Programma del corso di
Geometria e Algebra Computazionale
A.A. 2017/18
Università di Firenze

Giorgio Ottaviani

OBIETTIVI del corso: Introduzione costruttiva alla Geometria Algebrica. Apprendere metodi e tecniche computazionali per trattare polinomi e sistemi di equazioni polinomiali. Apprezzare le differenze del caso lineare con quello non lineare.

CAPACITA' e COMPETENZE: Conoscere le proprietà principali delle basi di Groebner. Saper effettuare una eliminazione di variabili e comprenderla tramite il risultante. Conoscere le prime proprietà delle varietà algebriche con particolare riguardo alle curve algebriche piane. Saper passare dalla descrizione parametrica a quella cartesiana di una varietà algebrica e comprendere le problematiche legate al passaggio inverso. Saper risolvere alcuni sistemi di equazioni polinomiali zerodimensionali, saper calcolare il numero di soluzioni reali in aritmetica esatta.

Contenuti:

Le basi di Groebner e l'algoritmo di Buchberger. Richiami sugli anelli noetheriani e teorema della base. Ordini monomiali e algoritmo di divisione. Ideali monomiali e basi di Groebner. Criterio di Buchberger ed algoritmo di Buchberger. Il problema di appartenenza di un elemento a un ideale.

L'eliminazione di variabili. Il teorema di eliminazione. Intersezione di ideali e algoritmo di calcolo, mcm e MCD. Radicale di un ideale.

Introduzione alle varietà algebriche Definizione di varietà algebrica e corrispondenza tra ideali e varietà. Topologia di Zariski. Il teorema degli zeri di Hilbert (NullStellenSatz). Il risultante. Il teorema di estensione. Interpretazione geometrica dell’eliminazione e Teorema di chiusura. Colorabilità di un grafo via basi di Groebner. Parametrizzazione di varietà algebriche. Equazioni parametriche e cartesiane per varietà algebriche. Ideali omogenei e varietà proiettive. Curve algebriche piane. Inviluppi e l’evoluta di una curva.

Metodi effettivi per la diagonalizzazione Richiami sul Teorema di Hamilton-Cayley, polinomio minimo e diagonalizzazione. Algoritmo per la diagonalizzabilità di una matrice.

Il numero delle radici reali di un polinomio e la loro molteplicità in aritmetica esatta. Matrice compagna. Forma traccia di Killing e teorema cinese dei resti in ambito polinomiale. Il teorema di Sylvester sul numero delle radici reali di un polinomio.

Soluzione di sistemi polinomiali zero dimensionali, reali e complessi. Ideali zero dimensionali e loro decomposizione primaria. Diagonalizzazione simultanea. Soluzione di sistemi polinomiali zerodimensionali col metodo degli autovalori. La molteplicità di una radice. Estensione a più variabili del teorema di Sylvester.

Il corso è accompagnato da esercitazioni al computer, con il software Macaulay2 (M2)
http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/

Testi consigliati:
D.Cox, J.Little, D.O'Shea, Ideals, Varieties and Algorithms, Springer 1992, capp. 1,2,3,7,9
D.Cox, J.Little, D.O'Shea, Using Algebraic Geometry, Springer 1998, cap. 2

Sulla pagina Moodle sono disponibili le note del corso.
Modalità di esame: esame orale. Verrà richiesta la presentazione di un elaborato con il software M2.