Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 febbraio 2018
Testo d'esame A

La prova ha la durata di 1 ora e 45 minuti.

Esercizio 1 (9 punti)
1) [3 pti] Si enunci e dimostri il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.
Sia
$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{se } x \geq 2 \\ \\ x^2 + a & \text{se } x < 2 \end{cases}$$
2) [2 pti] Nel caso in cui $a = -1$, usando la definizione di derivata prima in un punto di dica se f è derivabile in $x_0 = 2$.
3) [1 pti] Nel caso in cui $a = -1$, si disegni il grafico (immediato) di f.
4) [2 pti] Usando la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dica per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta derivabile in 2.
5) [1 pti] Con il valore di a selezionato al punto precedente si disegni il grafico (immediato) di f.

Esercizio 2 (7 punti) Si calcolino i due seguenti limiti:

$$\text{a) [4 pti]} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^3+4)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{b) [3 pti]} \quad \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x-x^2}$$

Esercizio 3 (13 punti) Si ricorda che $\log(z)$ sta per logaritmo in base e di z, e che è altrimenti indicato $\ln(z)$.
Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, data da
$$f(x) = 10 + \log(x^2 + 1).$$
Dato un qualsiasi $x \geq 0$, $f(x)$ indica il costo di produzione per un'azienda di x unità del bene che l'azienda produce.
1) [6 pti] Calcolando la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$, ossia $f^{-1}(y)$, di un generico $y \in \mathbb{R}$, si determini se la funzione f è iniettiva. Si determinino poi l'immagine di f, e $\sup f$.
2) [5 pti] Utilizzando i limiti di f agli estremi del dominio di f, la derivata prima e la derivata seconda di f, si disegni il grafico della funzione.
3) [1 pti] Per quali quantità x il costo di produzione è minore o uguale di 100 Euro?
4) [1 pti] Si calcoli, giustificando, $\min_{[\sqrt{e^2-1},+\infty)} f$.

Esercizio 4 (11 punti)
1) [2 pti] Si diano la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato e la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.
2) [3 pti] Sia $A = \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}, 4\right)$. Si rappresenti, approssimativamente, l'insieme A sulla retta reale. Si dimostri che A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.
3) [4 pti] Si determinino $\sup A$ ed $\inf A$ sulla base della definizione.
4) [2 pti] Si individui l'insieme dei punti interni ad A.

SOLUZIONI

Esercizio 1 (9 punti)
1) [3 pti] Si enunci e dimostri il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.

Si veda sul libro

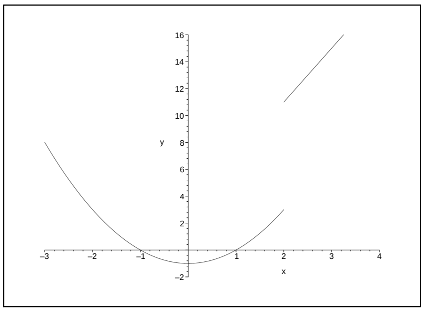
Sia

$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & se\ x \geq 2 \\ \\ x^2+a & se\ x < 2 \end{cases}$$

2) [2 pti] Nel caso in cui $a = -1$, usando la definizione di derivata prima in un punto di dica se f è derivabile in $x_0 = 2$.

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2-1-(8+3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+4h-8}{h} = +\infty$: il limite sinistro del rapporto incrementale per $h \to 0$ non è finito, la funzione f con $a = -1$ non può dunque essere derivabile in 2.

3) [1 pti] Nel caso in cui $a = -1$, si disegni il grafico (immediato) di f.



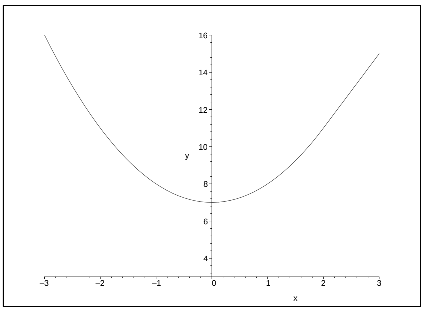
4) [2 pti] Usando la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dica per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta derivabile in 2.

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4(2+h)+3-(8+3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4h}{h} = 4;$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2+a-(8+3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+4h-7+a}{h}$:

affichè quest'ultimo limite sia finito è necessario che sia $a = 7$. Con tale valore di a, poi, otteniamo che il limite sinistro del rapporto incrementale coincide con $\lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+4)}{h} = 4$, che coincide con il limite destro del rapporto incrementale. Perciò con $a = 7$ il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito, allora la funzione f è derivabile in 2 per $a = 7$.

5) [1 pti] Con il valore di a selezionato al punto precedente si disegni il grafico (immediato) di f.



Esercizio 2 (7 punti) *Si calcolino i due seguenti limiti:*
a) [4 pti] $\lim_{x\to+\infty}(x^3+4)^{\frac{1}{x}}$

Primo modo.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+4)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log(x^3+4)};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x^3+4) = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”};$$

applicando il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x^3+4) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+\frac{4}{x^2}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+4)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} e^y = 1.$$

Secondo modo.
$(x^3+4)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(x^3+4)}$ e l'esponente coincide con

$$\frac{1}{x}\log\left(x^3(1+\frac{4}{x^3})\right) = \frac{1}{x}\left(\log(x^3)+\log(1+\frac{4}{x^3})\right) = \frac{1}{x}\log(x^3)+\frac{1}{x}\log(1+\frac{4}{x^3}) = 3\frac{\log(x)}{x}+\frac{\log(1+\frac{4}{x^3})}{x}:$$

osserviamo che per $x\to+\infty$ si ha $\frac{4}{x^3}\to 0$, e poiché la funzione $F(z)=\log(1+z)$ è continua in 0 abbiamo che $\log(1+\frac{4}{x^3})\to\log(1)=0$, perciò il secondo termine dell'esponente si presenta nella forma $\frac{0}{\infty}$, e dunque tende a 0. Il primo termine invece tende a 0 per la gerarchia degli infiniti, in quanto sia x che $\log(x)$ tendono a $+\infty$, ma x ci tende più velocemente. In conclusione l'esponente del limite proposto tende a 0, e poiché la funzione $F(z)=e^z$ è continua in 0, il risultato del limite è $e^0=1$.

b) [3 pti] $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x-x^2}$

Primo modo.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x-x^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”};$$

applicando il teorema di de l'Hopital,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x-x^2} = \lim_{x\to 2}\frac{6x-5}{2-2x} = -\frac{7}{2};$$

Secondo modo.
Il denominatore è fattorizzabile come $x(2-x)$, verifichiamo allora che 2 è radice anche del numeratore: $3\cdot 2^2-5\cdot 2-2=0$.
Utilizzando Ruffini, o cercando le radici dell'equazione $3(x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3})=0$, otteniamo che il limite proposto può essere riscritto come

$$\lim_{x\to 2}\frac{3(x+\frac{1}{3})(x-2)}{x(2-x)} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x+\frac{1}{3})}{-x}:$$

poiché la funzione $F(x)=\frac{3(x+\frac{1}{3})}{-x}$ è continua in 2, perché quoziente di polinomi definito in 2, il limite proposto coincide con $F(2)=-\frac{7}{2}$.

Esercizio 3 (13 punti)
Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, data da

$$f(x) = 10+\log(x^2+1).$$

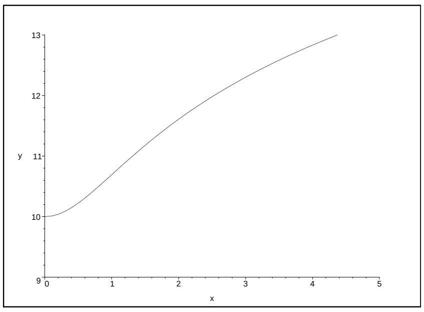
Dato un qualsiasi $x\geq 0$, $f(x)$ indica il costo di produzione per un'azienda di x unità del bene che l'azienda produce.
1) [6 pti] Calcolando la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$, ossia $f^{-1}(y)$, di un generico $y\in\mathbb{R}$, si determini se la funzione f è iniettiva. Si determinino poi l'immagine di f, e $\sup f$.

Dato $y\in\mathbb{R}$, la sua controimmagine $x=f^{-1}(y)$ è l'insieme delle soluzioni x di $10+\log(x^2+1)=y$ che cadono in $[0,+\infty)$. Ora: $10+\log(x^2+1)=y$ sse $\log(x^2+1)=y-10$. possiamo elevare e a ciascuno dei due membri dell'equazione ed otteniamo che $\log(x^2+1)=y-10$ sse $x^2+1=e^{y-10}$ sse $x^2=e^{y-10}-1$.

Intanto affinchè questa equazione abbia soluzione è necessario che $e^{y-10} - 1 \geq 0$, ossia $e^{y-10} \geq 1$, ossia $y - 10 \geq \log(1) = 0$, ossia $y \geq 10$. Ciò significa che solo gli $y \geq 10$ hanno controimmagine non vuota, quindi per $y < 10$ si ha $f^{-1}(y) = \emptyset$.
Inoltre, per gli $y \in [10, +\infty)$ abbiamo che esiste un solo $x \geq 0$ per cui $x^2 = e^{y-10} - 1$, precisamente si ha $x = \sqrt{e^{y-10} - 1}$ (radice aritmetica), quindi $f^{-1}(y) = \sqrt{e^{y-10} - 1}$: poichè per ogni $y \in [10, +\infty)$ è una sola la soluzione in $[0, +\infty)$ all'equazione proposta, la funzione $f(x)$ è iniettiva sul suo dominio.
Infine, dal fatto che l'insieme degli y che hanno controimmagine non vuota è $[10, +\infty)$, ricaviamo che $Im(f) = [10, +\infty)$. Da ciò si deduce che $\sup f = \sup[10, +\infty) = +\infty$.

2) [5 pti] Utilizzando i limiti di f agli estremi del dominio di f, la derivata prima e la derivata seconda di f, si disegni il grafico della funzione.

I limiti di f agli estremi del domnio sono immediati:
poiché f è continua si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 10 + \log(1) = 10$;
inoltre, poiché $\log(z) \to +\infty$ quando $z \to +\infty$, abbiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, e risulta $f'(x) \geq 0$ sse $2x \geq 0$ sse $x \geq 0$, perciò sul dominio $[0, +\infty)$ la funzione risulta crescente.
$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+2)^2}$, perciò risulta che $f''(x) \geq 0$ sse $1 - x^2 \geq 0$, e, sul dominio, sse $x \in [0, 1]$, perciò la funzione è convessa in $[0, 1]$ e concava in $[1, +\infty)$, presentando un punto di flesso in 1 a quota $f(1) = 10 + \log(2)$, numero più grande di 10 e più piccolo di $10 + \log(e) = 11$.



3) [1 pti] Per quali quantità x il costo di produzione è minore o uguale di 100 Euro?

Dobbiamo risolvere in x la disuguaglianza $f(x) \leq 100$, ossia $10 + \log(x^2 + 1) \leq 100$: osservando il grafico capiamo che, poiché f è crescente, le soluzioni sono le $x \geq 0$ tali che $x \leq f^{-1}(100) = \sqrt{e^{100-10} - 1} = \sqrt{e^{90} - 1}$, ossia le $x \in [0, \sqrt{e^{90} - 1}]$. Infatti f crescente implica che f^{-1} è crescente, applicando allora $f^{(-1)}$ ad entrambi i membri della disuguaglianza $f(x) \leq 100$ troviamo che le soluzioni sono le x nel dominio tali che $x \leq f^{-1}(100)$.

4) [1 pti] Si calcoli, giustificando, $\min_{[\sqrt{e^2-1}, +\infty)} f$.

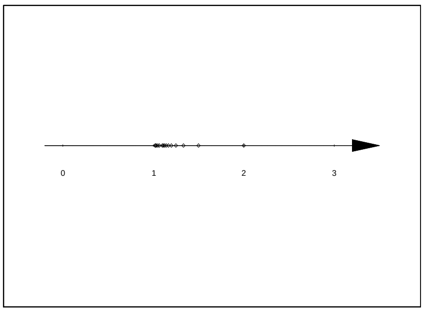
Poiché f è crescente, il minimo richiesto è esattamente $f(\sqrt{e^2 - 1}) = 10 + \log\left((\sqrt{e^2 - 1})^2 + 1\right) = 10 + \log\left(e^2 - 1 + 1\right) = 10 + 2\log(e) = 12$.

Esercizio 4 (11 punti)
1) [2 pti] Si diano la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto e superiormente limitato e la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.

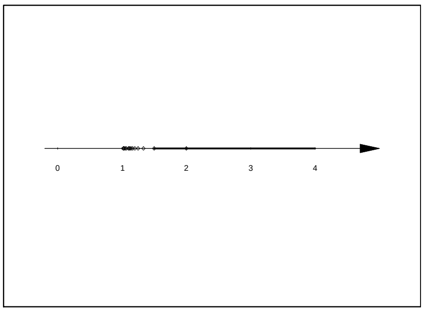
L'estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato è il minimo dei suoi maggioranti, dove per maggiorante si intende un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq K$ per ogni $x \in A$. Si dimostra che il minimo dell'insieme dei maggioranti di A esiste, ed è finito, qualunque sia A non vuoto e superiormente limitato.
L'estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato è il massimo dei suoi minoranti, dove per minorante si intende un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq K$ per ogni $x \in A$. Si dimostra che il massimo dell'insieme dei minoranti di A esiste, ed è finito, qualunque sia A non vuoto e inferiormente limitato.

2) [3 pti] Sia $A = \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}, 4\right)$. *Si rappresenti, approssimativamente, l'insieme* A *sulla retta reale. Si dimostri che* A *è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.*

Concretizziamo intanto alcuni dei numeri dell'insieme $\left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$: per $n = 1$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{1}{1} = 2$; per $n = 2$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{1}{2} = 1.5$; per $n = 3$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{1}{3}$, che è circa 1.33; per $n = 4$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{1}{4} = 1.25$, e così via: man mano che n aumenta $\frac{1}{n}$ diminuisce e quindi aggiungiamo ad 1 una quantità sempre più piccola.



Dobbiamo ora unire con tutti i numeri dell'intervallo $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$, ed otteniamo



dove si vede che A è composto da tutti i numeri reali da $\frac{3}{2} = 1.5$ a 4, con 1.5 incluso e 4 escluso, più punti del tipo visualizzato, ossia maggiori di 1 e minori di 1.5, e della forma $1 + \frac{1}{n}$, con n intero positivo.

I numeri naturali sono gli interi maggiori o uguali a 1, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, e allora $1 + 0 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1$, ossia $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$. I numeri dell'intervallo $[1.5, 4)$ sono tutti compresi tra 1.5 e 4. Ne segue che 1 è minorante di A e 4 è maggiorante, perciò A è limitato.

3) [4 pti] Si determinino $\sup A$ *ed* $\inf A$ *sulla base della definizione.*

Tutti i numeri maggiori o uguali a 4 sono maggioranti di A, ma non appena si prenda un K poco sotto 4 questo non è più maggiorante, perché possiamo sempre trovare numeri di A che sono maggiori di K.
Se $K < 1.5$ abbiamo che tutti gli $x \in [1.5, 4)$ sono in A ma maggiori di K, quindi K non è maggiorante. Se invece $K \in [1.5, 4)$ allora ad esempio il numero $K + \frac{4-K}{2} = \frac{K+4}{2}$ è il numero a metà strada tra K e 4, e quindi è in A ma maggiore di K, e dunque K non è maggiorante. Perciò l'insieme di tutti e soli i maggioranti di A è $[4, +\infty)$, il cui minimo è 4, che dunque è $\sup A$.
Tutti i numeri minori o uguali a 1 sono minoranti di A, e non appena si prenda un $K > 1$ questo non è più minorante, perché se $K > 1$ si può sempre trovare un n sufficientemente grande per cui $\frac{1}{n}$ sia sufficientemente piccolo da rendere $1 + \frac{1}{n} < K$. Concretamente: dato $K > 1$ determiniamo un $n \in \mathbb{N}$ per cui $1 + \frac{1}{n} < K$: basta risolvere in n la disequazione scritta. Ora, $1 + \frac{1}{n} < K$ sse $\frac{1}{n} < K - 1$: poiché $K > 1$ abbiamo che i due membri della disuguaglianza sono positivi, se passiamo ai reciproci allora il verso della disuguaglianza si inverte, e la condizione sopra è equivalente a $n > \frac{1}{K-1}$. Quindi qualunque sia $K > 1$ basta prendere $n > \frac{1}{K-1}$ per mostrare che K non è minorante di A. Perciò l'insieme di tutti e soli i minoranti di A è $(-\infty, 1]$, il cui massimo è 1, che dunque è $\inf A$.

4) [2 pti] Si individui l'insieme dei punti interni ad A.

Nessuno dei numeri $1 + \frac{1}{n}$ è interno ad A, se $n > 2$, perché fissato $n > 2$ è possibile trovare un intorno sufficientemente piccolo di $x_0 = 1 + \frac{1}{n}$ che non contiene altri punti di A oltre a x_0. Dell'intervallo $[1.5, 4)$ invece i punti interni sono tutti e soli quelli di $(1.5, 4)$, infatti 4 nemmeno appartiene ad A, e 1.5 non è interno perché preso un intorno $(1.5-\epsilon, 1.5+\epsilon)$ sufficientemente piccolo la parte $(1.5-\epsilon, 1.5)$ non contiene alcun punto di A. Invece tutti i punti di $(1.5, 4)$ sono interni perché questo è un intervallo aperto.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 febbraio 2018
Testo d'esame B

La prova ha la durata di 1 ora e 45 minuti.

Esercizio 1 (9 punti)
1) [3 pti] Si enunci e dimostri il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.
Sia
$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 1 \\ \\ x^2+b & \text{se } x < 1 \end{cases}$$
2) [2 pti] Nel caso in cui $b = -1$, usando la definizione di derivata prima in un punto di dica se f è derivabile in $x_0 = 1$.
3) [1 pti] Nel caso in cui $b = -1$, si disegni il grafico (immediato) di f.
4) [2 pti] Usando la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dica per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta derivabile in 1.
5) [1 pti] Con il valore di b selezionato al punto precedente si disegni il grafico (immediato) di f.

Esercizio 2 (7 punti) Si calcolino i due seguenti limiti:
$$\text{a) [4 pti]} \quad \lim_{x\to+\infty} (x^3+2)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{b) [3 pti]} \quad \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{2x-x^2}$$

Esercizio 3 (13 punti) Si ricorda che $\log(z)$ sta per logaritmo in base e di z, e che è altrimenti indicato $\ln(z)$.
Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, data da
$$f(x) = 10 + \log(x^2+2).$$
Dato un qualsiasi $x \geq 0$, $f(x)$ indica il costo di produzione per un'azienda di x unità del bene che l'azienda produce.
1) [6 pti] Calcolando la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$, ossia $f^{-1}(y)$, di un generico $y \in \mathbb{R}$, si determini se la funzione f è iniettiva. Si determinino poi l'immagine di f, e $\sup f$.
2) [5 pti] Utilizzando i limiti di f agli estremi del dominio di f, la derivata prima e la derivata seconda di f, si disegni il grafico della funzione.
3) [1 pti] Per quali quantità x il costo di produzione è minore o uguale di 50 Euro?
4) [1 pti] Si calcoli, giustificando, $\min_{[\sqrt{e^2-2},+\infty)} f$.

Esercizio 4 (11 punti)
1) [2 pti] Si diano la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato e la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.
2) [3 pti] Sia $A = \left\{1 + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left[2, \frac{9}{2}\right)$. Si rappresenti, approssimativamente, l'insieme A sulla retta reale. Si dimostri che A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.
3) [4 pti] Si determinino $\sup A$ ed $\inf A$ sulla base della definizione.
4) [2 pti] Si individui l'insieme dei punti interni ad A.

SOLUZIONI

FILA B

Esercizio 1 (9 punti)
1) [3 pti] Si enunci e dimostri il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.

Si veda sul libro

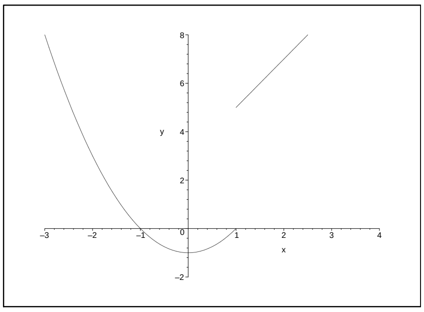
Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & se\ x \geq 1 \\ \\ x^2+b & se\ x < 1 \end{cases}$$

2) [2 pti] Nel caso in cui $b=-1$, usando la definizione di derivata prima in un punto di dica se f è derivabile in $x_0 = 1$.

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1-(2+3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h-5}{h} = +\infty$: il limite sinistro del rapporto incrementale per $h \to 0$ non è finito, la funzione f con $b=-1$ non può dunque essere derivabile in 1.

3) [1 pti] Nel caso in cui $b=-1$, si disegni il grafico (immediato) di f.



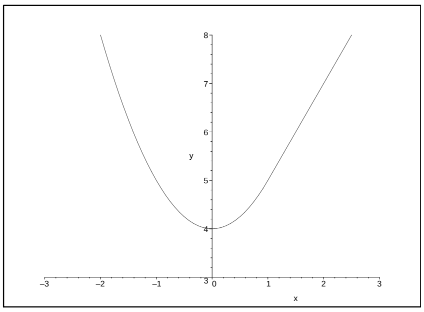
4) [2 pti] Usando la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dica per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta derivabile in 1.

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)+3-(2+3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2;$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+b-(2+3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h-4+b}{h}$:

affichè quest'ultimo limite sia finito è necessario che sia $b = 4$. Con tale valore di b, poi, otteniamo che il limite sinistro del rapporto incrementale coincide con $\lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+2)}{h} = 2$, che coincide con il limite destro del rapporto incrementale. Perciò con $b = 4$ il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito, allora la funzione f è derivabile in 1 per $b = 4$.

5) [1 pti] Con il valore di b selezionato al punto precedente si disegni il grafico (immediato) di f.



Esercizio 2 (7 punti) *Si calcolino i due seguenti limiti:*
a) [4 pti] $\lim_{x\to +\infty}(x^3+2)^{\frac{1}{x}}$

Primo modo.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log(x^3+2)};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x^3+2) = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{''};$$

applicando il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x^3+2) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+\frac{2}{x^2}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} e^y = 1.$$

Secondo modo.
$(x^3+2)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(x^3+2)}$ e l'esponente coincide con

$$\frac{1}{x}\log\left(x^3(1+\frac{2}{x^3})\right) = \frac{1}{x}\left(\log(x^3)+\log(1+\frac{2}{x^3})\right) = \frac{1}{x}\log(x^3)+\frac{1}{x}\log(1+\frac{2}{x^3}) = 3\frac{\log(x)}{x}+\frac{\log(1+\frac{2}{x^3})}{x}:$$

osserviamo che per $x\to+\infty$ si ha $\frac{2}{x^3}\to 0$, e poiché la funzione $F(z)=\log(1+z)$ è continua in 0 abbiamo che $\log(1+\frac{2}{x^3})\to\log(1)=0$, perciò il secondo termine dell'esponente si presenta nella forma $\frac{0}{\infty}$, e dunque tende a 0. Il primo termine invece tende a 0 per la gerarchia degli infiniti, in quanto sia x che $\log(x)$ tendono a $+\infty$, ma x ci tende più velocemente. In conclusione l'esponente del limite proposto tende a 0, e poiché la funzione $F(z)=e^z$ è continua in 0, il risultato del limite è $e^0=1$.

b) [3 pti] $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{2x-x^2}$

Primo modo.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{2x-x^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{''};$$

applicando il teorema di de l'Hopital,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{2x-x^2} = \lim_{x\to 2}\frac{4x-3}{2-2x} = -\frac{5}{2};$$

Secondo modo.
Il denominatore è fattorizzabile come $x(2-x)$, verifichiamo allora che 2 è radice anche del numeratore: $2\cdot 2^2-3\cdot 2-2=0$.
Utilizzando Ruffini, o cercando le radici dell'equazione $2(x^2-\frac{3}{2}x-1)=0$, otteniamo che il limite proposto può essere riscritto come

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x+\frac{1}{2})(x-2)}{x(2-x)} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{-x}:$$

poiché la funzione $F(x)=\frac{2(x+\frac{1}{2})}{-x}$ è continua in 2, perché quoziente di polinomi definito in 2, il limite proposto coincide con $F(2)=-\frac{5}{2}$.

Esercizio 3 (13 punti)
Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, data da

$$f(x) = 10+\log(x^2+2).$$

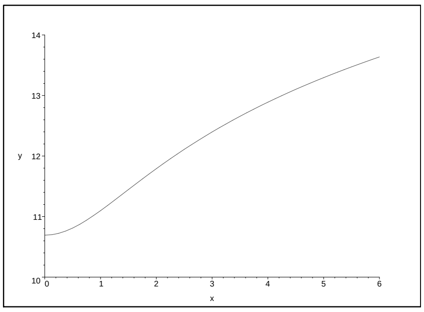
Dato un qualsiasi $x\geq 0$, $f(x)$ indica il costo di produzione per un'azienda di x unità del bene che l'azienda produce.
1) [6 pti] Calcolando la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$, ossia $f^{-1}(y)$, di un generico $y\in\mathbb{R}$, si determini se la funzione f è iniettiva. Si determinino poi l'immagine di f, e $\sup f$.

Dato $y\in\mathbb{R}$, la sua controimmagine $x=f^{-1}(y)$ è l'insieme delle soluzioni x di $10+\log(x^2+2)=y$ che

cadono in $[0, +\infty)$. Ora: $10 + \log(x^2 + 2) = y$ sse $\log(x^2 + 2) = y - 10$. possiamo elevare e a ciascuno dei due membri dell'equazione ed otteniamo che $\log(x^2 + 2) = y - 10$ sse $x^2 + 2 = e^{y-10}$ sse $x^2 = e^{y-10} - 2$. Intanto affinchè questa equazione abbia soluzione è necessario che $e^{y-10} - 2 \geq 0$, ossia $e^{y-10} \geq 2$, ossia $y - 10 \geq \log(2)$, ossia $y \geq 10 + \log(2)$. Ciò significa che solo gli $y \geq 10 + \log(2)$ hanno controimmagine non vuota, quindi per $y < 10 + \log(2)$ si ha $f^{-1}(y) = \emptyset$.
Inoltre, per gli $y \in [10 + \log(2), +\infty)$ abbiamo che esiste un solo $x \geq 0$ per cui $x^2 = e^{y-10} - 2$, precisamente si ha $x = \sqrt{e^{y-10} - 2}$ (radice aritmetica), quindi $f^{-1}(y) = \sqrt{e^{y-10} - 2}$: poichè per ogni $y \in [10 + \log(2), +\infty)$ è una sola la soluzione in $[0, +\infty)$ all'equazione proposta, la funzione $f(x)$ è iniettiva sul suo dominio.
Infine, dal fatto che l'insieme degli y che hanno controimmagine non vuota è $[10 + \log(2), +\infty)$, ricaviamo che $Im(f) = [10 + \log(2), +\infty)$. Da ciò si deduce che $\sup f = \sup[10 + \log(2), +\infty) = +\infty$.

2) [5 pti] Utilizzando i limiti di f agli estremi del dominio di f, la derivata prima e la derivata seconda di f, si disegni il grafico della funzione.

I limiti di f agli estremi del domnio sono immediati:
poiché f è continua si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 10 + \log(2)$;
inoltre, poiché $\log(z) \to +\infty$ quando $z \to +\infty$, abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$, e risulta $f'(x) \geq 0$ sse $2x \geq 0$ sse $x \geq 0$, perciò sul dominio $[0, +\infty)$ la funzione risulta crescente.
$f''(x) = \frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$, perciò risulta che $f''(x) \geq 0$ sse $2 - x^2 \geq 0$, e, sul dominio, sse $x \in [0, \sqrt{2}]$, perciò la funzione è convessa in $[0, \sqrt{2}]$ e concava in $[\sqrt{2}, +\infty)$, presentando un punto di flesso in $\sqrt{2}$ a quota $f(\sqrt{2}) = 10 + \log(4)$, numero che è un po' più grande di $10 + \log(e) = 11$.



3) [1 pti] Per quali quantità x il costo di produzione è minore o uguale di 50 Euro?

Dobbiamo risolvere in x la disuguaglianza $f(x) \leq 50$, ossia $10 + \log(x^2 + 2) \leq 50$: osservando il grafico capiamo che, poiché f è crescente, le soluzioni sono le $x \geq 0$ tali che $x \leq f^{-1}(50) = \sqrt{e^{50-10} - 2} = \sqrt{e^{40} - 2}$, ossia le $x \in [0, \sqrt{e^{40} - 2}]$. Infatti f crescente implica che f^{-1} è crescente, applicando allora $f^{(-1)}$ ad entrambi i membri della disuguaglianza $f(x) \leq 50$ troviamo che le soluzioni sono le x nel dominio tali che $x \leq f^{-1}(50)$.

4) [1 pti] Si calcoli, giustificando, $\min_{[\sqrt{e^2-2}, +\infty)} f$.

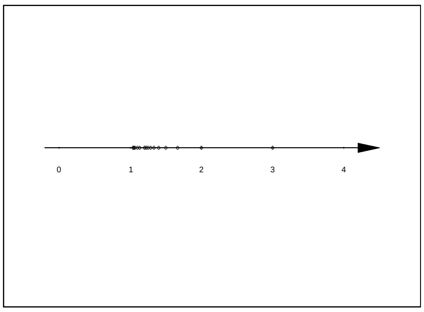
Poiché f è crescente, il minimo richiesto è esattamente $f(\sqrt{e^2 - 2}) = 10 + \log\left((\sqrt{e^2 - 2})^2 + 2\right) = 10 + \log\left(e^2 - 2 + 2\right) = 10 + 2\log(e) = 12$.

Esercizio 4 (11 punti)
1) [2 pti] Si diano la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto e superiormente limitato e la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.

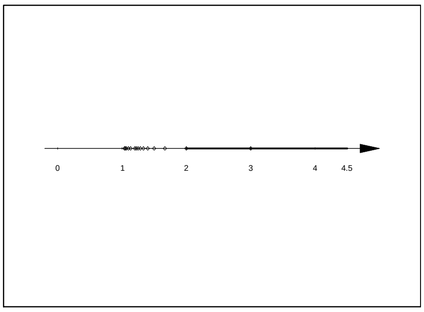
L'estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato è il minimo dei suoi maggioranti, dove per maggiorante si intende un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq K$ per ogni $x \in A$. Si dimostra che il minimo dell'insieme dei maggioranti di A esiste, ed è finito, qualunque sia A non vuoto e superiormente limitato.
L'estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato è il massimo dei suoi minoranti, dove per minorante si intende un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq K$ per ogni $x \in A$. Si dimostra che il massimo dell'insieme dei minoranti di A esiste, ed è finito, qualunque sia A non vuoto e inferiormente limitato.

2) [3 pti] Sia $A = \left\{1 + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left[2, \frac{9}{2}\right)$. Si rappresenti, approssimativamente, l'insieme A sulla retta reale. Si dimostri che A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

Concretizziamo intanto alcuni dei numeri dell'insieme $\left\{1 + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$: per $n = 1$ abbiamo l'elemento $1+\frac{2}{n} = 1 + 2 = 3$; per $n = 2$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$; per $n = 3$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{2}{3}$, che è circa 1.66; per $n = 4$ abbiamo l'elemento $1 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$, e così via: man mano che n aumenta $\frac{2}{n}$ diminuisce e quindi aggiungiamo ad 1 una quantità sempre più piccola.



Dobbiamo ora unire con tutti i numeri dell'intervallo $\left[2, \frac{9}{2}\right)$, ed otteniamo



dove si vede che A è composto da tutti i numeri reali da 2 a $\frac{9}{2} = 4.5$, con 2 incluso e 4.5 escluso, più punti del tipo visualizzato, ossia maggiori di 1 e minori di 2, e della forma $1 + \frac{2}{n}$, con n intero positivo.

I numeri naturali sono gli interi maggiori o uguali a 1, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $0 \leq \frac{2}{n} \leq 2$, e allora $1 + 0 \leq 1 + \frac{2}{n} \leq 1 + 2$, ossia $1 \leq 1 + \frac{2}{n} \leq 3$. I numeri dell'intervallo $[2, 4.5)$ sono tutti compresi tra 2 e 4.5. Ne segue che 1 è minorante di A e 4.5 è maggiorante, perciò A è limitato.

3) [4 pti] Si determinino $\sup A$ *ed* $\inf A$ *sulla base della definizione.*

Tutti i numeri maggiori o uguali a 4.5 sono maggioranti di A, ma non appena si prenda un K poco sotto 4.5 questo non è più maggiorante, perché possiamo sempre trovare numeri di A che sono maggiori di K, quindi K non è maggiorante.
Se $K < 2$ abbiamo che tutti gli $x \in [2, 4.5)$ sono in A ma maggiori di K. Se invece $K \in [2, 4.5)$ allora ad esempio il numero $K + \frac{4.5-K}{2} = \frac{K+4.5}{2}$ è il numero a metà strada tra K e 4.5, e quindi è in A ma maggiore di K, e dunque K non è maggiorante. Perciò l'insieme di tutti e soli i maggioranti di A è $[4.5, +\infty)$, il cui minimo è 4.5, che dunque è $\sup A$.
Tutti i numeri minori o uguali a 1 sono minoranti di A, e non appena si prenda un $K > 1$ questo non è più minorante, perché se $K > 1$ si può sempre trovare un n sufficientemente grande per cui $\frac{2}{n}$ sia sufficientemente piccolo da rendere $1 + \frac{2}{n} < K$. Concretamente: dato $K > 1$ determiniamo un $n \in \mathbb{N}$ per cui $1 + \frac{2}{n} < K$: basta risolvere in n la disequazione scritta. Ora, $1 + \frac{2}{n} < K$ sse $\frac{2}{n} < K - 1$: poiché $K > 1$ abbiamo che i due membri della disuguaglianza sono positivi, se passiamo ai reciproci allora il verso della disuguaglianza si inverte, e la condizione sopra è equivalente a $\frac{n}{2} > \frac{1}{K-1}$, ossia $n > \frac{2}{K-1}$. Quindi qualunque sia $K > 1$ basta prendere $n > \frac{2}{K-1}$ per mostrare che K non è minorante di A. Perciò l'insieme di tutti e soli i minoranti di A è $(-\infty, 1]$, il cui massimo è 1, che dunque è $\inf A$.

4) [2 pti] Si individui l'insieme dei punti interni ad A.

Nessuno dei numeri $1 + \frac{2}{n}$ è interno ad A, se $n > 2$, perché fissato $n > 2$ è possibile trovare un intorno sufficientemente piccolo di $x_0 = 1 + \frac{2}{n}$ che non contiene altri punti di A oltre a x_0. Dell'intervallo $[2, 4.5)$

invece i punti interni sono tutti e soli quelli di $(2, 4.5)$, infatti 4.5 nemmeno appartiene ad A, e 2 non è interno perché preso un intorno $(2-\epsilon, 2+\epsilon)$ sufficientemente piccolo la parte $(2-\epsilon, 2)$ non contiene alcun punto di A. Invece tutti i punti di $(2, 4.5)$ sono interni perché questo è un intervallo aperto.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 febbraio 2018
Testo d'esame C

La prova ha la durata di 1 ora e 45 minuti.

Esercizio 1 (9 punti)
1) [3 pti] Si enunci e dimostri il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.
Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c & \text{se } x \geq 1 \\ \\ 2x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$
2) [2 pti] Nel caso in cui $c = -1$, usando la definizione di derivata prima in un punto di dica se f è derivabile in $x_0 = 1$.
3) [1 pti] Nel caso in cui $c = -1$, si disegni il grafico (immediato) di f.
4) [2 pti] Usando la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dica per quale valore di $c \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta derivabile in 1.
5) [1 pti] Con il valore di c selezionato al punto precedente si disegni il grafico (immediato) di f.

Esercizio 2 (7 punti) Si calcolino i due seguenti limiti:
$$\text{a) [4 pti]} \quad \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{b) [3 pti]} \quad \lim_{x\to 2} \frac{4x^2 - 7x - 8}{2x - x^2}$$

Esercizio 3 (13 punti) Si ricorda che $\log(z)$ sta per logaritmo in base e di z, e che è altrimenti indicato $\ln(z)$.
Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, data da
$$f(x) = 10 + \log(x^2 + 3).$$
Dato un qualsiasi $x \geq 0$, $f(x)$ indica il costo di produzione per un'azienda di x unità del bene che l'azienda produce.
1) [6 pti] Calcolando la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$, ossia $f^{-1}(y)$, di un generico $y \in \mathbb{R}$, si determini se la funzione f è iniettiva. Si determinino poi l'immagine di f, e $\sup f$.
2) [5 pti] Utilizzando i limiti di f agli estremi del dominio di f, la derivata prima e la derivata seconda di f, si disegni il grafico della funzione.
3) [1 pti] Per quali quantità x il costo di produzione è minore o uguale di 20 Euro?
4) [1 pti] Si calcoli, giustificando, $\min_{[\sqrt{e^2-3}, +\infty)} f$.

Esercizio 4 (11 punti)
1) [2 pti] Si diano la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato e la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.
2) [3 pti] Sia $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left[-3, \frac{1}{2}\right)$. Si rappresenti, approssimativamente, l'insieme A sulla retta reale. Si dimostri che A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.
3) [4 pti] Si determinino $\sup A$ ed $\inf A$ sulla base della definizione.
4) [2 pti] Si individui l'insieme dei punti interni ad A.

SOLUZIONI

FILA C

Esercizio 1 (9 punti)
1) [3 pti] Si enunci e dimostri il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.

Si veda sul libro

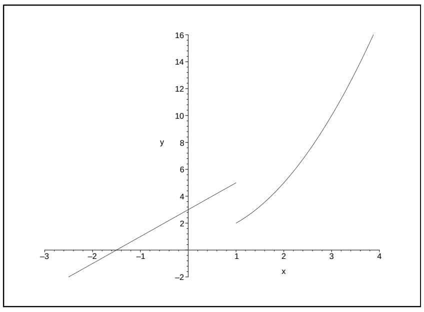
Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c & se\ x \geq 1 \\ \\ 2x + 3 & se\ x < 1 \end{cases}$$

2) [2 pti] Nel caso in cui $c = -1$, usando la definizione di derivata prima in un punto di dica se f è derivabile in $x_0 = 1$.

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(1+h)+3-(1+1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h+3}{h} = -\infty$: il limite sinistro del rapporto incrementale per $h \to 0$ non è finito, la funzione f con $c = -1$ non può dunque essere derivabile in 1.

3) [1 pti] Nel caso in cui $c = -1$, si disegni il grafico (immediato) di f.



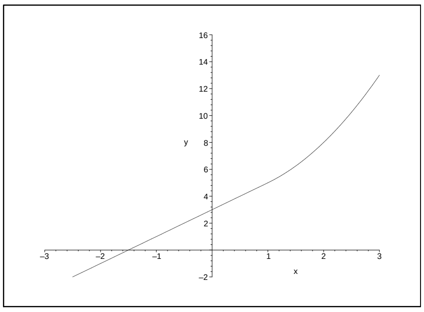
4) [2 pti] Usando la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dica per quale valore di $c \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta derivabile in 1.

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2-c-(1-c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2+h)}{h} = 2;$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(1+h)+3-(1-c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h+4+c}{h}$:

affichè quest'ultimo limite sia finito è necessario che sia $c = -4$. Con tale valore di c, poi, otteniamo che il limite sinistro del rapporto incrementale coincide con $\lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$, che coincide con il limite destro del rapporto incrementale. Perciò con $c = -4$ il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito, allora la funzione f è derivabile in 1 per $c = -4$.

5) [1 pti] Con il valore di c selezionato al punto precedente si disegni il grafico (immediato) di f.



Esercizio 2 (7 punti) *Si calcolino i due seguenti limiti:*
a) [4 pti] $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{x}}$

Primo modo.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log(x^3-1)};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x^3-1) ='' \ \frac{+\infty}{+\infty}\ '';$$

applicando il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x^3-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-\frac{4}{x^2}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} e^y = 1.$$

Secondo modo.
$(x^3-1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(x^3-1)}$ e l'esponente coincide con

$$\frac{1}{x}\log\left(x^3(1-\frac{1}{x^3})\right) = \frac{1}{x}\left(\log(x^3)+\log(1-\frac{1}{x^3})\right) = \frac{1}{x}\log(x^3)+\frac{1}{x}\log(1-\frac{1}{x^3}) = 3\frac{\log(x)}{x}+\frac{\log(1-\frac{1}{x^3})}{x}:$$

osserviamo che per $x\to+\infty$ si ha $\frac{1}{x^3}\to 0$, e poiché la funzione $F(z)=\log(1-z)$ è continua in 0 abbiamo che $\log(1-\frac{1}{x^3})\to\log(1)=0$, perciò il secondo termine dell'esponente si presenta nella forma $\frac{0}{\infty}$, e dunque tende a 0. Il primo termine invece tende a 0 per la gerarchia degli infiniti, in quanto sia x che $\log(x)$ tendono a $+\infty$, ma x ci tende più velocemente. In conclusione l'esponente del limite proposto tende a 0, e poiché la funzione $F(z)=e^z$ è continua in 0, il risultato del limite è $e^0=1$.

b) [3 pti] $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-8}{2x-x^2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-8}{2x-x^2} = \text{“}\ \frac{16-14-8}{2x-x^2} =$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{4x^2-7x-8}{2x-x^2} = \text{“}\frac{-6}{0^-}\text{”} = +\infty,$$

perché se $x=2+\epsilon>2$ allora $2\,(2+\varepsilon)-(2+\varepsilon)^2 = 4+2\varepsilon-4-4\varepsilon-\varepsilon^2 = -2\varepsilon-\varepsilon^2<0$.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{4x^2-7x-8}{2x-x^2} = \text{“}\frac{-6}{0^+}\text{”} = -\infty,$$

perché se $x=2-\epsilon<2$ allora $2\,(2-\varepsilon)-(2-\varepsilon)^2 = 4-2\varepsilon-4+4\varepsilon-\varepsilon^2 = 2\varepsilon-\varepsilon^2>0$ per $\varepsilon>0$ e sufficientemente piccolo. Dunque il limite non esiste.

Esercizio 3 (13 punti)
Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, data da

$$f(x) = 10+\log(x^2+3).$$

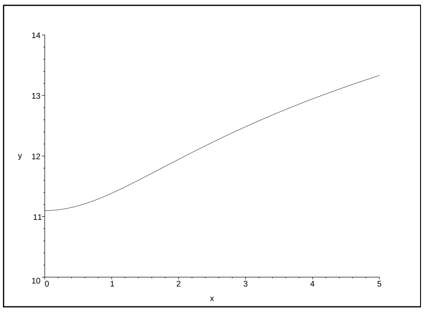
Dato un qualsiasi $x\geq 0$, $f(x)$ indica il costo di produzione per un'azienda di x unità del bene che l'azienda produce.
1) [6 pti] Calcolando la controimmagine $f^{-1}(\{y\})$, ossia $f^{-1}(y)$, di un generico $y\in\mathbb{R}$, si determini se la funzione f è iniettiva. Si determinino poi l'immagine di f, e $\sup f$.

Dato $y\in\mathbb{R}$, la sua controimmagine $x=f^{-1}(y)$ è l'insieme delle soluzioni x di $10+\log(x^2+3)=y$ che cadono in $[0,+\infty)$. Ora: $10+\log(x^2+3)=y$ sse $\log(x^2+3)=y-10$. possiamo elevare e a ciascuno dei due membri dell'equazione ed otteniamo che $\log(x^2+3)=y-10$ sse $x^2+3=e^{y-10}$ sse $x^2=e^{y-10}-3$. Intanto affinchè questa equazione abbia soluzione è necessario che $e^{y-10}-3\geq 0$, ossia $e^{y-10}\geq 3$, ossia $y-10\geq\log(3)$, ossia $y\geq 10+\log(3)$. Ciò significa che solo gli $y\geq 10+\log(3)$ hanno controimmagine non vuota, quindi per $y<10+\log(3)$ si ha $f^{-1}(y)=\emptyset$.
Inoltre, per gli $y\in[10+\log(3),+\infty)$ abbiamo che esiste un solo $x\geq 0$ per cui $x^2=e^{y-10}-3$, precisamente si ha $x=\sqrt{e^{y-10}-3}$ (radice aritmetica), quindi $f^{-1}(y)=\sqrt{e^{y-10}-3}$: poichè per ogni $y\in[10+\log(3),+\infty)$ è una sola la soluzione in $[0,+\infty)$ all'equazione proposta, la funzione $f(x)$ è iniettiva sul suo dominio.

Infine, dal fatto che l'insieme degli y che hanno controimmagine non vuota è $[10+\log(3),+\infty)$, ricaviamo che $Im(f) = [10+\log(3),+\infty)$. Da ciò si deduce che $\sup f = \sup[10+\log(3),+\infty) = +\infty$.

2) [5 pti] Utilizzando i limiti di f agli estremi del dominio di f, la derivata prima e la derivata seconda di f, si disegni il grafico della funzione.

I limiti di f agli estremi del domnio sono immediati:
poiché f è continua si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 10+\log(3)$, che è poco più grande di $10+\log(e) = 11$
inoltre, poiché $\log(z) \to +\infty$ quando $z \to +\infty$, abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, e risulta $f'(x) \geq 0$ sse $2x \geq 0$ sse $x \geq 0$, perciò sul dominio $[0,+\infty)$ la funzione risulta crescente.
$f''(x) = \frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+2)^2}$, perciò risulta che $f''(x) \geq 0$ sse $3-x^2 \geq 0$, e, sul dominio, sse $x \in [0,\sqrt{3}]$, perciò la funzione è convessa in $[0,\sqrt{3}]$ e concava in $[\sqrt{3},+\infty)$, presentando un punto di flesso in $\sqrt{3}$ a quota $f(\sqrt{3}) = 10+\log(6)$, numero che è più grande di $10+\log(e) = 11$ e più piccolo di $10+\log(e^2) = 12$.



3) [1 pti] Per quali quantità x il costo di produzione è minore o uguale di 20 Euro?

Dobbiamo risolvere in x la disuguaglianza $f(x) \leq 20$, ossia $10+\log(x^2+3) \leq 20$: osservando il grafico capiamo che, poiché f è crescente, le soluzioni sono le $x \geq 0$ tali che $x \leq f^{-1}(20) = \sqrt{e^{20-10}-3} = \sqrt{e^{10}-3}$, ossia le $x \in [0,\sqrt{e^{10}-3}]$. Infatti f crescente implica che f^{-1} è crescente, applicando allora $f^{(-1)}$ ad entrambi i membri della disuguaglianza $f(x) \leq 20$ troviamo che le soluzioni sono le x nel dominio tali che $x \leq f^{-1}(20)$.

4) [1 pti] Si calcoli, giustificando, $\min_{[\sqrt{e^2-3},+\infty)} f$.

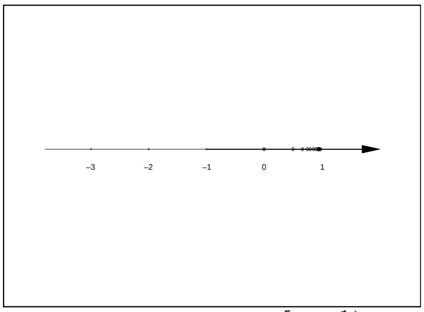
Poiché f è crescente, il minimo richiesto è esattamente $f(\sqrt{e^2-3}) = 10+\log\big((\sqrt{e^2-3})^2+3\big) =$ $10+\log\big(e^2-3+3\big) = 10+2\log(e) = 12$.

Esercizio 4 (11 punti)
1) [2 pti] Si diano la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto e superiormente limitato e la definizione di estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.

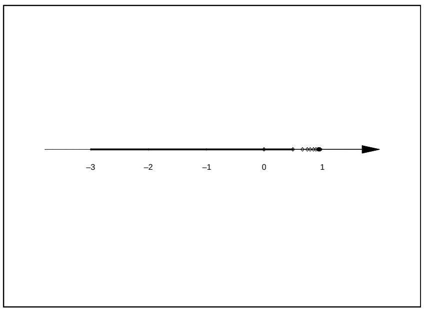
L'estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato è il minimo dei suoi maggioranti, dove per maggiorante si intende un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq K$ per ogni $x \in A$. Si dimostra che il minimo dell'insieme dei maggioranti di A esiste, ed è finito, qualunque sia A non vuoto e superiormente limitato.
L'estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato è il massimo dei suoi minoranti, dove per minorante si intende un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq K$ per ogni $x \in A$. Si dimostra che il massimo dell'insieme dei minoranti di A esiste, ed è finito, qualunque sia A non vuoto e inferiormente limitato.

2) [3 pti] Sia $A = A = \big\{1-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big[-3,\frac{1}{2}\big)$. Si rappresenti, approssimativamente, l'insieme A sulla retta reale. Si dimostri che A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

Concretizziamo intanto alcuni dei numeri dell'insieme $\big\{1-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\big\}$: per $n=1$ abbiamo l'elemento $1-\frac{1}{1}$ $=0$; per $n=2$ abbiamo l'elemento $1-\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}$; per $n=3$ abbiamo l'elemento $1-\frac{1}{3}$; per $n=4$, abbiamo l'elemento $1-\frac{1}{4}$ e così via.



Dobbiamo ora unire con tutti i numeri dell'intervallo $\left[-3, \frac{1}{2}\right)$, ed otteniamo



Ne segue che -3 è minorante di A e 1 è maggiorante, perciò A è limitato.

3) [4 pti] Si determinino $\sup A$ *ed* $\inf A$ *sulla base della definizione.*

Tutti i numeri maggiori o uguali a 1 sono maggioranti di A, ma non appena si prenda un K poco sotto 1 questo non è più maggiorante, perché possiamo sempre trovare numeri di A che sono maggiori di K. Infatti fissato un generico $\epsilon > 0$ si ha $1 - \epsilon < \frac{1}{n}$ non appena $\epsilon > \frac{1}{n}$, ossia $n > \frac{1}{\epsilon}$, e con $\bar{n} > \frac{1}{\epsilon}$ ho $\bar{x} = 1 - \frac{1}{\bar{n}} \in A$. Dunque $\sup A = 1$.
Tutti i numeri minori o uguali a -3 sono minoranti di A, e non appena si prenda un $K > -3$ questo non è più minorante. Infatti dato un generico $\epsilon > 0$ il numero $\bar{x} = -3 + \frac{\epsilon}{2}$ si trova in A, ed è $\bar{x} < -3 + \epsilon$. Dunque è $\inf A = -3$.

4) [2 pti] Si individui l'insieme dei punti interni ad A.

Nessuno dei numeri $1 - \frac{1}{n}$ è interno ad A, se $n > 2$, perché fissato $n > 2$ è possibile trovare un intorno sufficientemente piccolo di $x_0 = 1 - \frac{1}{n}$ che non contiene altri punti di A oltre a x_0. Dell'intervallo $[-3, \frac{1}{2})$ invece i punti interni sono tutti e soli quelli di $(-3, \frac{1}{2})$, infatti -3 nemmeno appartiene ad A, e 2 non è interno perché preso un intorno $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ sufficientemente piccolo la parte $(2, 2 + \varepsilon)$ non contiene alcun punto di A. Invece tutti i punti di $(-3, \frac{1}{2})$ sono interni perché questo è un intervallo aperto.