Matematica per le Applicazioni Economiche I, 9 gennaio 2018
Fila A

La prova ha la durata di un'ora e 45 minuti. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (12 punti)
Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-2}{x-1}}.$$

Esercizio 2 (10 punti)
(a) Si dia la definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Si calcolino i seguenti limiti:
(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|x^2-1\right| - \left|8x-3x^2\right|}{7x^2+\sqrt{2x}}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x\cos(2x^2)-1}{\ln(1+3x^4)}.$$

Esercizio 3 (5 punti)
Si dica per quali valori di $a \in (0,+\infty)$, la seguente funzione è derivabile in 0:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{se} \quad x \le 0 \\ a\ln(1+ax) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 4 (6 punti)
Si dica quali affermazioni seguenti sono vere e quali false. Si motivino le risposte.
(a) Se una funzione è derivabile e iniettiva, allora è continua.
(b) Se una funzione è continua e pari, allora è derivabile.

Esercizio 5 (7 punti)
Si consideri la funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x(x^2-3x+2).$$

(a) Si calcolino gli intervalli di concavità e convessità della funzione f.
(b) Si stabilisca se la funzione f è iniettiva.
(c) Si stabilisca se la funzione f è superiormente limitata.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 9 gennaio 2018

Fila B

La prova ha la durata di un'ora e 45 minuti. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (12 punti)
Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x-2}}.$$

Esercizio 2 (10 punti)
(a). Si dia la definizione di

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

Si calcolino i seguenti limiti:
(b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x) + 5x^5 + \sqrt{3x}}{e^{\frac{1}{x}} - 8x^4},$$

(c)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + 2x^3)}{2e^x \cos(x^3) - 2}.$$

Esercizio 3 (5 punti)
Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione è derivabile in 0:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ a(e^{ax} - 1) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 4 (6 punti)
Si dica quali affermazioni seguenti sono vere e quali false. Si motivino le risposte.
(5a) Se una funzione è derivabile e illimitata inferiormente, allora è continua.
(5b) Se una funzione è continua e iniettiva, allora è derivabile.

Esercizio 5 (7 punti)
Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x(-x^2 + 2x + 3).$$

(a) Si calcolino gli intervalli di concavità e convessità della funzione f.
(b) Si stabilisca se la funzione f è iniettiva.
(c) Si stabilisca se la funzione f è inferiormente limitata.

Traccia delle soluzioni.

Fila A

Esercizio 1.

1. Determinazione del dominio della funzione.

$dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Studio del segno della funzione e delle eventuali intercette con gli assi.

Poichè la funzione esponenziale assume solo valori strettamente positivi, il segno di f è strettamente positivo per qualsiasi $x \in dom\ f$.

$f(0) = e^{\frac{-2}{-1}} = e^2$.

3. Studio della continuità della funzione e individuazione degli eventuali punti di discountinuità.

$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x-2}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{-1}{0^-}} = "e^{+\infty}"$ e dunque $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x-2}{x-1}} = +\infty$.

$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x-2}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{-1}{0^+}} = "e^{-\infty}"$ e dunque $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x-2}{x-1}} = 0$.

4. Studio del comportamento a $+\infty$ e $-\infty$.

$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x-2}{x-1}} = "e^{\frac{+\infty}{-\infty}}"$; $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x-2}{x-1}} = \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}} = e$ e, in maniera strettamente analoga, $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x-2}{x-1}} = e$.

5. Studio del segno della derivata prima.

$f'(x) = e^{\frac{x-2}{x-1}} \frac{x-1-x+2}{(x-1)^2} = \frac{e^{\frac{x-2}{x-1}}}{(x-1)^2} > 0$ per ogni valore di $x \in dom\ f$.

6. Studio del segno della derivata seconda.

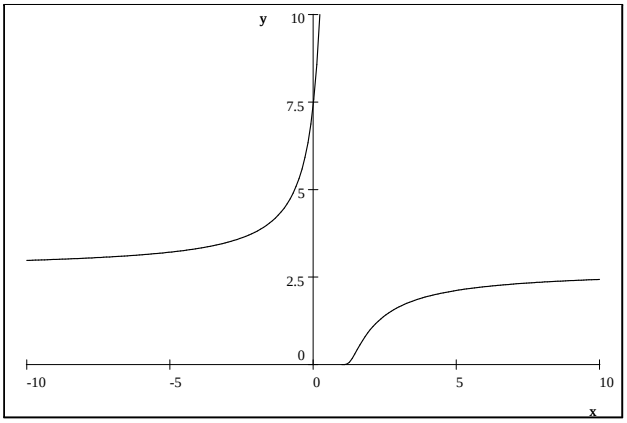
$f'(x) = e^{\frac{x-2}{x-1}} \cdot (x-1)^{-2}$.

$f''(x) = e^{\frac{x-2}{x-1}} \cdot (x-1)^{-2} \cdot (x-1)^{-2} + e^{\frac{x-2}{x-1}} (-2)(x-1)^{-3} =$

$= \frac{e^{\frac{x-2}{x-1}}}{(x-1)^4} (1 - 2(x-1)) = \frac{e^{\frac{x-2}{x-1}}}{(x-1)^4} (1 - 2x + 2) = \frac{e^{\frac{x-2}{x-1}}}{(x-1)^4} (-2x+3)$.

Dunque $f''(x) > 0$ sse $x < \frac{3}{2}$.

Grafico di $e^{\frac{x-2}{x-1}}$.



Esercizio 2.

(a).

Sia $dom\ f$ superiormente illimitato. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ tale che } \forall x > k \text{ e } x \in dom\ f, \text{ si ha } |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left|x^2 - 1\right| - \left|8x - 3x^2\right|}{7x^2 + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1 + 8x - 3x^2}{7x^2 + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} + \frac{8}{x} - 2}{7 + \sqrt{\frac{2}{x^3}}} = -\frac{2}{7}.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \cos(2x^2) - 1}{\ln(1+3x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \cos(2x^2) - e^x \cdot 4x \cdot \sin\left(2x^2\right)}{\frac{12x^3}{1+3x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^0 \cos(0) - e^0 \cdot 0 \cdot \sin(0)}{\frac{0}{1+0}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{0^+}{1+0}} = +\infty$$

Esercizio 3

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a\ln(1+ah)-(a\ln(1))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{a\ln(1+ah)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a^2\ln(1+ah)}{ah} = a^2 \cdot \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+ah)}{ah} = a^2.$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(ah)-\sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a\sin(ah)}{ah} = a.$$

Dunque la funzione è derivabile in 0 sse $a^2 = a$ ovvero $0 = a^2 - a = a(a-1)$; dunque, poichè per ipotesi $a \in (0, +\infty)$, la funzione è derivabile se e solo se $a = 1$.

Esercizio 4

a. Se f è derivabile, allora f è continua. Dunque la affermazione è vera.

b. La affermazione è falsa. Si consideri per esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ che è continua e pari, ma non derivabile.

Esercizio 5

a.

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 2) + e^x(2x - 3) = e^x\left(x^2 - x - 1\right).$$

$$f''(x) = e^x\left(x^2 - x - 1\right) + e^x(2x - 1) = e^x\left(x^2 + x - 2\right).$$

$\left(x^2 + x - 2\right) = 0$ sse $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$ sse $x \in \{-2, 1\}$. Dunque f è concave se $x \in [-2, 1]$ e convessa altrimenti.

b.

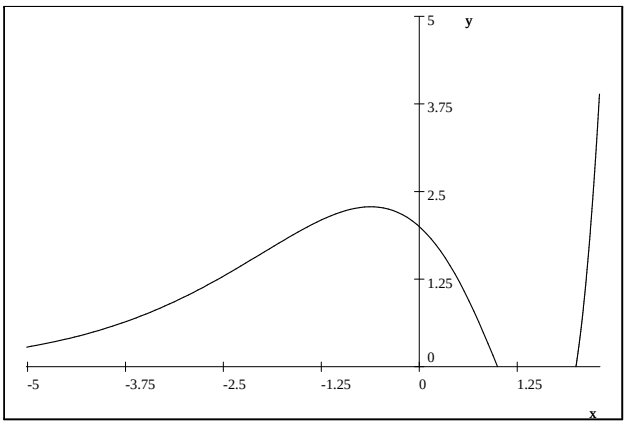
(Un tipo di risposta) Possiamo studiare il segno della derivata prima per stabilire la monotonia di f.

$\left(x^2 - x - 1\right)$ sse $x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Dunque f che è derivabile e continua è crescente in $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\left(-\infty, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e decrescente in $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$ e non è iniettiva.

(Altra risposta) In effetti, $x^2 - 3x + 2 = 0$ sse $x = \frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}$ e $f\left(\frac{3+\sqrt{9+4}}{2}\right) = f\left(\frac{3-\sqrt{9+4}}{2}\right)$ e dunque f non è iniettiva.

c.

Poichè $\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2 - 3x + 2) = +\infty$, la funzione non è superiormente limitata



Fila B

Esercizio 1.

1. Determinazione del dominio della funzione.

$dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Studio del segno della funzione e delle eventuali intercette con gli assi.

Poichè la funzione esponenziale assume solo valori strettamente positivi, il segno di f è strettamente positivo per qualsiasi $x \in dom\ f$.

$f(0) = e^{\frac{-1}{-2}} = e^{\frac{1}{2}}$.

3. Studio della continuità della funzione e individuazione degli eventuali punti di discontinuità.

$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{x-1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{0^-}} = "e^{-\infty}"$ e dunque $\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{x-2}{x-1}} = 0$.

$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{x-1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{0^+}} = "e^{+\infty}"$ e dunque $\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{x-2}{x-1}} = +\infty$.

4. Studio del comportamento a $+\infty$ e $-\infty$.

$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x-1}{x-2}} = "e^{\frac{+\infty}{-\infty}}"$; $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x-2}{x-1}} = \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}} = e$ e, in maniera strettamente analoga, $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x-2}{x-1}} = e$.

5. Studio del segno della derivata prima.

$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x-2}} \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = -\frac{e^{\frac{x-1}{x-2}}}{(x-2)^2} < 0$ per ogni valore di $x \in dom\ f$.

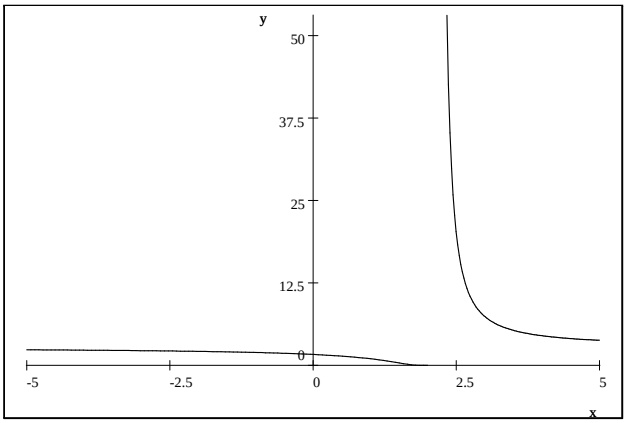
6. Studio del segno della derivata seconda.

$f'(x) = -e^{\frac{x-1}{x-2}} \cdot (x-2)^{-2}$.

$f''(x) = -\left(-e^{\frac{x-1}{x-2}} \cdot (x-2)^{-2} (x-2)^{-2} + e^{\frac{x-1}{x-2}} (-2)(x-2)^{-3}\right) = -\frac{e^{\frac{x-1}{x-2}}}{(x-2)^4}(-1-2(x-2)) =$

$= -\frac{e^{\frac{x-1}{x-2}}}{(x-2)^4}(-1-2x+4) = -\frac{e^{\frac{x-1}{x-2}}}{(x-2)^4}(-2x+3) = \frac{e^{\frac{x-1}{x-2}}}{(x-2)^4}(2x-3)$. Dunque $f''(x) > 0$ sse $x > \frac{3}{2}$.

Grafico di $e^{\frac{x-1}{x-2}}$.



Esercizio 2.

(a) Sia $dom\ f$ inferiormente illimitato. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$ significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ tale che } \forall x < -k \text{ e } x \in dom\ f, \text{ si ha } |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x) + 5x^5 + \sqrt{3x}}{e^{\frac{1}{x}} - 8x^4} = \lim_{x\to +\infty} x \frac{\frac{\cos(x)}{x^5} + 5 + \frac{\sqrt{3x}}{x^5}}{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} - 8} = \left(\lim_{x\to +\infty} x\right) \frac{0+5+0}{0-8} = -\infty$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x^3)}{2e^x \cos(x^3) - 2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{6x^2}{1+2x^3}}{2e^x \cos(x^3) + 2e^x 3x^2 \sin(x^3)} = \frac{\frac{0^+}{1+0}}{2\cos(0) + 2e^0 3 \cdot 0} = 0$$

Esercizio 3

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a\left(e^{ah} - 1\right) - \left(a\left(e^0 - 1\right)\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a^2\left(e^{ah} - 1\right)}{ah} = a^2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(ah)-\sin(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{a\sin(ah)}{ah}=a.$$

Dunque la funzione è derivabile in 0 sse $a^2=a$ ovvero $0=a^2-a=a(a-1)$ ovvero sse $a\in\{0,1\}$.

Esercizio 4

a. Se f è derivabile, allora f è continua. Dunque la affermazione è vera.

b. La affermazione è falsa. Si consideri per esempio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\le 0 \\ \\ 2x & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

che è continua e iniettiva, ma non derivabile.

Esercizio 5

(a)

$$f'(x)=e^x(-x^2+2x+3)+e^x(-2x+2)=e^x(-x^2+5).$$

$$f''(x)=e^x(-x^2+5)+e^x(-2x)=e^x(-x^2-2x+5)$$

$-x^2-2x+5=0$ sse $x=-1\pm\sqrt{1+5}=-1\pm\sqrt{6}$. Dunque f è convessa se $x\in\left[-1-\sqrt{6},-1+\sqrt{6}\right]$ e concava altrimenti.

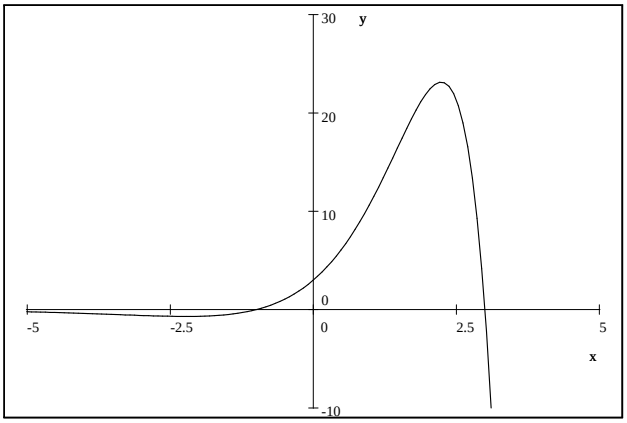
b.

(Un tipo di risposta) Possiamo studiare il segno della derivata prima per stabilire la monotonia di f.

$-x^2+5=0$ sse $x=\pm\sqrt{5}$. Dunque f che è derivabile e continua è decrescente in $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)$ e $\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ e decrescente in $\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$ e non è iniettiva.

(Altra risposta) In effetti, $-x^2+2x+3=0$ sse $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{-1}$ sse $x\in\{-1,3\}$ e $f(-1)=f(3)$ e dunque f non è iniettiva.

c.

Poichè $\lim_{x\to+\infty}e^x(-x^2+2x+3)=-\infty$, la funzione non è inferiormente limitata.

$e^x(-x^2+2x+3)$