa** su I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ si ha che $\forall x \in (x_1, x_2)$ si ha $f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$.

Es. x^2, e^x sono strettam conv su $\mathbb{R}$.

NB: vogliamo che la conca sia **una sola**

Es. $f(x) = -|\sin(x)|$ su $I = [0, 4\pi]$, DISEGNO: non convessa

Ex: è $\log(x)$ convessa sul CE? DISEGNO, retta
Graf(f) arcuato, ma conca rivolta verso il basso

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : CE \to \mathbb{R}$ si dice
• **concava** su I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ si ha che $\forall x \in [x_1, x_2]$ si ha
$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$.
• **strettamente concava** su I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ si ha che $\forall x \in (x_1, x_2)$ si ha
$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$.
Stavolta è la retta secante che sta SOTTO graf(f) quando $x \in (x_1, x_2)$.

Es. $\log(x)$ è strett concava su $(0, +\infty)$

Es. E' $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ convessa su $\mathbb{R}$?

PLOT
è concava ma non strett
[NB è un es. di fz cont ma NON derivabile su tutto il CE

Es. $-x^2 + 2x + 1$ è concava su $\mathbb{R}$: DISEGNO
ogni parabola con la concavità rivolta verso il basso è concava

[Es. $|x|$ convessa sul CE ma non derivab su tutto il CE

Es. E' x^3 conv su $\mathbb{R}$?

Es. ogni retta è sia conv che conc

Dato il graf intuiamo facilm la convessità/concavità, ma in generale graf non noto

Test di convessità/concavità

Teo. Sia f cont su $[a, b]$ e derivab 2 volte su (a, b):
• $f''(x) \geq 0$ $(> 0) \forall x \in (a, b)$ sse f convessa (risp: strett) su (a, b)
• $f''(x) \leq 0$ $(< 0) \forall x \in (a, b)$ sse f concava (risp: strett) su (a, b) ■

Es. $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$. In ogni intervallo (a, b) f è cont ed ha f'' (f' polinomio),
$f' = 6x + 3, f'' = 6 > 0 \Rightarrow f$ convessa su (a, b) per ogni a, b, quindi convessa su ogni $[x_1, x_2]$,
quindi su $\mathbb{R}$

ogni parab con concav verso l'alto è convessa

NB: può succedere che una fz NON sia convessa sul suo CE, né concava, ma abbia SIA tratti (intervalli) di convessità che di concav

Es. x^3 PLOT convessa su $\mathbb{R}_+$, conc su $\mathbb{R}_-$

Def. x_0 si dice **punto di flesso** per f se in x_0 f cambia concavità

[Ex. E' $3x^3 - 6x + 1$ conc sul DE?

Se f derivabile 2 v sul CE e $f''(x) \geq 0$ per $x \geq x_0$, mentre $f''(x) \leq 0$ per $x \leq x_0$
PROSPETTO SEGNI E CONCAVITà, allora x_0 è un p di flesso: in x_0 f'' cambia segno

[quanto mi aspetto che faccia $f''(x_0)$?

Teo. Siano $f : CE(f) \to \mathbb{R}$, x_0 interno a CE(f), f derivabile 2 v in x_0 [NB: SOLO in x_0, non necessariamente f deve essere deriv in punti x vicini a x_0 per poter fare il ragionamento sopra]. Se x_0 è p di flesso $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Ex. $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$: 1) stabilire se ci sono pti di flesso 2) pendenza di f in 0?
1) $f''(x) = 18x \geq 0$ sse $x \geq 0$: PROSPETTO SEGNI: in 0 cambia concavità, 0 è p di flesso. Infatti $f''(0) = 0$.
2) $f'(x) = 9x^2 - 6$, $f'(0) = -6 < 0$.

cfr x^3 ha flesso in 0, $f'(0) = 0$.

[**Ex.** $f(x) = x^5$ 1) ha f flessi? 2) pendenza di f in 0?
[1) $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3 \Rightarrow$ flesso in 0, infatti $f''(0) = 0$. 2) $f'(0) = 0$.

NB: non è detto che se $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ sia p di flesso.

Es. $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, ma 0 è p di min ass

[EX Giusti p. 295 n.9.5

4/12/17 LEZIONE 34

Studio di fz

Studiare una fz signif capirne i suoi elem caratteristici ed arrivare a disegnarne il graf
NB: per studi specifici spesso il grafico è immediato: OSSERVARE sempre l'espressione della funzione prima di procedere

1. CE

subito riportare ogni cosa trovata sul grafico, ciò consente di evitare di arrivare in fondo a dover disegnare un grafico che rispetti informazioni trovate INCOERENTI fra loro.

2. particolarità della funzione (pari/dispari)
3. segno della funzione: dove $f \geq 0$, dove $f < 0$ ed eventuali intersezioni con gli assi cartesiani

4. limiti:
- $\lim_{x\to q} f(x)$, per i punti q estremi degli intervalli che definiscono CE e determinazione degli eventuali asintoti
- eventuali punti di discontinuità di f: limiti destri e sinistri/giustificazione della continuità
5. derivata prima:
- eventuali pti di non derivab./giustificaz. della derivabilità
- dove f cresce, dove decresce
- massimi e minimi locali/assoluti
6. derivata seconda: dove f convessa, dove concava, p.ti di flesso
7. grafico.

Se nel riportare sul graf le info raccolte in uno dei pti ci si accorge di una incoerenza, allora qualcosa è stato sbagliato nell'ultimo conto o in un conto precedente: BISOGNA tornare SUBITO indietro a controllare e rettificare l'errore. In qs modo si arriverà in fondo con uno studio corretto

Es. se si è trovato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ma sopra si era trovato che $f \geq 0$ per le $x < 0$, uno dei due risult è sbagliato

Le info trovate ai vari pti devono anche essere coerenti con il graf

Es. se si è trovato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ non si può disegnare un grafico che si avvicina all'asse delle x via via che x aumenta.

OSS: un ex del tipo *Tracciare il graf della fz*, nel caso in cui il graf non sia di quelli immediati, signif che dobbiamo studiare la fz per saper disegnare il graf

EX COMPITO 9/9/15 Si studi la fz $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$ e se ne tracci il graf
Sol. 1. CE: $x \neq \pm 3$
2. f pari $\to$ la studio solo sugli $x \geq 0$ e poi ribalto il plot
3. $f \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9, |x| \geq 3$; $f = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $\lim_{x\to 3^\pm} f = \infty$, seguendo il prospetto dei sgn f ho risp $\pm\infty$, asint vert
$\lim_{x\to+\infty} f = 1$, asint orizz
f cont sul CE
5. f der su CE: $f' = \frac{2x(x^2-9)-2x\cdot x^2}{(x^2-9)^2}$ per gli $x \geq 0 : f' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 - x^2 \geq 0$ mai $\to f \downarrow\downarrow$
max loc in 0
6. f' derivab: $f'' = \left(\frac{-18x}{(x^2-9)^2}\right)' = \frac{-18(x^2-9)^2+2(x^2-9)2x\cdot 18x}{(x^2-9)^4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-9)(-x^2+9+4x^2) \geq 0$, $(x^2-9)(3x^2+9) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9$ ok coerente col graf.■

EX. Tracciare il graf di $f(x) = x^2(\log(x) - 1)$.

[EXX Giusti 9.6 p. 306 (no p.ti 15, 18); Eserciziario n. 172, 178, 180, 182

5/12/2017 LEZIONE 35

ALTRO MODO per stabilire la natura di pti stazionari di una fz senza dover studiare il segno di tutta f'

Richiami.
[Fermat: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ p estremale di f, f der in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
[$x_0 : f'(x_0) = 0$ p staz (o critico) per f
studiando $sgn(f')$ stabilisco dove f cresce, dove descresce e quindi se x_0 staz è di min o di max o nulla.

Quando però stud $sgn(f')$ su tutto un intorno di x_0 fosse troppo complic, uso la seguente propr

Teo: secondo criterio per la ricerca di estremi locali di una fz:
f cont in un interv I, x_0 interno ad I, f der <u>2 volte</u> in I_{x_0}, <u>con f'' continua</u>
• se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p. di min loc
• se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p. di max loc.

OSS: si pensi alle parabole

Es. $f(x) = x^3 - 6x^2$: stabilire la natura dei p staz.
P. staz: $f' = 0 : 3x^2 - 12x = 0$, $x(x - 4) = 0$, $x = 0, 4$.
f derivab dappertutto e f'' cont; $f''(x) = 6x - 12 : f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow 0$ è p di max loc; $f''(4) = 12 > 0 \Rightarrow 4$ è p di min loc
infatti $f' \geq 0$ sse $x \leq 0$ o $x \geq 4$ DISEGNO■

EXX vari

[**Ex.** Studiare segno e zeri della fz $3x^4 - 4x^2 - 6x + 2 = 0$.
Sol. $\lim_{x\to\pm\infty} f = +\infty$: non chiaro nemmeno se soluzione esista. PLOT
$f' = 12x^3 - 8x - 6 \geq 0$ dove? sse $6x^3 - 4x - 3 \geq 0$
Studio sgn di $g(x) = 6x^3 - 4x - 3$: $(g(0) = -3)$ $g' = 2(9x^2 - 2) \geq 0$ sse $|x| \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$
$g(\frac{\sqrt{2}}{3}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}(\frac{2}{3} - 1) - 3 < 0$
$g(-\frac{\sqrt{2}}{3}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}(-\frac{2}{3} + 1) - 3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{1}{3} - 3 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - 3 < 0$ perché $4\sqrt{2} < 4 \cdot 2 < 27$
PLOT sgn g' e andam g
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$: esiste uno zero di g perché g polin di grado dispari, ma con il nostro studio concludiamo che la radice x_1 di $g = 0$ è unica, $x_1 > \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $g(x) < 0$ per ogni $x < x_1$, $g(x_1) = 0$, $g(x) > 0$ per ogni $x > x_1$.
Allora $f' = 2g \geq 0$ sse $x \geq x_1$. E' $f(x_1) < 0$?
so solo che $x_1 > \frac{\sqrt{2}}{3}$: valuto intanto $f(\frac{\sqrt{2}}{3}) = [3 \cdot \frac{4}{81} - 4\frac{2}{9} - 6\frac{\sqrt{2}}{3} + 2 = \frac{4}{27} - \frac{24}{27} - \frac{54}{27}\sqrt{2} + \frac{54}{27} = \frac{34}{27} - \frac{54}{27}\sqrt{2} < 0$ perché $34 < 54 < 54\sqrt{2} \Rightarrow f(\frac{\sqrt{2}}{3}) < 0 \Rightarrow$ PLOT sng f' e andam f

2 soluz.■

[**Ex.** per casa. Esistenza e unicità di soluz di equaz $-x = e^x$.
[*Sol.* $f(x) = e^x + x$ cont e $\uparrow\uparrow \Rightarrow$ SE esiste, soluz è unica
[$f(0) = 1 > 0, f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0 \Rightarrow \exists c \in (-1, 0) : f(c) = 0$.■

[**Ex.** Esistenza e num di soluz di equaz $x^3 - 6x - 1 = 0$ (fa cunette attorno all'asse x ed ha
[3 sol)
[*Sol.* Esistenza: soluzione esiste perché (ex visto) polinomio di grado dispari.

[Numero di soluz: $f' = 3(x^2 - 2) \geq 0$ sse $|x| \geq \sqrt{2}$: $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 1 > 0$,
[$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 1 < 0 \Rightarrow$ 3 soluzz PLOT 2.■

[EXX da eserciziario: 56 monotonia di fz param, 62 max vincolato di parab param, 84 immag
[di fz param, 85 iniett di fz param.

Ex. Dal compito 11/9/14. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3\,x)\,\sqrt{\ln(1+2\,x^2)}}{x^2}; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left|x^2+x+1\right| - 2\,x^2}{\left|-x^3+x\right| - x^3 + 2\,x^2}.$$

Sol. 1) forma $\frac{0}{0}$: $\frac{\sin(3\,x)}{3x}\frac{3}{x}\sqrt{\ln(1+2\,x^2)}$ cambio di variab $z = 3x$ iniett $\Rightarrow \frac{\sin(3\,x)}{3x} \to 1$.
$x > 0 \Rightarrow 3\sqrt{\frac{\ln(1+2\,x^2)}{x^2}} = 3\sqrt{2\frac{\ln(1+2\,x^2)}{2x^2}}$: cambio di var $z = 2x^2$, $2x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON iniett, ma $2x^2 : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ lo è $\Rightarrow \frac{\ln(1+2\,x^2)}{2x^2} \to 1$ ed il lim è $3\sqrt{2}$
2) forma $\frac{\infty}{\infty}$, ma $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-2\,x^2}{x^3-x-x^3+2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+x+1}{-x+2\,x^2}$ quoz di polin, stesso grado $\Rightarrow$ lim $= -\frac{1}{2}$.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: nei calcoli intermedi alla ricerca di un limite, NON SI PUò SOSTITUIRE UN'ESPRESSIONE CON IL SUO LIMITE!!

ES. Per $x \to 0$ calcolare il lim di $\frac{x}{\frac{e^x-1}{x} - e^x}$: forma $\frac{0}{0}$.
1) scrivo l'espressione come $\frac{x^2}{e^x-1-xe^x}$, ed usando l'H. guardo il lim di $\frac{2x}{e^x-e^x-xe^x} = -\frac{2}{e^x} \to -2$, dunque il limite proposto fa -2.
2) se, invece, SOSTITUISSI $\frac{e^x-1}{x}$ con il suo limite 1, otterrei nell'espressione di partenza $\frac{x}{1-e^x}$, che tende a -1, quindi otterrei un risoltato SBAGLIATO!

ES.2 Per $x \to 0$ calcolare il lim di $\frac{1-\cos(x)}{1-e^x+xe^x}$: forma $\frac{0}{0}$.
1) usando l'H. calcolo il limite di $\frac{\sin(x)}{xe^x} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{e^x} \to 1$, dunque il limite proposto fa 1
2) se invece SOSTITUISSI xe^x con il suo limite 0, nell'espressione di partenza otterrei $\frac{1-\cos(x)}{1-e^x} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{x}{1-e^x}x \to 0$, che è un risultato SBAGLIATO!

[**Ex.** Una fabbrica di birra si accorge che le lattine che usa le costano troppo. Vuole
[conservarne: la forma cilindrica, il materiale, il contenuto (33 cl = $330cm^3$). Agisce

[quindi sulle dimensioni: DISEGNI
[Determinare la minima superficie, fissato un volume del cilindro pari a 350 cc.

Sol. Supericie: dati r,h DISEGNO superficie del cilindro $= \pi r^2 \cdot 2 + 2\pi rh$
Volume$= \pi r^2 h = 350$ fissato
Si cerca allora

$$\begin{array}{c} \min \qquad 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ r, h > 0 : \\ \pi r^2 h = 350 \end{array}$$

si chiama **pb di ottimizzazione vincolata**: ho 2 variabili, r e h, si ricava una variabile in fz dell'altra dal vincolo, e la sostituisce nella fz da minimizzare
$h = \frac{350}{\pi r^2} > 0 \Rightarrow$ devo minimizzare $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{350}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{700}{r}$ ed il pb diventa $\min_{r>0} f(r)$, con $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{700}{r}$.
f è der su tutto $(0, +\infty)$, $f'(r) = 4\pi r - \frac{700}{r^2}$, che è ≥ 0 sse $r^3 \geq \frac{700}{4\pi}$, cioè $r \geq \sqrt[3]{\frac{760}{4\pi}}$
PROSPETTO SEGNI e ANDAMENTO di f
quindi il raggio $\hat{r}$ che consente di realizzare il min è $\hat{r} = \sqrt[3]{\frac{700}{4\pi}} \approx 3,8$ cm $\Rightarrow$ diametro di base $2r \approx 7,6$ cm e la relativa altezza ottimale $\hat{h} = \frac{350}{\pi \hat{r}^2} \approx 7,6$ cm $\Rightarrow$ la superficie minima, per volume fissato a 350 cc, è $2\pi \hat{r}^2 + 2\pi \hat{r}\hat{h} \approx 274$ cc■

[**Ex. Gestione ottima di magazz** Un'azienda necessita ogni anno di $S = 1'000$ tonnellate
[di merce per il suo piano di produzione. Tale merce è ordinata ad intervalli regolari di tempo
[in quantità x tonnellate. Ogni ordinaz costa 300 Eu, indipendentem dalla dimensione x.
[Per il calcolo della giacenza, supporre che la giacenza sia per tutto l'anno pari a quella media
[$\frac{x}{2}$.
[Detenere x tonnellate di merce tutto l'anno costa $100x$ Eu.
[1) Determinare il costo complessivo C (giacenza + ordinazioni) di gestione del magazzino
[2) Determinare la mole $\hat{x}$ di merce da richiedere ad ogni ordinazione in modo da minimizzare C

Sol. 1) Con ogni ordinaz accumulo x. In capo all'anno devo aver procurato $S \Rightarrow$ n. di ordini nel'anno $\frac{S}{x}$.
Spesa per tutte le ordinazioni $300\frac{S}{x}$
Spesa per la giacenza: $100\frac{x}{2}$
$C(x) = 300\frac{S}{x} + 100\frac{x}{2}$.
2) Cerco $\min_{0<x<1000} C(x)$:
$C' = -\frac{300'000}{x^2} + 50$, $C' \geq 0$ per $50 \geq \frac{300'000}{x^2}$, $x^2 \geq \frac{30'000}{5} = 6'000$, $|x| \geq 6'000$
GRAF SEGI E ANDAM C
escludo gli $x \notin [0, 1000]$
$\hat{x} = \sqrt{6'000} \approx 80$ ton
(non richiesto) $\hat{C} = c(\hat{x}) = C(\sqrt{6'000}) \approx 303'873$ Eu. ■

[**Ex.** Esistenza e unicità di soluz di equaz $x^5 - 6x - 12 = 0$

[*Sol.* Soluzione esiste peché (ex visto) polinomio di grando dispari.
[Per l'unicità: $f' \geq 0$ sse $|x| \geq \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$. $f(-\sqrt[4]{\frac{6}{5}}) < 0 \Rightarrow 1$ sola soluz PLOT 1

[OSS: $-\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{4}} + 6\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{4}} - 12 < 0$ se $\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{4}} < 2$, ma $\frac{6}{5} < 2^4$ allora ok.

[**Ex.** Cercare soluz di $e^x + x^2 = 0$
[*Sol.* $\nexists$

[**Ex.** compito 11/9/2014. Un'impresa deve scegliere il prezzo $p > 0$ per un certo prodotto [che mette in vendita, e sa che la funzione domanda è

$$d(p) := \begin{cases} 3 + \frac{10}{p} - p & \text{se } p \in (0, 5] \\ 0 & \text{se } p > 5. \end{cases}$$

[Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di [vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p \cdot d(p)$.
[L'impresa vuole individuare p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le [vieta di scegliere p maggiore di 3.
[a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile affermare [immediatamente che tale problema ammette soluzione.
[b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \leq 3$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).
[c) Si dica se una legge che invece imponesse $p \leq 1$ obbligherebbe l'impresa ad un profitto [inferiore.

Sol. a) La funzione profitto è data da

$$f(p) := p\, d(p) = 3\, p + 10 - p^2,$$

dobbiamo determinare

$$\max_{p \in (0,3]} \; 3\, p + 10 - p^2.$$

Non è possibile stabilire a priori se il problema ammetta soluzione o meno: il teorema di Weierstrass in questo caso non è applicabile.
b) Si tratta di studiare una parabola con la concavità rivolta verso il basso,

$$f'(p) = -2\, p + 3 \geq 0 \text{ sse } p \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow p = 3/2$ è il punto di massimo globale della funzione su $(0, 3]$, ma anche su $(0 + \infty)$. [poiché per $x > \frac{3}{2}$ la funzione è decrescente] $\Rightarrow$ la legge che impone la limitazione superiore $p \leq 3$ non fa decrescere il massimo profitto dell'impresa.
c) Se venisse introdotta la legge che impone $p \leq 1$, allora il pb diventerebbe

$$\max_{p \in (0,1]} \; 3\, p + 10 - p^2.$$

Dal graf e dal $\text{sgn}(f')$ si verifica che per $p \in (0, 1)$ la parab è crescente strett. $\Rightarrow$ il max profitto verrebbe raggiunto su $p(1) < p(\frac{3}{2})$, quindi in questo caso la legge costringerebbe l'impresa ad un

profitto inferiore a quello ottenibile senza la legge.■

[**Ex.** di microeconomia. L'*efficienza* della produzione fatta da un'azienda è misurabile con il costo medio $CM = \frac{C(q)}{q}$ di produzione di una quantità q di merce. L'effic è max se il costo medio è min. Vincoli su $q : q > 0$.
Se $C(q)$ derivab su $(0, +\infty)$, quando è che CM min?
Abbiamo il pb $\min_{(0,+\infty)} CM(q)$: un $\hat{q}$ soluz è necessariam interno a $(0, +\infty)$ (perché l'interv è aperto). Per il teor di Fermat deve essere $CM'(\hat{q}) = 0$. Calcoliamo $CM' = \frac{C'q-C}{q^2} = \frac{C'}{q} - \frac{C}{q^2} = 0 \Rightarrow C' = \frac{C}{q}$, ossia costo medio = costo marginale.
Quindi: se $\hat{q}$ minimizza il CM allora $C'(\hat{q}) = \frac{C(\hat{q})}{\hat{q}}$■

[NB per stabilire se un p stazionario di una f è di min per f dobbiamo sapere l'andam di f: basta sudiare il sgn(f').
CM cresce dove $CM'(q) \geq 0$ sse $C' \geq \frac{C}{q}$.

[**Ex.** Se $C(q) = 5q + \frac{q^2}{80}$, determinare il valore $\hat{q}$ di min costo medio
Sol. $C'(q) = 5 + \frac{q}{40}$, $CM(q) = \frac{1}{q}\left(5q + \frac{q^2}{80}\right)$: perché q sia di min si deve avere $5 + \frac{q}{40} = \frac{1}{q}\left(5q + \frac{q^2}{80}\right)$, il che succede sse $\frac{q}{80} = \frac{q}{40}$ ossia sse $q = 0$. PLOT 5
E' $q = 0$ di min? parabola $y = q(5 + \frac{q}{80})$ ha radici $0, -400$, DISEGNO, quindi in effetti su $(0, +\infty)$ il p di min è 0. PLOT

[**Ex.** Se $C(q) = \frac{q^3}{2} - \frac{25}{4}q^2 + 30q + 100$, determinare il valore $\hat{q}$ di min costo medio
Sol. $CM' \geq 0$ sse $C'(q) = \frac{3}{2}q^2 - \frac{25}{2}q + 30 \geq CM(q) = \frac{q^2}{2} - \frac{25}{4}q + 30 + \frac{100}{q}$, e ciò succede sse $q^2 - \frac{25}{4}q - \frac{100}{q} \geq 0$, $\mathbf{g(q)} = q^3 - \frac{25}{4}q^2 - 100 \geq 0$:
studio g: vincolo $q \geq 0$
$g'(q) = 3q^2 - \frac{25}{2}q \geq 0$ sse $q(3q - \frac{25}{2}) \geq 0$ sse $q \geq \frac{25}{6}$
$g(q) : g(0) = -100$ poi g decresce, poi cresce e $\lim_{q\to+\infty} +\infty$ PLOT 6
$\Rightarrow$ esiste un'unica soluz a $CM' = 0$: sia $\hat{q}$ la soluz di $g = 0$:
PLOT 7 di sgn(g) e andam di C. abbiamo che CM decresce prima di $\hat{q}$ e CM cresce dopo $\hat{q} \Rightarrow \hat{q}$ un p di min ass per CM
Per determinare $\hat{q}$ esplicitam: esiste una formula per le soluz di una eq di terzo grado, ma complicata. Si applica allora il metodo di bisez a $g(q)$:
intervallo di partenza: su $\frac{25}{6}$ so che $g < 0$, $\frac{25}{6} \sim \frac{24}{6} = 4$, verifico $g(4) = 64 - \frac{25\cdot 16}{4} - 100 < 0 \Rightarrow a = 4$.
Tento poi $g(10) = 10^3 - (\frac{25}{4} + 1) \cdot 100 = 100(10 - \frac{25}{4} - 1) = 100\frac{36-25}{4} > 0 \Rightarrow b = 10$.
Si procede con la calcolatrice e si trova $\hat{q} \approx 7.84$ con un errore $< 10\%$.■

[**EX**. Tracciare il graf di $f(x) = x^2 + \ln x$.
[*Sol.* $CE = \mathbb{R}_{++} \Rightarrow$ f non può essere pari/disp, né graf f può intersecare l'asse y
[$f \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -\ln x$. diseq. non risolub esplicitam, ma possiamo applic il teo degli
[zeri: f cont su D perché somma di fz cont, $\lim_{x\to 0} f = -\infty$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow f$ ha
[sicuram una radice $x^\star$ in $(0, 1)$.
[f derivab sul CE perché somma di fz der, $f' = 2x + \frac{1}{x} > 0$ sul D $\Rightarrow f \uparrow\uparrow\Rightarrow$ una sola

[intersez con l'asse $x \Rightarrow f > 0 \forall x > x^\star, f < 0 \forall x < x^\star$
[Ancora sui limiti: $x = 0$ asint vertic, $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$ immediato
[Ancora su f': non ci sono max/min loc/ass
[f' derivab, $f'' = \left(2x + \frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leq 2$, $x^2 \geq \frac{1}{2}$, abbiamo $x > 0$, quindi
[sse $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ PROSPETTO SEGNI $\Rightarrow f$ convessa strett su $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, concava strett su
[$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
[Per sapere se $x^\star$ sarà maggiore o minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$, possiamo guardare il segno di $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
[$= \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) > 0$ sse $\ln 2 < 1, 2 < e$, ok. Poiché
[$f \uparrow\uparrow$ e $f(x^\star) = 0$ mentre $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, avremo che $x^\star < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
[PLOT

[EX Usando la definizione di derivata prima in un punto, dimostrare che $\Big(\log(x)\Big)'(x) = \frac{1}{x}$

[EX $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(x)}{2x\cos(x)}$

[EX $f(x) = \sin(x)$: calcolare la controimmagine $f^{-1}(\frac{1}{2})$

[EX Determinare l'immagine di $[0, \frac{3}{4}\pi]$ tramite $\cos(x)$

EX Siano $h(x) = x^2$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq \frac{3}{2} \\ -2x + 1, & x > \frac{3}{2}. \end{cases}$
1) Esiste un x_0 per cui $h(f(x_0)) = 0$?
2) Esiste un x_1 per cui $h(f(x_1)) = -\frac{3}{2}$?

EXX. dall'eserciziario n. 52, n.56

EX. n.4 del Compito del 16/1/13

EX. "Proprietà delle fiunzioni" a pag. 22 del fascicolo di appunti per le lezioni "FUNZIONI"

[EXX eserciziario: 150, 163, 167, 175, 176, 181, 186, 192, 203, 204, 213

[EXX sulle derivate 2017-2018: n. 12, 22, 24

[Exn.2 del Compito del 14/7/16

RACCOMANDAZIONI PER IL COMPITO D'ESAME

- venite all'esame preparati: non perdete tempo a "provare"
- niente panico: leggete bene il testo di ogni esercizio, ed andate a capire cosa chiede esattamente. Gli esercizi sono pensati sul programma svolto, e chiedono cose che siete in grado di fare se avete sufficienti prerequisiti e se avete studiato e capito le cose fondamentali
- concentratevi subito sugli exx che ritenete di saper fare: accumulare almeno 18 punti

FATTI BENE

- se vi bloccate su un ex, passate oltre, e tornateci sopra dopo un po', vedrete le cose con più lucidità
- giustificate, sinteticamente, tutti i passaggi non immediati
- siate ordinati nello scrivere: mettetemi in condizioni di capirvi
- NON INVENTATE proprietà o teoremi, ma poggiate i vostri ragionamenti sui teoremi e le definizioni visti in classe, ed usate la logica in modo rigoroso
- guai grossi per chi copia
- se bocciate all'esame vuol dire che avete preso meno di 17 su 40, ossia meno di 12,75 su 30, quindi siete MOLTO INSUFFICIENTI. Non ha senso dunque che continuiate a prepararvi all'appello successivo con le stesse modalità adottate. Riprendete questi appunti da capo, rileggete, fate esercizi e cercate di capire, segnatevi i punti critici e venite a domandare a me o ai tutor
- io ed i tutor continuiamo a fare regolare ricevimento

BUON LAVORO!