

La misura della produttività e dell'efficienza aziendale

La misura della produttività e dell'efficienza aziendale

Introduzione al problema

La misura dell'Efficienza consiste nel rispondere alle domande seguenti:

- **Quanto in più l'azienda Alfa potrebbe produrre con i fattori produttivi di cui dispone?**
- **Di quanto potrebbe ridurre gli input, senza diminuire la produzione?**
- **Quanto potrebbe aumentare il suo fatturato con i fattori produttivi di cui dispone?**
- **Quanto potrebbe ridurre il costo sostenuto per acquistare gli input senza ridurre la produzione?**

La **Produttività** consiste nella misura del livello di output per unità di input

Si distingue fra:

- **Produttività parziale**, ovvero per un solo fattore produttivo (prodotto per singolo operaio, prodotto per ora lavorata, raccolto per ettaro di terreno ecc.)
- **Produttività Totale dei Fattori (TFP)**, ovvero una misura della produttività che coinvolge tutti i fattori produttivi. È un concetto più complesso e più difficile a misurare

Produttività ed Efficienza, in cosa differiscono?

Sono concetti simili, ma non identici

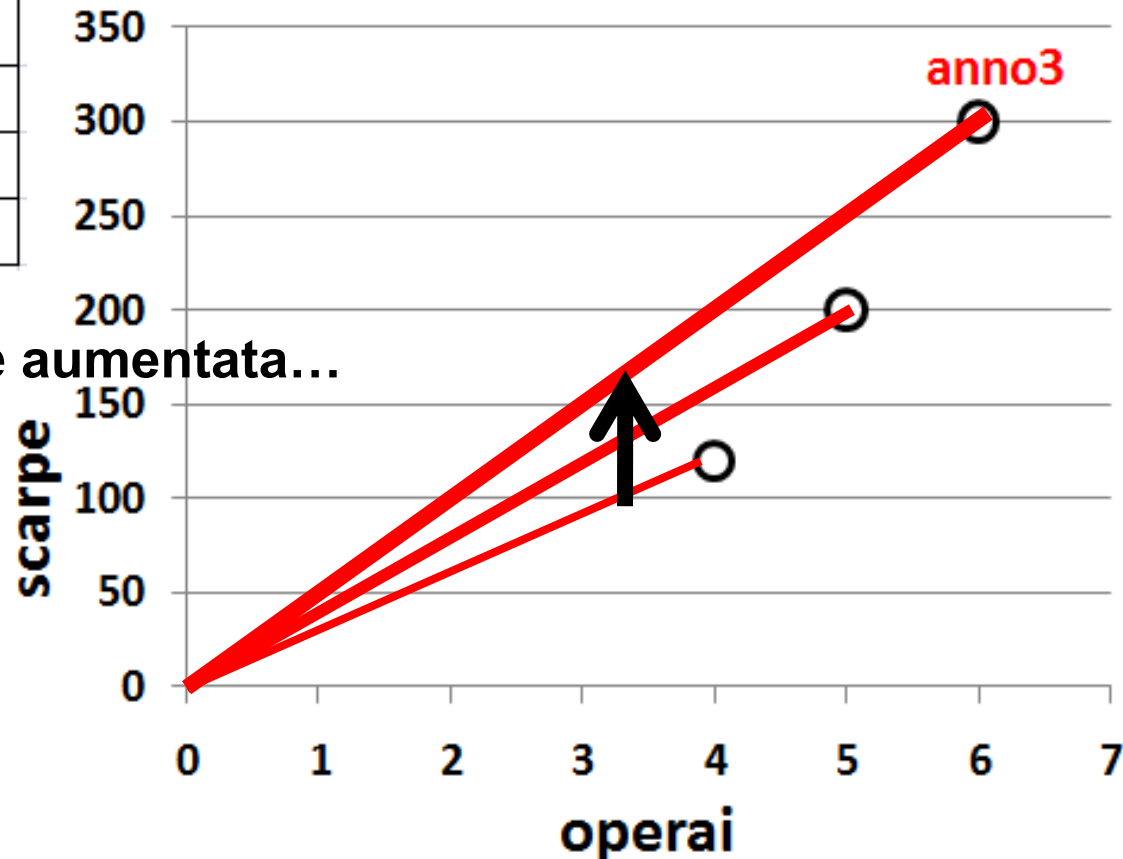
- **Produttività** = $\text{output}/\text{input}$
- L'**Efficienza** misura la distanza da una *situazione di riferimento* (benchmark)

Esempio

- L'azienda Alfa produce scarpe
- Nel corso degli anni il numero di operai impiegati e di scarpe prodotte ha conosciuto la progressione riportata in tabella

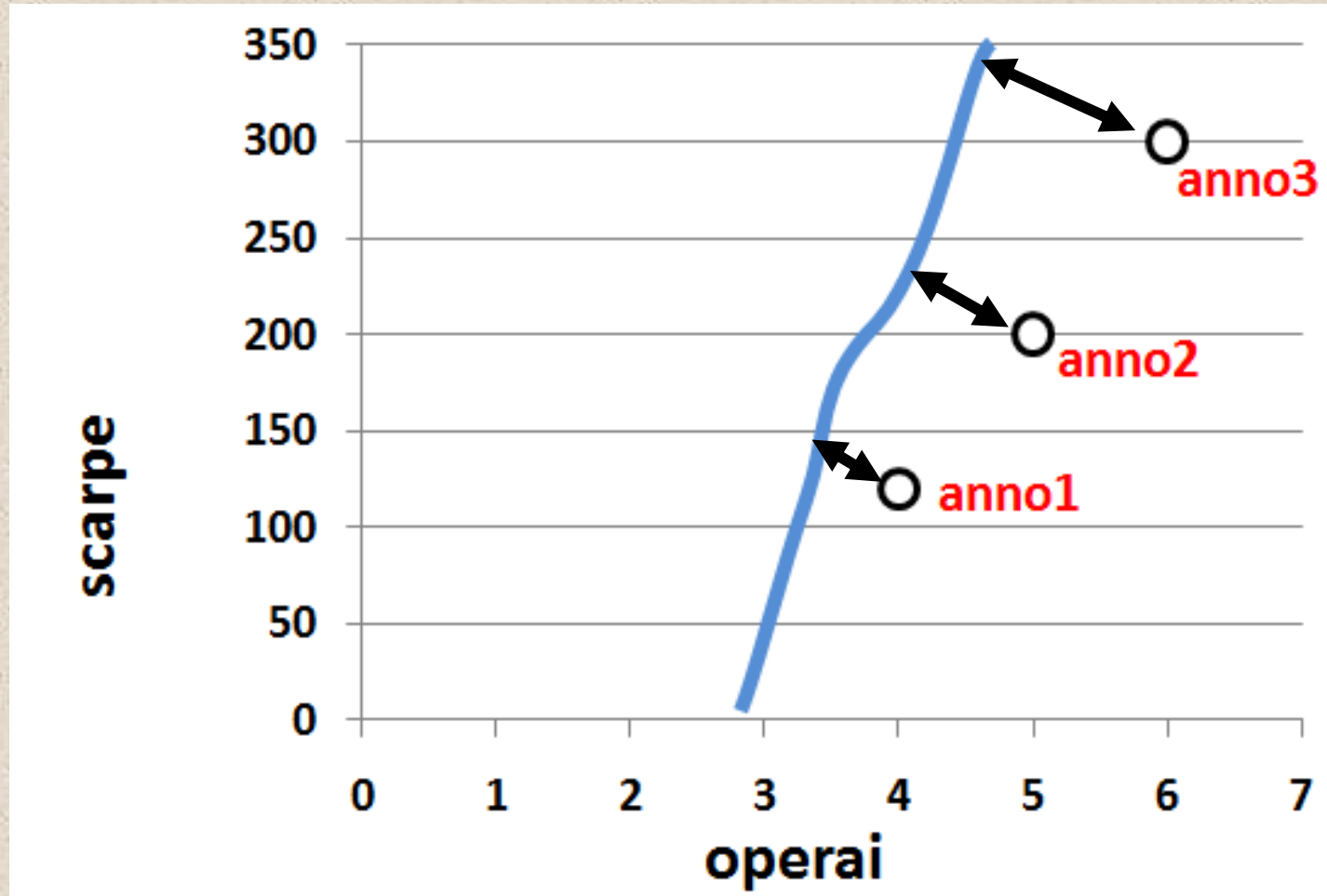
anno	operai	scarpe	scarpe operai
1	4	120	30
2	5	200	40
3	6	300	50

- La produttività è dunque aumentata...



Esempio (segue)

- Supponiamo di sapere che, per la Tecnologia attuale, il massimo output per ogni livello di input sia indicato dalla linea blu



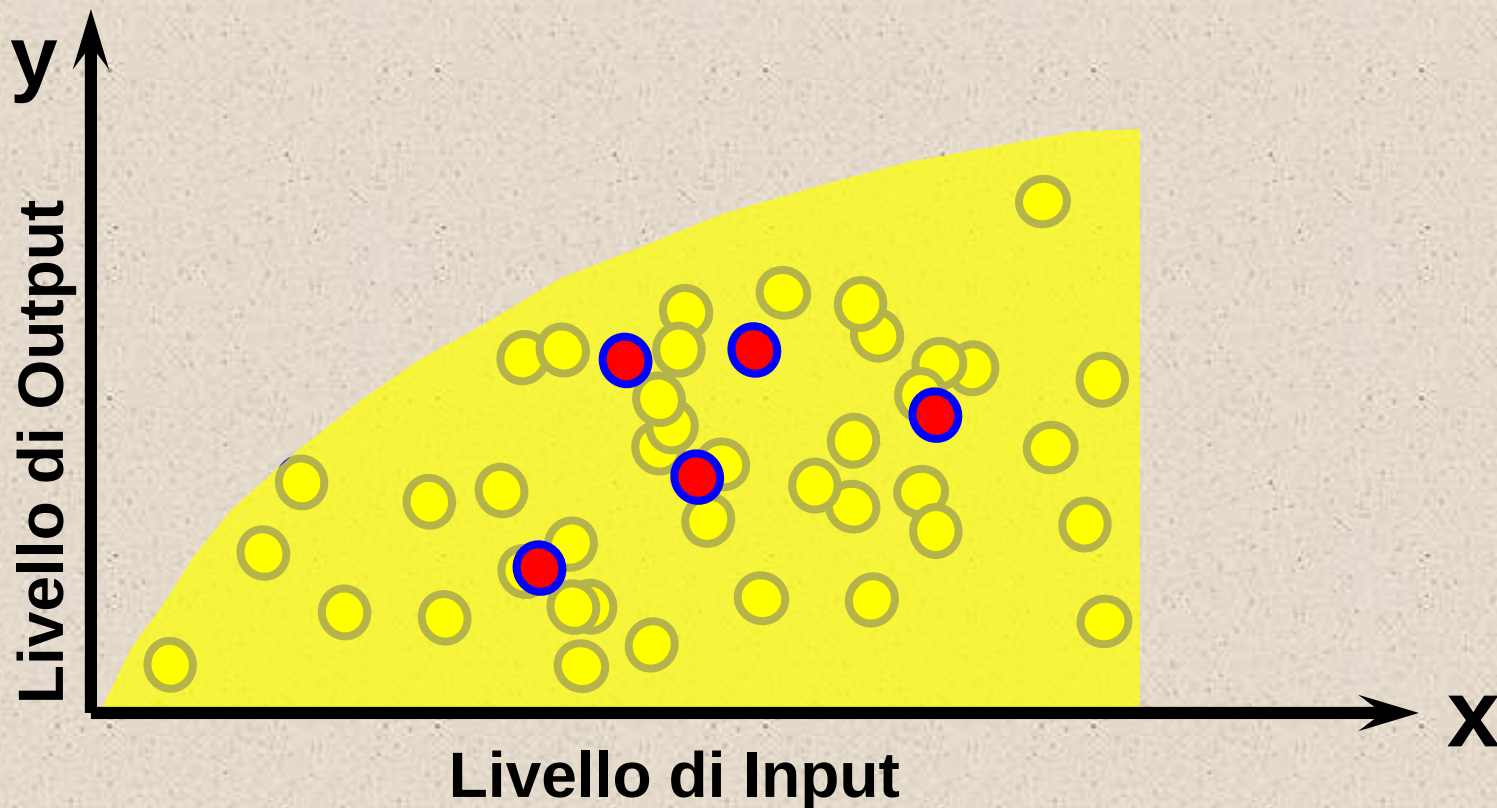
- L'azienda Alfa è sempre più lontana dal benchmark (di **efficienza**)!

Ok, l'idea di base sembra convincente, ma ci sono molti⁸ punti da chiarire per rendere operativi i concetti di produttività ed efficienza...

1) Quali sono i processi produttivi realizzabili?:

Supponendo di poter osservare (e misurare) i processi produttivi (effettivamente realizzati) di alcune aziende...

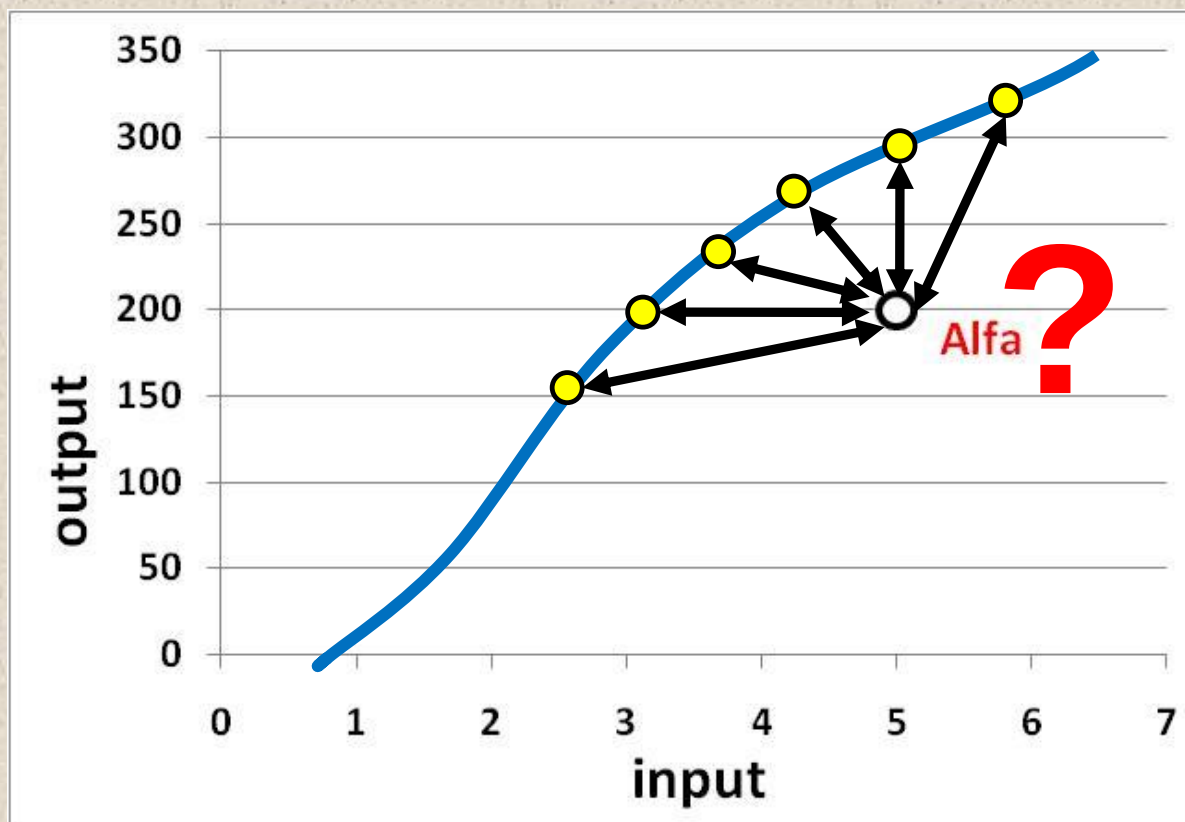
Come si fa a determinare i processi “potenzialmente realizzabili”?



...punti da chiarire per rendere operativi i concetti di produttività ed efficienza...

3) Qual è il “benchmark”?

Ammesso di conoscere tutti i processi produttivi possibili, quale di essi è il benchmark con cui misurare l'efficienza Alfa?



...punti da chiarire per rendere operativi i concetti di produttività ed efficienza...

4) processi “multiprodotto”:

Come posso misurare l'efficienza e la produttività quando ci sono molti output (oltre a molti fattori produttivi)?

vettori x input (q=6)						vettori y output q=3			
	cuoio(q)	filo(mt)	colla(kg)	lavoro(h)	energia(KWh)	macchinari(n)	scarpe(n)	borse(n)	cinture(n)
z1	4	100	2	80	160	1	34	23	14
z2	4	100	2	80	160	1	57	12	8

z2 è più o meno efficiente rispetto a z1?
Quale dei due ha maggiore produttività?

...punti da chiarire per rendere operativi i concetti di produttività ed efficienza...

2) TFP: problema dell'aggregazione:

L'evoluzione nel tempo del processo produttivo dell'azienda Alfa è riassumibile dalla tabella

	input						output
anno	operai	colla	KW/h	kg cuoio	macchine	filo	scarpe
1	4	13	345	130	4	34	120
2	5	20	279	200	4	55	200
3	6	28	311	180	5	80	300

Come si è evoluta nei tre anni la produttività di Alfa?

Ovvero: come posso aggregare le produttività parziali (per poter effettuare il confronto)?

La misura della produttività e dell'efficienza aziendale

I concetti economici

Teoria della produzione

- **Aspetto tecnico:** i fattori produttivi (input) vengono convertiti in prodotto (output) durante il processo di produzione
- **Aspetto economico:** il profitto come differenza fra il valore delle vendite (di output) e costi (acquisto di input)

Breve VS Lungo Periodo

- **Input fisso:** la quantità del fattore produttivo è fissata per qualsiasi livello di output desiderato
- **Input variabile:** la quantità del fattore produttivo dipende dalla quantità di output che si decide di produrre
- **Breve periodo:** alcuni fattori di produzione sono fissi
- **Lungo periodo:** tutti i fattori di produzione sono variabili

I Rendimenti di Scala

- Se aumento tutti gli input di una stessa percentuale λ (ad esempio aumento tutti gli input del 7%) di quanto aumentano gli output prodotti?
- Tre possibilità:

1) Aumentano di λ (aumentano del 7%)

RdS costanti

2) Aumentano anche più di λ (ad esempio del 12%)

RdS crescenti

3) Aumentano meno di λ (ad esempio solo del 4%)

RdS decrescenti

L'Insieme di Produzione

- Un processo produttivo è descrivibile da un vettore $\mathbf{z}$ di dimensione n , scomponibile in
- un vettore $\mathbf{x}$ di dimensione q che indica le quantità di input,
- ed un vettore $\mathbf{y}$ di dimensione p che indica le quantità di output

$$\mathbf{z} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_+^n$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\equiv (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}_+^q \\ \mathbf{y} &\equiv (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}_+^p, \end{aligned}$$

L'insieme di tutti i vettori $\mathbf{z}$ che descrivono processi produttivi realizzabili è definito **Insieme di Produzione** Y

$$Y \equiv \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^q, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^p \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ è realizzabile} \}, \text{ dove } Y \in \mathbb{R}_+^n$$

L'insieme di fabbisogno di input di un vettore y

- In corrispondenza di ogni vettore di output y definisco l'insieme di vettori di input $L(y)$ che possono produrlo

vettori z	vettori x input ($q=6$)						vettori y output ($p=3$)		
	cuoio(q)	filo(mt)	colla(kg)	lavoro(h)	energia(KWh)	macchinari(n)	scarpe(n)	borse(n)	cinture(n)
z_1	4	100	2	80	160	1	420	0	0
z_2	4	100	2	80	160	1	240	34	88
z_3	3	80	1.7	100	160	1	240	34	88
z_4	2	70	1.5	90	160	1	240	34	88
z_5	3	80	1.7	100	160	1	270	40	93
z_6	0	0	0	0	0	0	22	34	16
z_7	0	21	14	0	24	12	34	23	14

input requirement set

Ad esempio ,

z_2 ,

z_3 e

z_4

appartengono a
 $L(240,34,88)$

o maltagliati: produttività ed efficienza

L'insieme delle possibilità produttive di un vettore x

- Inversamente, in corrispondenza di ogni vettore di input x definisco l'insieme di vettori di output $P(x)$ producibili con x

vettori z	vettori x input ($q=6$)						vettori y output ($p=3$)		
	cuoio(q)	filo(mt)	colla(kg)	lavoro(h)	energia(KWh)	macchinari(n)	scarpe(n)	borse(n)	cinture(n)
z_1	4	100	2	80	160	1	420	0	0
z_2	4	100	2	80	160	1	240	34	88
z_3	3	80	1.7	100	160	1	240	34	88
z_4	2	70	1.5	90	160	1	240	34	88
z_5	3	80	1.7	100	160	1	270	40	93
z_6	0	0	0	0	0	0	22	34	16
z_7	0	21	14	0	24	12	34	23	14

Ad esempio , y_1 e y_2 appartengono a $P(4,100,2,80,160,1)$

Ordinare i processi produttivi in base all'efficienza

- Consideriamo 7 vettori di produzione, che descrivono altrettanti processi produttivi: $z_1, z_2, \dots, z_7$

vettori z	vettori x input (q=6)						vettori y output (p=3)		
	cuoio(q)	filo(mt)	colla(kg)	lavoro(h)	energia(KWh)	macchinari(n)	scarpe(n)	borse(n)	cinture(n)
z_1	4	100	2	80	160	1	420	0	0
z_2	4	100	2	80	160	1	240	34	88
z_3	3	80	1.7	100	160	1	240	34	88
z_4	2	70	1.5	90	160	1	240	34	88
z_5	3	80	1.7	100	160	1	270	40	93
z_6	0	0	0	0	0	0	22	34	16
z_7	0	21	14	0	24	12	34	23	14

Il processo z_5 è più efficiente rispetto a z_3 , perché impiegando gli stessi input, ottiene più output

Isoquante e sottoinsieme efficiente

- Un vettore di input $\mathbf{x}$ con cui si può produrre un vettore di output $\mathbf{y}$ (quindi $\mathbf{x}$ appartiene a $L(\mathbf{y})$) sta sull'isoquante di $\mathbf{y}$ se, non appena riduco (tutti) gli input di $\mathbf{x}$ di una seppur minima percentuale, non riesco più a produrre $\mathbf{y}$

(a) l'*isoquante* definito da

$$\text{Isoq } L(\mathbf{y}) \equiv \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in L(\mathbf{y}), \lambda \mathbf{x} \notin L(\mathbf{y}), \lambda \in [0, 1)\}, \quad \forall \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

riduzione radiale del vettore $\mathbf{x}$

- Un vettore di input $\mathbf{x}$ con cui si può produrre un vettore di output $\mathbf{y}$ sta nel sottoinsieme efficiente di $\mathbf{y}$ se, non appena riduco uno qualsiasi degli input di $\mathbf{x}$ di un seppur minimo ammontare, non riesco più a produrre $\mathbf{y}$

(b) il *sottoinsieme efficiente* definito da

$$\text{Eff } L(\mathbf{y}) \equiv \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in L(\mathbf{y}), \mathbf{u} \leq \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{u} \notin L(\mathbf{y})\}, \quad \forall \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

rispetto a qualunque vettore $\leq \mathbf{x}$ ed è quindi più generale

La misura della produttività e dell'efficienza aziendale

L'insieme di Produzione secondo l'approccio DEA (Data Envelopment Analysis)

La misura dell'efficienza ovvero dell' **inefficienza** (distanza relativa dall'efficienza)

- Supponiamo di conoscere i sistemi produttivi effettivamente realizzati di un determinato settore produttivo (ad esempio supponiamo di conoscere i vettori $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n$ relativi a n aziende di pelletteria, che utilizzando cuoio, colla, filo, energia, macchinari e operai producono scarpe, borse e cinture)
- L'efficienza è un concetto che misura, per ciascuno di questi n processi produttivi, la distanza in termini relativi dal suo benchmark.
- Per ciascun processo produttivo “vero” (realizzato), devo quindi individuare il suo benchmark (processo-modello potenzialmente realizzabile) che ne misura l'efficienza (per meglio dire: la lontananza dalla piena efficienza)

Le dimensioni dell'efficienza: La misura di input-efficienza di Farrell (misura F)

- La misura di input-efficienza avviene tramite un indice che, per ciascun processo produttivo effettivamente realizzato, calcola la frazione minima degli input originali che consente di produrre almeno lo stesso vettore di output originario
- "... l'input-efficienza dell'azienda Alfa è 0,74 perchè prendendo il 74% degli input del processo produttivo Alfa si può pur sempre produrre (almeno) il vettore di output che produce Alfa , ma prendendone meno (del 74%) non si riesce più a produrre (almeno) il vettore di output prodotto da Alfa ..."*

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \min \{ \lambda \mid \lambda \mathbf{x} \in L(\mathbf{y}) \}$$

Le dimensioni dell'efficienza: La misura di output-efficienza (misura G)

- La misura di output-efficienza indica la frazione del vettore output prodotto dal processo produttivo k rispetto al massimo producibile (con gli stessi input)

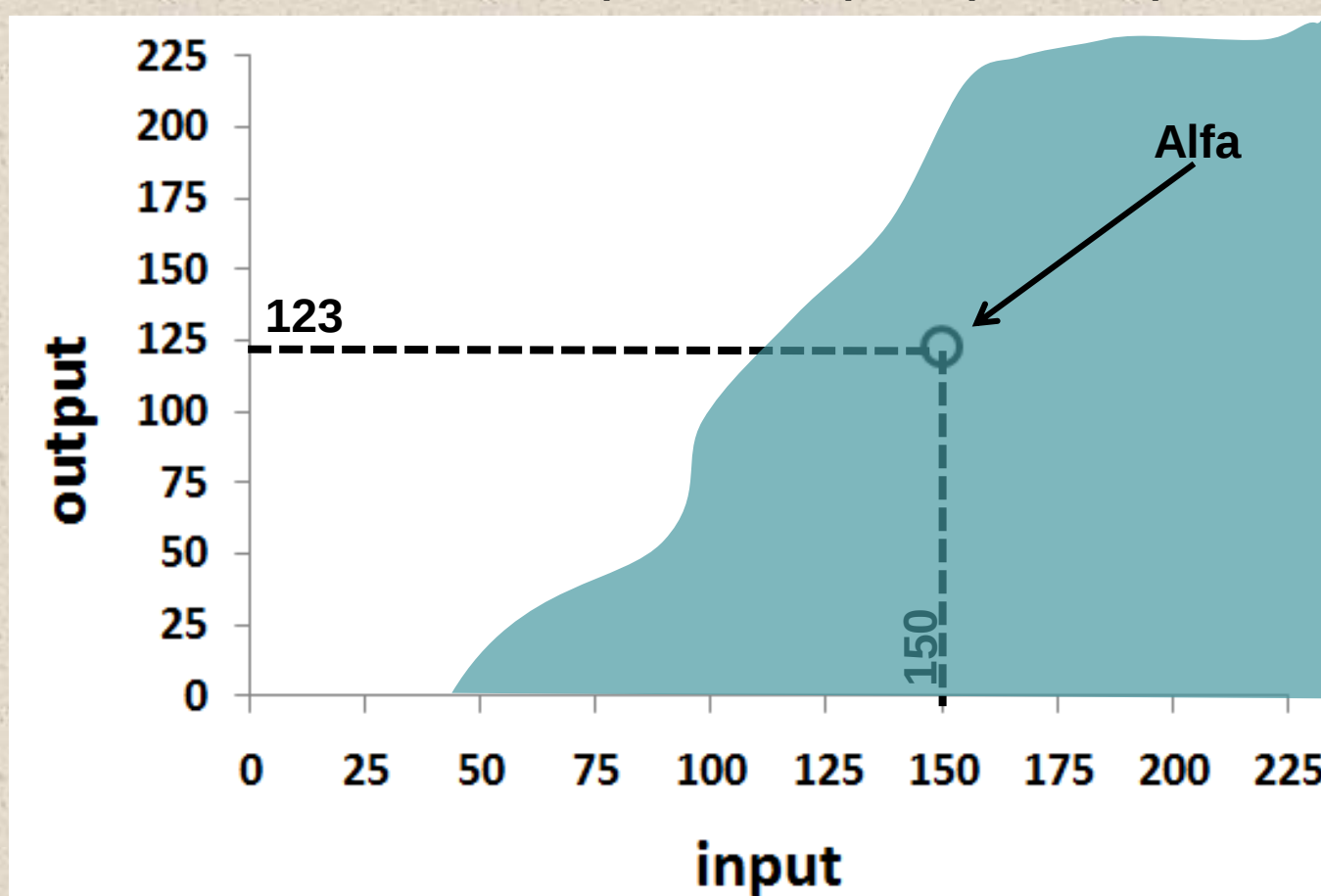
"... l'output-efficienza dell'azienda Alfa è 0,6 perchè produce solo il 60% degli output potenzialmente producibili con gli input a sua disposizione. D'altra parte, con gli stessi input, non è realizzabile un processo produttivo rispetto al quale il processo Alfa produca meno del 60% di prodotti.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \min \left\{ \phi \mid \frac{1}{\phi} \mathbf{y} \in P(\mathbf{x}) \right\}$$

input-efficienza ed output-efficienza: un'interpretazione grafica

Ipotesi

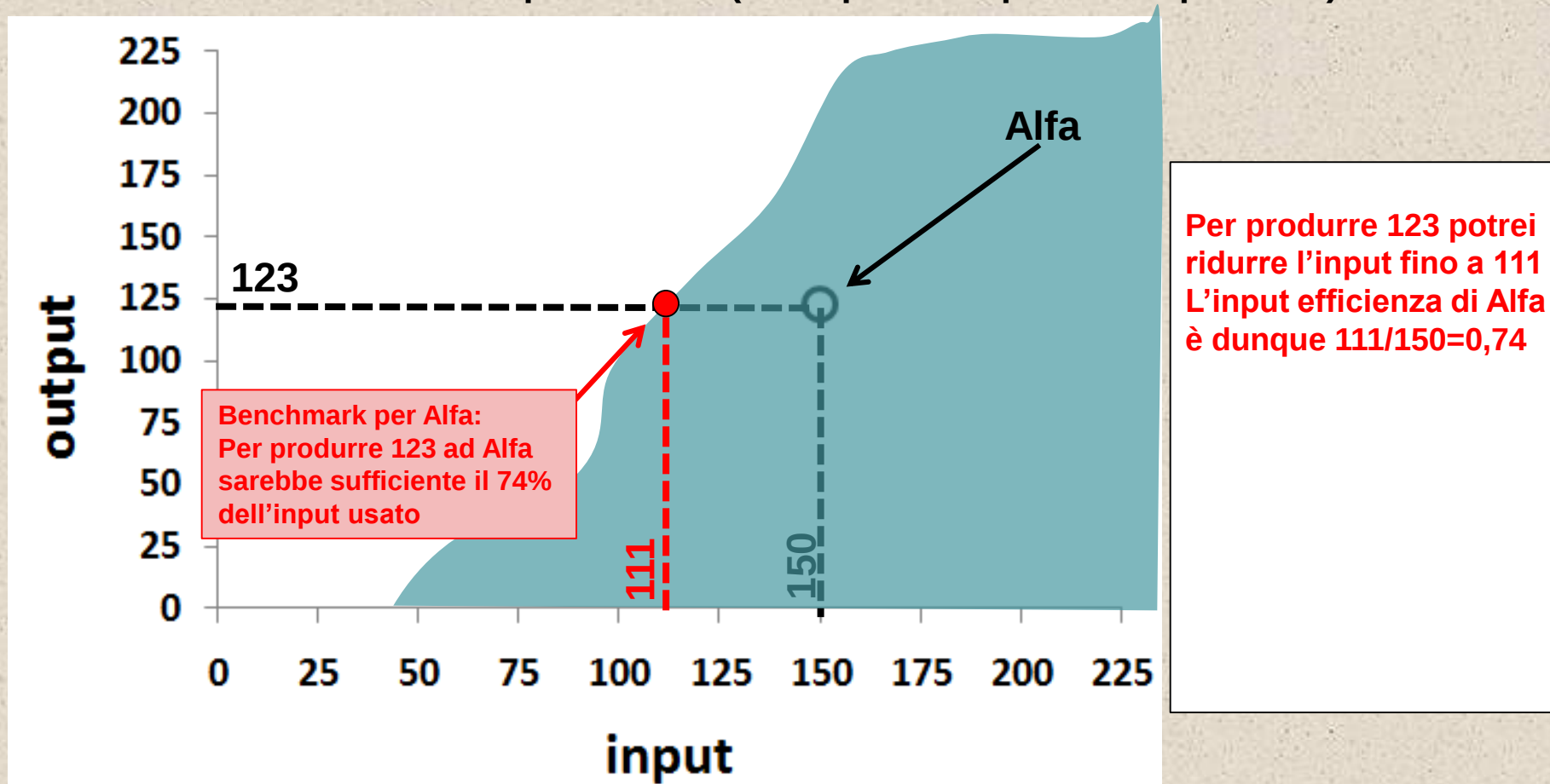
- Tecnologia: un solo input per produrre un solo output
- Alfa con 150 produce 123
- Conosciamo l'insieme di produzione (tutti i processi produttivi possibili)



input-efficienza ed output-efficienza: un'interpretazione grafica

Ipotesi

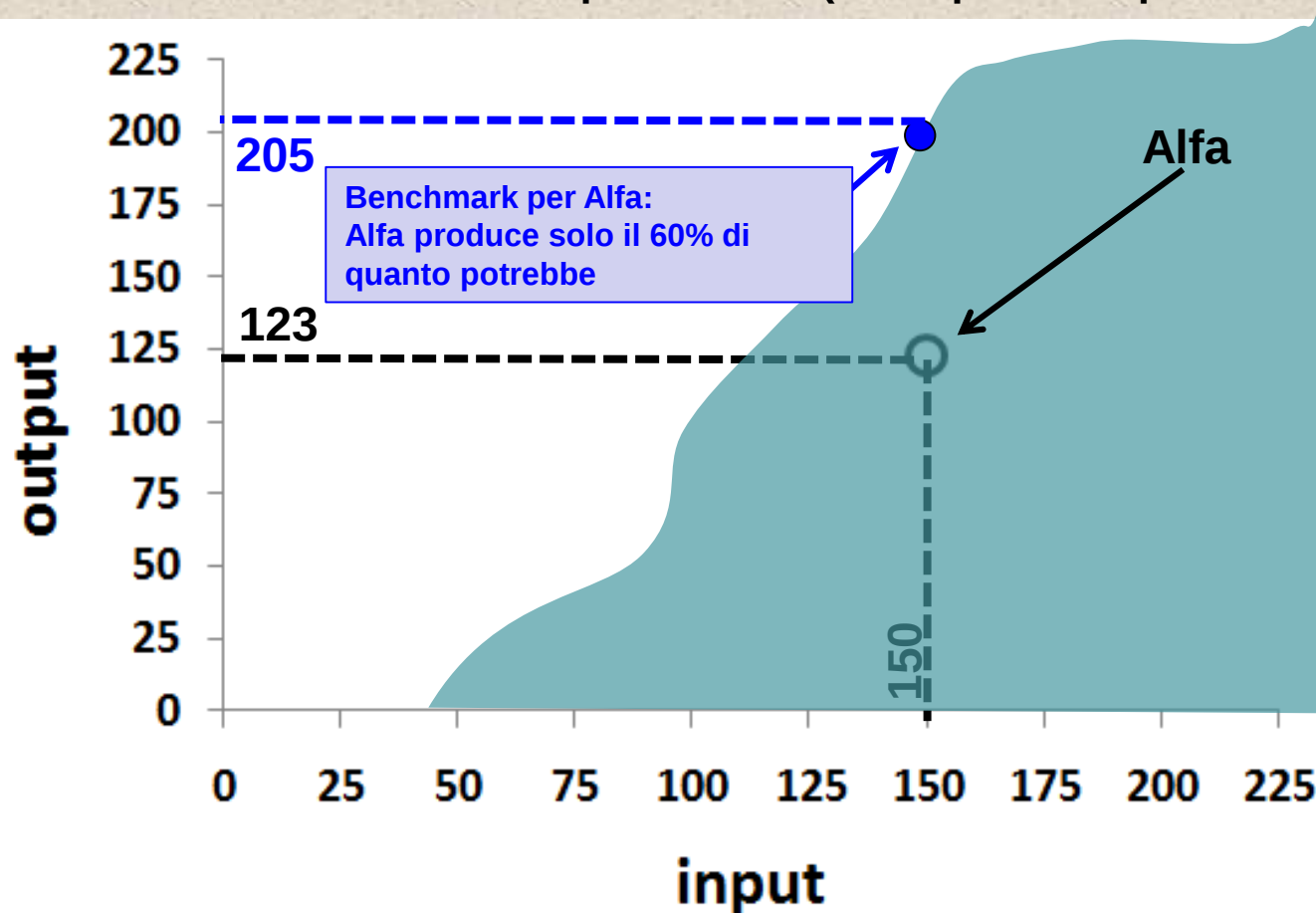
- Tecnologia: un solo input per produrre un solo output
- Alfa con 150 produce 123
- Conosciamo l'insieme di produzione (tutti i processi produttivi possibili)



input-efficienza ed output-efficienza: un'interpretazione grafica

Ipotesi

- Tecnologia: un solo input per produrre un solo output
- Alfa con 150 produce 123
- Conosciamo l'insieme di produzione (tutti i processi produttivi possibili)



Oppure, mantenendo l'input originario, potrei produrre fino a 205, anziché solo 123
L'output efficienza di Alfa è dunque $123/205=0,60$

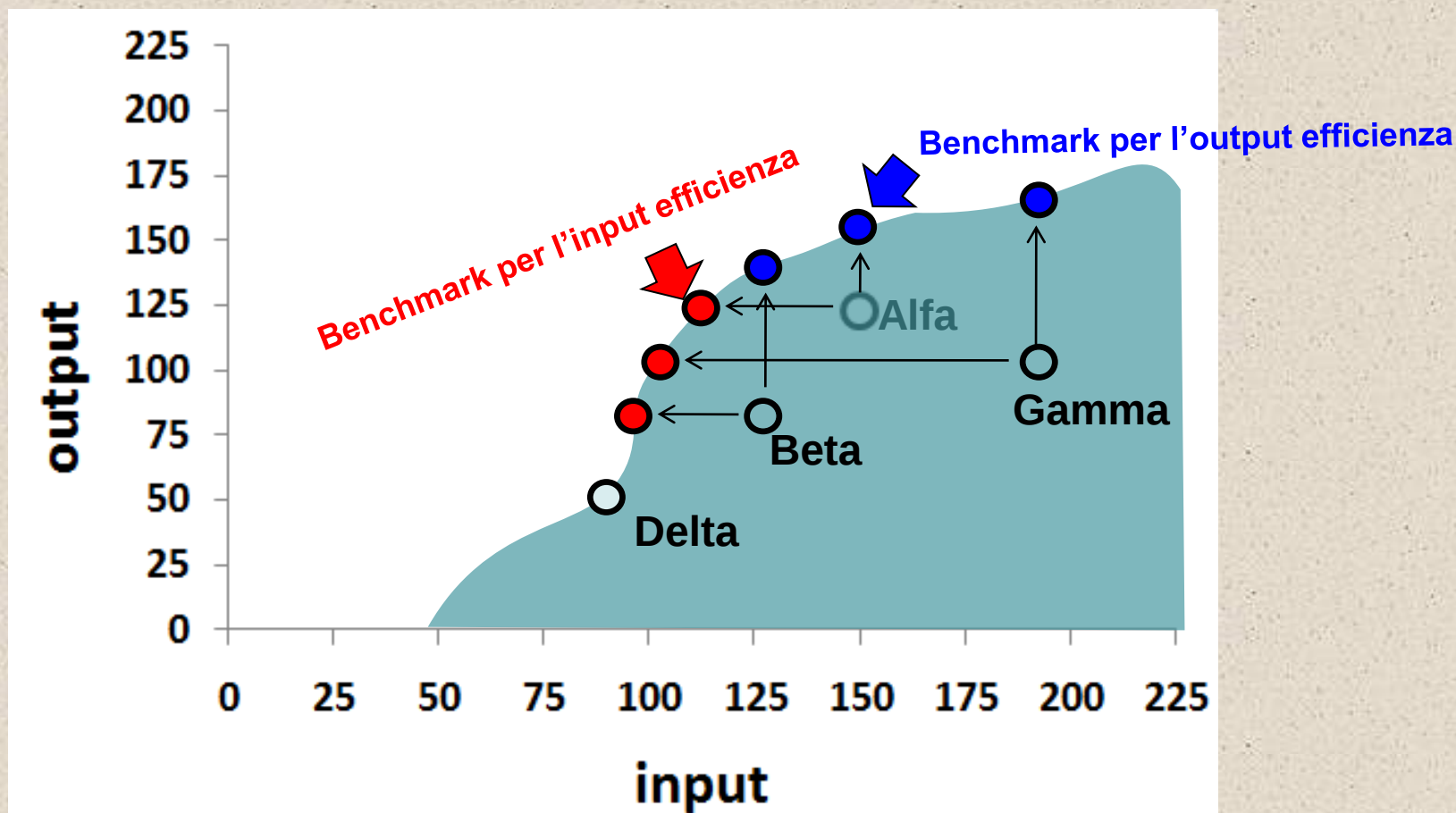
input-efficienza ed output-efficienza: i problemi operativi

Abbiamo dunque indicato meglio cosa stiamo misurando

Per inciso, per ciascun altro processo produttivo...

avremo (in genere) un differente benchmark per la misura di input-efficienza...

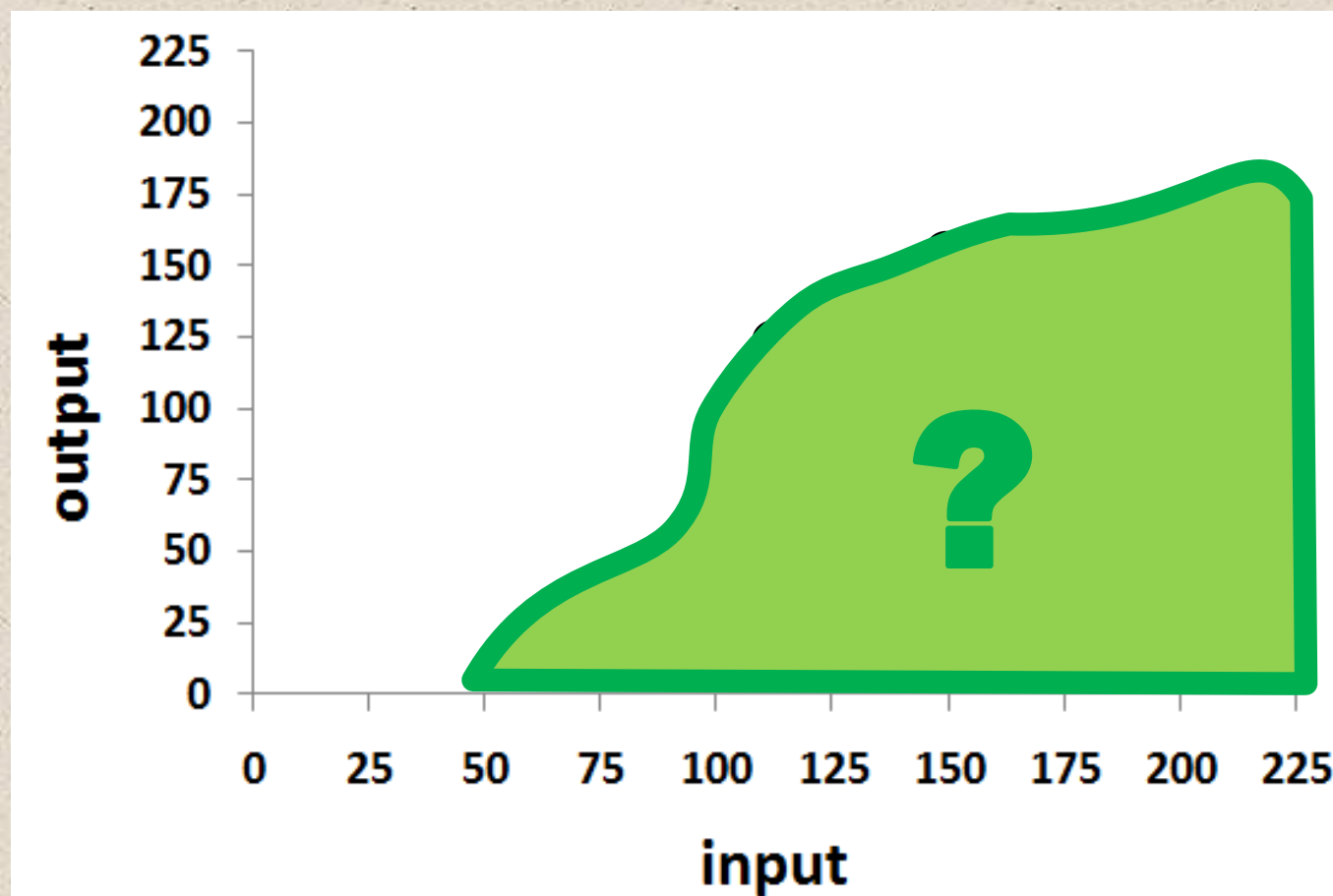
e un benchmark per la misura dell'output-efficienza



input-efficienza ed output-efficienza: i problemi operativi

Restano da risolvere due problemi operativi:

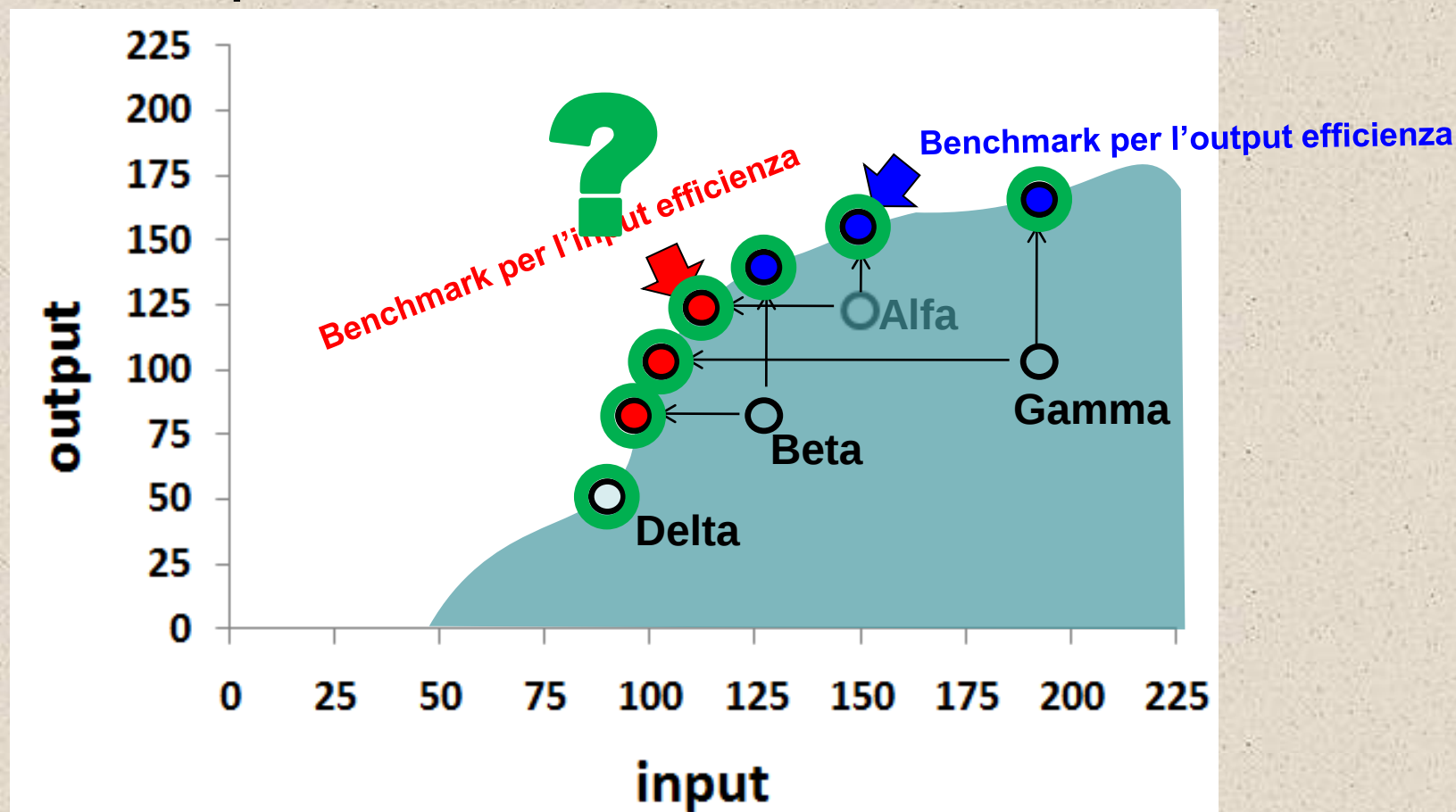
1) Come si determina l'insieme di produzione (Y)?



input-efficienza ed output-efficienza: i problemi operativi

Restano da risolvere due problemi operativi:

- 1) Come si determina l'insieme di produzione (Y)?
- 2) Una volta che Y sia definito come si individuano i benchmark per ciascun processo?



input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile

31

Come si determina l'insieme di produzione (Y)?

L'insieme di produzione (l'insieme dei processi produttivi realizzabili) viene “costruito mattone per mattone” sulla base di una sequenza di ipotesi economiche ritenute valide per la tecnologia analizzata.

Alcune di queste ipotesi sono “banali”, altre meno. L'insieme di produzione dipenderà da quali ipotesi saranno ritenute valide

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)



Ipotesi 1 (il realizzato è realizzabile)

Tutti i processi produttivi effettivamente realizzati appartengono all'insieme di produzione Y.

È l'ipotesi di base, senza la quale il “processo di costruzione” dell'insieme di produzione non può iniziare. È evidentemente un'ipotesi banale (sempre vera)

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)



Ipotesi 2: Free Disposal per gli output **(con gli input posseduti si può produrre di meno)**

Se un processo produttivo Alfa appartiene a Y anche tutti i processi produttivi che hanno lo stesso vettore di input di Alfa e il vettore di output non maggiore (componente per componente) rispetto a quello di Alfa appartengono Y .

Ad esempio se con:

$x_\alpha = (4, 123, 34)$ produco

$y_\alpha = (1210, 78, 15, 2)$

allora con

$x_\alpha = (4, 123, 34)$ posso produrre pure

$y_\beta = (1210, 65, 11, 2)$

Anche questa proprietà è accettabile senza difficoltà: non si basa su un'ipotesi “forte”

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

34

Ipotesi 3: Free Disposal per gli input (sprecando input si può mantenere invariata la produzione)

Se un processo produttivo Alfa appartiene a Y anche tutti i processi produttivi che hanno lo stesso vettore di output di Alfa e il vettore di input non minore (componente per componente) rispetto a quello di Alfa appartengono Y .

Ad esempio se con:

$x_\alpha = (4, 123, 34)$ produco

$y_\alpha = (1210, 78, 15, 2)$

allora anche con:

$x_\beta = (7, 123, 42)$ posso produrre

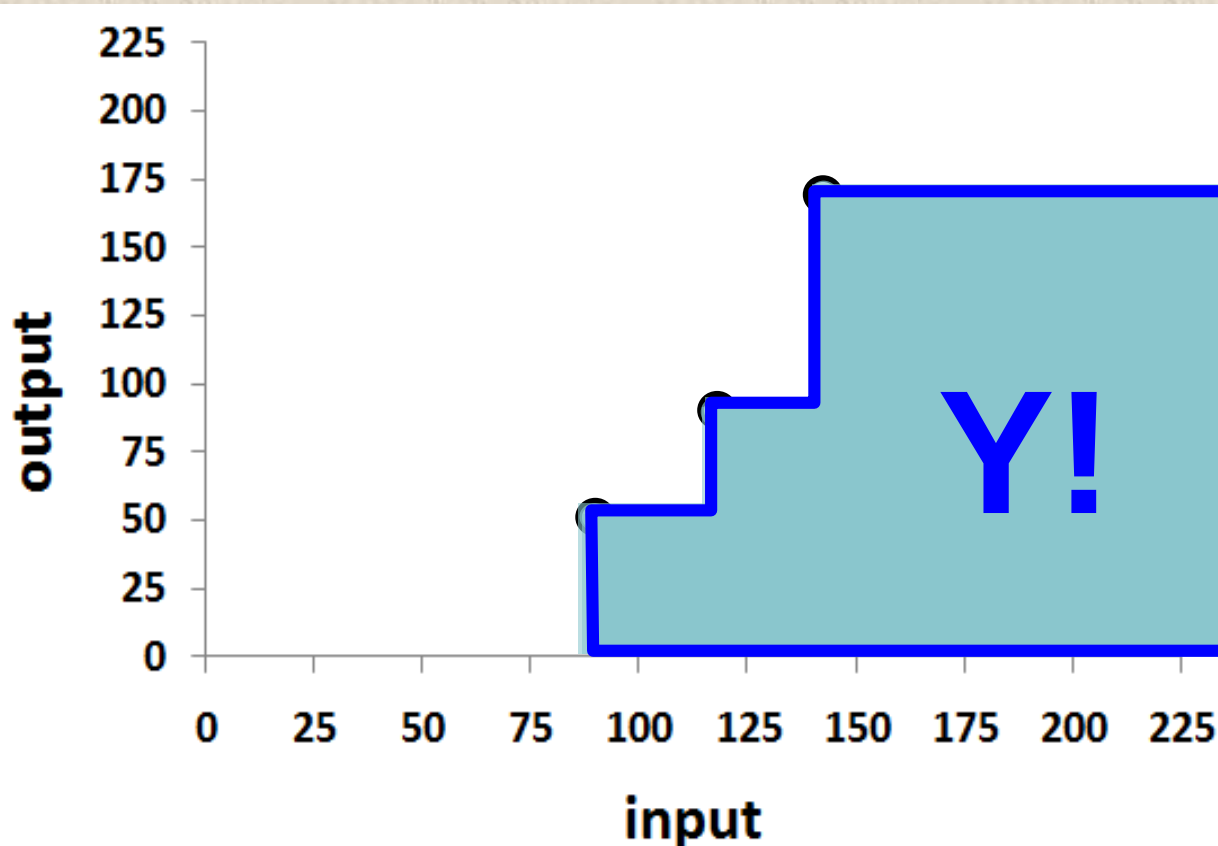
$y_\alpha = (1210, 78, 15, 2)$

**Anche questa proprietà è accettabile senza difficoltà:
non si basa su un'ipotesi “forte”**

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

Prima di andare avanti... vediamo “che forma sta prendendo” Y sulla base delle “tranquille” ipotesi fatte sinora....

Supponiamo di osservare 5 processi produttivi effettivamente realizzati



Introduco le varie ipotesi:

Hp1: i processi realizzati fanno parte di Y

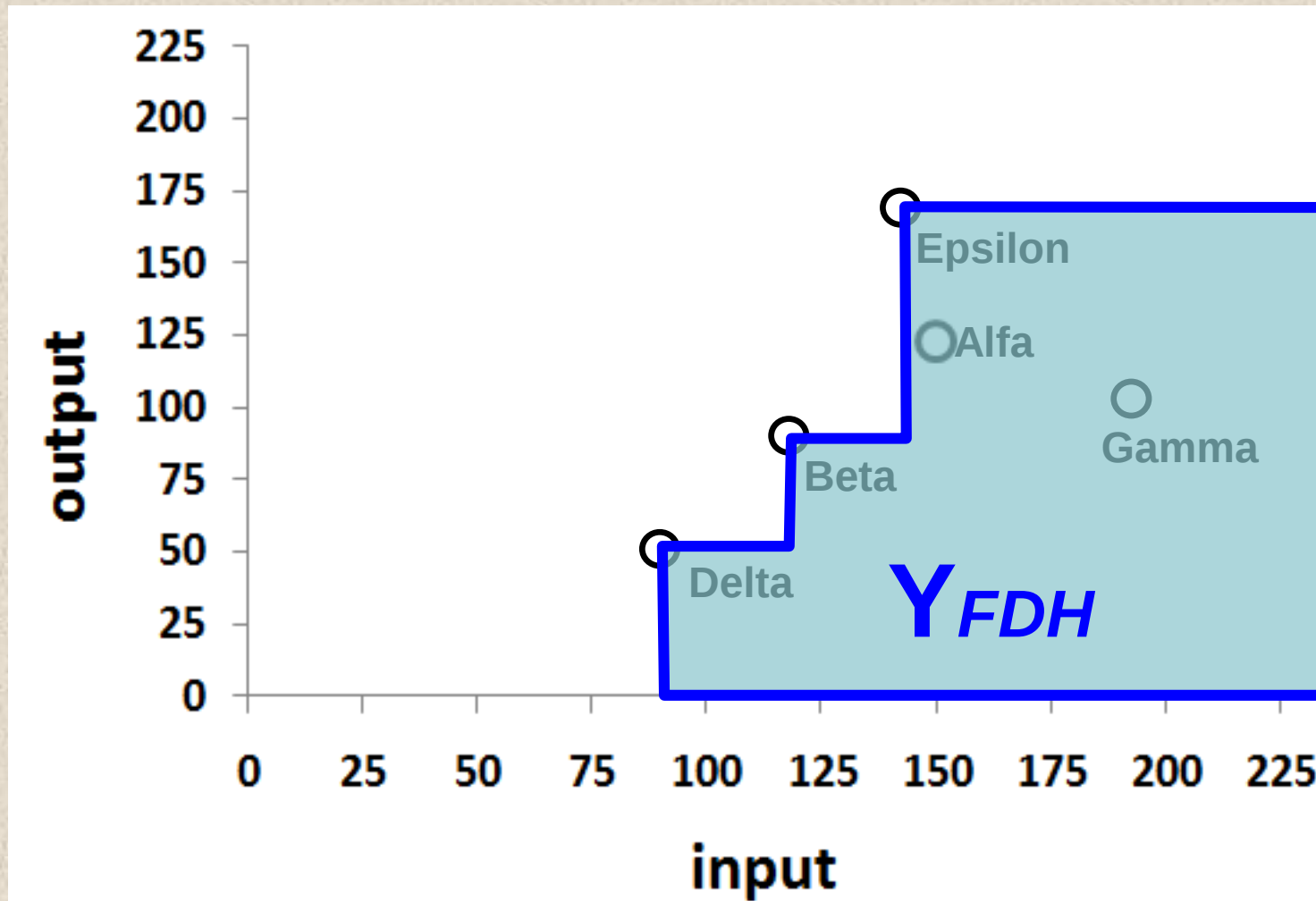
Hp2: se un processo appartiene a Y anche i processi che con gli stessi input (uno solo in questo grafico) producono meno output appartengono a Y

Hp3: se un processo appartiene a Y anche i processi che con più input producono gli stessi output (un solo output in questo grafico) appartengono a Y

L'insieme di produzione FDH

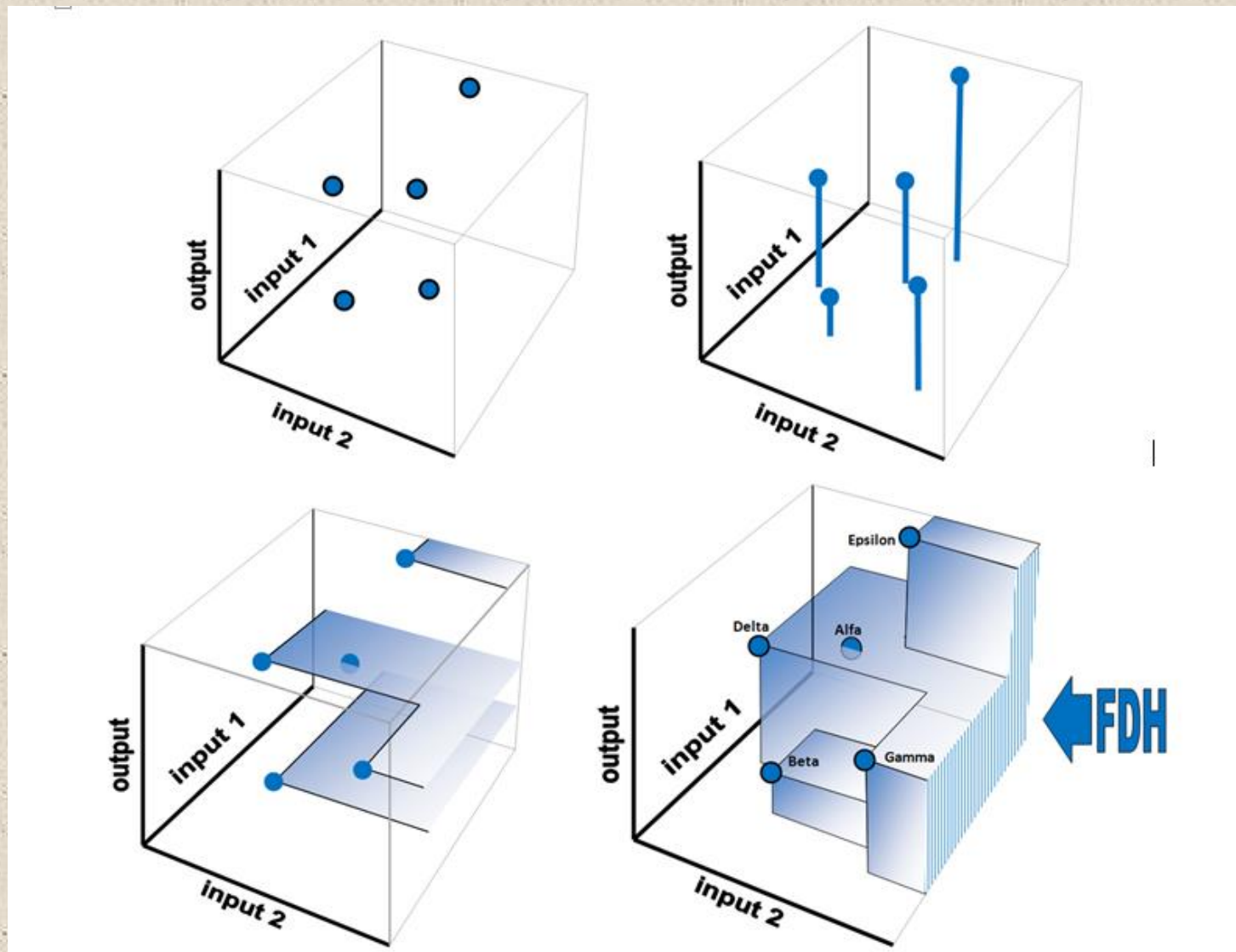
36

L'insieme di produzione così costruito prende il nome di Free Disposal Hull, in quanto si basa sulle sole ipotesi Free Disposal (oltre all'ipotesi base che i processi produttivi realizzati appartengano a Y)



L'insieme di produzione FDH (3D:2 input e 1 output)

31



input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)



Ipotesi 4: Convessità (esistono anche le vie di mezzo!)

Se i processi produttivi $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ appartengono a $\mathbf{Y}$, allora appartiene a $\mathbf{Y}$ anche ciascun processo produttivo “ibrido” $\mathbf{z}^*$ tale che:

$$\mathbf{z}^* = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbf{z}_i \quad , \quad \text{dove:} \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_i \geq 0 \text{ per } \forall i$$

Ciascun processo $\mathbf{z}^*$ è una specie di “mostro di Frankenstein”, composto da “un pezzetto” (una percentuale) γ_1 di $\mathbf{z}_1$, un pezzetto γ_2 di $\mathbf{z}_2$... e così via.

Gli scalari γ costituiscono la “ricetta” per produrre $\mathbf{z}^*$ usando gli “ingredienti” $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$.

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

39

Ipotesi 4: Convessità, un esempio

Supponiamo di sapere che z_1 , z_2 , z_3 e z_4 appartengono a Y .

Per la convessità, se uso la “ricetta” (gli scalari γ) 50% - 25% - 25% - 0%, ovvero prendendo metà di z_1 , un quarto di z_2 , un quarto di z_3 e niente di z_4 ...

vettori z

vettori x input (q=6)						vettori y output q=3		
cuoio (q)	filo (mt)	colla (kg)	lavoro (h)	energia (KWh)	macchinar i(n)	scarpe (n)	borse (n)	cinture (n)
4	100	2	80	160	1	240	34	88
11	230	6	250	600	6	1200	0	0
3	80	1.7	100	160	1	240	34	88
8	21	1	60	50	12	34	23	14

Ottengo ...
un processo
“ibrido” z^* ...
che appartiene
sempre a Y

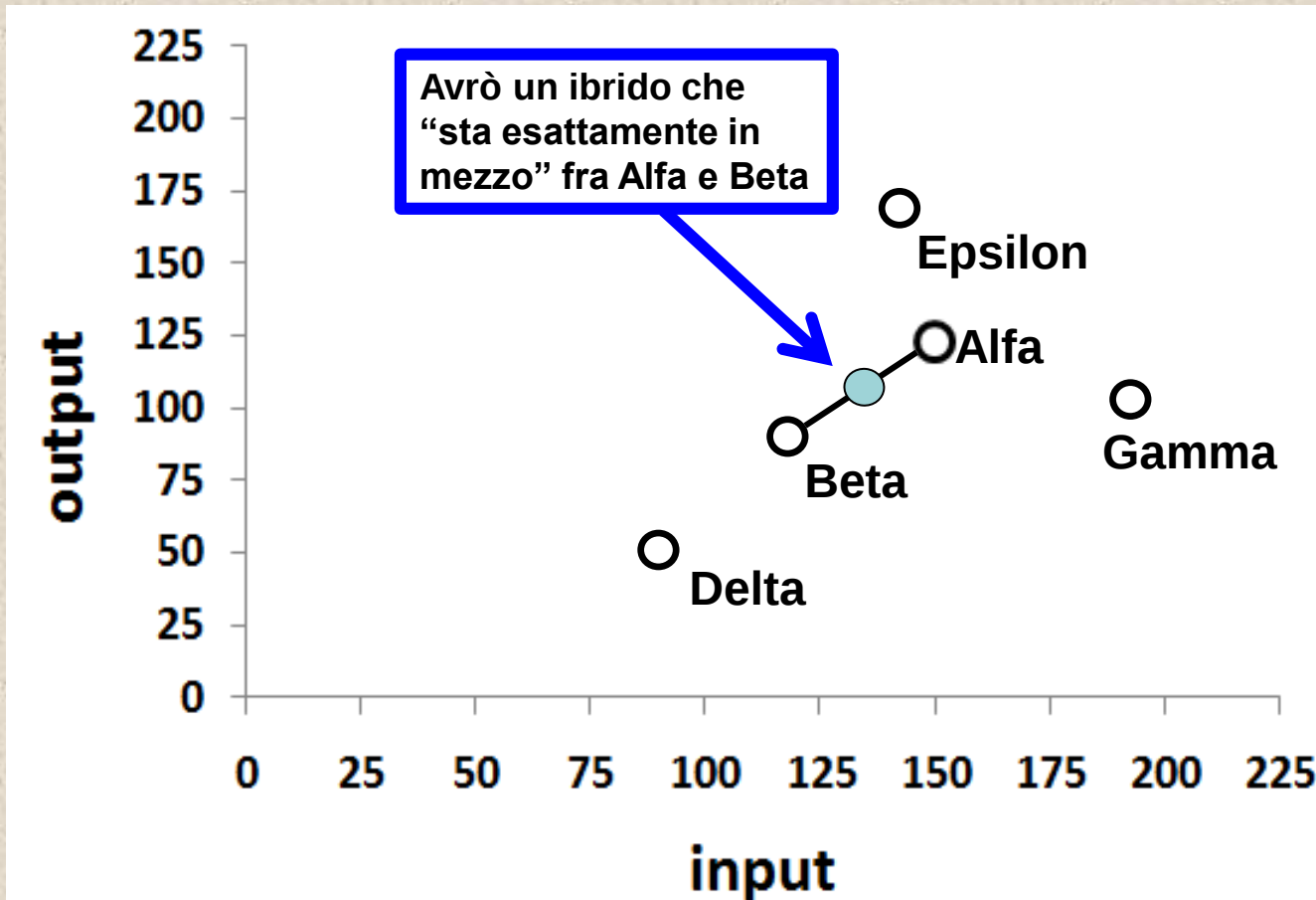
input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

40

Ipotesi 4: Convessità, interpretazione grafica

Per “vedere” graficamente la convessità dobbiamo tornare al caso di un solo input e un solo output

Partiamo da 5 processi produttivi...e prendiamo una “ricetta” a caso



Ad esempio, se prendo mezzo Alfa e mezzo Beta (e niente degli altri)...

$$\gamma_{\text{alfa}} = 0.5$$

$$\gamma_{\text{beta}} = 0.5$$

$$\gamma_{\text{gamma}} = 0$$

$$\gamma_{\text{delta}} = 0$$

$$\gamma_{\text{epsilon}} = 0$$

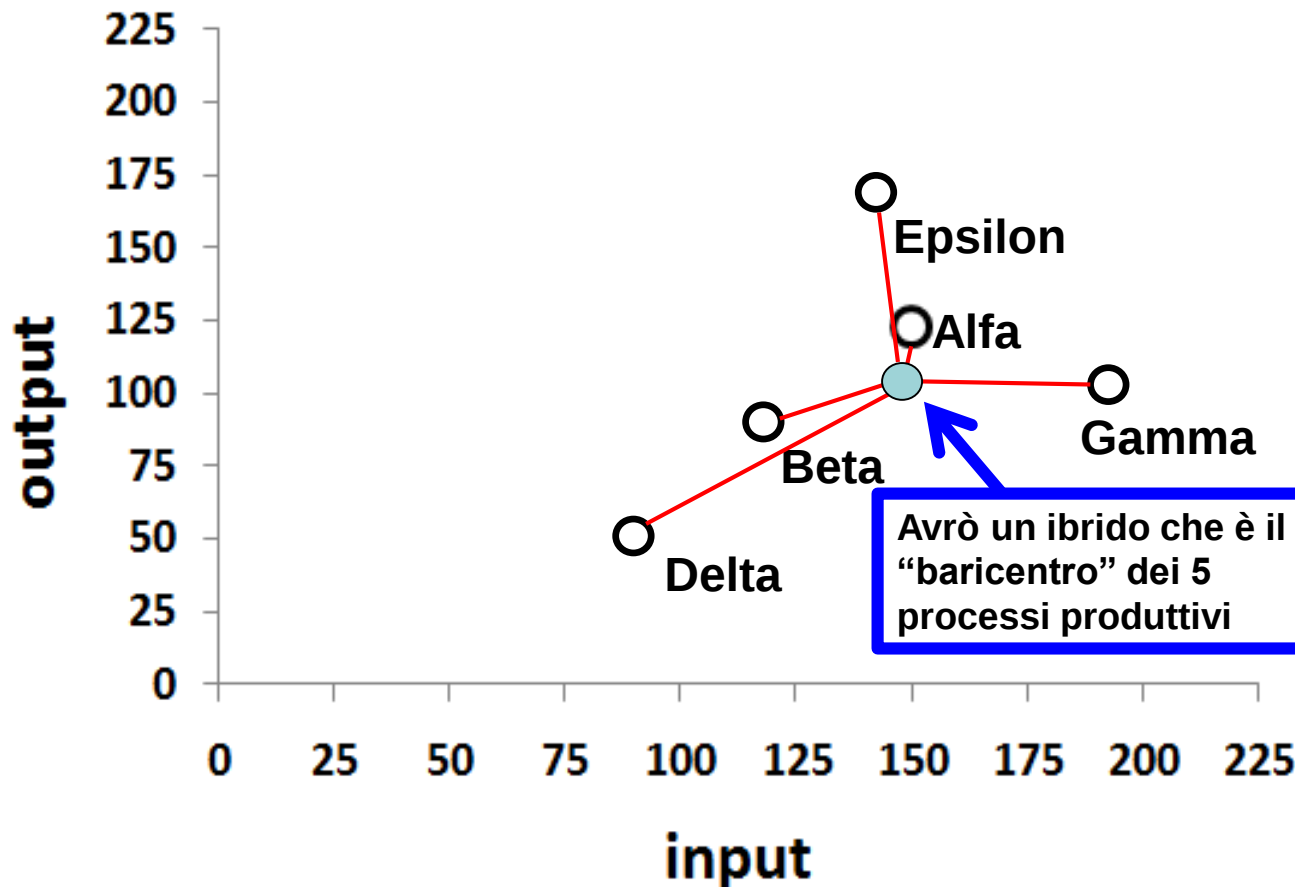
input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

47

Ipotesi 4: Convessità, interpretazione grafica

Per “vedere” graficamente la convessità dobbiamo tornare al caso di un solo input e un solo output

Partiamo da 5 processi produttivi...e prendiamo una “ricetta” a caso



Se invece
prendo il 20% di
ciascun
processo...

$$\gamma_{\text{alfa}} = 0.2$$

$$\gamma_{\text{beta}} = 0.2$$

$$\gamma_{\text{gamma}} = 0.2$$

$$\gamma_{\text{delta}} = 0.2$$

$$\gamma_{\text{epsilon}} = 0.2$$

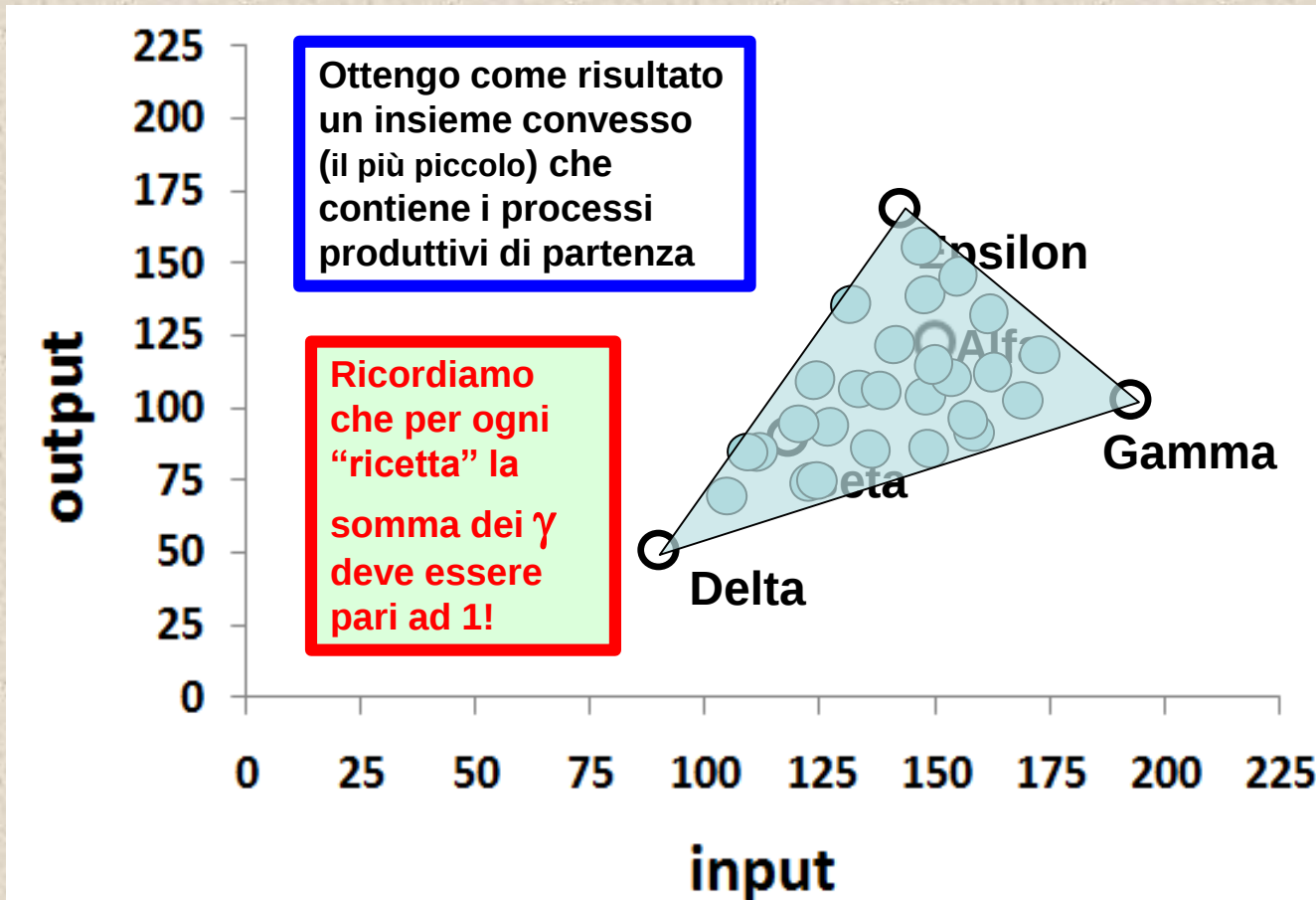
input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)



Ipotesi 4: Convessità, interpretazione grafica

Per “vedere” graficamente la convessità dobbiamo tornare al caso di un solo input e un solo output

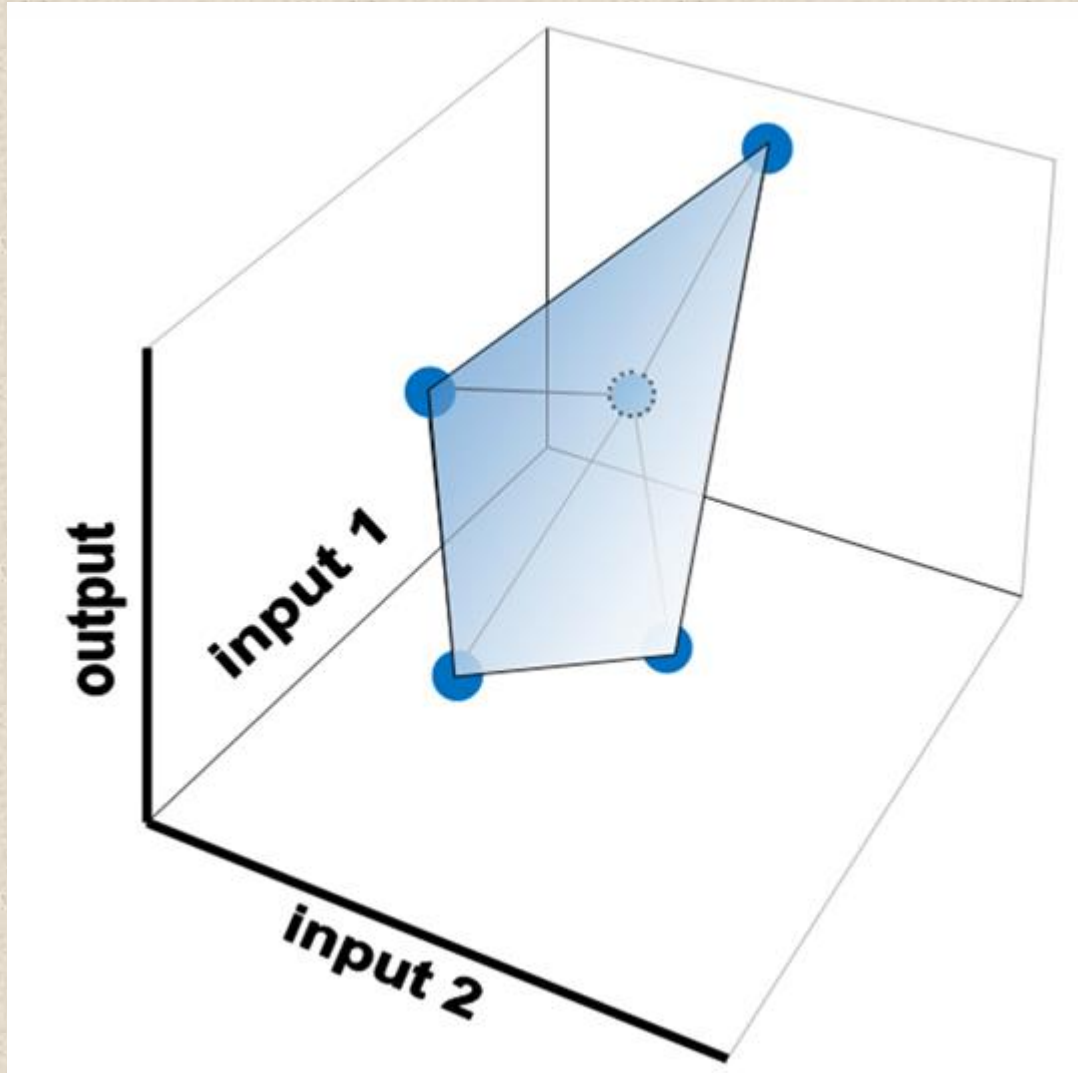
Partiamo da 5 processi produttivi...e prendiamo una “ricetta” a caso



Insomma, prendendo tutte le “ricette” possibili, usando gli “ingredienti” Alfa, Beta, Gamma, Delta, Epsilon

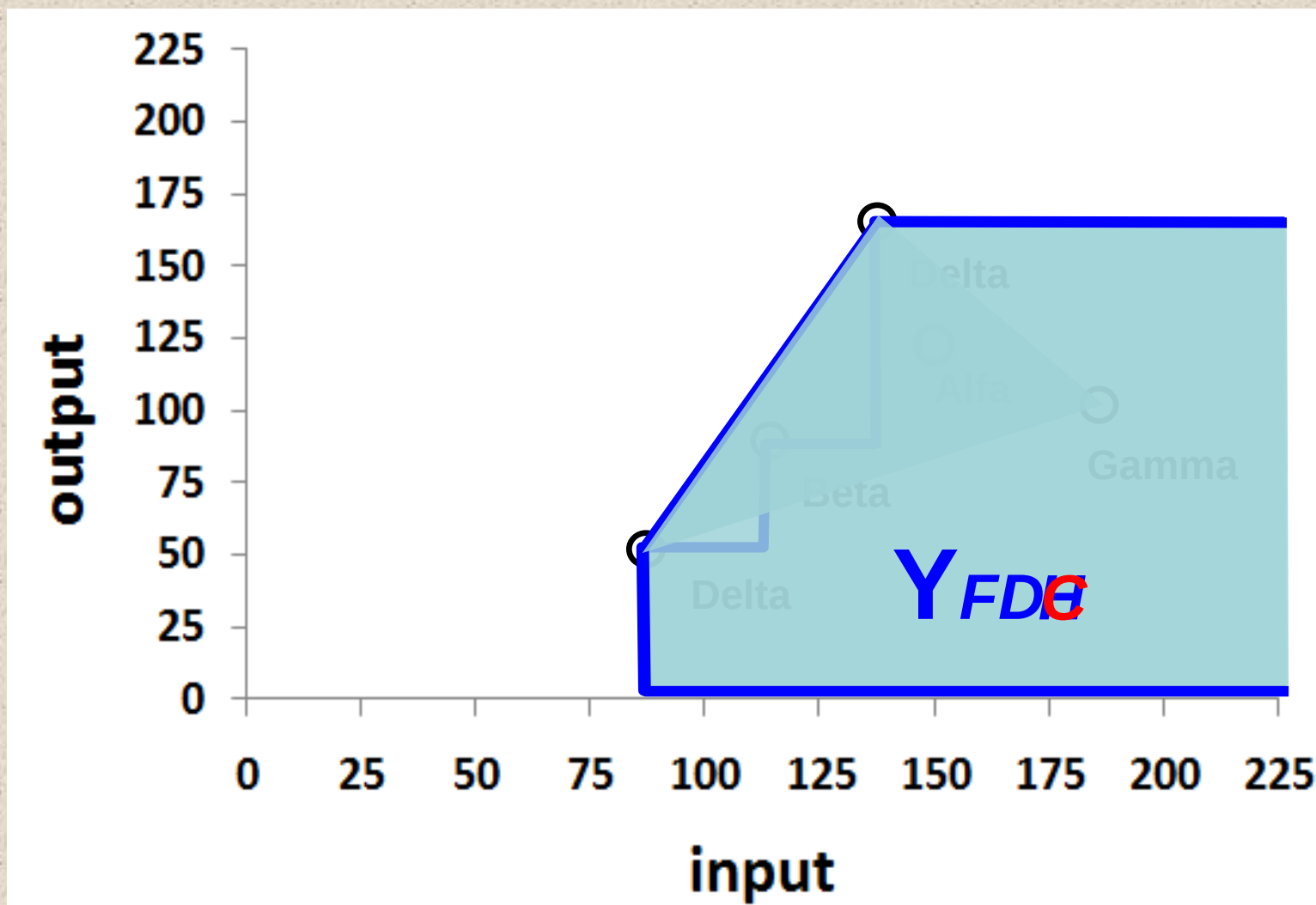
Ipotesi 4: Convessità, interpretazione grafica in 3 D (2 input e 1 output)

43

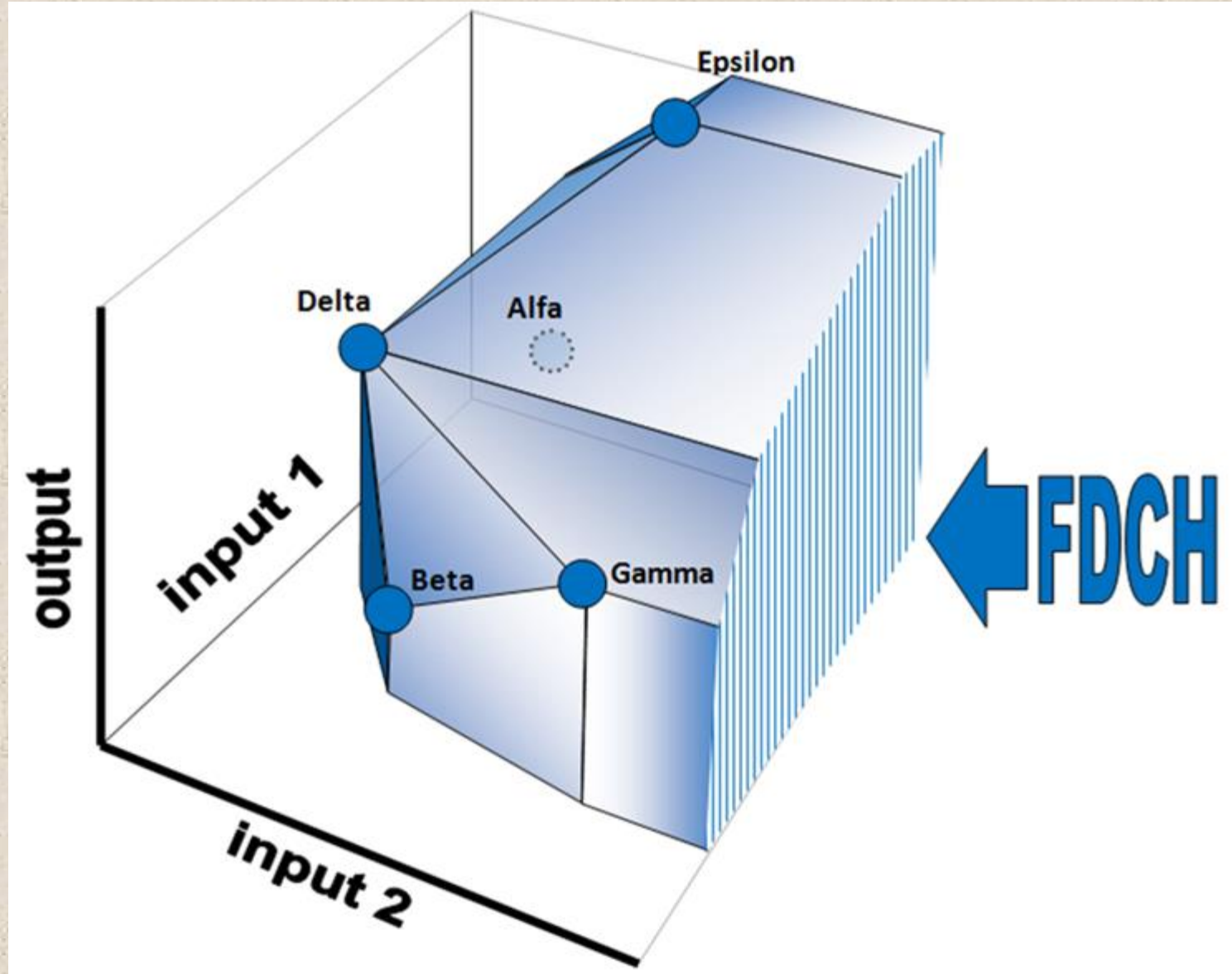


L'insieme di produzione FDCH

Se riprendiamo l'insieme di produzione **FDH** visto in precedenza...
 ...ed introduciamo l'ipotesi di convessità...
 ...otteniamo il cosiddetto Free Disposal **Convex** Hull (**FDCH**)



L'insieme di produzione FDCH in 3D (2 input e 1 output) ⁵



Resta da chiarire la portata dell'ipotesi di convessità in termini economici

Non è chiaramente un'ipotesi banale, accettabile sempre e comunque

Presuppone infatti la perfetta divisibilità dei processi produttivi osservati ...

...e la successiva “componibilità” di tali “frazioni” in un unico processo ibrido

Ciascun input deve essere divisibile:

accettabile per l'input energia elettrica (kwh), molto meno per i macchinari”

...

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

47

Ipotesi 5: Possibilità di “inazione” (per non produrre niente non servono input)

In base a tale ipotesi il vettore $\mathbf{Z}_0=(0,0)$ appartiene a Y .

E' un ipotesi “forte”?

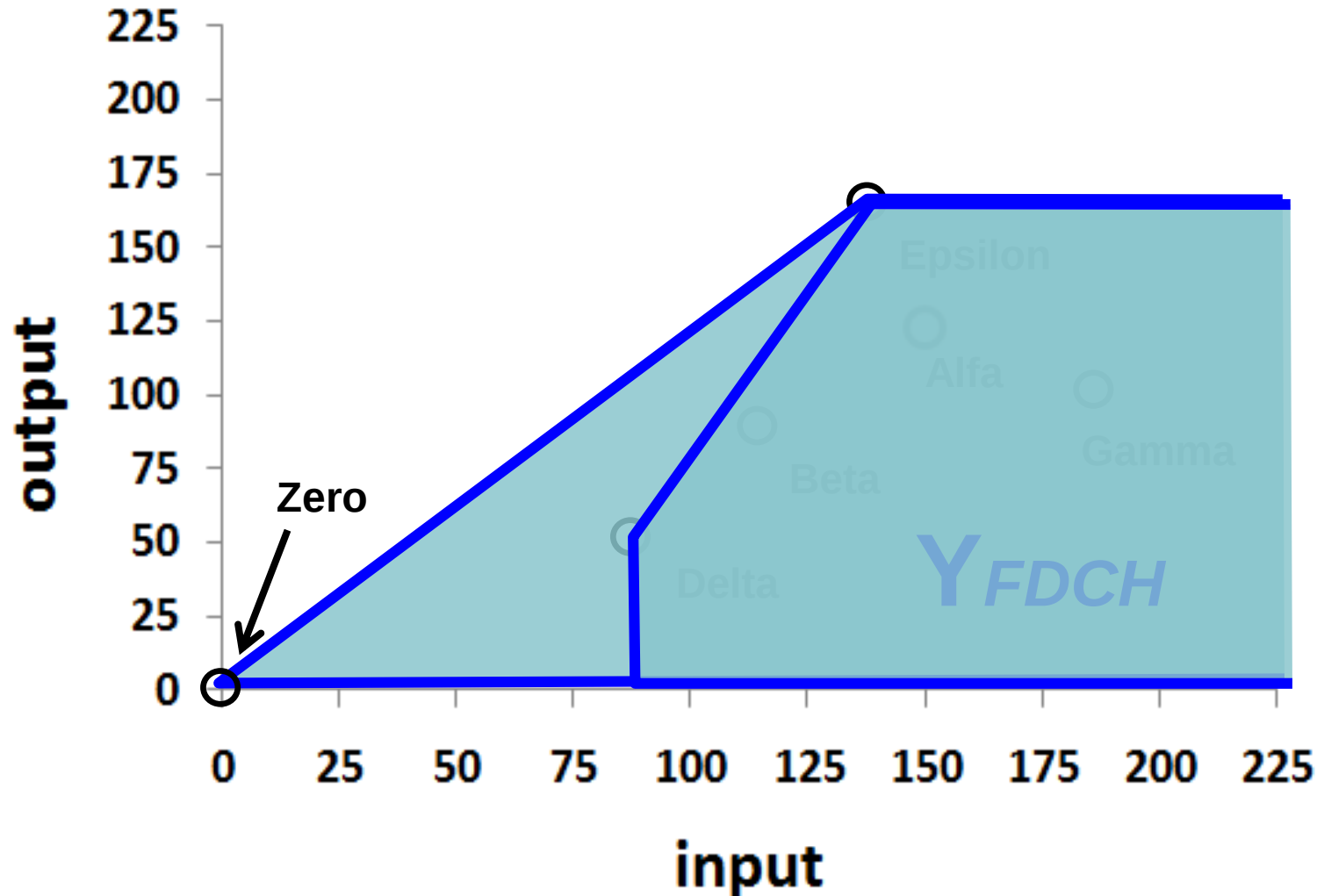
Dipende dal “periodo” a cui si riferisce.

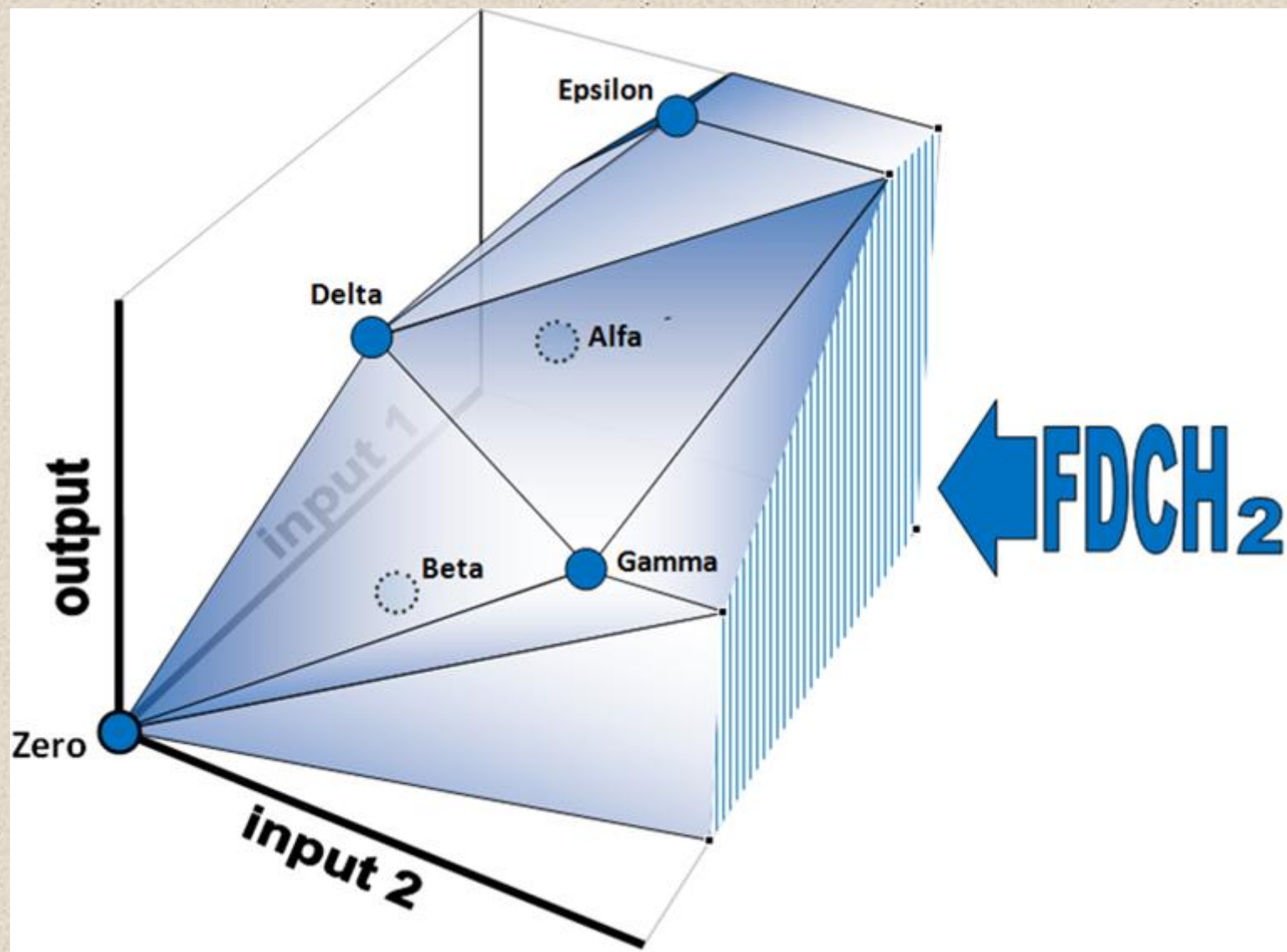
Nel lungo periodo è senza dubbio accettabile senza troppi problemi

Nel breve periodo molto meno: presuppone che si possano “azzerare” gli input (“azzerare” gli output è sempre possibile per la Free Disposal per gli output)

L'insieme di produzione FDCH: cosa cambia se introduco la possibilità di inazione

Se esiste anche il “processo ZERO”, ovvero se $\mathbf{Z}_0 = (0,0)$ appartiene a Y ...
L'insieme convesso dovrà contenere anche l'origine!





L'insieme di produzione FDCH: Inazione e convessità: qualche osservazione

1) Se l'ipotesi di inazione e la convessità sono ammesse, ne consegue che ciascun processo produttivo $\mathbf{z}_k$ possa essere riprodotto in scala più piccola

Infatti, partendo dai processi osservati $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots \mathbf{z}_k, \dots \mathbf{z}_n \dots$ e dall'ipotizzato $\mathbf{z}_0$, per la convessità esiste anche il processo

$$\gamma_k \cdot \mathbf{z}_k + (1 - \gamma_k) \cdot \mathbf{z}_0 = \gamma_k \cdot \mathbf{z}_k$$

con (ovviamente) $0 \leq \gamma_k \leq 1$

2) L'ipotesi di inazione e di convessità possono essere introdotte contemporaneamente cambiando il vincolo sulla somma dei γ

CONVESSITA' + INAZIONE

$$\mathbf{z}^* = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbf{z}_i \quad , \quad \text{dove:} \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i \leq 1 \quad \text{e} \quad \gamma_i \geq 0 \text{ per } \forall i$$

input-efficienza ed output-efficienza: Dal realizzato al realizzabile (segue)

51

Ipotesi 6: Possibilità di “aumentare la scala” (ogni processo produttivo è replicabile su scala maggiore)

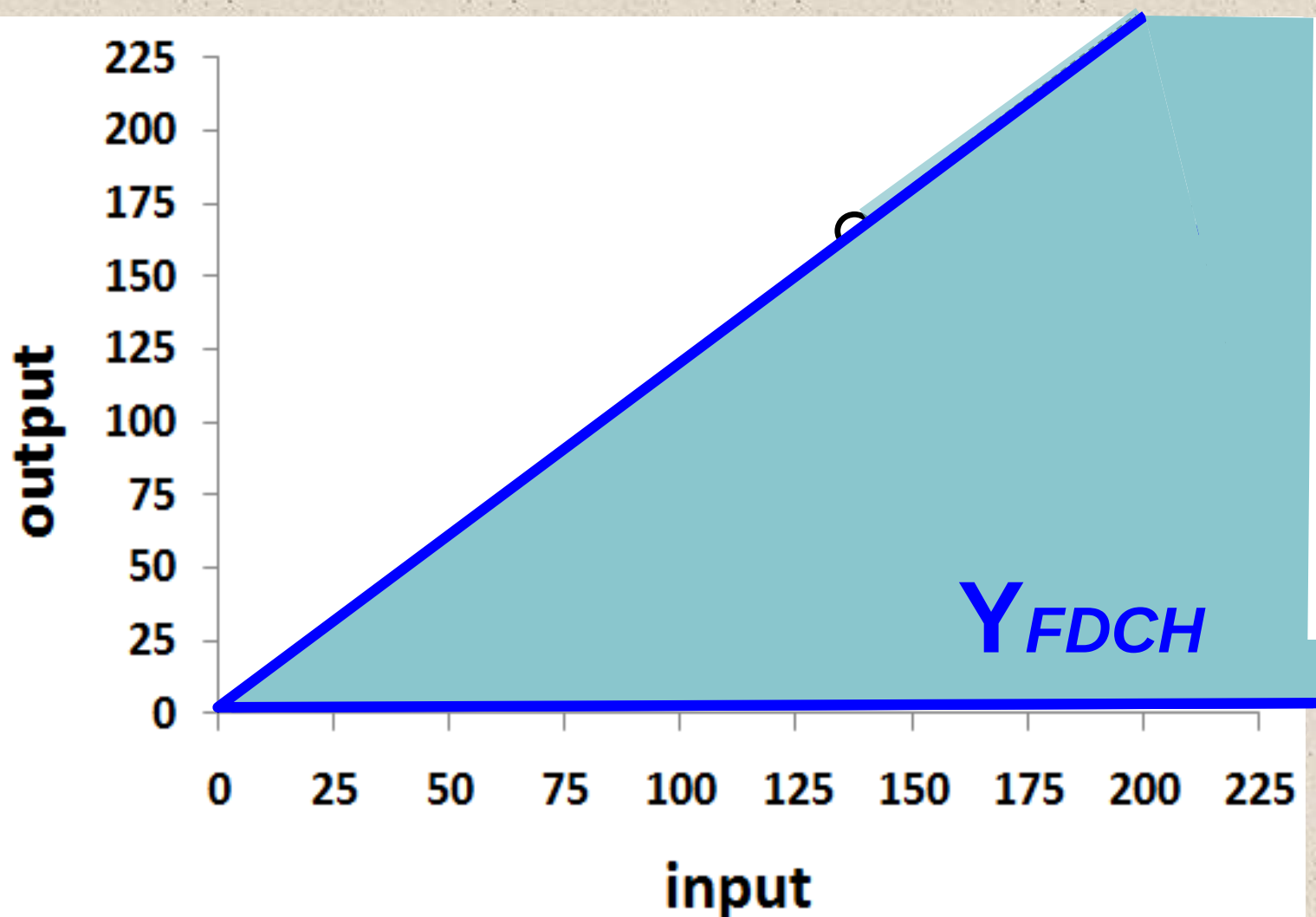
In base a tale ipotesi se $\mathbf{Z}_k$ appartiene a Y allora $\alpha \cdot \mathbf{Z}_k$ appartiene ancora a Y , con $\alpha \geq 1$

È un'ipotesi forte, in quanto presuppone che non ci siano rendimenti decrescenti di scala (se aumento di α gli input, anche gli output risultano aumentati almeno della stessa proporzione α)

Ipotesi 6: Possibilità di “aumentare la scala” interpretazione grafica

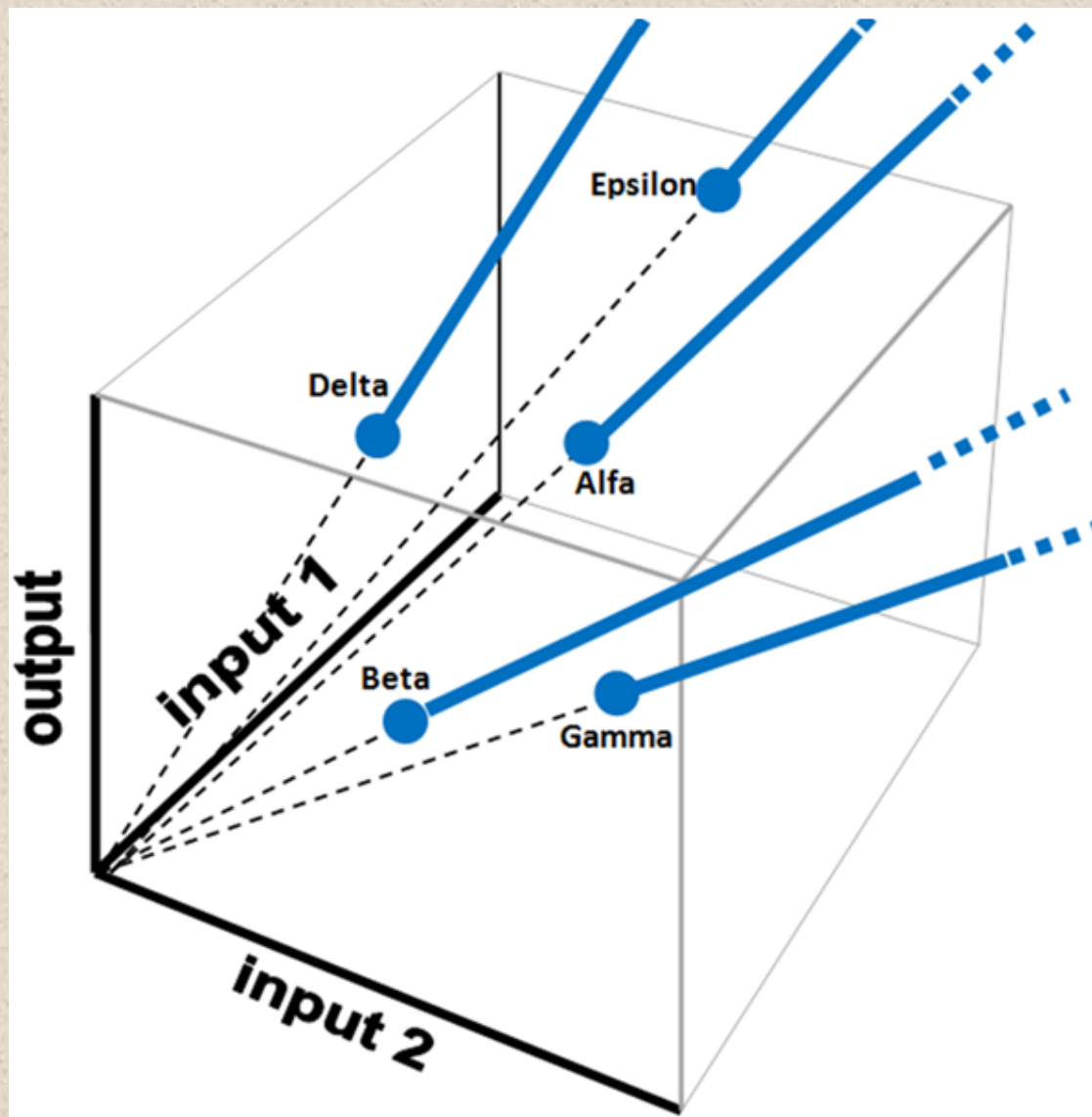


Partendo dai soliti 5 processi produttivi,
lasciando invariate le proporzioni fra input e output



Partendo
dall'insieme Y
che (in base alle
ipotesi 1,2,3 e 4)
avevamo
trovato in
precedenza,

Se
aggiungiamo
l'ipotesi 5
otteniamo...



L'equazione di Y

54

Vogliamo definire Y a partire dai processi osservati $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$.

Indichiamo ciascun processo $\mathbf{Z}_i$, come $\mathbf{z}_i \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}$, ovvero un vettore colonna composto da due vettori: uno input ($\mathbf{x}$, di q elementi) e uno output ($\mathbf{y}$ di p elementi). Inoltre indichiamo con $\mathbf{0}^p$ e $\mathbf{0}^q$ vettori nulli di lunghezze p e q e con $\mathbf{e}_g^p$ e $\mathbf{e}_j^q$ vettori di lunghezze p e q con gli elementi g -esimo e j -esimo pari a 1 e gli altri nulli. Avremo che:

$$Y \equiv \left\{ \mathbf{z}^* \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} \right. \right\}$$

Con $\gamma_i \geq 0$ per $\forall i$

e $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$ se vale la convessità
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i \leq 1$ se vale conv. e inazione
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i = \text{qualsiasi}$, se vale anche l'aumento di scala

con $\mu_j \geq 0$ per $j = 1 \dots q$,

se vale la Free Disposal per gli input

con $\nu_g \geq 0$ per $g = 1 \dots p$,

se vale la Free Disposal per gli output

L'equazione di Y (segue)

Riepilogando, tutti i processi di Y sono definibili come:

$$Y \equiv \left\{ \mathbf{z}^* \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^q \mu_j \begin{pmatrix} \mathbf{e}_j^q \\ \mathbf{0}^p \end{pmatrix} - \sum_{g=1}^p \nu_g \begin{pmatrix} \mathbf{0}^q \\ \mathbf{e}_g^p \end{pmatrix} \right. \right\}$$

$\gamma_i \geq 0$ per $\forall i$

$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$ se vale la convessità
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i \leq 1$ se vale conv. e inazione
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i$ qualsiasi, se vale anche l'aumento di scala

con $\mu_j \geq 0$ per $j = 1 \dots q$,
 se vale la Free Disposal per gli input

con $\nu_g \geq 0$ per $g = 1 \dots p$,
 se vale la Free Disposal per gli output

Un “miscuglio” degli n processi effettivamente realizzati,
al risultato “aggiungo quanto voglio” (μ) di ciascuno dei q input,
al risultato “tolgo quanto voglio” (ν) di ciascuno dei p output

L'equazione di Y (segue)

Nel caso di un solo input e un solo output...

$$Y \equiv \left\{ \mathbf{z}^* \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ -\nu \end{pmatrix} \right\}$$

$\gamma_i \geq 0$ per $\forall i$

$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$ se vale la convessità
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i \leq 1$ se vale conv. e inazione
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i = \text{qualsiasi}$, se vale anche l'aumento di scala

con $\mu \geq 0$,
 se vale la Free Disposal per gli input

con $\nu \geq 0$,
 se vale la Free Disposal per gli output

Un “miscuglio” degli n processi effettivamente realizzati,
 al risultato aggiungo quanto voglio (μ) dell' (unico) input,
 al risultato tolgo quanto voglio (ν) dell' (unico) output

L'equazione di Y (segue)

Oppure ancora, sempre nel caso di un solo input e un solo output...

$$\begin{aligned}
 & \gamma_1 \cdot (x_1, y_1) + \\
 & \gamma_2 \cdot (x_2, y_2) + \\
 & \quad \dots \\
 & \gamma_i \cdot (x_i, y_i) + \\
 & \quad \dots \\
 & \gamma_n \cdot (x_n, y_n) + \\
 & \quad (\mu, -v) = \\
 \hline
 & \mathbf{z}^* \equiv (x^*, y^*)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_i \geq 0 \text{ per } \forall i$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \gamma_i &= 1 \text{ se vale la convessità} \\
 &\leq 1 \text{ se vale conv. e inazione} \\
 &= \text{qualsiasi, se vale anche} \\
 &\quad \text{l'aumento di scala}
 \end{aligned}$$

con $\mu \geq 0$,
se vale la Free Disposal per gli input

con $v \geq 0$,
se vale la Free Disposal per gli output

Un “miscuglio” degli n processi effettivamente realizzati,
al risultato aggiungo quanto voglio (μ) dell' (unico) input,
al risultato tolgo quanto voglio (v) dell' (unico) output

La misura della produttività e dell'efficienza aziendale

Le dimensioni dell'efficienza:

input-efficienza
VS
output-efficienza

Come si misura dunque l'indice di input-efficienza per l'azienda k?

come abbiamo visto, devo cercare il benchmark per l'azienda k, ovvero il vettore $\mathbf{z}^{ibk}$ (input benchmark per k), composto dai vettori $\mathbf{y}^{ibk}$ e $\mathbf{x}^{ibk}$. Devo quindi risolvere un problema di ottimizzazione vincolata

minimizzare λ
sotto i vincoli che:

$$\mathbf{z}^{ibk} \in Y,$$

Il benchmark è realizzabile

$$\mathbf{y}^{ibk} = \mathbf{y}^k + \sum_{g=1}^p v_g \mathbf{e}_g^p,$$

produce almeno quanto k

$$\mathbf{x}^{ibk} = \lambda \cdot \mathbf{x}^k - \sum_{j=1}^q \mu_j \mathbf{e}_j^q$$

Il benchmark non supera una frazione λ degli input usati da k

l'indice di input-efficienza (nel caso di un solo input e un solo output)

60

minimizzare λ
sotto i vincoli che:

$z^{ibk} \in Y$, Il benchmark è realizzabile

$y^{ibk} = y^k + v$, produce almeno quanto k

$$x^{ibk} = \lambda \cdot x^k - \mu$$

Il benchmark non
supera una frazione λ
degli input usati da k

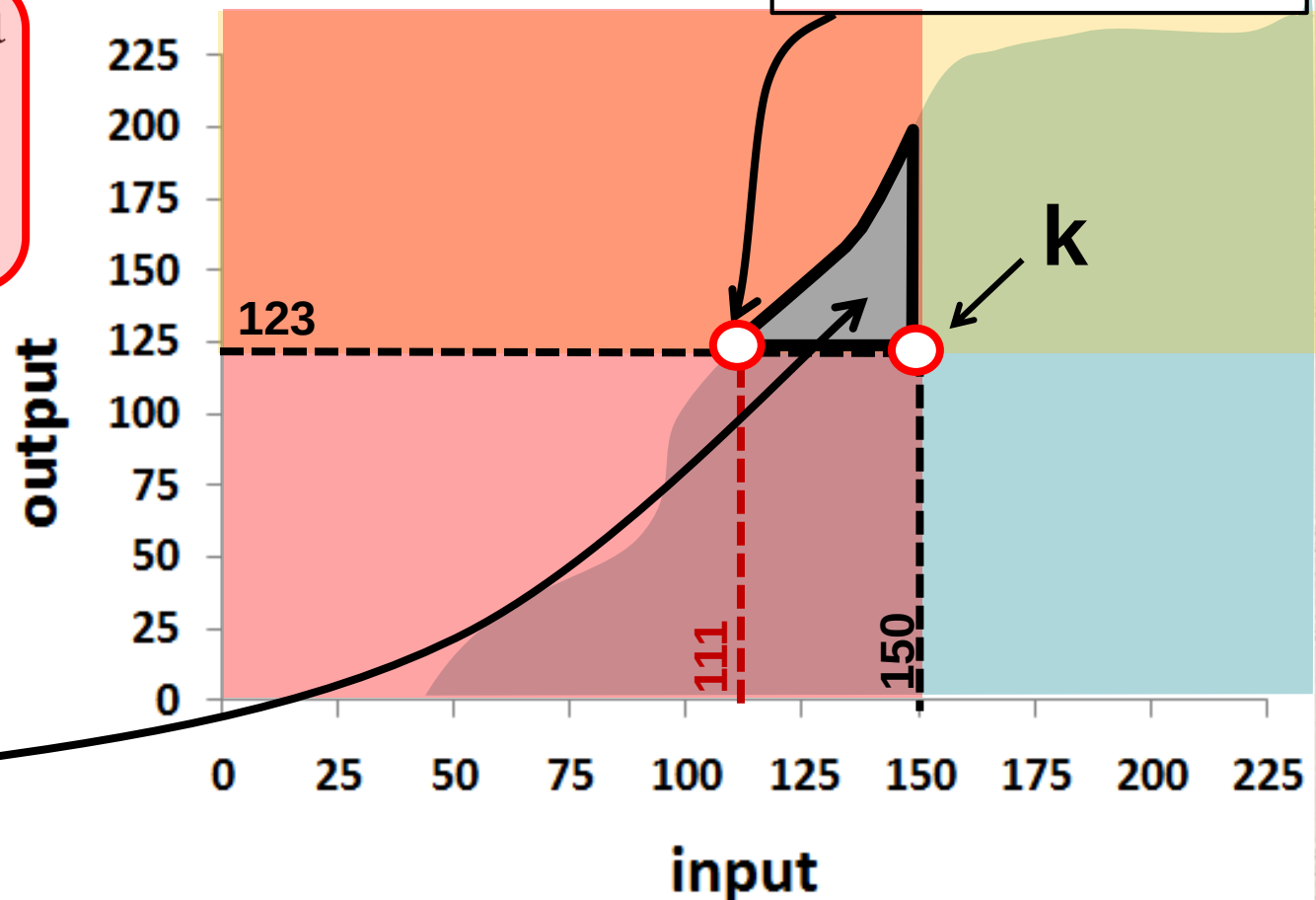
Devo cercare
qua dentro
quindi il
processo
che usa la
frazione
minima degli
input di k

Ecco il benchmark!

$$\lambda = 0,74$$

$$x^{ibk} = 111 = 0,74 \times 150$$

$$y^{ibk} = y^k = 123$$



Come si misura invece l'indice di output-efficienza per l'azienda k?

Devo stavolta cercare il vettore $\mathbf{z}^{obk}$, ovvero il benchmark per l'output dell'azienda k, composto dai vettori $\mathbf{y}^{obk}$ e $\mathbf{x}^{obk}$. Devo quindi risolvere un diverso problema di ottimizzazione vincolata

massimizzare $\bar{\varphi}$
sotto i vincoli che:

$$\mathbf{z}^{obk} \in Y,$$

Il benchmark è realizzabile

$$\mathbf{x}^{obk} = \mathbf{x}^k - \sum_{j=1}^q \mu_j \mathbf{e}_j^q,$$

Non utilizza più input di k

$$\mathbf{y}^{obk} = \bar{\varphi} \cdot \mathbf{y}^k + \sum_{g=1}^p v_g \mathbf{e}_g^p$$

Il benchmark produce almeno $\bar{\varphi}$ volte gli output prodotti da k

l'indice di output-efficienza (nel caso di un solo input e un solo output)

massimizzare $\bar{\varphi}$
sotto i vincoli che:

$z^{obk} \in Y$, Il benchmark è realizzabile

$x^{obk} = x^k - \mu$, Non utilizza più input di k

$$y^{obk} = \bar{\varphi} \cdot y^k + v$$

Il benchmark produce
almeno φ volte gli
output prodotti da k

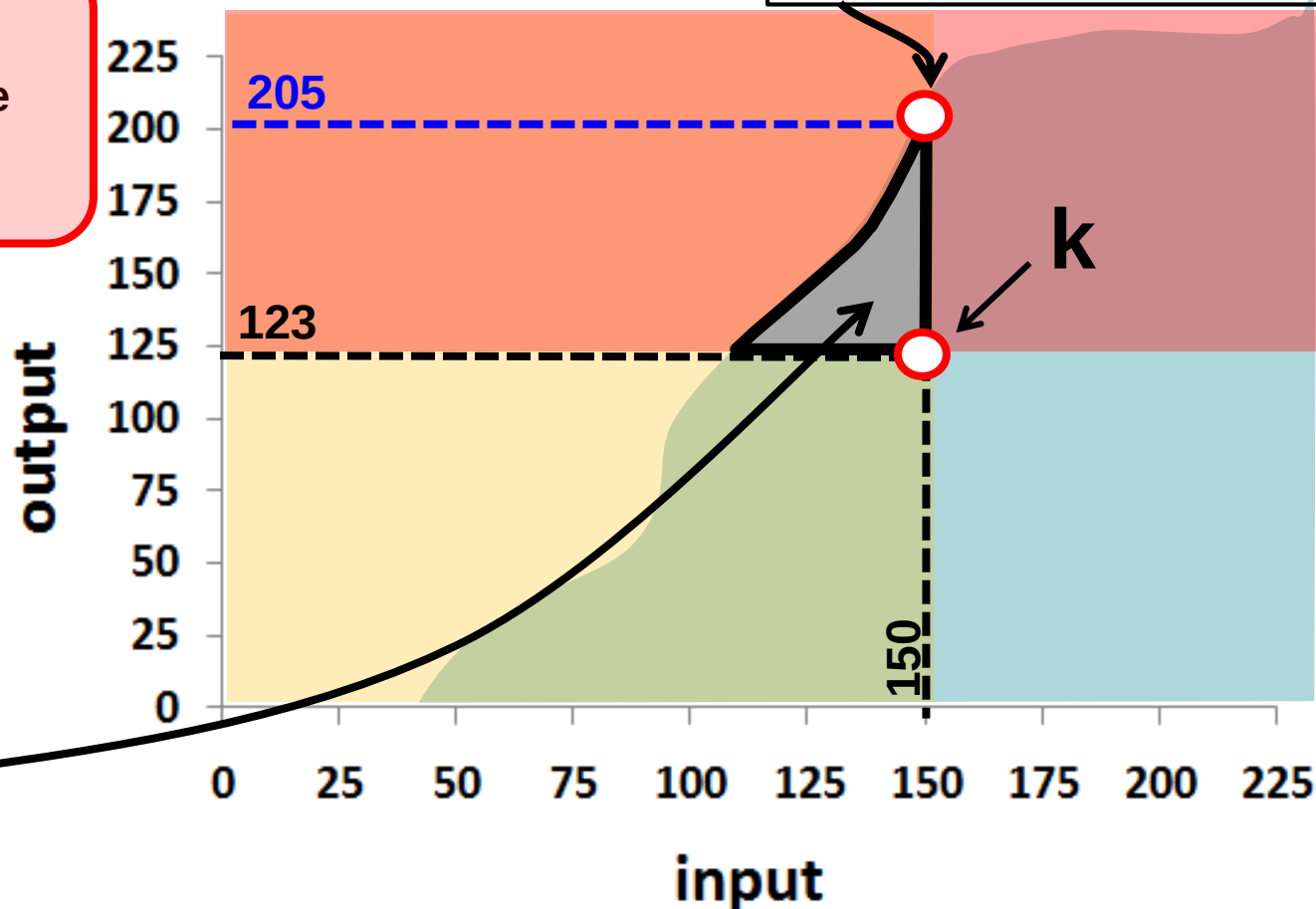
Devo cercare
qua dentro
quindi il
processo
che ottiene il
massimo
output
rispetto a k

Ecco il benchmark!

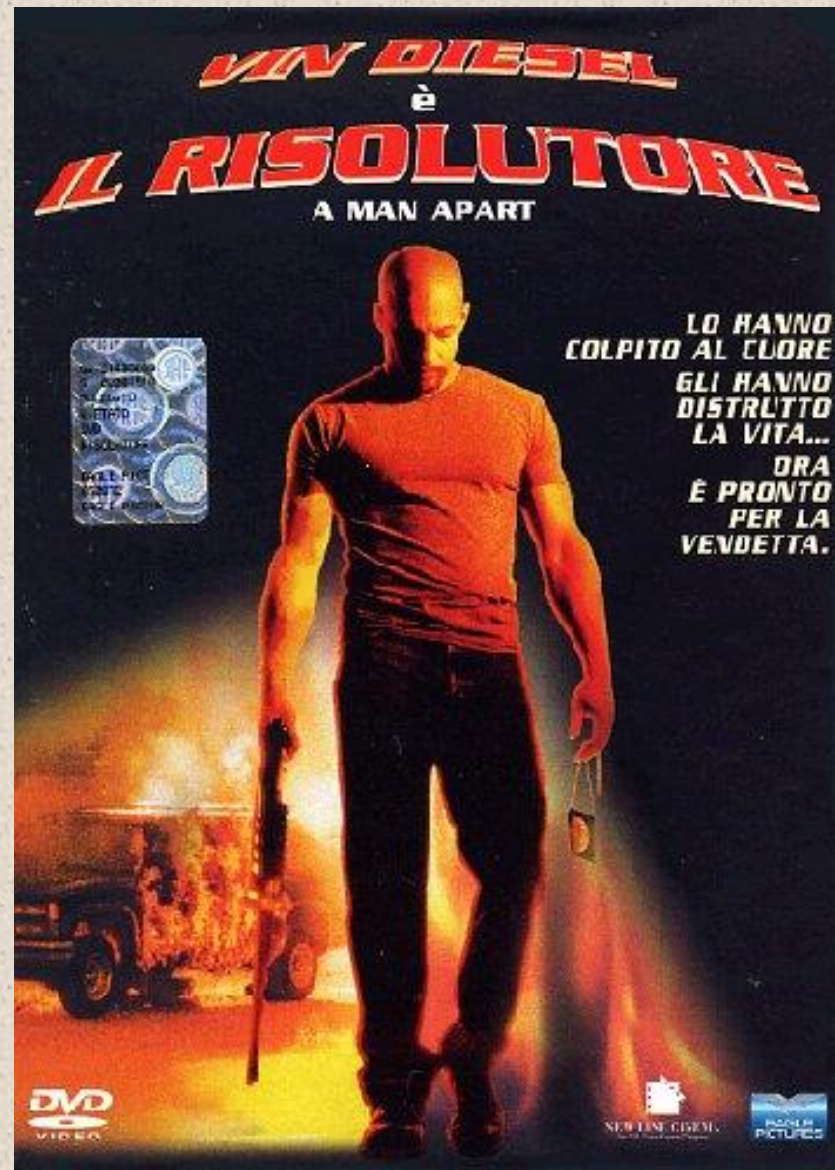
$$\bar{\varphi} = 1,67$$

$$y^{obk} = 205 = 1,67 \times 123$$

$$x^{obk} = x^k = 150$$



Come si fa a risolvere i problemi visti in precedenza?
È il momento di....



mauro maltagliati: produttività ed efficienza