ALWAYS
LEARNING

CAPITOLO 7 – L'analisi delle serie storiche per la programmazione delle attività

Paragrafo 7.4 – Metodi di (s)composizione della serie e stima delle componenti

7

Paragrafo 7.4
Metodi di (s)composizione della serie e stima delle componenti

Argomenti

- I modelli di composizione e scomposizione e i metodi per la stima delle componenti

- L'impiego delle medie mobili per eliminare le oscillazioni e stimare le componenti sistematiche

- La stima della stagionalità, della serie destagionalizzata e del trend-ciclo utilizzando le medie mobili

Paragrafo 7.4.1
I modelli di composizione e scomposizione e i metodi per la stima delle componenti

L'approccio classico all'analisi delle serie temporali ipotizza, come si è detto, che la **serie** sia composta da **variazioni** (pattern) sistematiche o deterministiche (trend, ciclo, stagionalità) e da **oscillazioni di disturbo o casuali**.

Ipotizza, inoltre, che le oscillazioni sistematiche possano essere **stimate e previste per il futuro**, se queste presentano **regolarità** di comportamento che si ritiene possano continuare a verificarsi nel tempo.

Con riferimento al modello $Y_t = f(T_t, C_t, S_t, e_t)$, si tratta quindi di stimare le singole componenti virtuali T_t, C_t e S_t.

La stima della componente ciclica presenta notevoli difficoltà anche perché, il ciclo economico non presenta più oscillazioni di carattere regolare.

Pertanto in questo capitolo non affronteremo il problema della **stima** della componente ciclica e ci limiteremo a considerare la componente ciclica unitamente alla componente di trend, cioè il **trend-ciclo.**

Al fine di stimare le componenti virtuali indicate occorre:

- stabilire il modo con il quale le stesse interagiscono tra loro (si aggregano) per dar luogo alla serie effettiva (specificare la f).
- decidere il metodo con cui stimare le singole componenti.

Le due principali forme di f sono:

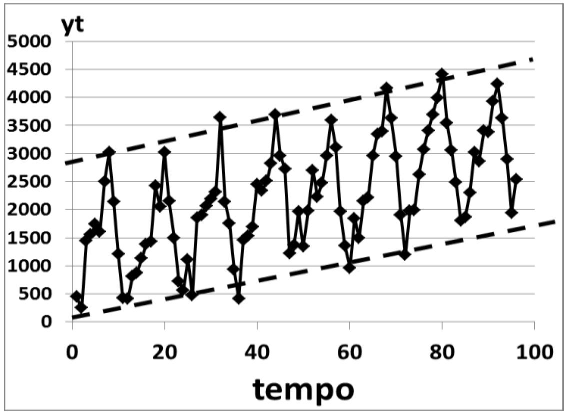
il **modello additivo**:

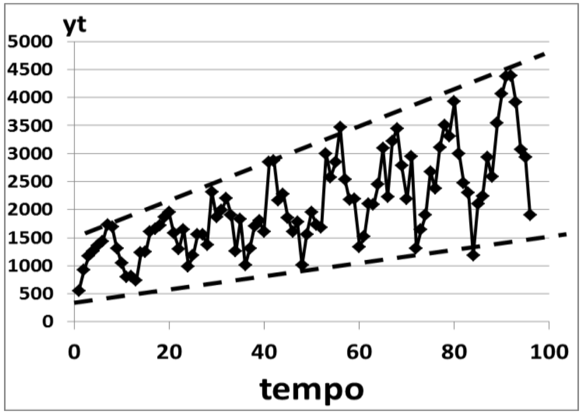
$$y_t = T_t + S_t + e_t$$

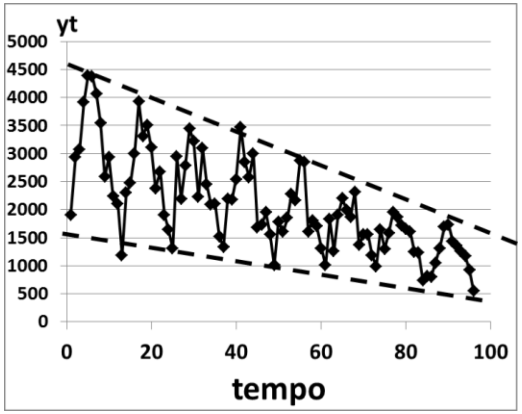
il **modello moltiplicativo**:

$$y_t = T_t \times S_t \times e_t$$

Un modello additivo è appropriato quando **l'ampiezza dell'oscillazione** stagionale **non varia** con il variare del livello della serie (si parla allora di serie additiva). Se invece la fluttuazione stagionale **aumenta** (**o diminuisce**) proporzionalmente all'aumento (diminuzione) del livello della serie, allora è più adeguato un modello moltiplicativo. A titolo esemplificativo si vedano i grafici che seguono







Nel **modello additivo**, le componenti $\mathbf{T_t}$, $\mathbf{S_t}$, $\mathbf{e_t}$ sono espresse nella **stessa unità di misura di $\mathbf{y_t}$.**

Nel modello moltiplicativo, **solo $\mathbf{T_t}$** (per convenzione) viene espresso **nell'unità di misura di $\mathbf{y_t}$** mentre S_t e e_t sono espressi come numeri indici rispetto a T_t.

Box 7.1 - I modelli di composizione misti

In realtà la combinazione delle componenti può avvenire anche considerando che alcune di esse si combinano in modo additivo ed altre in modo moltiplicativo. In questo caso si parla di modelli di composizione misti. I modelli misti proposti più frequentemente sono:

- $y_t = T_t \times S_t + e_t$, dove le componenti T_t ed e_t sono espresse nella stessa unità di misura di y_t mentre S_t assume la forma di numero indice;
- $y_t = T_t \times (1 + s_t) + a_t + e_t$, dove la stagionalità S_t è composta da due parti: una moltiplicativa uguale a $(1 + s_t)$ e una additiva uguale a a_t

Le singole componenti possono essere stimate utilizzando **metodi empirici** (perequativi) oppure **metodi analitici** (ovvero di interpolazione).

Nel **primo caso** si utilizza il **metodo delle medie mobili** che stima i valori delle componenti, ma non consente di per sé di effettuare estrapolazioni.

Nel **secondo caso** si impiega una **funzione analitica** per la quale è possibile stimare i parametri e che consente di effettuare estrapolazioni al futuro.

Come si vedrà, i due metodi non sono strettamente alternativi e possono anche essere applicati congiuntamente.

Iniziamo con la presentazione dell'applicazione del metodo delle medie mobili per la **stima simultanea della stagionalità e del trend-ciclo**, poiché nell'ambito della gestione operativa dell'azienda, è in primo luogo fondamentale stimare la stagionalità delle vendite per organizzare in maniera efficiente la produzione, mese per mese, e di conseguenza anche l'ammontare delle scorte.

Paragrafo 7.4.2

L'impiego delle medie mobili per eliminare le oscillazioni e stimare le componenti sistematiche

Il metodo delle medie mobili consiste nel **calcolo di una nuova serie storica** in cui il termine relativo ad un determinato tempo è il risultato della **media di k termini contigui** della serie originaria.

Se **k** è **dispari** ciascuna media mobile si riferisce al tempo centrale su cui è stata calcolata. Ad esempio, se k=3, il valore della media mobile riferito al tempo t è dato da: $MM3(y_t) = (y_{t-1}+y_t+y_{t+1})/3$

Se **k** è **pari** è necessario **calcolare la media di due medie mobili contigue** per ottenere un valore centrato sui tempi della serie storica (**media mobile centrata a k termini**). Ad esempio, se k=4, il valore della media mobile riferito al tempo t viene ottenuto nel modo seguente:

$MM4(y_{t-1,t}) = (y_{t-2}+y_{t-1}+ y_t+y_{t+1})/4$

$MM4(y_{t,t+1}) = (y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+y_{t+2})/4$

$$MM_4(y_t) = \frac{MM_4(y_{t-1,t}) + MM_4(y_{t-1,t})}{2}$$

PEARSON

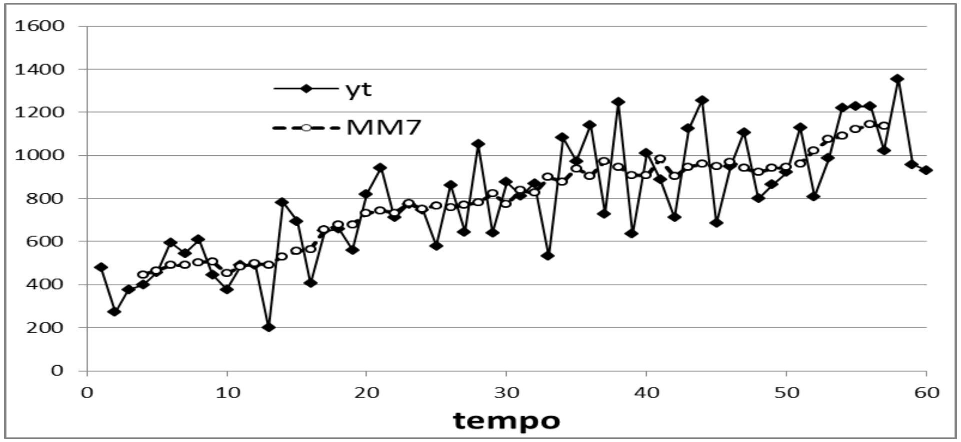
Con **k dispari** si perdono **(k-1)/2** termini **all'inizio** e **alla fine** della serie.

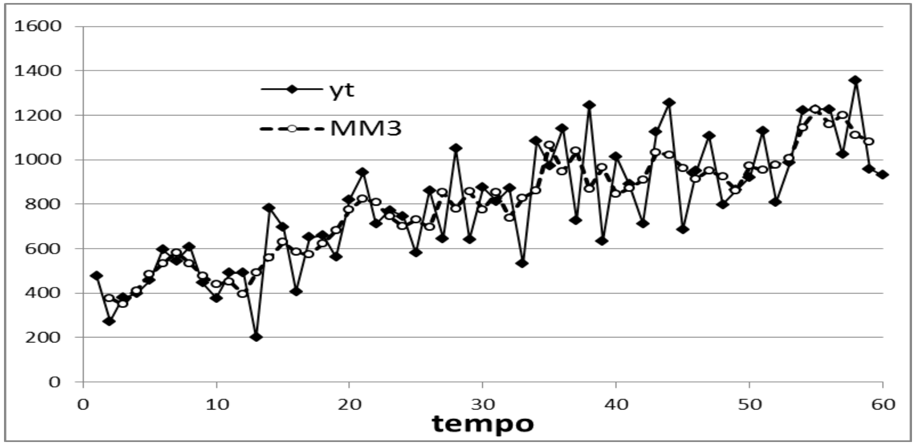
Analogamente, con **k pari**, si perdono **k/2** termini **all'inizio** e **alla fine** della serie.

La perdita dei primi termini ha poca importanza; lo stesso non può dirsi per la perdita dei termini più recenti, soprattutto se siamo interessati a predisporre un modello di previsione.

La metodologia delle medie mobili ,se applicata su una serie storica, ha innanzitutto l'effetto di **smussare le oscillazioni** di qualunque tipo.

Effetto che appare evidente dai grafici che seguono.





Le medie mobili hanno in particolare l’effetto (la proprietà) di **eliminare** o ridurre **le oscillazioni che hanno un periodo pari al numero dei termini coinvolti nel calcolo della media mobile stessa**.

Questa proprietà, che vale in modo completo soltanto per **serie rettilinee**, ha una conseguenza ancora più importante ai nostri fini essendo di particolare rilievo per la **eliminazione delle oscillazioni stagionali**.

Infatti, una media mobile che ha un numero di termini pari al periodo della stagionalità ($k = 12$ se si tratta di dati mensili; $k = 4$ se i dati sono trimestrali; e così via) elimina le oscillazioni stagionali con periodo e ampiezza costanti; quindi, consente di **“scomporre” la serie originaria nelle componenti virtuali**.

Paragrafo 7.4.3

La stima della stagionalità, della serie destagionalizzata e del trend-ciclo utilizzando le medie mobili

Vediamo ora come **si stimano le componenti di una serie storica** impiegando le medie mobili.

Indipendentemente dal modello di composizione (additivo o moltiplicativo) scelto, occorre attuare le seguenti **quattro fasi**, ammettendo che i dati della serie storica abbiano cadenza mensile:

1. Calcolo della **media mobile centrata a 12 termini** per tutta la serie
2. Calcolo della **componente di stagionalità mista ad errore $(S,e)_t$** confrontando la serie originaria y_t con la serie stimata.
3. Stima della **componente stagionale S_t**
4. Derivazione della **serie destagionalizzata D_t e stima del trend-ciclo**

1. Calcolo della media mobile centrata a 12 termini per tutta la serie

La MM12(y_t) dovrebbe **eliminare le oscillazioni stagionali**, e gran parte di quella erratica, e quindi rappresenta una **stima** di prima approssimazione **del trend-ciclo** che possiamo indicate con $T_t^{(1)}$

La serie delle medie mobili è, per i motivi detti, più breve della serie originaria.

In particolare, con una serie mensile, **si perdono** 6 **termini all'inizio** ($T_t^{(1)}$ inizia dal 7° termine) e 6 **alla fine** della serie.

Ammettendo di avere una serie completa per n anni e m mesi all'interno dell'anno, la serie $T_t^{(1)}$ sarà composta da (N–m)=(nxm–m) termini dove N è il numero totale di osservazioni della serie e m è il numero dei termini del ciclo stagionale (numero di mesi ad esempio) e n è il numero di anni.

2. Calcolo della componente di stagionalità mista ad errore $(S,e)_t$ confrontando la serie originaria y_t con la serie stimata $T_t^{(1)}$.

Il confronto tra le due serie consisterà in una differenza, se il modello di composizione prescelto è additivo, in un rapporto se il modello è moltiplicativo. Questa operazione consente di ottenere la **stima della serie della stagionalità mista ad errore**, che sarà composta ovviamente da (N-m) termini. Quindi per ciascun mese si ottengono **n-1 stime della componente $(S,e)_t$** . Queste stime sono dette **differenze lorde** (per il modello additivo) o **coefficienti lordi** (per il modello moltiplicativo) di stagionalità, in quanto inglobano la componente di disturbo.

$$(S,e_t) = y_t - T_t^{(1)}$$ Nel modello additivo

$$(S,e_t) = \frac{y_t}{T_t^{(1)}}$$ Nel modello moltiplicativo

3. Stima della componente stagionale S_t

Se, come spesso si ipotizza, il modello di **stagionalità** è **costante** negli anni (cioè, se l'effetto delle oscillazioni stagionali si presenta nel medesimo mese dei vari anni, con la stessa direzione e forza), l'obiettivo è quello di **stimare un coefficiente unico per ciascun mese**. L'ipotesi di stagionalità costante consiste nell'assumere che:

$S_t = S_{t+k}, = S_{t+2k} = \; . \; . \; .$

dove k è l'ampiezza del periodo stagionale (k=12 con dati mensili).

Per stimare un unico coefficiente per ciascun mese occorre effettuare due operazioni.

1)Calcolare la **media aritmetica dei termini $(S,e)_t$** dei vari anni riferiti allo stesso mese e così **eliminare la componente di errore**; si otterrà per ciascun mese j (j=1,2,…, m) il coefficiente $\hat{S}j$, cioè in totale 12 coefficienti diversi.

2) Verificare se le stime della stagionalità così ottenute per ognuno dei 12 mesi soddisfano la **proprietà**, cosiddetta del **"principio di conservazione delle aree"**, che prevede che le oscillazioni stagionali esauriscono il loro effetto all'interno dell'anno. La **media** dei 12 coefficienti stagionali deve essere **uguale a 0** nel caso di un **modello additivo** e **uguale ad 1** nel caso di un **modello moltiplicativo** (uguale a 0 la media dei coefficienti s_t). Se la proprietà non è soddisfatta occorre aggiustare i singoli coefficienti mensili: si sottrae la media nel caso del modello additivo; si divide per la media nel caso del modello moltiplicativo.

Queste operazioni consentono di ottenere quelli che vengono chiamati **coefficienti netti di stagionalità** ($\hat{\hat{S}}_t$). In realtà si tratta della stima definitiva dei 12 coefficienti mensili $\hat{\hat{S}}_t$ (j=1,..,12)

4. Derivazione della serie destagionalizzata D_t e stima del trend-ciclo

I coefficienti netti di stagionalità possono essere utilizzati per **eliminare la stagionalità dalla serie originaria** (tramite differenze o rapporti a seconda se il modello è additivo o moltiplicativo) consentendo di **stimare la serie destagionalizzata D_t completa**, cioè per tutti i termini della serie originaria. Quindi:

$$D_t = y_t - \hat{\hat{S}}_t$$

Nel modello additivo

$$D_t = \frac{y_t}{\hat{\hat{S}}_t}$$

Nel modello moltiplicativo

dove, per t corrispondente ai vari mesi di ciascun anno, $\hat{\hat{S}}_t$ è in realtà $\hat{\hat{S}}_j$, *j* (*j*=1,2,…,m).

Se le stima dei coefficienti netti di stagionalità sono valide, la serie destagionalizzata non dovrebbe presentare oscillazioni stagionali. Questo può essere verificato col **time-plot** e col calcolo del **correlogramma dei residui**. La serie destagionalizzata contiene il trend-ciclo e l'effetto di disturbo.

Dalla **serie destagionalizzata** si può poi ottenere una **stima del trend-ciclo** ($\hat{T}_t$) eliminando le oscillazioni residue **attraverso** una **media mobile** con un opportuno numero di termini (3, 5, 7 o più, da verificare empiricamente).

Naturalmente al termine di queste operazioni è possibile **ricomporre** la parte sistematica virtuale della **serie storica** che contenga la **stima del trend e** quella della **stagionalità**.

Con il modello additivo sarà $\hat{y}_t = \hat{T}_t + \hat{\hat{S}}_t$, mentre con il modello moltiplicativo sarà $\hat{y}_t = \hat{T}_t \times \hat{\hat{S}}_t$.

I coefficienti netti di stagionalità calcolati come si è appena descritto, possono essere utilizzati per la **programmazione della produzione e delle scorte di una azienda**, anche in **termini previsivi** cioè per i periodi futuri **se** è accettabile l'ipotesi che il modello di **stagionalità** della serie delle vendite sia **costante**.

Non è invece possibile **utilizzare** la stima del trend-ciclo ottenuta con le **medie mobili a fini previsivi**, sia perché **non** sempre è accettabile una ipotesi di **continuità di tale andamento**, sia perché, come si è detto, le medie mobili fanno **perdere termini** alla fine della serie.

Box 7.2 – Altri metodi di stima della stagionalità

Un **primo metodo**, abbastanza utilizzato, prevede di stimare prima il trend attraverso **metodi analitici**, cioè utilizzando una **funzione analitica**. La stima della funzione consente di calcolare i valori stimati del trend ($\hat{T}_t$) per tutti i mesi della serie.

Un **secondo metodo**, più empirico, viene usato quando la **variazione** del **trend non** è molto **forte**. Esso prevede il calcolo della differenza o del rapporto dei dati di ciascun mese ($y_{i,j}$) rispetto alla media annuale della serie storica ($\frac{1}{m}\sum_{j=1} y_{i,j}$). In questo modo si ottengono i coefficienti lordi di stagionalità e poi utilizzando le stime effettuate per tutti i mesi di tutti gli anni si calcolano i coefficienti netti.

Infine, un **terzo metodo** si impiega spesso quando si ritiene plausibile l'ipotesi che la **serie storica** abbia un **andamento** più o meno **esponenziale** e il modello di composizione sia di natura moltiplicativa. In questo caso si trasforma la serie originaria in una catena di rapporti tra i successivi termini e cioè **si calcolano yt / yt-1** (inserendo il simbolo dell'anno i e del mese j: yi,j / yi,j-1).