Matematica per le Applicazioni Economiche I
A.A. 2017/2018

Esercizi con soluzioni
Limiti e funzioni continue

1 ottobre 2017

1 Limiti

Esercizio 1. *Usando l'opportuna definizione di limite, si verifichi che*

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+1\right)=5.$$

Soluzione. Osserviamo che il dominio della funzione $f(x)=x^2+1$ è $\mathbb{R}$. Dobbiamo quindi dimostrare che

$$\text{per ogni } \varepsilon>0,\ \text{ esiste } \delta>0 \text{ tale che se } 0<|x-2|<\delta, \text{ allora } \left|x^2+1-5\right|<\varepsilon.$$

Fissiamo dunque $\varepsilon>0$ e mostriamo che esiste $\delta>0$ tale che l'insieme $(2-\delta,2)\cup(2,2+\delta)$ è un sottoinsieme dell'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|x^2-4\right|<\varepsilon$, ovvero del sistema

$$\begin{cases} x^2-4>-\varepsilon \\ x^2-4<+\varepsilon \end{cases},$$

ossia del sistema

$$\begin{cases} x^2-4+\varepsilon>0 \\ x^2-4-\varepsilon<0 \end{cases}$$

Senza perdita di generalità si supponga $\varepsilon<4$. Si ha dunque che la prima equazione del sistema ha come insieme delle soluzioni l'insieme

$$(-\infty,-\sqrt{4-\varepsilon})\cup(\sqrt{4-\varepsilon},+\infty)$$

mentre la seconda equazione del sistema ha come insieme delle soluzioni l'insieme

$$(-\sqrt{4+\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon}).$$

In definitiva l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\left(-\sqrt{4+\varepsilon},-\sqrt{4-\varepsilon}\right)\cup\left(\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon}\right).$$

Osserviamo che $2\in\left(\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon}\right)$. È dunque sufficiente scegliere, ad esempio, $\delta=\min\left\{2-\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon}-2\right\}$ ossia $\delta=\sqrt{4+\varepsilon}-2>0$. Infatti

$$\sqrt{4+\varepsilon}-2<2-\sqrt{4-\varepsilon}$$

$$\sqrt{4+\varepsilon}+\sqrt{4-\varepsilon}<4$$

$$4+\varepsilon+4-\varepsilon+2\sqrt{4+\varepsilon}\cdot\sqrt{4-\varepsilon}<16$$

$$2\sqrt{4+\varepsilon}\cdot\sqrt{4-\varepsilon}<16-8=8$$

$$\sqrt{(4+\varepsilon)\cdot(4-\varepsilon)}<4$$

$$\sqrt{16-\varepsilon^2}<4$$

L'esistenza di $\delta > 0$ avente la proprietà che $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta) \subseteq \left(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}\right)$ può essere dedotta anche osservando che 2 è un punto interno di $\left(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}\right)$. $\square$

Esercizio 2. *Usando l'opportuna definizione di limite, si verifichi che*

$$\lim_{x \to -2} \left(x^3 - 2x + 6\right) = 2.$$

Soluzione. Osserviamo che il dominio della funzione $f(x) = x^3 - 2x + 6$ è $\mathbb{R}$. Dobbiamo quindi dimostrare che

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0, \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che se } 0 < |x-2| < \delta, \text{ allora } \left|x^3 - 2x + 6 - 2\right| < \varepsilon.$$

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ e mostriamo che esiste $\delta > 0$ tale che l'insieme $(-2-\delta, -2) \cup (-2, -2+\delta)$ è un sottoinsieme dell'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|x^3 - 2x + 4\right| < \varepsilon$. In questo caso il calcolo esplicito di tale insieme delle soluzioni è molto complesso. Ragioniamo dunque come segue. Poiché $f(-2) = 0$, applicando il teorema di Ruffini, abbiamo che

$$x^3 - 2x + 4 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$$

Abbiamo dunque che

$$\{x \in \mathbb{R} : \left|x^3 - 2x + 4\right| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \cdot |x^2 - 2x + 2| < \varepsilon\}.$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, si deduce immediatamente che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$|x^2 - 2x + 2| \leq |x^2| + 2|x| + 2$$

Pertanto

$$\{x \in \mathbb{R} : |x+2| \cdot |x^2 - 2x + 2| < \varepsilon\} \supseteq \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \cdot (|x^2| + 2|x| + 2) < \varepsilon\}.$$

Consideriamo adesso l'intervallo $(-3, -1)$ contenente il punto limite -2. Si ha che, per ogni $x \in (-3, -1)$,

$$|x^2| + 2|x| + 2 \leq 9 + 6 + 2 = 17.$$

Dunque abbiamo che

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} : |x+2| \cdot (|x^2| + 2|x| + 2) < \varepsilon\} &\supseteq \{x \in (-3,-1) : |x+2| \cdot (|x^2| + 2|x| + 2) < \varepsilon\} \\ &\supseteq \{x \in (-3,-1) : 17|x+2| < \varepsilon\}\end{aligned}$$

Assumendo adesso senza perdere di generalità $\varepsilon < 1$, si ha che

$$\{x \in (-3,-1) : 17|x+2| < \varepsilon\} = \left(-2 - \frac{\varepsilon}{17}, -2 + \frac{\varepsilon}{17}\right).$$

In definitiva abbiamo ottenuto che

$$\{x \in \mathbb{R} : \left|x^3 - 2x + 4\right| < \varepsilon\} \supseteq \left(-2 - \frac{\varepsilon}{17}, -2 + \frac{\varepsilon}{17}\right).$$

Scegliendo dunque $\delta = \frac{\varepsilon}{17}$, concludiamo la dimostrazione. $\square$

Esercizio 3. *Dimostrare che le funzioni*

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2} \qquad e \qquad g(x) = e^x - 1 - \frac{2x}{3}$$

sono positive nell'intervallo $(0, \delta)$, per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo.

Soluzione. Poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \frac{2x}{3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{3}}{x} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

possiamo applicare il Teorema della permanenza del segno alle funzioni

$$\frac{\sin(x) - \frac{x}{2}}{x} \quad \text{e} \quad \frac{e^x - 1 - \frac{2x}{3}}{x}$$

e dedurre che esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$,

$$\frac{\sin(x) - \frac{x}{2}}{x} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{e^x - 1 - \frac{2x}{3}}{x} > 0.$$

Pertanto si ha che, per ogni $x \in (0, \delta)$, $\sin(x) - \frac{x}{2} > 0$ e $e^x - 1 - \frac{2x}{3} > 0$. □

Esercizio 4. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}.$$

Soluzione. Sappiamo che $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = 0$ e che $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$. Pertanto il limite proposto si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Poiché $x \to 0$, è legittimo dividere numeratore e denominatore dell'espressione data per x e ottenere l'uguaglianza

$$\frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

In questo modo abbiamo messo in evidenza i due limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Siamo adesso nelle condizioni in cui il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti (perché il limite del numeratore è finito e il limite del denominatore è finito e diverso da 0). Abbiamo dunque che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

e dunque il limite dell'espressione proposta è 1. □

Esercizio 5. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}.$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. La funzione considerata è la reciproca di quella considerata nell'esercizio precedente ossia

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x-1}{\sin(x)}}.$$

Poiché il denominatore ammette limite finito non nullo, possiamo applicare il teorema sul limite del quoziente da cui segue che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin(x)}} = \frac{1}{1} = 1$$

e dunque il limite dell'espressione proposta è 1. □

Esercizio 6. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Soluzione. Poiché $\lim_{x\to\pi} \sin(x) = 0$ ed $\lim_{x\to\pi} x = \pi$, siamo nelle condizioni in cui il limite del quoziente è il quoziente dei limiti (perché il limite del numeratore è finito e il limite del denominatore è finito e diverso da 0). Abbiamo dunque che

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to\pi} \sin(x)}{\lim_{x\to\pi} x} = \frac{0}{\pi} = 0.$$

□

Esercizio 7. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x^2-x^3}{x}.$$

Soluzione. Abbiamo che $\lim_{x\to 0} e^x-1-x^2-x^3=0$ e che $\lim_{x\to 0} x=0$, pertanto il limite proposto si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Ma l'espressione può essere riscritta in modo da metter in evidenza un limite notevole come segue

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x^2-x^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-x-x^2=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}x^2=1-0-0=1$$

. □

Esercizio 8. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-x}}{2x}$$

Soluzione. 1. □

Esercizio 9. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{9x}{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+x}}$$

Soluzione. $\frac{9}{2}$. □

Esercizio 10. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+e^x-\cos(x)}{2x}$$

Soluzione. 1. □

Esercizio 11. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2+\sin^2(x)}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2+\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2}}{\frac{x^2+\sin^2(x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin^2(x)}{x^2}}{1+\frac{\sin^2(x)}{x^2}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}{1+\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}=\frac{1-1^2}{1+1^2}=0.$$

□

Esercizio 12. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\ln(1+x)-1}{\sin(x)+x}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\ln(1+x)-1}{\sin(x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-\ln(1+x)-1}{x}}{\frac{\sin(x)+x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}+\frac{x}{x}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

□

Esercizio 13. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{\ln(1-x)}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{\ln(1-x)} \quad = \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+e^{2x}-1}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}2\frac{e^{2x}-1}{2x}}{-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}} = \frac{1+2}{-1} = -3.$$

□

Esercizio 14. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+x}{e^{4x}-1}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+x}{e^{4x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-2x)+x}{x}}{\frac{e^{4x}-1}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-2x)}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{e^{4x}-1}{x}} =$$

$$= \frac{-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}}{4\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}} = \frac{-2+1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

□

Esercizio 15. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{2}{x}}$$

Soluzione. Sia $f(x)=(1+\sin(x))^{\frac{2}{x}}$. Osserviamo che, per ogni $x\in D(f)$, si ha che

$$f(x)=e^{\frac{2\ln(1+\sin(x))}{x}},$$

e che 0 è un punto di accumulazione di $D(f)$. Abbiamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+\sin(x))\sin(x)}{x\sin(x)} = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Come noto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$

si ottiene che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)}=1.$$

In definitiva

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+\sin(x))}{x}=2.$$

Poiché la funzione esponenziale è continua in 2 possiamo infine concludere che

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^2.$$

□

Esercizio 16. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2\tan^2(x)}{x^2+1-\cos(x)}$$

Soluzione. Il limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2\tan^2(x)}{x^2+1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1-2\frac{\sin^2(x)}{x^2\cos^2(x)}\right)}{x^2\left(1+\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{1-2\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\right)}{1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}}=\frac{1-2}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$$

□

Esercizio 17. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}$$

Soluzione. Il limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1-\sin^2(x)}\right)}{\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left((1-\sin^2(x))^{\frac{1}{2}}\right)}{\sin^2(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln((1-\sin^2(x))}{\sin^2(x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln((1-\sin^2(x))}{-\sin^2(x)}.$$

Poniamo $y=-\sin^2(x)$ e osserviamo che $\lim_{x\to 0}-\sin^2(x)=0$. Possiamo dunque sostituire $-\sin^2(x)$ con y e $x\to 0$ con $y\to 0$, da cui segue

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln((1-\sin^2(x))}{\sin^2(x)}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1-y)}{-y}=-\frac{1}{2}$$

□

Esercizio 18. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x^2)}{1-\cos(x)}.$$

Soluzione. Il limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x^2)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}(1+\cos(x))}{(1-\cos^2(x))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\frac{1+\cos(x)}{\cos(x^2)}}{\frac{\sin^2(x)}{x^2}}=\frac{1\cdot\frac{1+1}{1}}{1^2}=2.$$

□

Esercizio 19. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2\sin(3x)}{x(1-\cos(2x))}$$

Soluzione. Si moltiplicano numeratore e denominatore per $3\cdot 2^2$. Tenendo conto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1 \quad e \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}=\frac{1}{2}$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2\sin(3x)}{x(1-\cos(2x))}=\lim_{x\to 0}5\,\frac{\sin 3x}{3x}\,\frac{(2x)^2}{1-\cos(2x)}\,\frac{3}{4}=\frac{15}{2}.$$

□

Esercizio 20. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soluzione. Si pone $y = x - 1$ e si ottiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{(1+y)^2-1}$$

moltiplicando numeratore e denominatore per y dato che

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \quad , \quad \lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^2-1} = \frac{1}{2}$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\frac{y}{(1+y)^2-1} = \frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 21. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+(x-1)^3}$$

Soluzione. Se $x \to 0^+$ allora $x - 1 \to -1^+$ quindi $(x-1)^3 \to -1^+$ da cui segue $1 + (x-1)^3 \to 0^+$. Visto che il numeratore è uguale a 1 e il denominatore tende a 0^+, il limite è $+\infty$. □

Esercizio 22. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+(x-1)^3}$$

Soluzione. Se $x \to 0^-$ allora $x - 1 \to -1^-$ quindi $(x-1)^3 \to -1^-$ da cui segue $1 + (x-1)^3 \to 0^-$. Visto che il numeratore è uguale a 1 e il denominatore tende a 0 negativo, il limite è $-\infty$. □

Esercizio 23. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+|x-1|^3}$$

Soluzione. Se $x \to 0$ allora $x - 1 \to -1$ quindi $|x-1| \to 1$ e $|x-1|^3 \to 1$ da cui segue $1 + |x-1|^3 \to 2$. Visto che il numeratore è uguale a 1 e il denominatore tende a 2, si ha che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x-1|^3} = \frac{1}{2}$ da cui segue che $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+|x-1|^3} = 1/2$. □

Esercizio 24. *Stabilire per quale delle seguenti funzioni si ha* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$.

(a) $f(x) = \sin(x)$; *(b)* $f(x) = \cos(x)$; *(c)* $f(x) = xe^x$; *(d)* $f(x) = (\tan(x))(\sin(x))$

Soluzione. Nel caso (a) abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Nel caso (b) abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x} = \text{“}\frac{1}{0}\text{”},$$

e dunque il limite non esiste, perché

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Nel caso (c) abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to 0}e^x = e^0 = 1.$$

Infine nel caso (d) abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\tan(x)\frac{\sin(x)}{x}=0\cdot 1=0.$$

Dunque la risposta corretta è (d). $\square$

Esercizio 25. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[1-\cos(3x^2-2x)][1-\sqrt{1-3x}]}{x^3}.$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata

$$\text{“}\,\frac{[1-\cos(0)][1-1]}{0}=\frac{0}{0}\,\text{”}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore della frazione di cui vogliamo calcolare il limite per $(3x^2-2x)^2$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[1-\cos(3x^2-2x)][1-\sqrt{1-3x}]}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{[1-\cos(3x^2-2x)]}{(3x^2-2x)^2}\frac{[1-\sqrt{1-3x}](3x^2-2x)^2}{x^3}.$$

Posto $y=(3x^2-2x)^2$ si osserva che se $x\to 0^+$, allora $y\to 0$ e dunque, usando un limite notevole,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(3x^2-2x)}{(3x^2-2x)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos(y)}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

Inoltre, si ha che

$$\frac{\left(1-\sqrt{1-3x}\right)\cdot(3x^2-2x)^2}{x^3}=\frac{\left(1-\sqrt{1-3x}\right)\cdot(3x^2-2x)^2}{x^3}\frac{\left(1+\sqrt{1-3x}\right)}{\left(1+\sqrt{1-3x}\right)}$$

$$=\frac{(1-1+3x)\cdot(3x^2-2x)^2}{x^3\left(1+\sqrt{1-3x}\right)}=\frac{3(3x^2-2x)^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-3x}\right)}=3\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-3x}\right)}==3\frac{9x^2-12x+4}{1+\sqrt{1-3x}}$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0^+}3\frac{9x^2-12x+4}{1+\sqrt{1-3x}}=3\frac{4}{1+1}=6.$$

Concludendo, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[1-\cos(3x^2-2x)][1-\sqrt{1-3x}]}{x^3}=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(3x^2-2x)}{(3x^2-2x)^2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}3\frac{9x^2-12x+4}{1+\sqrt{1-3x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 6=3.$$

$\square$

Esercizio 26. *Usando l'opportuna definizione di limite, si verifichi che*

$$\lim_{x\to+\infty}x^2-\sin(10\,x)=+\infty.$$

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

significa che il dominio di f, indicato con $D(f)$, è superiormente illimitato e che

$$\forall M>0\ \ \exists\nu\in\mathbb{R}\quad \text{tale che se } x\in D(f) \text{ e } x>\nu,\ \text{allora } f(x)>M.$$

Sia dunque $f(x)=x^2-\sin(10\,x)$ e osserviamo che $D(f)=\mathbb{R}$, che è superiormente illimitato. Fissato $M>0$, consideriamo quindi la disequazione $f(x)>M$ e mostriamo che esiste $\nu\in\mathbb{R}$ tale che l'insieme $(\nu,+\infty)$ è contenuto nell'insieme delle soluzioni della disequazione.

Osserviamo che, poiché $\sin(10\,x)\geq -1$, si ha $x^2-\sin(10\,x)\geq x^2-1$. Quindi,

$$x^2-1>M\quad \text{implica}\quad x^2-\sin(10\,x)>M.$$

Inoltre

$$x>\sqrt{M+1}\quad \text{implica}\quad x^2-1>M,$$

dove $M+1>0$ poiché per ipotesi $M>0$. È dunque sufficiente scegliere $\nu\geq\sqrt{M+1}$. $\square$

Esercizio 27. *Usando l'opportuna definizione di limite, si verifichi che*

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^4 + x^2 + \cos(x) = -\infty.$$

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

significa che il dominio di f, indicato con $D(f)$, è superiormente illimitato e che

$$\forall M > 0 \ \ \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \text{tale che se } x \in D(f) \text{ e } x > \nu, \text{ allora } f(x) < -M.$$

Fissato dunque $M > 0$ dobbiamo far vedere che esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\{x \in \mathbb{R} : -3x^4 + x^2 + \cos(x) < -M\} \supseteq (\nu, +\infty).$$

Sappiamo che, senza perdere di generalità, è possibile considerare M maggiore di una opportuna costante. Consideriamo dunque in quanto segue $M > 1$. Osserviamo che

$$\{x \in \mathbb{R} : -3x^4 + x^2 + \cos(x) < -M\} \supseteq \{x \in [10, +\infty) : -3x^4 + x^2 + \cos(x) < -M\}.$$

Osserviamo adesso che, per ogni $x \in [10, +\infty)$, si ha che $x^4 \geq x^2$ e che $\cos(x) \leq 1$. Allora

$$\{x \in [10, +\infty) : -3x^4 + x^2 + \cos(x) < -M\} \supseteq \{x \in [10, +\infty) : -3x^4 + x^4 + 1 < -M\}$$

$$= \{x \in [10, +\infty) : -2x^4 + 1 < -M\} = \left\{x \in [10, +\infty) : x^4 > \tfrac{M-1}{2}\right\} = \left\{x \in [10, +\infty) : x > \sqrt[4]{\tfrac{M-1}{2}}\right\}$$

$$= [10, +\infty) \cap \left[\sqrt[4]{\tfrac{M-1}{2}}, +\infty\right) = \left[\max\left\{10, \sqrt[4]{\tfrac{M-1}{2}}\right\}, +\infty\right).$$

È dunque sufficiente scegliere $\nu \geq \max\left\{10, \sqrt[4]{\frac{M-1}{2}}\right\}$. □

Esercizio 28. *Usando l'opportuna definizione di limite, si verifichi che*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1$$

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

significa che il dominio di f, indicato con $D(f)$, è superiormente illimitato e che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \nu \in \mathbb{R} \quad \text{tale che se } x \in D(f) \text{ e } x > \nu, \text{ allora } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sia dunque $f(x) = \sqrt{1 + \frac{4}{x}}$ e osserviamo che $D(f) = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, che è superiormente illimitato. Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo dunque considerare la disequazione $|f(x) - 1| < \varepsilon$ e verificare che l'insieme delle sue soluzioni contiene un insieme della forma $(\nu, +\infty)$ con $\nu \in \mathbb{R}$ opportunamente scelto.

Osserviamo adesso che $\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 \neq 0$ (perché $\sqrt{1 + \frac{4}{x}} \geq 0$). Possiamo allora razionalizzare l'argomento del valore assoluto, ottenendo che

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{se e solo se} \quad \left|\frac{1 + \frac{4}{x} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1}\right| < \varepsilon \quad \text{se e solo se} \quad \frac{\left|\frac{4}{x}\right|}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} < \varepsilon.$$

Ricordiamo che non è indispensabile trovare tutte le soluzioni della disequazione, ma possiamo limitarci a determinarne un opportuno sottoinsieme che consenta di ottenere la condizione desiderata. Poiché $\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 \geq 1$, si ha che

$$\frac{\left|\frac{4}{x}\right|}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} \leq \left|\frac{4}{x}\right|.$$

Se dunque x risolve $\left|\frac{4}{x}\right| < \varepsilon$, allora x risolve $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Assumiamo adesso che x sia positiva. In tal caso avremo $\left|\frac{4}{x}\right| < \varepsilon$ se e solo se $\frac{4}{x} < \varepsilon$ se e solo se $x > \frac{4}{\varepsilon}$. Quindi, per ogni $x > \frac{4}{\varepsilon}$, si ha che $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Pertanto basta scegliere $\nu = \frac{4}{\varepsilon}$. □

Esercizio 29. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - |x|$$

Soluzione. Poiché $x \to +\infty$, possiamo assumere $|x| = x$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+x} + x$ si deduce facilmente che il limite è uguale a $1/2$. □

Esercizio 30. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Soluzione. Per $x \to -\infty$ la funzione $\sqrt{x+1}$ non è definita e quindi il limite non esiste. □

Esercizio 31. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^2}{|\sqrt{x}-1|}$$

Soluzione. Tenendo conto che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \to +\infty,$$

dividendo numeratore e denominatore per x^2 si ottiene che il limite è $+\infty$. □

Esercizio 32. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|-x^2+1| - |x^2-4x|}{3x+\sqrt{x}}$$

Soluzione. Per $x \to +\infty$, $\quad |-x^2+1| = x^2-1$ e $|x^2-4x| = x^2-4x$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|-x^2+1| - |x^2-4x|}{3x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{3x+\sqrt{x}} = \frac{4}{3}.$$

□

Esercizio 33. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{|x|}}\right)$$

Soluzione. L'argomento del logaritmo tende a 0 quindi il limite è $-\infty$. □

Esercizio 34. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(2x-3)}{|x^3-1| - |3x-x^3|}$$

Soluzione. Per $x \to +\infty$, si ha che $|x^3-1| = x^3-1$ e $|3x-x^3| = -3x+x^3$ si ha quindi

$$\frac{(x-1)(2x-3)}{|x^3-1| - |3x-x^3|} = \frac{(x-1)(2x-3)}{x^3-1-(-3x+x^3)} = \frac{(x-1)(2x-3)}{x^3-1+3x-x^3}$$

da cui segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(2x-3)}{|x^3-1| - |3x-x^3|} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(2x-3)}{3x-1} = +\infty.$$

□

Esercizio 35. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-3}{e^{x+1}}$$

Soluzione. Dividendo numeratore e denominatore per e^x si ottiene

$$\frac{e^x-3}{e^{x+1}} = \frac{1-\frac{3}{e^x}}{e}$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-3}{e^{x+1}} = \frac{1}{e}.$$

□

Esercizio 36. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 3}{e^{x+1}}$$

Soluzione. Il numeratore tende a -3 e il denominatore tende a $0+$ quindi il limite è $-\infty$. □

Esercizio 37. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|-x^3 - x + 2| - |3x + x^3|}{x - 2\sqrt{x}}$$

Soluzione. Per $x \to +\infty$, $\quad |-x^3 - x + 2| = x^3 + x - 2$ e $|3x + x^3| = 3x + x^3$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|-x^3 - x + 2| - |3x + x^3|}{x - 2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x - 2}{x - 2\sqrt{x}} = -2.$$

□

Esercizio 38. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$$

Soluzione. Si razionalizza il numeratore e si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})\sqrt{x}} = 0.$$

□

Esercizio 39. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{|1 + x - x^2|} - \sqrt{|3 - x|}$$

Soluzione. Per $x \to +\infty$ si ha $\ |1 + x - x^2| = x^2 - x - 1\ $ e $\ |3 - x| = x - 3$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x - 3}$ la funzione oggetto del limite, segue facilmente che il limite è $+\infty$. □

Esercizio 40. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 + x - x^3} - \sqrt{3 - x}$$

Soluzione. Per semplificare possiamo porre $x = -y$. Si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 + x - x^3} - \sqrt{3 - x} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{1 - y + y^3} - \sqrt{3 + y}.$$

Poiché $\sqrt{1 - y + y^3} - \sqrt{3 + y} = \sqrt{y}(\sqrt{\frac{1}{y} - 1 + y^2} - \sqrt{\frac{3}{y} + 1})$, segue che

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 + x - x^3} - \sqrt{3 - x} = \lim_{y\to+\infty} = \sqrt{y}(\sqrt{\frac{1}{y} - 1 + y^2} - \sqrt{\frac{3}{y} + 1}) = +\infty.$$

□

Esercizio 41. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left[(1 - 2x)(1 - \sqrt{1 - x^2})\right]}{x^2}$$

Soluzione. L'argomento del logaritmo tende a 0 quindi il numeratore tende a $-\infty$. Il denominatore tende a 0^+ quindi il limite è $-\infty$. □

Esercizio 42. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to1} \frac{e^x}{x - 1}$$

Soluzione. Il numeratore tende ad e. Il denominatore tende a 0. Se $x \to 1^+$ il limite è $+\infty$ mentre se $x \to 1^-$ il limite è $-\infty$. Dunque il limite non esiste. $\square$

Esercizio 43. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3 - x + 1}$$

Soluzione. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

raccogliendo x^3 al denominatore si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3 - x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = +\infty$$

$\square$

Esercizio 44. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}}$$

Soluzione. Osserviamo anzitutto che il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}}$ è $(0,1)$. Pertanto è lecito considerare il limite destro di f per x che tende a 0. Si ha inoltre che

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}} = 1.$$

$\square$

Esercizio 45. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin(x)}}.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\lim_{x\to0^+} \sin(x) = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^-} \sin(x) = 0^-.$$

Dunque

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sin(x)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\sin(x)} = -\infty,$$

da cui segue

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{\sin(x)}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{\sin(x)}} = 0.$$

Pertanto, essendo limite destro e limite sinistro diversi, concludiamo che il limite considerato non esiste $\square$

Esercizio 46. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(3x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}.$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Per le proprietà dei logaritmi, possiamo riscrivere l'espressione come

$$\left(\frac{\ln(3)+\ln(x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)} = \left(1 + \frac{\ln(3)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}.$$

Siamo di fronte ora ad una forma 1^∞, che ci ricorda $\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$. Facendo il cambio di variabile iniettivo $z = g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)}$, possiamo affermare che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(3)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)} = \lim_{z\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z\ln(3)} = \lim_{z\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{\ln(3)}.$$

Questa è una forma limite immediata perché la base $\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] \to e$ e l'esponente è costante pari a $\ln(3)$, perciò

$$\lim_{z\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} = 3.$$

□

Esercizio 47. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-2\sin(\frac{1}{x})}{1-e^{\frac{2}{x}}}.$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma non immediata $\frac{0}{0}$, ma $\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ quando $x\to+\infty$ ci ricorda $\ln(1+z)$ quando $z\to 0$, di cui sappiamo che $\lim_{z\to0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$; $\sin(\frac{1}{x})$ quando $x\to+\infty$ ci ricorda $\sin(z)$ quando $z\to0$, di cui sappiamo che $\lim_{z\to0}\frac{\sin(z)}{z}=1$; e $1-e^{\frac{2}{x}}$ ci ricorda $1-e^z$ quando $z\to0$, e sappiamo che $\frac{1-e^z}{z}\to-1$. Perciò intanto facciamo il cambio di variabile iniettivo $z=g(x)=\frac{1}{x}$, dove $z\to0$ quando $x\to+\infty$, in questo modo abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-2\sin(\frac{1}{x})}{1-e^{\frac{2}{x}}}=\lim_{z\to0}\frac{\ln(1+3z)-2\sin(z)}{1-e^{2z}}.$$

Quest'ultimo limite si presenta ancora nella forma $\frac{0}{0}$, ma ora possiamo utilizzare i limiti notevoli citati. Abbiamo dunque che

$$\lim_{z\to0}\frac{\ln(1+3z)-2\sin(z)}{1-e^{2z}}=\lim_{z\to0}\frac{3\frac{\ln(1+3z)}{3z}-2\frac{\sin(z)}{z}}{2\frac{1-e^{2z}}{2z}}=\frac{3-2}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 48. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{2}{x}}}{2\sin(\frac{1}{x})-\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}.$$

Soluzione. La funzione argomento del limite è esattamente l'antireciproco (opposto e reciproco) della funzione considerata nell'Esercizio 47. Essendo il valore del limite dell'Esercizio 47 uguale ad $-\frac{1}{2}$ ed in particolare diverso da zero, applicando i noti teoremi sui limiti concludiamo che il limite è 2. □

Esercizio 49. *Stabilire per quale delle seguenti funzioni si ha* $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

(a) $f(x)=\tan(x)$; *(b)* $f(x)=e^x$; *(c)* $f(x)=x\cos(x)$; *(d)* $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin(x)$

Soluzione. La funzione in (a) non soddisfa la condizione richiesta infatti $\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}=1\cdot1=1$.

La funzione in (b) non soddisfa la condizione richiesta poiché $\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$ non esiste. Infatti $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty$, mentre $\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$.

La funzione in (c) non soddisfa la condizione richiesta poiché $\lim_{x\to0}\frac{x\cos(x)}{x}=\lim_{x\to0}\cos(x)=1$.

La funzione in (d) soddisfa invece la condizione richiesta. Infatti $\frac{\sqrt[3]{x}\sin(x)}{x}$ si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, ma riscrivendo l'espressione come $\sqrt[3]{x}\,\frac{\sin(x)}{x}$, utilizzando il fatto che $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, e che quando i fattori hanno limiti finiti allora il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti, otteniamo che

$$\lim_{x\to0}\sqrt[3]{x}\,\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt[3]{x}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=0\cdot1=0.$$

Quindi la funzione in (d) è l'unica funzione che soddisfi la condizione richiesta. □

Esercizio 50. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}+7x^3+\ln(x)}{2x-5x^4}$$

Soluzione. 0. □

Esercizio 51. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)\ln(x)\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Soluzione. La funzione $\sin(x)\ln(x)\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ è prodotto delle funzioni $\sin(x)$, $\ln(x)$ e $\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ed ha per dominio $(0,+\infty)$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0,\quad \lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0}\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ \text{non esiste.}$$

Pertanto non si può applicare il teorema relativo al limite del prodotto di funzioni e siamo di fronte ad una forma indeterminata. Abbiamo tuttavia che

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}x\ln(x)=0,$$

poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 0}x\ln(x)=0.$$

Inoltre, per ogni $x\in(0,+\infty)$, si ha che

$$\left|\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right|=\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\le\exp(1)=e.$$

Ricordando adesso che il prodotto fra una funzione che tende a 0 e una funzione limitata è 0 (corollario del teorema del confronto), concludiamo che il limite oggetto dell'esercizio è 0. □

Esercizio 52. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)+9x^5+\sqrt{x}}{e^{\frac{1}{x}}+6x^3}$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)+9x^5+\sqrt{x}}{e^{\frac{1}{x}}+6x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(\frac{\cos(x)}{x^5}+9+\frac{\sqrt{x}}{x^5}\right)}{x^3\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}+6\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\frac{\cos(x)}{x^5}+9+\frac{\sqrt{x}}{x^5}}{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}+6}$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x^5}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^5}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}=0,$$

concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cos(x)}{x^5}+9+\frac{\sqrt{x}}{x^5}}{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}+6}=\frac{9}{6},$$

da cui segue che il limite oggetto dell'esercizio è $+\infty$. □

Esercizio 53. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt[3]{x}.$$

Soluzione. Il limite presenta una forma indeterminata del tipo $(+\infty)-(+\infty)$. Osserviamo adesso che, utilizzando l'identità $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, si ottiene che, $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$, da cui segue che, per ogni $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

Abbiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt[3]{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x-1)-x}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}+\sqrt[3]{(4x-1)x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt[3]{16x^2-8x+1}+\sqrt[3]{4x^2-x}+\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{16-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{4-\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{16-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{4-\frac{1}{x}}+1}.$$

Poiché

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{16-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{4-\frac{1}{x}}+1} = \frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$$

si deduce che il limite oggetto dell'esercizio è $+\infty$. □

Esercizio 54. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-2}}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{3x-1}-\sqrt{3x-2})(\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-2})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-2})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2})} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x-1)-(3x-2)}{(2x+1)-(2x-2)} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{2}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{3-\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{2}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{2}{x}}}{\sqrt{3-\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{2}{x}}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

□

Esercizio 55. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x-3}-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{7x}-\sqrt{7x-1}}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x-3}-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{7x}-\sqrt{7x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{5x-3}-\sqrt{5x+4})(\sqrt{5x-3}+\sqrt{5x+4})}{(\sqrt{7x}-\sqrt{7x-1})(\sqrt{7x}+\sqrt{7x-1})} \cdot \frac{\sqrt{7x}+\sqrt{7x-1}}{\sqrt{5x-3}+\sqrt{5x+4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(5x-3)-(5x+4)}{(7x)-(7x-1)} \cdot \frac{\sqrt{7x}+\sqrt{7x-1}}{\sqrt{5x-3}+\sqrt{5x+4}} = \lim_{x\to+\infty} -7 \cdot \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{7}+\sqrt{7-\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{5-\frac{3}{x}}+\sqrt{5+\frac{4}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -7 \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{7-\frac{1}{x}}}{\sqrt{5-\frac{3}{x}}+\sqrt{5+\frac{4}{x}}} = -7\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}.$$

□

Esercizio 56. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)(\tan(x))^2}{\sin(x)\cos(x)}$$

Soluzione. 0. □

Esercizio 57. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(\ln(1+x))^2e^x}{\ln(x)(\sin(x))^3}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata

$$``\frac{(\ln(0))^2 e^0}{\ln(0)(\sin(0))^3} = \frac{0 \cdot 1}{(-\infty) \cdot 0}".$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1+x))^2 e^x}{\ln(x)(\sin(x))^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1+x))^2}{x^2 \frac{(\sin(x))^3}{x^3}} \frac{e^x}{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1+x))^2}{x^2} \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin(x))^3}{x^3}} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x\ln(x)}.$$

Usando noti limiti notevoli, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 = 1^2 = 1, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin(x))^3}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 = 1^3 = 1.$$

Inoltre, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-.$$

Dunque, concludendo, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1+x))^2 e^x}{\ln(x)(\sin(x))^3} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

□

Esercizio 58. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln(2)}}{2^x + 2x}$$

Soluzione. 1. □

Esercizio 59. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5\ln(x)} + 3x}{2x^5 + 4x^2}$$

Soluzione. Si osservi che

$$e^{5\ln(x)} = e^{\ln\left(x^5\right)} = x^5,$$

dove la prima uguaglianza segue da proprietà dei logaritmi e la seconda dal fatto che le funzioni esponenziale e logaritmo sono l'una inversa dell'altra. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5\ln(x)} + 3x}{2x^5 + 4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 3x}{2x^5 + 4x^2}.$$

Si noti che il limite si presenta nella forma indeterminata

$$``\frac{x^5 + 3x}{2x^5 + 4x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}".$$

Si ha tuttavia che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5\ln(x)} + 3x}{2x^5 + 4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 3x}{2x^5 + 4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} + 3\frac{x}{x^5}}{\frac{2x^5}{x^5} + 4\frac{x^2}{x^5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 3\frac{1}{x^4}}{2 + 4\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 60. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{2x}.$$

Soluzione. $-\infty$. □

Esercizio 61. *Si determinino tutti i punti in cui la funzione $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^3 - x^2}$ presenta un asintoto verticale.*

Soluzione. 0 e 1. □

Esercizio 62. *Si determinino tutti i punti in cui la funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^3-x}$ presenta un asintoto verticale.*

Soluzione. -1, 0. □

Esercizio 63. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{x}{2}}$$

Soluzione. $\sqrt{e}$. □

Esercizio 64. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$$

Soluzione. $\frac{3}{2}$. □

Esercizio 65. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)$$

Soluzione. 0. □

Esercizio 66. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(x - \sqrt{x^2+6x})$$

Soluzione. $-\infty$. □

Esercizio 67. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln(x)e^{\sin(x)}$$

Soluzione. 0. □

Esercizio 68. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \left[1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^{\sqrt{x}}.$$

Soluzione. 1. □

Esercizio 69. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan\left(\sqrt{1-\cos(x)}\right)}{\sin(x)}.$$

Soluzione. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Esercizio 70. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \left[1 + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{x}.$$

Soluzione. $+\infty$. □

Esercizio 71. *Applicando il Teorema del confronto calcolare i limiti:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x) - \frac{x}{2}}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x)e^{-\frac{1}{\sin(x)}}$.

Soluzione. (a) Osserviamo che $0 \leq |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| = |x||\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$ e $\lim_{x\to 0} |x| = 0$. Per il Teorema del confronto otteniamo allora che $\lim_{x\to 0} |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| = 0$, e dunque $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(b) Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{x/2}{x} = -\frac{1}{2},$$

dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$. Infatti $0 \leq |\frac{\sin(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$ ed è pertanto possibile concludere che $\lim_{x\to+\infty} |\frac{\sin(x)}{x}| = 0$ per il Teorema del confronto. Quindi anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

(c) Mostriamo che $\lim_{x\to 0^+} \cos(x) e^{-\frac{1}{\sin(x)}} = 0$ facendo vedere che $\lim_{x\to 0^+} \left|\cos(x) e^{-\frac{1}{\sin(x)}}\right| = 0$. Infatti

$$0 \leq \left|\cos(x) e^{-\frac{1}{\sin(x)}}\right| \leq e^{-\frac{1}{\sin(x)}}.$$

Poiché $\lim_{x\to 0^+} (-\frac{1}{\sin(x)}) = -\infty$, concludiamo che $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{\sin(x)}} = 0$ da cui segue, applicando il Teorema del confronto, che $\lim_{x\to 0^+} \left|\cos(x) e^{-\frac{1}{\sin(x)}}\right| = 0$. □

2 Funzioni continue

Esercizio 72. *Stabilire quale delle seguenti funzioni non è continua in* 0.

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 1$;

(b) $f(x) = \frac{2x}{e^x - 1}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = \frac{1}{2}$;

(c) $f(x) = 0$ *per* $x \leq 0$ *e* $f(x) = x^2$ *per* $x > 0$.

Soluzione. (b). □

Esercizio 73. *Stabilire quale delle seguenti funzioni non è continua in* 0.

(a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 1$;

(b) $f(x) = \frac{2x}{\sin(x)}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 2$;

(c) $f(x) = 0$ *per* $x \leq 0$ *e* $f(x) = 1 + \sin(x)$ *per* $x > 0$.

Soluzione. (c). □

Esercizio 74. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è continua in* 1.

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x-1|}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 1$;

(b) $f(x) = \frac{e^x - e}{x-1}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = e$;

(c) $f(x) = \frac{\ln(|x-1|)}{|x-1|}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 1$;

(d) $f(x) = 1$ *per* $x \leq 1$ *ed* $f(x) = x^2 + 1$ *per* $x > 1$.

Soluzione. (b). □

Esercizio 75. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è continua in* 1.

(a) $f(x) = \frac{|x-1|}{\cos(\pi x)}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 0$;

(b) $f(x) = \frac{|e^x - e|}{x-1}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = e$;

(c) $f(x) = \frac{|x-1|}{\ln(|x-1|)}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 1$;

(d) $f(x) = 0$ *per* $x \geq 1$ *ed* $f(x) = x$ *per* $x < 1$.

Soluzione. (a). □

Esercizio 76. *Stabilire quale delle seguenti funzioni è continua ed ammette un punto di minimo.*

(a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & se\ x \geq 0, \\ e^x, & se\ x < 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & se\ x \geq 0, \\ e^x, & se\ x < 0, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -\sin(x), & se\ x \geq 0, \\ e^x, & se\ x < 0, \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -\cos(x), & se\ x \geq 0, \\ -e^x, & se\ x < 0, \end{cases}$

Soluzione. (*d*). □

Esercizio 77. *Stabilire quale delle seguenti funzioni ammette un punto di discontinuità ed è illimitata superiormente.*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se\ x \geq 0, \\ \cos(x), & se\ x < 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ x \geq 0, \\ \cos(x), & se\ x < 0, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se\ x \geq 0, \\ -\cos(x), & se\ x < 0, \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ x \geq 0, \\ -\cos(x), & se\ x < 0, \end{cases}$

Soluzione. (*a*). □

Esercizio 78. *Per ciascuna delle seguenti funzioni (ognuna definita su $\mathbb{R}$) si individuino, se esistono, i punti di discontinuità:*

$$f_1(x) = \begin{cases} 3\cos(x) - 7^{\sin(x)} & se\ x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+14x-16}{2x^2-7x+5} & se\ x < 1 \\ 2 & se\ x = 1 \\ -4 + 5\cos(\frac{\pi}{2}x) - 2\sin(\frac{\pi}{2}x) & se\ x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + 8^x + 3 & se\ x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+8x}-1}{x+x^2} & se\ x \in (0,3) \\ \frac{2\sqrt{x-2}}{12+x-x^2} & se\ x \in [3,4) \cup (4,+\infty) \\ 7 & se\ x = 4 \end{cases}$$

Soluzione. La funzione f_1 è continua in ogni punto $(-\infty, 0)$. Infatti, per ogni $x_0 < 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq (-\infty, 0)$ e dunque, per ogni $x \in B(x_0, \delta)$, $f_1(x) = 3\cos(x) - 7^{\sin(x)}$. Deduciamo dunque che che

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} \left(3\cos(x) - 7^{\sin(x)}\right) = 3\cos(x_0) - 7^{\sin(x_0)} = f_1(x_0)$$

dato che le funzioni coseno, seno ed esponenziale sono continue in ogni $x_0 < 0$ (per la precisione, lo sono in ogni punto della retta reale), e ogni funzione che è composizione/somma/prodotto/quoziente di funzioni continue è continua dove è definita. Ragionando in maniera analoga si conclude che f_1 è continua in ogni punto $(0, +\infty)$. In definitiva f_1 è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'unico possibile punto di discontinuità per f_1 è dunque 0. Calcoliamo allora

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f_1(x) &= 3 - 1 = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f_1(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Poiché $2 \neq \frac{1}{4}\sqrt{2}$, si deduce che f_1 non è continua in 0.

Per f_2 si ragiona in maniera analoga e si deduce che l'unico possibile punto di discontinuità è 1. Calcoliamo allora

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f_2(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{2\,(x-1)\,(x+8)}{(2x-5)\,(x-1)} = -6 \\ \lim_{x\to 1^+} f_2(x) &= \lim_{x\to 1^+} \left(-4 + 5\cos(\frac{\pi}{2}x) - 2\sin(\frac{\pi}{2}x)\right) = -6 \end{aligned}$$

Questo rivela che $\lim_{x\to 1} f_2(x) = -6$, ma poiché $f_2(0) = 2$ che è diverso da -6, si deduce che f_2 non è continua in 1.

Per f_3 si ragiona in maniera analoga e si deduce che gli unici possibili punti di discontinuità per f_3 sono i punti dell'insieme $\{0, 3, 4\}$. Risulta che f_3 è continua in 0 dato che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f_3(x) &= 0 + 1 + 3 = 4 = f_3(0) \\ \lim_{x\to 0^+} f_3(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+8x}-1}{x+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{8x}{(x+x^2)(\sqrt{1+8x}+1)} = 4 \end{aligned}$$

Inoltre, f_3 è continua anche in 3 dato che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f_3(x) &= \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{1+8x}-1}{x+x^2} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x\to 3^+} f_3(x) &= \lim_{x\to 3^+} \frac{2\sqrt{x-2}}{12+x-x^2} = \frac{1}{3} = f_3(3) \end{aligned}$$

Tuttavia, f_3 non è continua in 4, dato che $\lim_{x\to 4^-} f_3(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f_3(x) = -\infty$. □

Esercizio 79. *Per ciascuna delle seguenti funzioni (ognuna definita su $\mathbb{R}$) si individuino, se esistono, i valori del parametro a, o dei parametri a e b, che rendono la funzione continua in $\mathbb{R}$:*

(a) $f(x) = \begin{cases} 2 - ax + 3^x & \text{se } x \le 1 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se } x \le 0 \\ \ln(1+x) - a^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{se } x \le 0 \\ e^{ax} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -2x + b & \text{se } x \le 1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{se } x \in (1, 2) \\ x^3 - b & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2e^x - a & \text{se } x \le 0 \\ a^2 + \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + 2a & \text{se } x < 0 \\ a^2x - 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ x^2 - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} e^x + ax & \text{se } x \le 0 \\ x^2 - 6x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 5 & se\ x < 0 \\ a + \cos(x) + 4\ln(1 + x) & se\ x \geq 0 \end{cases}$

Soluzione. (a) Ragionando come nella soluzione dell'esercizio 78 si deduce che f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dunque f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 1, e questa proprietà è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 5 - a = f(1)$ è uguale a $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$. L'uguaglianza $5 - a = \frac{1}{2}$ vale se e solo se $a = \frac{9}{2}$.

(b) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 0, e questa proprietà è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$ è uguale a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -a^2$. L'uguaglianza $1 = -a^2$ è violata per ogni a reale.

(c) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 0, e questa proprietà è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ è uguale a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. L'uguaglianza $0 = 0$ è soddisfatta per ogni a reale.

(d) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 1 e in 2. La continuità in 1 è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2 + b = f(1)$ è uguale a $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 + a$. La continuità in 2 è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5 + 2a$ è uguale a $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 8 - b = f(2)$. Le uguaglianze $-2 + b = 2 + a$ e $5 + 2a = 8 - b$ sono soddisfatte se e solo se $a = -\frac{1}{3}$, e $b = \frac{11}{3}$.

(e) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 0, e questa proprietà è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 - a = f(0)$ è uguale a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a^2$. L'uguaglianza $2 - a = a^2$ è soddisfatta se e solo se $a = 1$ o $a = -2$.

(f) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 0 e in 1. La continuità in 0 è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + 2a$ è uguale a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$. La continuità in 1 è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = a^2 - 1 = f(1)$ è uguale a $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$. Le uguaglianze $1 + 2a = -1$ e $a^2 - 1 = 0$ sono soddisfatte se e solo se $a = -1$.

(g) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 0, e questa proprietà è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$ è uguale a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. L'uguaglianza $1 = 0$ è violata per ogni a reale.

(h) f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 0, e questa proprietà è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 5$ è uguale a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a + 1 = f(0)$. L'uguaglianza $5 = 1 + a$ vale se e solo se $a = 4$. □

Esercizio 80. *Sapendo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua nel punto $x_0 = 5$ e $f(5) = 2$, è possibile dedurre il segno di $f(4.9)$ o il segno di $f(5.01)$?*

Soluzione. No, non è possibile dedurre il segno di $f(4.9)$ o il segno di $f(5.01)$. Certamente, grazie al Teorema della permanenza del segno sappiamo che esiste un intorno di 5 in cui la funzione f è positiva. Tuttavia, tale teorema non stabilisce quanto questo intorno sia grande, e se quindi esso includa i punti 4.9 o 5.01. □

Esercizio 81. *Si determini il dominio della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & se\ x \leq 3 \\ x + 1 & se\ x > 3 \end{cases}$$

Si stabilisca inoltre se sono soddisfatte le ipotesi del teorema della permanenza del segno nei punti -1, 1, 3 e 4.

Soluzione. Il dominio della funzione è $(0, +\infty)$. In -1, 1 e 3 le ipotesi del Teorema della permanenza del segno non sono soddisfatte. Infatti f non è definita in -1; $f(1) = 0$; f non è continua in 3. In 4 invece le ipotesi del Teorema della permanenza del segno sono soddisfatte. Infatti $f(4) > 0$ ed f è continua in 4. Pertanto esiste un intorno di 4 tale che $f(x) > 0$ per ogni x nell'intorno. □

Esercizio 82. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x$. Quali delle seguenti affermazioni non è necessariamente vera:*

(a) $f(3) > 0$

(b) *f è illimitata superiormente*

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

(d) *f è crescente*

Soluzione. (d). □

Esercizio 83. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq e^x$. Quali delle seguenti affermazioni non è necessariamente vera:*

(a) $f(2) > 2$
(b) f *è illimitata superiormente*
(c) f *è continua*
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Soluzione. (c). □

Esercizio 84. *Utilizzando il teorema degli zeri, si dimostri che l'equazione*

$$x^5 + 2\,x - 1 = 0$$

ammette una soluzione nell'intervallo $(0, 1)$.

Soluzione. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^5 + 2\,x - 1$ è continua nell'intervallo $[0, 1]$. Verifichiamo i valori della funzione agli estremi dell'intervallo

$$f(0) = -1,\ \ f(1) = 2.$$

Le ipotesi del teorema sono verificate e quindi possiamo affermare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione in questo intervallo. □

Esercizio 85. *Per l'equazione $\frac{1}{8}x^3 + 2x = 3$ si utilizzi il teorema degli zeri al fine di stabilire l'esistenza di una soluzione nell'intervallo $(0, 2)$; si provi inoltre che tale intervallo contiene un'unica soluzione dell'equazione.*

Soluzione. Sia $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 2x - 3$ e si noti che x_0 è soluzione dell'equazione proposta se e solo se $f(x_0) = 0$. Risulta che $f(0) = -3 < 0$ e $f(2) = 2 > 0$. Poiché f è continua in $[0, 2]$ (f è la somma di funzioni continue) si deduce che esiste un $x_0 \in (0, 2)$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero esiste in $(0, 2)$ una soluzione dell'equazione. Inoltre tale soluzione è unica (in $(0, 2)$) poiché f è strettamente crescente in $(0, 2)$ (f è la somma di funzioni strettamente crescenti e di una costante). □

Esercizio 86. *Per ciascuna della seguenti equazioni si dica se è possibile utilizzare il teorema degli zeri al fine di stabilire l'esistenza di una soluzione nell'intervallo indicato a fianco dell'equazione. Nei casi in cui questo non sia possibile, è possibile stabilire in un altro modo l'esistenza di una soluzione nell'intervallo? In quali casi è possibile stabilire l'esistenza di un'unica soluzione nell'intervallo?*

(a) $2x^3 - 13x^2 + 26x = 15$; $(0, 4)$.

(b) $-x^3 + 3 = \log_2(x)$; $(1, 2)$.

(c) $6\sqrt{x} = 2^x - 3$; $(1, 3)$.

(d) $x^3 = 1 - x^4$; $(-2, 1)$.

(e) $f(x) = 0$, *con* $f(x) = \begin{cases} -4 + \sin(\pi x) + x & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}x^3 - 3 + \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$; $(0, 3)$.

Soluzione. (a) Sia $f(x) = -2x^3 + 13x^2 - 26x + 15$ e si noti che x_0 è soluzione dell'equazione se e solo se $f(x_0) = 0$. Risulta che $f(0) = 15 > 0$ e $f(4) = -9 < 0$. Poiché f è continua in $[0, 4]$, si deduce che esiste $x_0 \in (0, 4)$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero esiste in $(0, 4)$ una soluzione dell'equazione. Si noti tuttavia che f non è la somma di funzioni tutte strettamente crescenti o tutte strettamente decrescenti, e pertanto è impossibile, con i metodi presentati finora, stabilire se f è strettamente monotona o no. Dunque non possiamo garantire che l'intervallo $(0, 4)$ contenga un'unica soluzione (in realtà ne contiene tre: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 3$).

(b) Sia $f(x) = -x^3 + 3 - \log_2(x)$ e si noti che x_0 è soluzione dell'equazione se e solo se $f(x_0) = 0$. Risulta che $f(1) = 2 > 0$ e $f(2) = -6 < 0$. Poiché f è continua in $[1, 2]$, si deduce che esiste un $x_0 \in (1, 2)$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero esiste in $(1, 2)$ una soluzione dell'equazione. Poiché f è strettamente decrescente in $[1, 2]$ (è la somma di funzioni strettamente decrescenti e di una costante), si deduce che nell'intervallo $(1, 2)$ si trova un'unica soluzione dell'equazione.

(c) Sia $f(x) = 3 + 6\sqrt{x} - 2^x$ e si noti che x_0 è soluzione dell'equazione se e solo se $f(x_0) = 0$. Risulta che $f(1) = 7 > 0$ e $f(3) = 6\sqrt{3} - 5 > 0$. Dunque non si può applicare il teorema degli degli zeri, e in effetti $(1, 3)$ non contiene alcuna soluzione dell'equazione, dato che $6\sqrt{x} - 2^x > 0$ per ogni $x \in [1, 3]$, e dunque $f(x) > 0$ per ogni $x \in [1, 3]$.

(d) Sia $f(x) = x^3 + x^4 - 1$ e si noti che x_0 è soluzione dell'equazione se e solo se $f(x_0) = 0$. Risulta che $f(-2) = 7 > 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Dunque non si può applicare il teorema degli zeri per concludere che esiste una soluzione in $(-2, 1)$, ma in realtà risulta che $f(0) = -1 < 0$ e dunque il teorema degli zeri stabilisce l'esistenza di una soluzione in $(-2, 0)$ e di un'altra soluzione in $(0, 1)$ (f è strettamente crescente in $(0, 1)$, pertanto la soluzione è unica in $(0, 1)$).

(e) Risulta che $f(0) = -4 < 0$ e $f(3) = \frac{65}{6} > 0$. Tuttavia, non è possibile applicare il teorema degli zeri perché f non è continua in 2. Infatti $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{3}{2}$. In effetti, non esiste alcuna soluzione in $(0, 3)$ dell'equazione $f(x) = 0$ poiché $f(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 2)$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in [2, 3)$. $\square$