

ALWAYS
LEARNING

CAPITOLO 7 – L'analisi delle serie storiche per la programmazione delle attività

Paragrafo 7.6 – Il livellamento esponenziale quale metodo di previsione a breve e brevissimo termine



Paragrafo 7.6

Il livellamento esponenziale quale metodo di previsione a breve e brevissimo termine

Argomenti

- Premessa
- Il livellamento esponenziale costante o semplice
- Il livellamento esponenziale per serie con trend e/o stagionalità: i metodi di Holt-Winters

Paragrafo 7.6.1

Premessa

Il **livellamento** (o lisciamento) **esponenziale** - che deriva dall'inglese Exponential Smoothing - è un **metodo di previsione a breve e brevissimo termine** molto apprezzato e impiegato in ambito aziendale per la sua flessibilità e facilità d'uso, dovuta alla automaticità degli algoritmi di calcolo.

La preferenza per questo metodo di previsione persiste quando il numero delle serie da trattare, cioè dei prodotti per i quali effettuare la previsione delle vendite, è elevato (come ad esempio nel caso di un magazzino che deve gestire decine, centinaia o addirittura migliaia di prodotti e/o pezzi di ricambio da immettere nel processo produttivo o di vendita).

Inoltre, il livellamento esponenziale viene impiegato sia per la **perequazione dei dati di una serie storica**, sia per la **previsione di breve termine**.

Tuttavia esso è nato - proposto da Holt (1957) - soprattutto come metodo di previsione nell'ambito delle analisi delle serie storiche tramite le medie mobili.

Attualmente esistono molte varianti e modelli di livellamento esponenziale, ma presentiamo soltanto il **modello del livellamento esponenziale costante**, mettendone in evidenza la logica e il suo impiego, nonché i **metodi proposti da Holt-Winters** per tener conto della presenza nelle serie temporali del trend e della stagionalità.

Paragrafo 7.6.2

Il livellamento esponenziale costante o semplice

- Impostazione logica e modello
- L'influenza del valore del parametro di livellamento sulle previsioni e la sua scelta (stima)

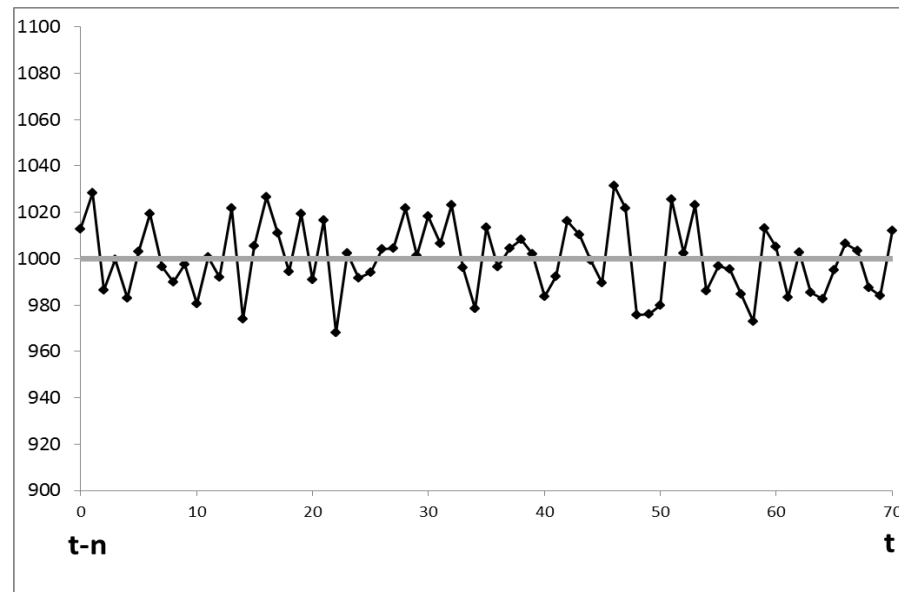
Impostazione logica e modello

Vari autori criticano i metodi di previsione delle serie storiche basati su **funzioni** interpolanti **analitiche** e/o su **medie mobili** in quanto essi implicano una certa inerzia, poiché, in genere, attribuiscono la stessa importanza a tutti i termini della serie (a tutte le osservazioni).

Nell'ambito delle previsioni è abbastanza logico ritenere che la previsione che si effettua al tempo t per il tempo $t+1$ debba tener conto in qualche modo di tutti i dati osservati nei tempi precedenti ma attribuendo **maggiore importanza ai dati più recenti** e in particolare all'ultimo dato osservato nel tempo t . In questo modo tra l'altro si può ipotizzare che la nuova informazione y_t porti un contributo specifico, cosiddetto di **innovazione**, alla conoscenza del comportamento della serie, di cui si deve tenere specificatamente conto. E' questa la logica che sottostà al livellamento esponenziale e in particolare al **livellamento esponenziale costante** (detto anche **livellamento esponenziale semplice**).

Il livellamento esponenziale costante parte dall'ipotesi che il fenomeno rappresentato dalla serie storica presenti un livello (M) approssimativamente costante (serie stazionaria in media), almeno nel breve periodo, e che comunque eventualmente si sviluppi moderatamente nel tempo.

Ipotizziamo di avere una serie storica osservata in t e negli n tempi precedenti, quindi a partire dal tempo $t-n$, cioè: $y_{t-n}, y_{t-n+1}, y_{t-n+2}, \dots, y_{t-3}, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t$, con un livello costante e con oscillazioni casuali, come illustrato nella figura qui sotto:



Poiché il livello medio (M) della serie è ipotizzato costante nel tempo, è abbastanza logico utilizzare come previsore elementare al tempo successivo la media aritmetica semplice delle osservazioni disponibili ed ogni volta che si osserva un nuovo dato ricalcolare la media sempre dello stesso numero di termini. In termini formali si ha che al tempo t si può prevedere il valore per il tempo $t+1$ ($\hat{y}_{t+1}$) calcolando la media aritmetica dal tempo $t-n$ al tempo t , cioè:

$$\hat{M}_t = (y_{t-n} + y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \dots + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t)/n = \hat{y}_{t+1}$$

È evidente che così facendo tutte le osservazioni, anche quelle più “vecchie”, hanno lo stesso peso $w_j = 1/n$, attribuito ad ogni osservazione y_{t-j} (con $j = 0, 1, 2, \dots, n$ e $\sum_j w_j = 1$), cioè contribuiscono allo stesso modo nella previsione di Y al tempo $t+1$, mentre è certamente più realistico ponderare le osservazioni in funzione della loro distanza dal tempo corrente, cioè con pesi decrescenti al crescere di tale distanza.

Nel modello di livellamento esponenziale costante si stabilisce che i pesi w_j attribuiti ad ogni osservazione (con $\sum_j w_j = 1$), decrescono esponenzialmente fino a zero, al crescere della distanza da t . Ciò giustifica la denominazione di livellamento esponenziale e presuppone quindi una struttura dei pesi del tipo seguente:

$$w_j = \alpha (1 - \alpha)^j, \text{ dove } \alpha \text{ è compreso tra } 0 \text{ e } 1 (0 < \alpha < 1) \text{ e } \sum_j w_j = 1$$

Applicando questa struttura di pesi, si avrà:

$$\hat{M}_t = \hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \alpha (1 - \alpha)^3 y_{t-3} + \dots + \alpha (1 - \alpha)^n y_{t-n}$$

Se la serie è sufficientemente lunga, è plausibile l'ipotesi che si possa sostituire al primo termine, incluso nel calcolo della media della serie, la previsione fatta al tempo precedente (poiché si tratta di una serie in media costante). Sostituendo ai successivi termini della serie la previsione fatta al tempo precedente, ed effettuando alcuni passaggi algebrici, si ricava:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t$$

che è la formula fondamentale del livellamento esponenziale costante e α è detto **parametro di livellamento** o **smussamento**.

E' ovvio che, essendo il modello costante, la previsione al tempo $t+\Theta$ (con $\Theta = 1, 2, 3, \dots$), cioè $\hat{y}_{t+\Theta}$ sarà uguale a $\hat{M}_t$.

Alcune osservazioni di rilievo sono opportune per l'interpretazione del modello.

In **primo luogo**, si rileva che il modello si fonda su una logica di “**aggiornamento sequenziale**” (*up-dating*) mano a mano che si ha una nuova osservazione (con la previsione ad un passo). Poiché il calcolo della **previsione avviene in modo ricorsivo**, se α si mantiene costante non occorrono tutti i dati della serie ma soltanto il valore della previsione fatta al tempo precedente e il valore della nuova osservazione.

In **secondo luogo**, dalla formula si vede chiaramente che il **previsore** non è altro che una **media aritmetica ponderata** attribuendo peso pari ad α al termine relativo al tempo corrente t e peso $1-\alpha$ a tutti gli altri termini della serie sintetizzati nella media calcolata al periodo precedente $t-1$.

Si osservi che se α è **vicino** ad **1** il modello attribuisce un **peso elevato all'ultima** (nuova) **osservazione** ed è trascurabile il peso che attribuisce alla storia passata; mentre se α è **vicino** a **0** è *basso il peso* che viene **attribuito alla nuova osservazione** e quasi uguale quello che attribuisce ai dati precedenti.

In **terzo luogo**, si può osservare che esplicitando e riscrivendo la formula del livellamento esponenziale nel modo seguente:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t = \alpha y_t + \hat{y}_t - \alpha \hat{y}_t = \hat{y}_t + \alpha (y_t - \hat{y}_t)$$

si mette in evidenza che nel tempo t nell'effettuare la **previsione per il tempo $t+1$** ($\hat{y}_{t+1}$) si modifica la previsione precedente $\hat{y}_t$, tenendo conto dell'errore di previsione ($y_t - \hat{y}_t$) commesso nel prevedere y_t ponderato secondo il valore del parametro di smussamento α . In questo modo si adotta una logica di correzione sequenziale degli errori commessi nel processo iterativo di previsione, cioè si "impara" a migliorare la previsione dagli errori commessi.

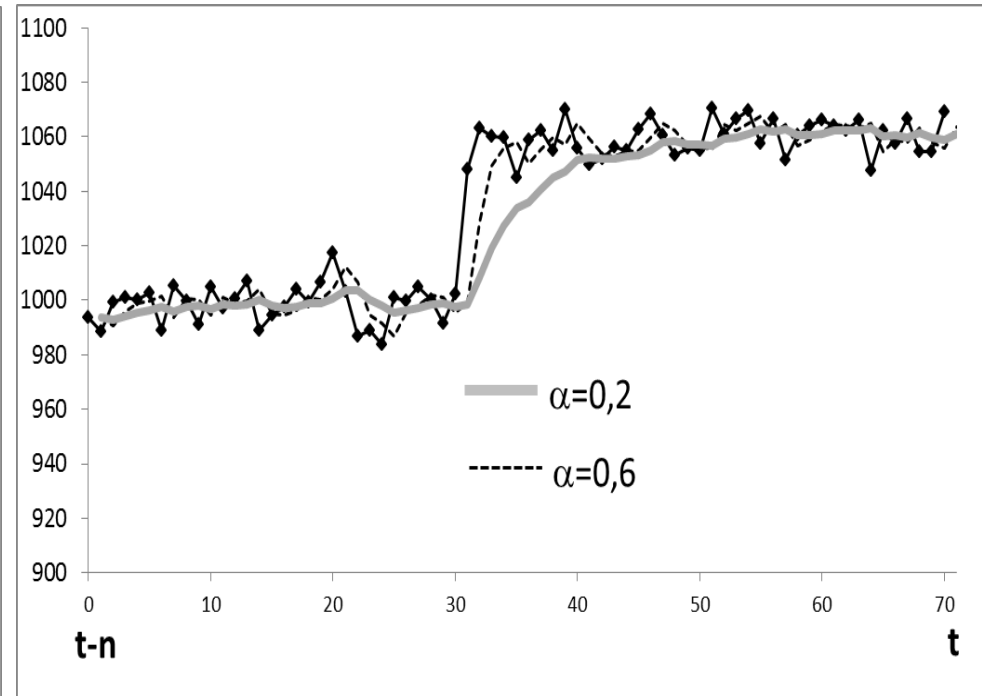
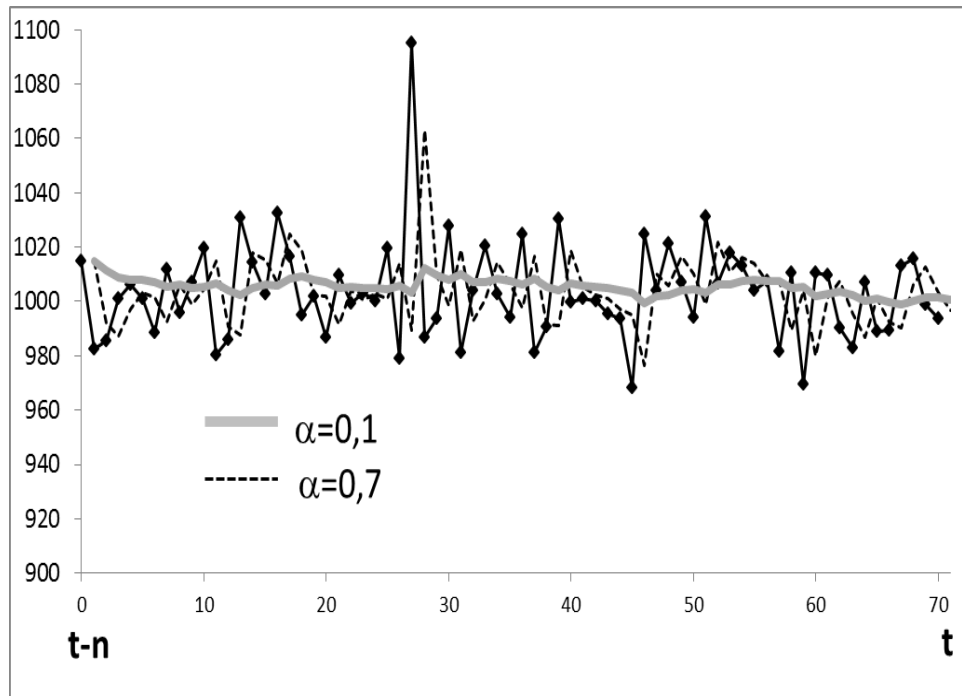
L'influenza del valore del parametro di livellamento sulle previsioni e la sua scelta (stima)

Si è già detto sopra che il valore che assume, o si attribuisce a, a influenza la struttura dei pesi. E' perciò certamente interessante valutare come esso influenza le previsioni in relazione alle fluttuazioni di una serie storica.

Avendo assunto che si tratti di una serie storica costante e priva di stagionalità possiamo considerare due casi che si possono verificare nelle vendite settimanali di un prodotto di una azienda (in media 1000 unità per settimana, salvo oscillazioni casuali):

- 1) *Shock* che si verifica nella serie storica delle vendite
- 2) Si ha un "gradino" nella serie storica

E' opportuno domandarci quale sarà l' α che consente di effettuare previsioni migliori nei due casi impiegando il livellamento esponenziale costante.



Come era intuitivo, osservando i due grafici si rileva che di fronte ad uno shock se a è elevato (in questo caso 0,7) la successiva previsione risente molto del valore dello shock, mentre se a è piccolo (in questo caso 0,1) la successiva previsione risente pochissimo del valore dello shock. Viceversa, di fronte ad un gradino se a è elevato (in questo caso 0,6) la previsione si adegua abbastanza rapidamente al nuovo livello medio delle vendite (della serie) e, invece, se a è piccolo (in questo caso 0,2) le previsioni sono risulteranno più basse delle effettive osservazioni per un numero di settimana abbastanza elevato (cioè si adegueranno al nuovo livello molto più lentamente).

Dal punto di vista operativo, poiché nelle serie di vendite reali possono avvenire entrambi i due tipi di variazioni sopra richiamate, è evidente che è molto importante scegliere un valore di α che sia **"ottimo"** (α^*) cioè che consenta di ottenere, in media, il minore errore di previsione possibile.

A questo fine, si può individuare il valore α^* che rende minima la somma dei quadrati degli errori di previsione, cioè che rende minima la funzione

$$SS(\alpha) = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2$$

e α^* si individua effettuando le previsioni modificando il valore di α da 0 a 1 e calcolando per ciascuna delle serie di previsioni la funzione sopra riportata.

Un altro problema da affrontare dal punto di vista pratico è quello che solitamente viene detto di “**inizializzazione**” del processo di calcolo delle formule ricorsive, cioè la determinazione del valore del primo termine previsto $\hat{y}_{t-n}$ della serie. Spesso si pone $\hat{y}_{t-n} = y_{t-n}$ oppure uguale ad una media dei primi valori della serie, più o meno numerosi a seconda che a sia vicino a 0 o vicino ad 1. Del resto l’effetto della scelta iniziale del valore di a è trascurabile se la serie è abbastanza lunga.

Infine, si deve osservare che mantenere costante a^* , per effettuare le previsioni ai tempi successivi, può non essere conveniente poiché può accadere che esso non sia più il valore ottimo tenendo conto dei nuovi dati rilevati. Per risolvere il problema si ricorre all’impiego di un **adattamento dinamico** del parametro ricalcolandolo ad ogni tempo, cioè passo dopo passo e quindi calcolando un a ottimo che cambia con t (a^*t). A questo fine sono stati proposti dei metodi detti ARRES (*Adaptive Response Rate Exponential Smoothing*)

Paragrafo 7.6.3

Il livellamento esponenziale per serie con trend e/o stagionalità: i metodi di Holt-Winters

Per quanto abbiamo visto finora, è evidente che il modello del livellamento esponenziale costante o semplice non è adatto ad effettuare previsioni in presenza di trend e stagionalità.

A questo fine sono stati proposti molti modelli di livellamento esponenziale.

Qui riportiamo i modelli cosiddetti di Holt-Winters che sono tra i più utilizzati.

Modello di Holt-Winters per serie storica con trend

Presentiamo qui un modello di composizione tra il trend e la stagionalità di tipo additivo.

Se vi sono sia trend che stagionalità il modello di previsione al tempo $t+\Theta$ diviene:

$$\hat{y}_{t+\Theta} = \hat{m}_t + \hat{T}_t \Theta + \hat{S}_{t+\Theta-s}$$

dove la componente stagionale è indicata con S e con s viene indicato il periodo della stagionalità.

I modelli di livellamento esponenziale da utilizzare per la stima del livello medio, del trend e della stagionalità sono:

$$\hat{m}_t = \delta_1 \left(y_t - \hat{S}_{t-s} \right) + (1 - \delta_1) \left(\hat{m}_{t-1} + \hat{T}_{t-1} \right)$$

$$\hat{T}_t = \delta_2 \left(\hat{m}_t - \hat{m}_{t-1} \right) + (1 - \delta_2) \hat{T}_{t-1}$$

$$\hat{S}_t = \delta_3 \left(y_t - \hat{m}_t \right) + (1 - \delta_3) \hat{S}_{t-s}$$

dove δ_1 , δ_2 e δ_3 sono i parametri di smussamento rispettivamente per il livello, il trend e la stagionalità.

Anche in questo caso, le stime sono ottenute come medie aritmetiche ponderate, con l'avvertenza che nel primo modello occorre eliminare la stagionalità dal valore di y_t per ottenere il livello medio e nel terzo modello occorre eliminare il livello dal valore di y_t per ottenere la stima della stagionalità.

L'inizializzazione può avvenire partendo dai dati con cadenza inferiore all'anno del primo anno della serie. Indicando con $1, j$ la cadenza inferiore all'anno 1 (con $J = 1, 2, \dots, m$), si può porre:

$$\hat{m}_{1,j} = 1/s \sum_{j=1}^s y_{1,j}$$

$$\hat{T}_{1,j} = 0$$

$$\hat{S}_{1,j} = y_{1,j} - \hat{m}_{1,j}$$

I tre parametri di smussamento δ_1 , δ_2 e δ_3 sono compresi tra 0 e 1 e i loro valori ottimi δ_1^* , δ_2^* e δ_3^* possono essere individuati minimizzando la somma dei quadrati degli scarti degli errori di previsione, come si è visto per i precedenti modelli di livellamento esponenziale.

Concludendo vale la pena osservare che i modelli di Holt-Winters sono certamente flessibili e partendo con valori piccoli dei parametri di smussamento possono fornire modelli di previsione validi.

Modello di Holt-Winters per serie storica con trend

Presentiamo qui un modello di composizione tra il trend e la stagionalità di tipo additivo.

Se vi sono sia trend che stagionalità il modello di previsione al tempo $t+\Theta$ diviene:

$$\hat{y}_{t+\Theta} = \hat{m}_t + \hat{T}_t \Theta + \hat{S}_{t+\Theta-s}$$

dove la componente stagionale è indicata con S e con s viene indicato il periodo della stagionalità.