(73)

es. deposito oggi 100

a fine trimestre 100 vale

$100 \cdot \left(1 + i_{(s)} \cdot \frac{1}{4}\right) = 100{,}25$ lordo

in effetti ricevo $0{,}25\left(1 - \frac{26}{100}\right) = 0{,}25 - 0.065 = 0{,}185$

montante netto $= 100 + 0{,}185 = 100{,}185$

(73)

(72)

~~montante~~

OSS interessi I cumulati dentro il trimestre su $\{S\}/\{t\}$

$I_{\text{in } T} = S \cdot i_{(s)} \cdot (T-t)$ lordi

$\tilde{I} = \left[S \cdot i_{(s)} \cdot (T-t)\right]\left(1 - \frac{26}{100}\right)$ netti

$= S \cdot i_{(s)} \cdot \left(1 - \frac{26}{100}\right) \cdot (T-t)$

$\tilde{i}_{(s)}$ tasso netto di int. $= 0{,}0074$

$30/6 - 1/4 : \frac{91}{366}$ $\quad 30 + 31 + 30$

$4/8 - 30/6 : \frac{31+3}{366} = \frac{34}{366}$

12/10/17

(71) EX

Saldo su CC :

$i_{(s)} = 1\%$ annuo lordo , osserviamo tasso attivo

tasso passivo

sugli interessi che riscuoto pago il 26% di tasse

in regime misto , capitaliz. degli int. trimestrale

al 31/3 , 30/6 , 30/9 , 31/12

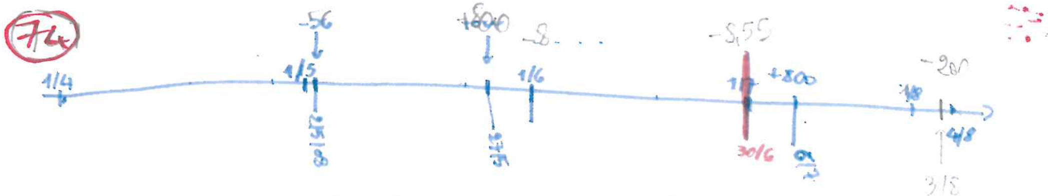
giorni contati nella convenz. Act/Act

All' 1/4/08 ho saldo 5'964,49 €

2/5/08	-56	€	pagamento con BCM, coop
27/5/08	+800	€	emolumenti
1/6/08	-8	€	spese trimestre conto
30/6/08	-8,55	€	bollo 1° g. conto
6/7/08	+800	€	emolum.
3/8/08	-200	€	pagam. con BCM, Mediaw.

Saldo al 4/8/08 [escludo ~~avendi~~ gli inter. del giorno 4/8] :

(74)



Saldo in T $= M_T\left(\{x_0, x_1, \dots x_n\}\right)$

T = 4/8

$5'964{,}49 \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \underbrace{[30/6 - 1/4]}_{\frac{91}{366}}\right) \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \underbrace{[4/8 - 30/6]}_{\frac{34}{366}}\right)$

$- 56 \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{30 + 30}{366}\right) \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{34}{366}\right)$

$+ 800 \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{5+30}{366}\right) \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{34}{366}\right)$

$- 8 \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{30}{366}\right) \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{34}{366}\right)$

$- 8.55 \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{1}{366}\right) \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{34}{366}\right)$

$+ 800 \cdot \left(1 + \tilde{i}_{(s)} \cdot \frac{26+3}{366}\right)$

75

$- \; 200 \cdot \left(1 + \hat{i}_{(s)} \cdot \frac{1}{366}\right) \cdot$

$= 7'305,40$

76

EX $i_1 = 1\%$ annuo lordo fino a 30/6
$i_2 = 0,5\%$ " " dal 30/6

1/4/08	5'964,49 €
2/5	-56
27/5/08	+800
1/6	-8
30/6	-8.55
~~6/7~~	~~-150~~
6/7	+800
3/8	-200

Montante al 4/8/2008 ? escluso 4/8

$i'_1 = \frac{1}{100} \cdot \left(1 - \frac{26}{100}\right) = \frac{0.74}{100}$ netto

$i'_2 = \frac{0,5}{100} \cdot \left(1 - \frac{26}{100}\right) = \frac{0.37}{100}$ netto

77

$5'964,49 \cdot \left(1 + i'_1 \cdot \frac{91}{366}\right) \cdot \left(1 + i'_2 \cdot \frac{34}{366}\right)$

$- \; 56 \cdot \left(1 + i'_1 \cdot \frac{60}{366}\right) \cdot \left(1 + i'_2 \cdot \frac{34}{366}\right)$

$+ \; 800 \cdot \left(1 + i'_1 \cdot \frac{35}{366}\right) \cdot \left(1 + i'_2 \cdot \frac{34}{366}\right)$

$- \; 8 \cdot \left(1 + i'_1 \cdot \frac{30}{366}\right) \cdot \left(\quad " \quad \right)$

$- \; 8,55 \cdot \left(1 + i'_1 \cdot \frac{1}{366}\right) \cdot \left(\quad " \quad \right)$

$\cancel{- \; 150 \cdot \left(1 + i'_2 \cdot \frac{26+3}{366}\right)}$

$+ \; 800 \cdot \left(1 + i'_2 \cdot \frac{29}{366}\right)$

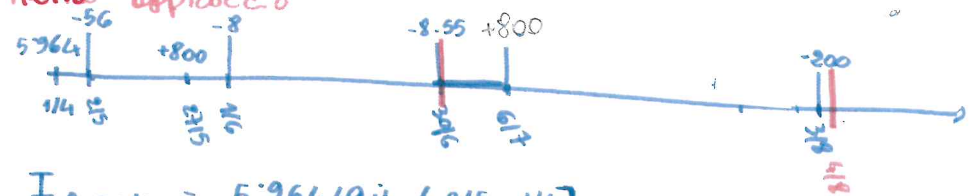
$- \; 200 \cdot \left(1 + i'_2 \cdot \frac{1}{366}\right)$

$= 7'305,89$

$< 7'308,40$

78

Altro approccio



$I_{al\ 30/6} = 5'964,49 \cdot i'_1 \; (2/5 - 1/4]$

$+ \left(5'964,49 - 56\right)(27/5 - 2/5] \cdot i'_1$

$+ \left(5'964,49 - 56 + 800\right) \cdot i'_1 \, (1/6 - 27/5]$

$+ \left(5'964,49 - 56 + 800 - 8\right) \cdot i'_1 \, (30/6 - 1/6]$

$+ \left(5'964,49 - 56 + 800 - 8 - 8.55\right) \cdot i'_1 \cdot \frac{1}{366}$

$M_{30/6} = \left(5'964,49 - 56 + 800 - 8 - 8,55\right) + I_{al\ 30/6}$

$I_{al\ 4/8} = M_{30/6} \cdot i'_2 \cdot (6/7 - 30/6) +$

$+ \left(M_{30/6} + 800\right) \cdot i'_2 \cdot (3/8 - 6/7]$

saldo dei capitali al 3/8

$$+\left(M_{30/6} \quad +800-200\right)\cdot i_2' \cdot \frac{1}{366}$$

$$M_{4/8} = \underbrace{\left(M_{30/6} \cdot \quad +800-200\right)}_{\text{saldo dei capitali anche al 4/8}} + I_{al\ 4/8}$$

EX 1.21

1/8/10	+ 6000
21/11/10	−3800
7/12/10	−4000
15/12	+ 2000
10/1/11	+ 2500

$M_{30/6}$?

capitalizz. mista, con capitalizz. degli inter. 30/6 e 31/12

(81)

$$+\underbrace{\left(M_{31/12} + 2500\right)}_{2727,50} \cdot \frac{1.7}{100} \cdot (30/6 - 10/1]$$

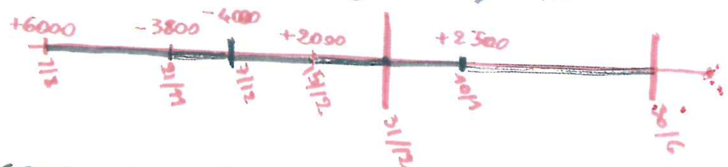
$$= 22,97$$

$$M_{30/6} = 2727,50 + 22,97 = 2749,33$$

(80) $i_a = 1,7\%$ annuale netto attivo

$i_p = 7,8\%$ annuale (non pago tasse) passivo

Sol.:



$$I_{31/12} = 6000 \cdot \frac{1.7}{100} \cdot (21/11 - 1/8]$$

$$+2200 \cdot \frac{1.7}{100} \cdot (7/12 - 21/11]$$

$$-1800 \cdot \frac{7.8}{100} \cdot (15/12 - 7/12]$$

$$+ 200 \cdot \frac{1.7}{100} \cdot (31/12 - 15/12] = 27,50$$

$$M_{31/12} = 200 + I_{31/12} = 227,50$$

$$I_{30/6} = M_{31/12} \cdot \frac{1.7}{100} \cdot (10/1 - 31/12]$$

(82)

SCINDIBILITÀ

Sia fissata una legge di capitalizzaz.

def: $v(a,b)$ il fattore di sconto da applicare a M disponib. in $b > a$ per ottenere il suo val. attuale $S = M \cdot v(a,b)$

es. nella capit. comp.

$$M \cdot (1+i)^{-(b-a)} = S \Rightarrow v(a,b) = (1+i)^{-(b-a)}$$

nella capit. sempl.

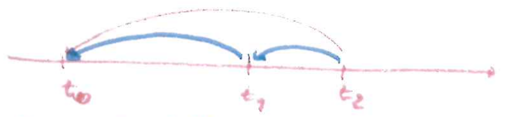
$$\frac{M}{1+i(b-a)} = S \Rightarrow v(a,b) = \frac{1}{1+i(b-a)}$$

83

Proprietà della capitalizz. composta:

$\forall\ t_0, t_1, t_2$, o.c. $t_0 < t_1 < t_2$ vale

$v(t_0, t_2) = v(t_0, t_1) \cdot v(t_1, t_2)$



SCINDIBILITÀ della legge esponenz. (capit. comp.)

infatti:

$$v(t_0, t_2) = (1+i)^{-(t_2-t_0)} = (1+i)^{-(t_2-t_1+t_1-t_0)}$$

$$= (1+i)^{-(t_2-t_1)} \cdot (1+i)^{-(t_1-t_0)}$$

$$= v(t_1, t_2) \cdot v(t_0, t_1)$$

84

$\left[(1+i)^{-1} = e^{-\delta}\right]$

N.B. la capitalizz. sempl. non gode della scindibil.

es.

$$v(t_0, t_2) = \frac{1}{1+i(t_2-t_0)}$$

$$v(t_0, t_1) \cdot v(t_1, t_2) = \frac{1}{1+i(t_1-t_0)} \cdot \frac{1}{1+i(t_2-t_1)} =$$

$$= \frac{1}{1+\underbrace{i(t_1-t_0)+i(t_2-t_1)}_{i(t_2-t_0)}+i^2\cdot(t_1-t_0)(t_2-t_1)}$$

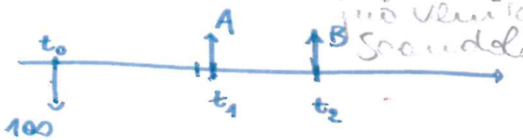
$$\neq v(t_0, t_2)$$

16/10/17

85

conseguenze della scindibilità

ex 1.14 [illegible]



Devo scegliere tra

① $\{-100, A\}/\{t_0, t_1\}$ vs ② $\{-100, B\}/\{t_0, t_2\}$

sono in t_0: scelgo ① sse $V_{t_0}(A) > V_{t_0}(B)$

se sono in t_1: scelgo ① sse $V_{t_1}(A) > V_{t_1}(B)$

in generale (per una qls legge di capitalizz.) può succedere che $V_{t_0}(A) > V_{t_0}(B)$

ma $V_{t_1}(A) < V_{t_1}(B)$

invece nella capitalizz. comp. vale che

86

$V_{t_0}(A) > V_{t_0}(B)$ sse $V_{t_1}(A) > V_{t_1}(B)$

per la scindibil.

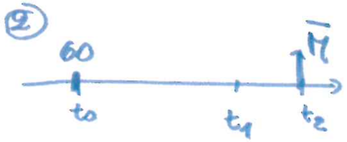
dim.:

$$V_{t_0}(A) = V_{t_1}(A) \cdot v(t_0, t_1) > V_{t_0}(B) = V_{t_1}(B) \cdot v(t_0, t_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$V_{t_1}(A) > V_{t_1}(B)$$

$\Rightarrow$ [illegible] A,B indiffer. [illegible]



[la capit. comp. è l'unica legge scindib.

(7)

EX.

quale X rende l'operaz. equa?

1) regime semplice $i_{(s)} = 10\%$ a. in t=0, poi in t=2

2) regime esponenz. $i_{(c)} = 10\%$ a., in t=0, poi in t=2

Sol. VA di tutta l'op. in t deve essere 0

1) t=0 : $-2 + \dfrac{X}{1+0.1\cdot 1} - \dfrac{3}{1+0.1\cdot 2} = 0 \Rightarrow X = 4{,}95$

t=2 : $-2(1+0.1\cdot 2) + X\cdot(1+0.1\cdot 1) - 3 = 0 \Rightarrow 4{,}\overline{90} = X$

2) t=0 $-2 + \dfrac{X}{(1+0.1)^1} - \dfrac{3}{(1+0.1)^2} = 0 \Rightarrow X = 4.9\overline{27}$

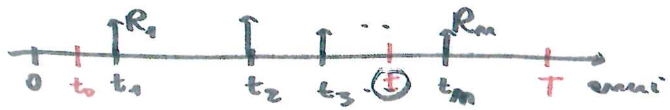
(89)

EX è più conveniente avere 290€ in t=2 o 270 in t=1? i=10% a., t=1, t=6

1) capit. sempl.

2) capit. comp.

RENDITA = flusso di importi tutti POSITIVI



es. 1 acquisto una rendita

es. 2 stipulo un mutuo: la banca acquista una rendita

R_k rate

nell'es. 2 : AMMORTAMENTO di prestito

Valutazione delle rate: VALORE ATTUALE, se fatta in 0

1

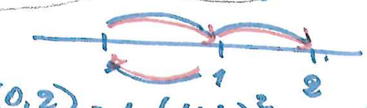
(88)

t=2 : $-2(1+0.1)^2 + X(1+0.1) - 3 = 0 \Rightarrow X = 4{,}9\overline{27}$

infatti l'op. è equa in 0 sse è equa in t=2.

in t=0 $-2\cdot V(0,0) + X\cdot V(0,1) - 3V(0,2) = 0$ sse

• $u(0,2)$: $-2\,u(0,2) + X\cdot u(1,2) - 3 = 0$



$V(0,0)\cdot u(0,2) = 1\cdot(1+i)^2 = u(0,2)$

SCINDIB. → $V(0,1)\cdot u(0,2) = (1+i)^{-1}(1+i)^2 = (1+i)^1 = u(1,2)$ ⟷

valore di (X,1) in 2 = val. di (X,1) in 0 e poi in 2

Se devo o valutare l'equità di un'operaz.

o cfr. 2 import. disponibili a date diverse:

in capitalizz. comp. ~~deve~~ posso scegliere una data t ∀ di valutaz.

in capit. sempl. no: devo precisare in quale t voglio fare la valut.

dett ecco perché per valut. le rendite si usa cap. compo

VALORE MONTANTE, se fatta in $t \in [t_m, +\infty)$. (14)

$$\boxed{V_{t_0}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{m} R_k \cdot (1+i)^{-(t_k - t_0)}}$$ PREZZO EQUO se compro in t_0

$\vec{r} = \{R_1 \dots R_m\} / \{t_1 \dots t_m\}$

$V_T(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{T-t_k}$ montante

$t > t_0$: $V_t(\vec{r}) = V_{t_0}(\vec{r})\cdot(1+i)^{t-t_0}$ per la scindibilità

Se non c'è regolarità (nelle R_k o nei t_k) devo usare la formula generale

In casi partic. (tipo R_k costanti e $t_k - t_{k-1}$ tutte uguali) ho formulette preconfezionate

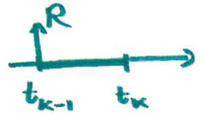
TIPI di RENDITE

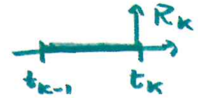
R • ↗ rata cost.
    ↘ rate variab.

n • ↗ finita ($t_n < \infty$) o TEMPORANEA : durata t_n
    ↘ infinita = PERPETUA

Δt • ↗ periodica : $t_k - t_{k-1}$ costanti
    ↘ aperiodica

ist. pagam. rate • ↗ anticipata
    ↘ posticip.





decorr. • ↗ immediata
    ↘ differita

$$A = \sum_{k=0}^{n} v^k = 1 + v + v^2 + \dots + v^n$$

$$v \cdot A = \qquad v + v^2 + \qquad + v^n + v^{n+1}$$

$$-v \cdot A + A = 1 - v^{n+1}$$

Si potrebbe direttam. fare $Q = \sum_{k=1}^{n} v^k$ l'unico vantaggio qui è che poi ci trovo la form. pronta per le anticipate

$$A(1-v) = 1 - v^{n+1} \quad i \neq 0,\ v \neq 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1 - v^{n+1}}{1-v}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} v^k = A - 1 = \frac{1-v^{n+1}}{1-v} - 1 = \frac{\cancel{1} - v^{n+1} - \cancel{1} + v}{1-v}$$

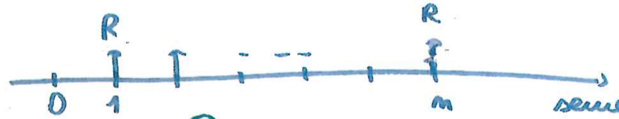
$$= \frac{v(1-v^n)}{1-v}$$

$$v = \frac{1}{1+i}, \quad \frac{1}{(1+i)\left(1 - \frac{1}{1+i}\right)} = \frac{1}{1+i-1} = \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{1-v^n}{i}$$

Se $i = 0$, $V_0(\vec{r}) = ?$

1) $\boxed{\text{rata costante}}$ periodica, finita, durata n, posticip, immed.



se i semestr. $\neq 0$

VA in 0 $= \sum_{k=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-k}$ semestri (periodi)
periodale, semestrale

$$= \sum_{k=1}^{n} R \cdot v^k, \quad v = \frac{1}{1+i} \text{ periodale}$$

$$= R \cdot a_{\overline{n}|i} \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$$

a FIGURATO n (= n. di rate) al tasso i (PERIODALE!)

$$\sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{1-v^n}{i}$$

dim. preliminare : $A = \sum_{k=0}^{n} v^k = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$

$\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot v^k = \frac{1-v^n}{i} = a_{\overline{n}|i}$ = valore in 0 di una rendita UNITARIA immediata, postcip., n rate, periodica

$R \cdot a_{\overline{n}|i}$ = valore in 0 di rendita..., con rata R.

$\boxed{ex}$ prezzo equo in 0 di $\vec{r}$ con rata cost. 12'000 € annuali, postic. immed, n = 10 a., i = 3% a. ?

$$12'000 \cdot a_{\overline{10}|3\%} = 12'000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^{10}}{0.03} = 102'362{,}43 €$$

VALORE MONTANTE rend. rata cost, in t_n

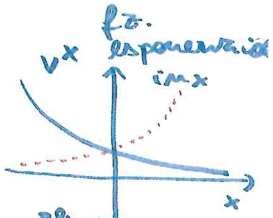
$$V_{t_m}(\vec{r}) = R\, a_{\overline{m}|i} \cdot (1+i)^m$$

$$= R \cdot \frac{1-v^m}{i} \cdot u^m = R \cdot \frac{u^m - 1}{i} = R \cdot s_{\overline{m}|i}$$

RENDITA $\boxed{\text{PERPETUA}}$ immed., postic., periodica, R cost.

$$\left[\quad R \cdot a_{\overline{m}|i} = R \cdot \frac{1-v^m}{i} \xrightarrow{} 0,\ m \to +\infty \quad \right]$$

$$V_0(\vec{r}) = \lim_{m \to +\infty} R\, a_{\overline{m}|i} = \frac{R}{i}$$



$\boxed{\text{EX}}$ $\vec{r}$ perpetua, $R = 1'000$ l'anno, 3% a.

prezzo? $\frac{R}{i} = \frac{1000}{0.03} = \frac{1000 \cdot 100}{3} = 33'333,\bar{3}$

OSS. $\frac{R}{i}$ da anche veloce approx di V_0 (rend. finita)

$S = \frac{R}{i} \approx R \cdot \frac{1-v^m}{i}$ quando m molto grande

opp. dati S, i trovo approx di R

$R = S \cdot i \approx \frac{S \cdot i}{1-v^m}$

es. mutuo di 100'000 €, tasso 3% annuo

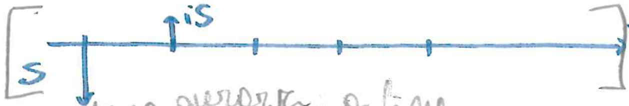
1000 rate cost. mensili (~83 anni), immed., postic.

$$R = \frac{100'000}{a_{\overline{m}|i_{12}}} = \frac{100'000 \cdot i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-1000}} = 262,58\ €$$

$i_{12} = \sqrt[12]{1.03} - 1$

$\tilde{R} = S \cdot i_{12} = 246,63\ €$

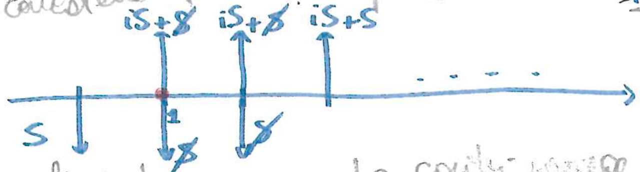
come può sussist. rend. perp?



tasso i di inter.

~~iS = R~~

concateno operaz. a fine



19/10

a fine di ogni periodo conti pareggi → perpetuo → $\vec{r}$ con $R = iS$

invece se al $t=1$ $R < iS$, ~~il deposito~~ i conti non vengono pareggiati alla fine di ogni periodo

⇒ il debito aumenta sempre di più

se al $t=1$ $R > iS$, a fine periodo mi viene restituita anche parte di S

⇒ nel tempo l'operaz. si esaurisce

EX PB del deposito

Deposito 10'000 €, al 5% a. in cap. comp.

prelievo di 1'000 € a fine di ogni anno

1) dopo quanto tempo il depos. si esaurisce?

a fine di 1 anno: $I = 10'000 \cdot i = 500$ €

$1000 > S \cdot i$ ⇒ deposito si esaurirà

Sia $\bar{m}$ l'ultimo anno in cui posso prelevare $1'000 = P$

$$S \cdot (1.05)^{\bar{m}} - P\, s_{\overline{\bar{m}}|0.05} \geq 0$$

$$S\, u^{\bar{m}} - P \frac{u^{\bar{m}} - 1}{i} \geq 0 \ , \quad S - P \cdot \frac{1 - v^{\bar{m}}}{i} \geq 0$$