

Programma del corso di Teoria dei Numeri – A.A. 2017/2018

Il presente programma fa riferimento alle dispense

Appunti di Teoria Elementare dei Numeri - A.A. 2017-2018

reperibili alla pagina web:

http://web.math.unifi.it/users/fumagal/Didattica_2017_2018.html

Capitolo 1 Massimo comune divisore, formula di Bezout (Prop. 1.1.2), Algoritmo di Euclide. Fattorizzazioni, Prop. 1.2.1, Teorema fondamentale dell’Aritmetica, valore p -adico di un numero, Teorema di Euclide (dimostrazione di Eulero - in appendice al Capitolo). Primi di Fermat e di Mersenne, Lemma 1.3.1, Prop. 1.3.2 e 1.3.3). Test di Lucas-Lehmer (condizione sufficiente - in appendice al Capitolo). Equazioni diofantee, Prop. 1.4.2.

Capitolo 2 Congruenze, Lemma 2.1.1. La funzione ϕ di Eulero, Teorema 2.1.2, Corollario 2.1.3, Lemma 2.1.4. Teorema 2.1.5 e Teorema 2.1.6 di Wilson. Congruenze polinomiali, Prop. 2.2.1, Cor. 2.2.2., Prop. 2.2.3. Teorema cinese del resto (versione 2.3.1 e 2.3.2). Congruenze modulo un numero composto. Lemma di Hensel (Lemma 2.4.1 e 2.4.2, Corollario 2.4.3 e Teorema 2.4.4). Numeri di Carmichael. Criterio di primalità (Teorema 2.4.5).

Capitolo 3 Residui quadratici. Simbolo di Legendre. Lemma 3.1.1, criterio di Eulero (Prop. 3.1.2), Lemma 3.1.3, Lemma di Gauss (3.1.4). Esempi. Prop. 3.1.5. Primi di Sophie Germain e Prop. 3.1.6. Legge di reciprocità quadratica (Teorema 3.2.1). Simbolo di Jacobi e sue proprietà (Lemma 3.3.1), Legge di reciprocità per i simboli di Jacobi. Teorema 3.3.3. Test di Lucas-Lehmer (condizione necessaria - in appendice al Capitolo).

Capitolo 4 Funzioni aritmetiche. Prodotto di convoluzione. Teorema 4.1.1, Prop. 4.1.2. Funzioni moltiplicative e Teorema 4.2.1. Le funzioni f_z , σ_z , d e σ sono moltiplicative. Numeri perfetti. Caratterizzazione dei perfetti pari (Teorema di Eulero 4.2.3). Funzione di Möbius, Lemma 4.2.4 e formula di inversione (Teorema 4.2.5). Funzione di Eulero. Lemma 4.2.6, Teorema 4.2.7 e Prop. 4.2.8. La funzione di Mangoldt. Lemma 4.3.1. Formula di Eulero e funzione “Zeta” di Riemann. Lemma 4.5.1. Calcolo di $\zeta(2)$ (Teorema 4.5.2) e Lemma 4.5.3.

Capitolo 5 Abel Summation Formula (Prop. 5.1.1) e applicazioni (Lemmi 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4 e Teorema 5.1.5). Costante di Eulero-Mascheroni (definizione). Prodotto di convoluzione generalizzato, Prop. 5.2.1, Teorema 5.2.2 e Cor. 5.2.3. Calcolo della media della funzione ϕ (Teorema 5.3.1). Applicazioni (corollario 5.3.2). Calcolo della media della funzione d (Teorema 5.4.1).

Capitolo 6 Teorema dei numeri primi (solo enunciato). Prop. 6.1.1. Teorema di Čhebyshev (6.2.1), Lemmi 6.2.1, 6.2.3 e 6.2.4). Postulato di Bertrand (Teorema 6.3.3), Lemmi 6.3.1 e 6.3.2. Le funzioni ψ e θ di Čhebyshev e i loro legami. Prop. 6.4.1. Teorema 6.4.2 e riformulazioni del PNT (Cor. 6.4.3, Prop. 6.4.4). Media della funzione Λ . Lemma 6.5.1 e Teorema 6.5.2. Teoremi di F. Mertens (in appendice, 6.7.1 e 6.7.2). Media della funzione μ . Lemmi 6.6.1 e 6.6.2. Teorema 6.6.3.

Capitolo 7 Caratteri di gruppi abeliani finiti. Caso gruppi ciclici. Lemma 7.1.1, Prop. 7.1.2 Teorema 7.1.3 e 7.1.4. Prodotto di caratteri, Lemma 7.2.2. Relazioni di ortogonalità (Teoremi 7.3.1 e 7.3.2).

Capitolo 8 Caratteri di Dirichlet modulo un intero naturale. Legami con i caratteri ordinari (cardinalità di \mathcal{D}_c). Reciprocità (Teoremi 8.1.1 e 8.1.2). Lemma 8.1.3. Definizione di $L(\chi)$. Lemma 8.2.1. Definizione di T_χ . Lemmi 8.2.2 e 8.2.3. Proposizione 8.2.4. Teorema 8.2.5 e Teorema di Dirichlet 8.2.6.

Capitolo 9 Teorema di Lagrange (9.1.1). Teorema di Gauss sulle somme di tre quadrati (Teorema 9.2.6, Lemmi 9.2.2–9.2.4. Proposizione 9.2.5). Problema di Waring. Funzioni g e G . Prop. 9.3.2 e Teorema 9.3.5.

Capitolo 10 Concetto di densità di Schnirel'man (e densità asintotica). Teorema di Schnirel'man (10.1.2 e Lemmi 10.1.3–10.1.5, Teorema 10.1.6). Teorema di Goldbach-Schnirel'man (10.2.1 e 10.2.5). Teorema di Waring-Hilbert (10.3.1 e Teoremi 10.3.3 e 10.3.7). Congettura abc (Prop. 10.4.1).

Capitolo 11 Partizioni. Teorema caso finito (11.1.1 e Corollario 11.1.2). Formula ricorsiva per le partizioni non ristrette (Teorema 11.2.1). Teorema di Hardy-Ramanujan (11.2.6, Lemmi 11.2.2–11.2.5). Concetto di densità per un sottoinsieme dei numeri naturali. La densità implica il comportamento asintotico (Teorema 11.3.1). Lemma caso cofinito (11.3.2). L'asintoto implica la densità (Teorema 11.4.1).

Francesco Fumagalli