Matematica per le Applicazioni Economiche I
A.A. 2017/2018

Esercizi con soluzioni
Derivate

Questo documento fa riferimento al libro di testo testo Elementi di Analisi Matematica, Enrico Giusti, 2008, Bollati Boringhieri.

Con $f'_+(x_0)$ si indica $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (se questo limite esiste ed è finito), ed è chiamato derivata destra di f in x_0. Con $f'_-(x_0)$ si indica $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (se questo limite esiste ed è finito), ed è chiamato derivata sinistra di f in x_0.

Si osservi che le espressioni punto critico e punto stazionario sono utilizzate come sinonime.

Esercizio 1. *Per la seguente funzione, dato x_0, si utilizzi la definizione di derivata per calcolare $f'(x_0)$ e per ricavare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:*

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 9.$$

Soluzione Poiché $f(9) = 3$ e $\frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \frac{(\sqrt{9+h}-3)(\sqrt{9+h}+3)}{h(\sqrt{9+h}+3)} = \frac{1}{\sqrt{9+h}+3}$, risulta che $f'(9) = \lim_{h\to 0} \frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+h}+3} = \frac{1}{6}$. Dunque $y = 3 + \frac{1}{6}(x-9)$, cioè $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(9, 3)$.

Esercizio 2. *Per ciascuna delle seguenti funzioni, dato x_0, si utilizzi la definizione di derivata per calcolare $f'(x_0)$ e per ricavare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:*

$$(a)\ f(x) = x^3 - 2x, \quad x_0 = -1; \qquad (b)\ f(x) = 2^x, \quad x_0 = 5; \qquad (c)\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 3$$

Soluzione (a) Poiché $f(-1) = 1$ e $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)^3-2(-1+h)-1}{h} = h^2 - 3h + 1$, risulta che $f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2 - 3h + 1) = 1$. Dunque $y = 1 + (x + 1)$, cioè $y = x + 2$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(-1, 1)$.

(b) Poiché $f(5) = 32$ e $\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{2^{5+h}-32}{h} = 32 \cdot \frac{2^h-1}{h}$, risulta che $f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} 32 \cdot \frac{2^h-1}{h} = 32 \ln(2)$. Dunque $y = 32 + (32 \ln(2))(x - 5)$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(5, 32)$.

(c) Poiché $f(3) = \frac{1}{3}$ e $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h} = -\frac{1}{3(h+3)}$, risulta che $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}(-\frac{1}{3(h+3)}) = -\frac{1}{9}$. Dunque $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 3)$, cioè $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{9}x$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(3, \frac{1}{3})$.

Esercizio 3. *Si calcoli la derivata della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & se \quad x \le 0 \\ x & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Soluzione Per ogni $x_0 < 0$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in I(x_0)$. Dunque $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$, ovvero $f'(x_0) = 2x_0$ per ogni $x_0 < 0$.

Per ogni $x_0 > 0$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in I(x_0)$. Dunque $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-x_0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$, ovvero $f'(x_0) = 1$ per ogni $x_0 > 0$.

Per calcolare $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ è necessario calcolare $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, dato che l'espressione di $f(x)$ per $x>0$ è diversa dall'espressione di $f(x)$ per $x<0$. In particolare, $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2-0}{h}=0$ e $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=1$. Poiché $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, si conclude che $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ non esiste, e dunque f non è derivabile in $x_0=0$, ovvero non esiste $f'(0)$, ma esistono $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=1$.

Esercizio 4. *Si calcoli la derivata della funzione*

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f:x\mapsto\max\left\{\sqrt{x}-1,1-x\right\}$$

Soluzione La disuguaglianza $\sqrt{x}-1>1-x$ equivale a $\sqrt{x}+x>2$, che è soddisfatta se e solo se $x>1$. Viceversa, $\sqrt{x}+x\leq 2$ per $x\in(0,1]$. Dunque

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{se} \quad x\in(0,1]\\ \sqrt{x}-1 & \text{se} \quad x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Per ogni $x_0>1$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x)=\sqrt{x}-1$ per ogni $x\in I(x_0)$. Dunque $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-1-(\sqrt{x_0}-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, ovvero $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ per ogni $x_0>1$.

Per ogni $x_0\in(0,1)$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x)=1-x$ per ogni $x\in I(x_0)$. Dunque $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-(x_0+h)-(1-x_0)}{h}=-1$, ovvero $f'(x_0)=-1$ per ogni $x_0\in(0,1)$.

Per calcolare $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ è necessario calcolare $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, dato che l'espressione di $f(x)$ per $x>1$ è diversa dall'espressione di $f(x)$ per $x<1$. In particolare, $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-(1+h)}{h}=-1$ e $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$. Poiché $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, si conclude che $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ non esiste, e dunque f non è derivabile in $x_0=1$, ovvero non esiste $f'(1)$, ma esistono $f'_-(1)=-1$, $f'_+(1)=\frac{1}{2}$.

Esercizio 5. *Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a\neq 0$, usando la definizione di derivata si verifichi che la seguente funzione non è derivabile in $x_0=\frac{b}{a}$:*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=|ax-b|$$

Soluzione Risulta che $f(x)=\begin{cases}ax-b & \text{se} \quad ax-b\geq 0\\ b-ax & \text{se} \quad ax-b<0\end{cases}$, e questa funzione è derivabile per ogni x diverso da $\frac{b}{a}$, ma la derivata sinistra e la derivata destra in tal punto sono diverse tra loro. Ad esempio, se $a>0$ allora

$$\begin{aligned}f'_+(\frac{b}{a}) &= \lim_{x\to\frac{b}{a}^+}\frac{f(x)-f(\frac{b}{a})}{x-\frac{b}{a}}=\lim_{x\to\frac{b}{a}^+}\frac{ax-b}{x-\frac{b}{a}}=\lim_{x\to\frac{b}{a}^+}\frac{a(x-\frac{b}{a})}{x-\frac{b}{a}}=a\\ f'_-(\frac{b}{a}) &= \lim_{x\to\frac{b}{a}^-}\frac{f(x)-f(\frac{b}{a})}{x-\frac{b}{a}}=\lim_{x\to\frac{b}{a}^-}\frac{b-ax}{x-\frac{b}{a}}=\lim_{x\to\frac{b}{a}^-}\frac{a(\frac{b}{a}-x)}{x-\frac{b}{a}}=-a\end{aligned}$$

Se invece $a<0$, allora risulta $f'_+(\frac{b}{a})=-a\neq f'_-(\frac{b}{a})=a$.

Esercizio 6. *Si calcoli la derivata di ciascuna delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 5\ln(x)+x(x^3+7)+\frac{3}{x}-\frac{\cos(x)}{4}+\frac{5x^{11/3}+2\sqrt{x}}{x}\\ f_2(x) &= 3(\sin(x))\ln(x)-(3\sin(x)+4e^{5x})6x^7+2(3\sin(-4x)+5)\ln(3+7x)\\ f_3(x) &= 2\frac{\cos(x)}{e^x}+\frac{5\cos(3x)-2\ln(1+6x)}{4x^3}+7\frac{2-3x^6}{3\sqrt{x}-e^{-2x+5}}\\ f_4(x) &= 2(x+4\tan(x))^{7/3}+\log_x 2x-5\sin(\frac{1}{x}+\ln(7-x))+6x^{\sin(x)}\end{aligned}$$

Soluzione

$$f_1'(x)=\frac{5}{x}+4x^3+7-\frac{3}{x^2}+\frac{\sin(x)}{4}+\frac{40}{3}x^{5/3}-\frac{1}{x^{3/2}}$$

$$
\begin{aligned}
f_2'(x) &= 3\left((\cos(x))\ln(x)+(\sin(x))\frac{1}{x}\right)-\left((3\cos(x)+20e^{5x})6x^7+(3\sin(x)+4e^{5x})42x^6\right)\\
&\quad +2\left(-12\cos(-4x)\ln(3+7x)+(3\sin(-4x)+5)\frac{7}{3+7x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= 2\frac{(-\sin(x))e^x-(\cos(x))e^x}{(e^x)^2}+\frac{1}{4}\frac{(-15\sin(3x)-\frac{12}{1+6x})x^3-(5\cos(3x)-2\ln(1+6x))3x^2}{x^6}\\
&\quad +7\frac{-18x^5(3\sqrt{x}-e^{-2x+5})-(\frac{3}{2\sqrt{x}}+2e^{-2x+5})(2-3x^6)}{(3\sqrt{x}-e^{-2x+5})^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= \frac{14}{3}(x+4\tan(x))^{4/3}(1+4(1+(\tan(x))^2))-\frac{\ln 2}{(\ln(x))^2}\frac{1}{x}-5\cos(\frac{1}{x}+\ln(7-x))(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{7-x})\\
&\quad +6e^{\sin(x)\ln(x)}((\cos(x))\ln(x)+(\sin(x))\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

Esercizio 7. *Si calcoli la derivata di ciascuna delle seguenti funzioni:*

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 5x^7-2x^3-9x+4+7\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^2}-11\sqrt[3]{x}+14\sqrt{x^5}+\frac{6}{x}+\frac{9}{\sqrt{x}}-\frac{17}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{4}{x^2}\\
f_2(x) &= \cos(x)-2\sin(x)-3\tan(x)+6(4^x)-11(3/5)^x+7e^x-9\log_2 x-12\ln(x)+7\log_{10} x
\end{aligned}
$$

$$
f_3(x)=(x^2+\ln(3x+\cos(x)))(e^{-x^3+1}+\sin(2x-5))-2(4x^5-7)(6^{2x}+\cos(2-\ln(x)))+x^3e^{2x}\ln(x)
$$

$$
f_4(x)=\frac{8x-5x^3}{4x^2+6}+2\frac{x^6+1}{\ln(x)}-3\frac{4\tan 5x-\frac{3}{x^2}}{6-\sin(x)\cos(x)}+7\frac{3x^{5/4}-8}{(\frac{1}{2})^x-\sqrt{x}}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5(x) &= \sqrt[3]{1-3x}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{\frac{\sin(x)-x}{\cos(x)}}+(\sin(x))^2+\frac{1}{(\sin(3x))^2}\\
&\quad +5e^{-\frac{1}{7}x^2}+\cos\left(8+(3x+1)^2\right)+\ln(e^x+\sin(3x^2))
\end{aligned}
$$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= 35x^6-6x^2-9+\frac{7}{2\sqrt{x}}-\frac{6}{5}x^{-3/5}-\frac{11}{3}x^{-2/3}+35x^{3/2}-\frac{6}{x^2}-\frac{9}{2}x^{-3/2}+\frac{51}{4}x^{-7/4}-\frac{8}{x^3}\\
f_2'(x) &= -\sin(x)-2\cos(x)-3(1+(\tan(x))^2)+6(4^x)\ln(4)-11(3/5)^x\ln(3/5)+7e^x-\frac{9}{x\ln(2)}-\frac{12}{x}+\frac{7}{x\ln(10)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= (2x+\frac{3-\sin(x)}{3x+\cos(x)})(e^{-x^3+1}+\sin(2x-5))+(x^2+\ln(3x+\cos(x)))(-3x^2e^{-x^3+1}+2\cos(2x-5))\\
&\quad -2(20x^4)(6^{2x}+\cos(2-\ln(x)))-2(4x^5-7)(6^{2x}2\ln(6)+\frac{1}{x}\sin(2-\ln(x)))\\
&\quad +3x^2e^{2x}\ln(x)+x^3 2e^{2x}\ln(x)+x^3e^{2x}\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= \frac{(8-15x^2)(4x^2+6)-8x(8x-5x^3)}{(4x^2+6)^2}+2\frac{6x^5\ln(x)-(x^6+1)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\\
&\quad -3\frac{(4(1+(\tan 5x)^2)5+\frac{6}{x^3})(6-\sin(x)\cos(x))-(4\tan 5x-\frac{3}{x^2})(-(\cos(x))^2+(\sin(x))^2)}{(6-\sin(x)\cos(x))^2}\\
&\quad +7\frac{\frac{15}{4}x^{1/4}((\frac{1}{2})^x-\sqrt{x})-(3x^{5/4}-8)((\frac{1}{2})^x\ln(\frac{1}{2})-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{((\frac{1}{2})^x-\sqrt{x})^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f_5'(x) &= \frac{1}{3}(1-3x)^{-2/3}(-3)+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{\frac{(\cos(x)-1)\cos(x)+\sin(x)(\sin(x)-x)}{(\cos(x))^2}}{2\sqrt{\frac{\sin(x)-x}{\cos(x)}}}+2(\sin(x))(\cos(x))-\frac{6\cos(3x)}{(\sin(3x))^3}\\
&\quad -\frac{10}{7}xe^{-\frac{1}{7}x^2}-6(3x+1)\sin\left(8+(3x+1)^2\right)+\frac{e^x+6x\cos(3x^2)}{e^x+\sin(3x^2)}\\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1-\cos(x)-x\sin(x)}{2(\cos(x))^2}\sqrt{\frac{\cos(x)}{\sin(x)-x}}+2(\sin(x))(\cos(x))-\frac{6\cos(3x)}{(\sin(3x))^3}\\
&\quad -\frac{10}{7}xe^{-\frac{1}{7}x^2}-6(3x+1)\sin\left(8+(3x+1)^2\right)+\frac{e^x+6x\cos(3x^2)}{e^x+\sin(3x^2)}
\end{aligned}$$

Esercizio 8. *Si determini il valore del parametro reale k in modo che il grafico di*

$$f_k(x)=\frac{k^2x-k}{2k+x}$$

passi per il punto di coordinate $(1,-2)$, e abbia derivata in $x=1$ uguale al coefficiente angolare della retta di equazione $y=-3x+1$.

Soluzione La funzione deve soddisfare le seguenti due condizioni: il punto di coordinate $(1,-2)$ deve appartenere al grafico della funzione, e la funzione deve avere derivata in $x=1$ uguale a -3.

La condizione che il punto $(-1,2)$ appartenga al grafico equivale a $\frac{k^2-k}{2k+1}=-2$, ovvero $k^2+3k+2=0$, che è soddisfatta se e solo se $k=-1$ o $k=-2$. Inoltre $f_k'(x)=\frac{k^2(2k+x)-(k^2x-k)}{(2k+x)^2}=\frac{2k^3+k}{(2k+x)^2}$, dunque $f_k'(1)=\frac{2k^3+k}{(2k+1)^2}$ e $f_{-1}'(1)=-3$, $f_{-2}'(1)=-2$. Pertanto il valore di k cercato è -1.

Esercizio 9. *Assumendo che f,g,h siano tre funzioni derivabili, si calcolino le derivate di*

$$\ell(x)=f\left(g\left(x\right)h\left(x\right)\right)+g\left(f\left(x\right)h\left(x\right)\right),\qquad m(x)=(\ln(x))^n$$

Soluzione $\ell'(x)=f'\left(g\left(x\right)h\left(x\right)\right)\left(g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\right)+g'\left(f\left(x\right)h\left(x\right)\right)\left(f'(x)h(x)+f(x)h'(x)\right)$; $m'(x)=\frac{n}{x}(\ln(x))^{n-1}$.

Esercizio 10. *Supponendo che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sia una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e $f(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si calcoli la derivata per ciascuna delle seguenti funzioni composte:*

$$f_1(x)=(f(x))^3;\qquad f_2(x)=\cos(2f(x));\qquad f_3(x)=\frac{1}{f(x)}.$$

Soluzione $f_1'(x)=3(f(x))^2f'(x)$; $f_2'(x)=-\sin(2f(x))2f'(x)$; $f_3'(x)=-\frac{1}{(f(x))^2}f'(x)$.

Esercizio 11. *Supponendo che f,g,h siano tre funzioni derivabili in $\mathbb{R}$, con $h(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si calcoli la derivata di $\ell(x)=f(g(x)h(x))+g(\frac{f(x)}{h(x)})$.*

Soluzione $\ell'(x)=f'(g(x)h(x))(g'(x)h(x)+g(x)h'(x))+g'(\frac{f(x)}{h(x)})\frac{f'(x)h(x)-f(x)h'(x)}{(h(x))^2}$.

Esercizio 12. *Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$,*

(a) si individui un punto $(x_0,f(x_0))$ sul grafico di f tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0,f(x_0))$ ha pendenza 1;

(b) si individui un punto $(x_1,f(x_1))$ sul grafico di f tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_1,f(x_1))$ passa per il punto $(0,0)$.

Soluzione (a) La retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0,f(x_0))$ ha pendenza $f'(x_0)$, che è uguale a e^{x_0}. L'equazione $e^{x_0}=1$ ha come unica soluzione $x_0=0$, dunque il punto cercato sul grafico ha coordinate $(0,f(0))=(0,1)$.

(b) La retta tangente al grafico di f nel punto $(x_1,f(x_1))$ ha equazione $y=e^{x_1}+e^{x_1}(x-x_1)$, quindi è necessario cercare x_1 che risolve l'equazione $0=e^{x_1}+e^{x_1}(0-x_1)$, ovvero $0=e^{x_1}(1-x_1)$, che ha come unica soluzione $x_1=1$. Dunque il punto cercato sul grafico ha coordinate $(1,f(1))=(1,e)$.

Esercizio 13. *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=e^x-\ln(1+x)$ nel punto in cui esso interseca l'asse delle y.*

Soluzione Poiché $f(0) = 1$, il punto in cui il grafico di f tocca l'asse delle y ha coordinate $(0, 1)$. Poiché $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ e $f'(0) = 0$, si deduce che $y = 1$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$.

Esercizio 14. *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \cos(x) + \ln(1-x)$ *nel punto in cui esso interseca l'asse delle* y*.*

Soluzione Poiché $f(0) = 1$, il punto in cui il grafico di f tocca l'asse delle y ha coordinate $(0, 1)$. Poiché $f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{1-x}$ e $f'(0) = -1$, si deduce che $y = -x+1$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$.

Esercizio 15. *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto* $(\pi, f(\pi))$*, al grafico della funzione* $f(x) = 2\sin(x) + \ln(x + \sin(x))$*.*

Soluzione Poiché $f(\pi) = \ln(\pi)$ e $f'(x) = 2\cos(x) + \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}$, $f'(\pi) = -2$, si deduce che $y = \ln(\pi) - 2(x-\pi)$, ovvero $y = 2\pi + \ln(\pi) - 2x$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(\pi, f(\pi))$.

Esercizio 16. *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto* $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$*, al grafico della funzione* $f(x) = \cos(x) + \ln(x + \cos(x))$*.*

Soluzione Poiché $f(\frac{\pi}{2}) = \ln(\frac{\pi}{2})$ e $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1-\sin(x)}{x+\cos(x)}$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$, si deduce che $y = \ln(\frac{\pi}{2}) - (x - \frac{\pi}{2})$, cioè $y = \frac{\pi}{2} + \ln(\frac{\pi}{2}) - x$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$.

Esercizio 17. *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \cos(1-e^x) + \sin(1-e^x)$ *nel punto del grafico che ha ascissa* 0*.*

Soluzione Poiché $f(0) = 1$ e $f'(x) = e^x\sin(1-e^x) - e^x\cos(1-e^x)$, $f'(0) = -1$, si deduce che $y = 1-x$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico che ha ascissa 0.

Esercizio 18. *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \tan(x) - e^{x-\frac{\pi}{4}}$ *nel punto del grafico che ha ascissa* $\frac{\pi}{4}$*.*

Soluzione Poiché $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ e $f'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - e^{x-\frac{\pi}{4}}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 1$, si deduce che $y = x - \frac{\pi}{4}$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico che ha ascissa $\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 19. *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = x - \pi/4 - \tan(x)$ *nel punto del grafico che ha ascissa* $\pi/4$*.*

Soluzione Poiché $f(\frac{\pi}{4}) = -1$ e $f'(x) = -(\tan(x))^2$, $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$, si deduce che $y = \frac{\pi}{4} - 1 - x$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico che ha ascissa $\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 20. *Per la seguente funzione, dato* x_0*, si ricavi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto* $(x_0, f(x_0))$*:*

$$f(x) = \cos(x) + \ln(x + 3\sin(x) - \frac{\pi}{2}), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) = \frac{10}{x} - 2$*,* $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*, nel punto in cui esso interseca l'asse* x*.*

Soluzione Poiché $f(\frac{\pi}{2}) = \ln(3)$ e $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{x+3\sin(x)-\frac{\pi}{2}}(1 + 3\cos(x))$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{3}$, si deduce che $y = \ln(3) - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{2})$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$.

Il punto $(x_0, g(x_0))$ in cui il grafico di g interseca l'asse x si ricava risolvendo l'equazione $\frac{10}{x} - 2 = 0$, e quindi $x_0 = 5$. Poiché $g'(x) = -\frac{10}{x^2}$, $g'(5) = -\frac{2}{5}$, si deduce che $y = -\frac{2}{5}(x-5)$, cioè $y = 2 - \frac{2}{5}x$, è l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto in cui esso interseca l'asse x.

Esercizio 21. *Per ciascuna delle seguenti funzioni, dato* x_0*, si ricavi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto* $(x_0, f(x_0))$*:*

(a) $f(x) = \sin(x-e) + \ln(x), \quad x_0 = e;$ *(b)* $f(x) = e^{x+\frac{\pi}{4}} - \tan(x), \quad x_0 = -\frac{\pi}{4};$

(c) $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})\sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$ *(d)* $f(x) = 5e^{x-3+2x^2}x^3 - 2, \quad x_0 = 1.$

(e) $f(x) = \cos(1-e^x) + (e^x + \tan(x))^2, \quad x_0 = 0$

Soluzione (a) $f(e) = 1$, $f'(x) = \cos(x-e) + \frac{1}{x}$, $f'(e) = 1 + \frac{1}{e}$, quindi $y = 1 + (1+\frac{1}{e})(x-e)$, cioè $y = -e + (1+\frac{1}{e})x$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(e, f(e))$.

(b) $f(-\frac{\pi}{4}) = 2$, $f'(x) = e^{x+\frac{\pi}{4}} - 1 - (\tan(x))^2$, $f'(-\frac{\pi}{4}) = -1$, quindi $y = 2-(x+\frac{\pi}{4})$, cioè $y = 2 - \frac{\pi}{4} - x$, è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$.

(c) $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'(x) = \sin(x) + (x - \frac{\pi}{2})\cos(x)$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$, quindi $y = x - \frac{\pi}{2}$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$.

(d) $f(1) = 3$, $f'(x) = 5(e^{x-3+2x^2}(1+4x)x^3 + e^{x-3+2x^2}3x^2)$, $f'(1) = 40$, quindi $y = 3 + 40(x-1)$, cioè $y = 40x - 37$, è l'equazione della retta tangente al grafico delle funzione nel punto $(1, f(1))$.

(e) $f(0) = 2$, $f'(x) = (-\sin(1-e^x))(-e^x) + 2(e^x + \tan(x))(e^x + 1 + (\tan(x))^2)$, $f'(0) = 4$, quindi $y = 2 + 4x$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.

Esercizio 22. *Si dimostri che la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e che la sua derivata non è continua in $\mathbb{R}$:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

Soluzione Per ogni $x_0 \neq 0$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ per ogni $x \in I(x_0)$. Dunque $f'(x_0) = 2x_0 \sin \frac{1}{x_0} - \cos \frac{1}{x_0}$ per ogni $x_0 \neq 0$. Riguardo a $f'(0)$, calcoliamo $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}(h \sin \frac{1}{h}) = 0$. Quindi f è derivabile in $\mathbb{R}$, cioè $f'(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma f' non è continua in $x_0 = 0$ in quanto $\lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ non esiste, dunque $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.

Esercizio 23. *Si calcoli la derivata della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f : x \mapsto \begin{cases} -1 & se \quad x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ +1 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Soluzione Per ogni $x_0 < 0$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x) = -1$ per ogni $x \in I(x_0)$. Dunque $f'(x_0) = 0$ per ogni $x_0 < 0$. Per ogni $x_0 > 0$ esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in I(x_0)$. Dunque $f'(x_0) = 0$ per ogni $x_0 > 0$. Per finire, è immediato che $f'(0)$ non esiste in quanto f non è continua nel punto 0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$. Quindi

$$f' : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 24. *Per ciascuna delle seguenti funzioni (ognuna è definita in $\mathbb{R}$) si individuino i punti in cui la funzione è non continua e i punti in cui la funzione è non derivabile:*

$$\text{(a) } f(x) = x|x|; \qquad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & se\ x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases};$$

$$\text{(c) } f(x) = |x-1|e^{-x^2+2x}; \qquad \text{(d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & se\ x \leq 2 \\ -x^2 + \frac{9}{2}x - 2 & se\ x > 2 \end{cases}.$$

Soluzione (a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, quindi è immediato che f è continua, e anche derivabile, in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ poiché le funzioni x^2 e $-x^2$ sono funzioni derivabili. Riguardo alla continuità nel punto 0, risulta che (i) $f(0) = 0$; (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Poiché $\lim_{x\to 0} f(x)$ coincide con $f(0)$, si conclude che f è continua nel punto 0. Riguardo alla derivabilità nel punto 0, risulta che $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-h)^2}{h} = 0$ e $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h)^2}{h} = 0$, dunque $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$, cioè f è derivabile anche nel punto 0, con $f'(0) = 0$. Pertanto non esistono punti in cui f non è derivabile, il che implica che non esistono punti in cui f non è continua (per il teorema 8.1).

(b) E' immediato che f è continua, e anche derivabile, in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ poiché $-x^2 + 4$ e $-\frac{1}{x}$ sono funzioni derivabili. Riguardo alla continuità nel punto 1, risulta che (i) $f(1) = 3$; (ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2 + 4) = 3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-\frac{1}{x}) = -1$, dunque $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste. Pertanto f non è continua nel punto 1, e quindi non è nemmeno derivabile in tale punto.

(c) $f(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x^2+2x} & \text{se } x < 1 \\ (x-1)e^{-x^2+2x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, quindi è immediato che f è continua, e anche derivabile, in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ poiché $(1-x)e^{-x^2+2x}$ e $(x-1)e^{-x^2+2x}$ sono funzioni derivabili (sono il prodotto e la composizione di funzioni derivabili). Riguardo alla continuità nel punto 1, risulta che (i) $f(1) = 0$; (ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)e^{-x^2+2x} = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1)e^{-x^2+2x} = 0$, dunque $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Poiché $\lim_{x\to 1} f(x)$ coincide con $f(1)$, si conclude che f è continua nel punto 0. Riguardo alla derivabilità nel punto 1, risulta che

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1-(1+h))e^{-(1+h)^2+2(1+h)}}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-e^{1-h^2}) = -e \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h-1)e^{-(1+h)^2+2(1+h)}}{h} = \lim_{h\to 0^+}(e^{1-h^2}) = e
\end{aligned}$$

dunque $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ non esiste, cioè f non è derivabile nel punto 1.

(d) E' immediato che f è continua, e anche derivabile, in $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ poiché $\frac{1}{2}x+2$ e $-x^2+\frac{9}{2}x-2$ sono funzioni derivabili. Riguardo alla continuità nel punto 2, risulta che (i) $f(2) = 3$; (ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(\frac{1}{2}x+2) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(-x^2+\frac{9}{2}x-2) = 3$, dunque $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$. Pertanto f è continua nel punto 2. Riguardo alla derivabilità nel punto 2, risulta che $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(2+h)+2-3}{h} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-(2+h)^2+\frac{9}{2}(2+h)-2-3}{h} = \frac{1}{2}$: dunque $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{1}{2}$, cioè f è derivabile nel punto 2, con $f'(2) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 25. *Data*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & se\ x \le 1 \\ -x^2+3x & se\ x \in (1,2) \\ \frac{4}{x} & se\ x \ge 2 \end{cases}$$

si calcolino $f'_+(1), f'_-(1)$ e si dica se f è derivabile in $x = 1$; si calcolino $f'_+(2), f'_-(2)$ e si dica se f è derivabile in $x = 2$; f è derivabile in $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$?

Soluzione E' immediato che f è derivabile in $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$ perchè 2, $-x^2+3x$, $\frac{4}{x}$ sono funzioni derivabili. La verifica del fatto che f è continua nei punti 1 e 2 è lasciata al lettore. Riguardo alla derivabilità nel punto 1, $f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2-2}{h} = 0$, $f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)^2+3(1+h)-2}{h} = 1$, quindi f non è derivabile nel punto 1 perchè $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ non esiste. Riguardo alla derivabilità nel punto 2, $f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(2+h)^2+3(2+h)-2}{h} = -1$, $f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{4}{2+h}-2}{h} = -1$, quindi $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -1$ e dunque f è derivabile nel punto 2, con $f'(2) = -1$.

Esercizio 26. *Per ciascuna delle seguenti funzioni (ognuna è definita in $\mathbb{R}$) si individuino, se esistono, i valori dei parametri a e b che rendono la funzione derivabile in $\mathbb{R}$:*

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} e^{bx} & se\ x < 2 \\ ax & se\ x \ge 2 \end{cases}; \qquad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} a\ln(1+x^2) & se\ x < 3 \\ \frac{b}{x} & se\ x \ge 3 \end{cases}.$$

Soluzione (a) E' immediato che f è derivabile in $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ poiché e^{bx} e ax sono funzioni derivabili. Affinché f sia derivabile nel punto 2 è necessario che f sia continua in tale punto. A questo riguardo si noti che $f(2) = 2a$, $\lim_{x\to 2^-}(e^{bx}) = e^{2b}$, $\lim_{x\to 2^+}(ax) = 2a$, quindi f è continua in 2 se e solo se $2a = e^{2b}$. Riguardo alla derivabilità nel punto 2, si noti che, poiché f è continua nel punto 2, si ha $2a = e^{2b}$ e dunque $f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{b(2+h)}-e^{2b}}{h} = \lim_{h\to 0^-} e^{2b}\frac{e^{bh}-1}{h} = be^{2b}$, $f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(2+h)-2a}{h} = a$. Dunque f è derivabile nel punto 2 se e solo se

$$\begin{aligned} 2a &= e^{2b} \\ a &= be^{2b} \end{aligned}$$

Sostituendo $a = be^{2b}$ nella prima equazione si ricava $2be^{2b} = e^{2b}$, e dunque $b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}e$. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $a = \frac{1}{2}e, b = \frac{1}{2}$.

(b) E' immediato che f è derivabile in $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ poiché $a\ln(1+x^2)$ e $\frac{b}{x}$ sono funzioni derivabili. Affinché f sia derivabile nel punto 3, è necessario che f sia continua in tale punto. A questo riguardo si noti che $f(3) = \frac{b}{3}$, $\lim_{x\to 3^-}(a\ln(1+x^2)) = a\ln(10)$, $\lim_{x\to 3^+}(\frac{b}{x}) = \frac{b}{3}$, quindi f è continua in 3 se e solo se $a\ln(10) = \frac{b}{3}$. Riguardo alla derivabilità nel punto 3, si noti che, poiché f è continua nel punto 3, si ha $a\ln(10) = \frac{b}{3}$ e dunque $f'_-(3) = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\ln(1+(3+h)^2)-a\ln(10)}{h} = \lim_{h\to 0^-} a\frac{\ln(\frac{1+(3+h)^2}{10})}{h} =$

$\lim_{h\to 0^-} a\frac{\ln(1+\frac{3}{5}h+\frac{h^2}{10})}{\frac{3}{5}h+\frac{h^2}{10}}\frac{\frac{3}{5}h+\frac{h^2}{10}}{h} = \lim_{h\to 0^-} a(\frac{3}{5}+\frac{h}{10}) = \frac{3}{5}a$, $f'_+(3) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{b}{3+h}-\frac{b}{3}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-b}{3(3+h)} = -\frac{b}{9}$. Dunque f è derivabile nel punto 3 se e solo se

$$\begin{aligned} a\ln(10) &= \frac{b}{3} \\ \frac{3}{5}a &= -\frac{b}{9} \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $b = -\frac{27}{5}a$, e utilizzando la prima equazione si ricava $a\ln(10) = -\frac{9}{5}a$, e quindi $a = 0$, $b = 0$. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 0, b = 0$.

Esercizio 27. *Date*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & se\ x \leq 1 \\ e^x + 4 & se\ x > 1 \end{cases} \qquad e \qquad g(x) = x^3$$

si consideri la funzione composta $h = g \circ f$ e si calcolino $h(0)$ e $h(2)$. Si può affermare che esiste almeno un x_0 in $(0,2)$ tale che $h(x_0) = 0$? Si calcoli $h'(2)$.

Soluzione Poiché $f(0) = -1$, si deduce che $h(0) = g(f(0)) = g(-1) = -1$; poiché $f(2) = 4 + e^2$, si deduce che $h(2) = g(f(2)) = g(4+e^2) = (4+e^2)^3$. Riguardo all'esistenza di almeno un $x_0 \in (0,2)$ tale che $h(x_0) = 0$, non è possibile applicare il teorema degli zeri in quanto h non è continua nel punto 1: $h(1) = g(f(1)) = g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$ ma $\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} g(f(x)) = \lim_{x\to 1^+}(e^x+4)^3 = (4+e)^3$.[1] Per $x > 1$, $h'(x) = 3(f(x))^2 f'(x) = 3(4+e^x)^2 e^x$, dunque $h'(2) = 3(4+e^2)^2 e^2$.

Esercizio 28. *Si consideri una funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ che è continua in $[-1,1]$, è derivabile in $(-1,1)$, e tale che $f(-1) = -1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$. Si dimostri che esiste almeno un punto x_0 in $(-1,1)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

Soluzione Il teorema di Weierstass implica che esiste almeno un punto di max globale x_M per f, e poiché $f(-1) < f(0)$, $f(1) < f(0)$, si deduce che $x_M \neq -1$ e $x_M \neq 1$, dunque necessariamente $x_M \in (-1,1)$, ovvero x_M è punto interno per il dominio di f.[2] Poiché x_M è anche un punto di max locale, il teorema 8.4 implica che $f'(x_M) = 0$.

Esercizio 29. *Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per la quale un punto x_0 è punto di min locale, si dimostri usando la definizione che x_0 è punto di max locale per $g(x) = e^{-3f(x)}$.*

Soluzione Poiché x_0 è un punto di min locale per f, esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in I(x_0)$. Quindi per ogni $x \in I(x_0)$ vale $-3f(x_0) \geq -3f(x)$, e quindi $e^{-3f(x_0)} \geq e^{-3f(x)}$, cioè $g(x_0) \geq g(x)$: questo significa che x_0 è un punto di max locale per g.

Esercizio 30. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si individuino un punto di max globale e un punto di min globale:*

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f : [-2,3] \to \mathbb{R}; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad f : [\frac{3}{2}, 2] \to \mathbb{R}.$$

Soluzione Ciascuna di queste funzioni è continua e definita in un intervallo chiuso e limitato, quindi (grazie al teorema di Weierstrass) certamente esistono almeno un punto di max globale e almeno un punto di min globale. Poiché ciascuna di queste funzioni è derivabile nell'interno del proprio dominio, ogni punto di max/min globale si trova nell'insieme $S = \{$estremi dell'intervallo$\} \cup \{$punti critici della funzione nell'intervallo$\}$.

(a) Poiché $f'(x) = \frac{1+x^2-2xx}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, i punti critici di f sono -1 e 1, quindi $S = \{-2,-1,1,3\}$ e $f(-2) = -\frac{2}{5}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{3}{10}$. Pertanto $x_M = 1$, $x_m = -1$.

(b) Poiché $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$, l'unico punto critico di f è 1, ma esso non appartiene all'intervallo $[\frac{3}{2}, 2]$, quindi $S = \{\frac{3}{2}, 2\}$ e $f(\frac{3}{2}) = \frac{e^{3/2}}{3/2}$, $f(2) = \frac{e^2}{2}$. Poiché $\frac{e^{3/2}}{3/2} < \frac{e^2}{2}$,[3] si conclude che $x_m = \frac{3}{2}$, $x_M = 2$.

[1] In realta' si puo' dimostrare che non esiste $x_0 \in (0,2)$ tale che $h(x_0) = 0$ perche' $h(x) < 0$ per ogni $x \in (0,1]$ e $h(x) > 0$ per ogni $x \in (1,2)$.

[2] Il teorema di Weierstass implica anche che esista almeno un punto di min globale, ma questo non è utile nel dimostrare quanto richiesto perche' non possiamo escludere che il punto di min globale sia -1, e -1 non è punto interno per il dominio di f, quindi non e' possibile applicare il teorema di Fermat.

[3] Per arrivare a tale conclusione si puo' ragionare come segue: $\frac{e^{3/2}}{3/2} < \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3/2} < \frac{e^2}{e^{3/2}} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < e^{1/2} \Leftrightarrow \frac{16}{9} < e$: l'ultima disuguaglianza è vera in quanto $\frac{16}{9} < 2$ e $2 < e$.

Esercizio 31. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si individuino un punto di max globale e un punto di min globale:*

$$(a)\ f(x) = 2x^3 - 3x^2, \quad f : [-\frac{1}{3}, 2] \to \mathbb{R}; \qquad (b)\ f(x) = x^3 + 12\,|x| + 5, \quad f : [-3, 2] \to \mathbb{R};$$
$$(c)\ f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, \quad f : [-4, -1] \to \mathbb{R}$$

Soluzione Ciascuna di queste funzioni è continua e definita in un intervallo chiuso e limitato, quindi (grazie al teorema di Weierstrass) certamente esistono almeno un punto di max globale e almeno un punto di min globale, e si trovano nell'insieme $S = \{$estremi dell'intervallo$\} \cup \{$punti critici della funzione nell'intervallo$\}$.

(a) Poiché $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, i punti critici di f sono 0 e 1, quindi $S = \{-\frac{1}{3}, 0, 1, 2\}$ e $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{11}{27}$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 4$. Pertanto $x_M = 2$, $x_m = 1$.

(b) Poiché $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 5 & \text{se } x \in [-3, 0) \\ x^3 + 12x + 5 & \text{se } x \in [0, 2] \end{cases}$, risulta che $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 & \text{se } x \in (-3, 0) \\ 3x^3 + 12 & \text{se } x \in (0, 2) \end{cases}$ (si noti che f non è derivabile in 0) e l'unico punto critico è -2. Tuttavia dobbiamo tenere in considerazione anche il punto 0, dato che f non è derivabile in 0. Dunque $S = \{-3, -2, 0, 2\}$ e $f(-3) = 14$, $f(-2) = 21$, $f(0) = 5$, $f(2) = 37$. Pertanto $x_M = 2$, $x_m = 0$.

(c) Poiché $f'(x) = -x - \frac{8}{x^2}$, i punti critici di f risolvono l'equazione $-x - \frac{8}{x^2} = 0$, ovvero $-x^3 - 8 = 0$, e l'unica soluzione è $x = -2$. Quindi $S = \{-4, -2, -1\}$ e $f(-4) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Pertanto $x_M = -2$, $x_m = -4$.

Esercizio 32. *Si consideri un'impresa che produce un solo tipo di bene. Il ricavo totale ottenuto dall'impresa vendendo una quantità $q \geq 0$ del bene è $R(q) = 7q$; il costo che l'impresa sostiene per produrre la quantità q del bene è $C(q) = q^2 + q + 1$. L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione $\pi(q) = R(q) - C(q)$. Si assuma che la quantità massima che l'impresa può produrre sia pari a 5.*

Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile stabilire che esiste una soluzione prima di cercare la soluzione stessa. Indipendentemente dalla risposta alla domanda precedente, si individui un punto di max globale per la funzione π.

Soluzione Il problema di massimizzazione consiste nel massimizzare $\pi(q) = 7q - (q^2 + q + 1)$, $\pi : [0, 5] \to \mathbb{R}$. Poiché π è una funzione continua e $[0, 5]$ è un intervallo chiuso e limitato, è possibile applicare il teorema di Weierstrass per stabilire l'esistenza di un punto di max globale per π. Poiché $\pi'(q) = 7 - 2q - 1$, l'unico punto critico è 3, e dunque $S = \{0, 3, 5\}$ e $\pi(0) = -1$, $\pi(3) = 8$, $\pi(5) = 4$. Quindi il punto di max globale è $q = 3$.

Esercizio 33. *Si risolva il problema precedente assumendo che le funzioni R e C siano tali che $R(q) = \frac{q}{1+2q}$, $C(q) = \ln(1 + \frac{q}{8})$, e che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 4.*

Soluzione Il problema di massimizzazione consiste nel massimizzare $\pi(q) = \frac{q}{1+2q} - \ln(1 + \frac{q}{8})$, $\pi : [0, 4] \to \mathbb{R}$. Poiché π è una funzione continua e $[0, 4]$ è un intervallo chiuso e limitato, è possibile applicare il teorema di Weierstrass per stabilire l'esistenza di un punto di max globale per π. Poiché $\pi'(q) = \frac{1}{(1+2q)^2} - \frac{1}{q+8}$, l'unico punto critico risolve l'equazione $\frac{1}{(1+2q)^2} = \frac{1}{q+8}$, ovvero $q + 8 = (1 + 2q)^2$, e l'unica soluzione in $[0, 4]$ è 1. Dunque $S = \{0, 1, 4\}$ e $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = \frac{1}{3} - \ln(\frac{9}{8})$, $\pi(4) = \frac{4}{9} - \ln(\frac{3}{2})$, quindi il punto di max globale è $q = 1$.[4]

Esercizio 34. *Un'impresa deve fabbricare 17 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 (una fabbrica in Toscana) e l'impianto 2 (una fabbrica in Molise). Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 1, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 1 è $4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1}$. Con $x_2 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 2, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 2 è $6x_2$. L'impresa vuole scegliere x_1, x_2 tali che $x_1 + x_2 = 17$, in modo da minimizzare il costo totale, ovvero*

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1 + x_1} + 6x_2$$

[4] Si noti che $\frac{1}{3} - \ln\frac{9}{8} > \frac{4}{9} - \ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{9}{8} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \ln\frac{24}{18} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \ln\frac{4}{3} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 4 > 3e^{1/9}$; poiché $e^{1/5} > e^{1/9}$, è sufficiente dimostrare che $4 > 3e^{1/5}$, il che equivale a $4^5 > 3^5 e$, e questa ultima disugualianza è vera perche' (i) $4^5 = 1024$; (ii) $e < 3$, dunque $3^5 e < 3^6 = 729$. Si noti inoltre che $\frac{1}{3} - \ln\frac{9}{8} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \ln\frac{9}{8} \Leftrightarrow e^{1/3} > \frac{9}{8} \Leftrightarrow e > \frac{9^3}{8^3} \Leftrightarrow 8^3 e > 9^3$, e $8^3 e > 8^3 \cdot 2 = 1024$, $9^3 = 729$.

Si noti che sostituendo x_2 con $17-x_1$ è possibile scrivere il costo totale come funzione della sola variabile x_1.

Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1; è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione? Indipendentemente dalla risposta alla domanda precedente, si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

Soluzione Sostituendo x_2 con $17-x_1$ si deduce che il costo totale è uguale a $4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1} + 6(17-x_1) = 102 - 2x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1}$, che indichiamo con $f(x_1)$, $f : [0,17] \to \mathbb{R}$. Poiché f è continua e $[0,17]$ è un intervallo chiuso e limitato, si deduce che esiste un punto di min globale per f. Per individuare x_m utilizziamo $f'(x_1) = -2 + 18\frac{1}{(1+x_1)^2}$ e notiamo che l'unico punto critico di f in $[0,17]$ è 2, dunque $S = \{0,2,17\}$ e $f(0) = 102$, $f(2) = 110$, $f(17) = 85$. Pertanto $x_m = 17$.

Esercizio 35. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, si dimostri senza calcolare f' che esistono almeno tre punti critici per f.*

Soluzione E' immediato che f è derivabile in $\mathbb{R}$, poiché è il prodotto di funzioni derivabili, e che $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$. Pertanto è possibile applicare il teorema di Rolle a f nell'intervallo $[1,2]$ e concludere che esiste almeno un $x_0 \in (1,2)$ tale che $f'(x_0) = 0$, cioè esiste un punto critico per f in $(1,2)$.[5] E' possibile ragionare allo stesso modo per l'intervallo $[2,3]$ e per l'intervallo $[3,4]$ e concludere che esiste almeno un $x_1 \in (2,3)$ tale che $f'(x_1) = 0$, ed esiste almeno un $x_2 \in (3,4)$ tale che $f'(x_2) = 0$. Pertanto esistono almeno tre punti in cui f' si annulla.

Esercizio 36. *Si consideri la funzione $f : [0,e] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & se\ x \in [0,1) \\ \ln(x) & se\ x \in [1,e] \end{cases}$$

e si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Si trovino poi tutti i punti la cui esistenza è garantita dal teorema di Rolle.

Soluzione E' immediato che $f(0) = 1$, $f(e) = 1$, e che f è continua in $[0,1) \cup (1,e]$, e differenziabile in $(0,1) \cup (1,e)$ poiché $2x^2 - 3x + 1$ e $\ln(x)$ sono funzioni differenziabili. Riguardo alla derivabilità nel punto 1, notiamo che (i) $f(1) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x^2 - 3x + 1) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0$, dunque f è continua nel punto 1; (ii) $f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1}{h} = \lim_{h\to 0^-}(2h+1) = 1$, $f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Pertanto f è derivabile anche nel punto 1, e quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Questo implica che esista almeno un $x_0 \in (0,e)$ tale che $f'(x_0) = 0$. Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [1,e)$, si deduce che $x_0 \notin [1,e)$, ma $x_0 \in (0,1)$, e quindi $4x_0 - 3 = 0$, ovvero $x_0 = \frac{3}{4}$.

Esercizio 37. *Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) \geq a > 0$ per ogni x. Dato un arbitrario $x > 0$, si applichi il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[0,x]$. Si dimostri di conseguenza che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

Soluzione Applicando il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[0,x]$ (poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$, f è anche derivabile in $(0,x)$, e inoltre è continua in $[0,x]$), si deduce che esiste almeno un $x_0 \in (0,x)$ tale che $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(x_0)$, e dunque $f(x) - f(0) = f'(x_0)x \geq ax$, ovvero $f(x) - f(0) \geq ax$ per ogni $x > 0$. Dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq f(0) + \lim_{x\to+\infty} ax = +\infty$.

Esercizio 38. *Data $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$, e dati x_1, x_2 in $(0,+\infty)$ con $x_1 < x_2$, si applichi il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1,x_2]$ e si provi che*

$$\frac{1}{x_2}(x_2 - x_1) < \ln(x_2) - \ln(x_1) < \frac{1}{x_1}(x_2 - x_1)$$

Soluzione Applicando il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1,x_2]$ (f è derivabile in $(0,+\infty)$, dunque f è anche derivabile in (x_1,x_2), e f è continua in $[x_1,x_2]$) si deduce che esiste almeno un $x_0 \in (x_1,x_2)$ tale che $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0)$, ovvero $\frac{\ln(x_2)-\ln(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{x_0}$. Poiché $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{x_1}$, si deduce che $\frac{1}{x_2} < \frac{\ln(x_2)-\ln(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{1}{x_1}$, e dunque $\frac{1}{x_2}(x_2 - x_1) < \ln(x_2) - \ln(x_1) < \frac{1}{x_1}(x_2 - x_1)$.

[5] In particolare, poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$, è ovvio che f è derivabile in $(1,2)$. Il fatto che f sia derivabile in $\mathbb{R}$ implica anche che f sia continua in $\mathbb{R}$, e dunque continua in $[1,2]$.

Esercizio 39. *Data* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = \sin(x)$*, si applichi il teorema di Lagrange a* f *nell'intervallo* $[x_1, x_2]$*, con* $x_1 < x_2$*, e si dimostri che* $|\sin(x_2) - \sin(x_1)| \leq x_2 - x_1$*.*

Soluzione Applicando il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$ (f è derivabile in $\mathbb{R}$, dunque f è anche derivabile in (x_1, x_2), e f è continua in $[x_1, x_2]$) si deduce che esiste almeno un $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{\sin(x_2)-\sin(x_1)}{x_2-x_1} = \cos(x_0)$, ovvero $\sin(x_2) - \sin(x_1) = (\cos(x_0))(x_2 - x_1)$, e dunque $|\sin(x_2) - \sin(x_1)| = |\cos(x_0)|(x_2 - x_1) \leq x_2 - x_1$.

Esercizio 40. *Data* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = e^x$*, e dati* x_1, x_2 *tali che* $1 < x_1 < x_2$*, si applichi il teorema di Lagrange a* f *nell'intervallo* $[x_1, x_2]$*, e si provi che* $e^{x_2} - e^{x_1} > e(x_2 - x_1)$*.*

Soluzione Applicando il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$ si deduce che esiste almeno un $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1} = e^{x_0}$, e $e^{x_0} > e^{x_1} > e^1 = e$, dunque $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1} > e$, ovvero $e^{x_2} - e^{x_1} > e(x_2 - x_1)$.

Esercizio 41. *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ *è monotona strettamente decrescente?*

a) $(0, 1)$*;* *b)* $(\frac{1}{2}, 2)$*;* *c)* $(1, e)$*;* *d)* $(3, +\infty)$

Soluzione Poiché $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, risulta che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, e dunque f è monotona strettamente decrescente in $(0, 1)$. La risposta giusta è a.

Esercizio 42. *Data* $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}$*, si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

a) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è strettamente decrescente.*

b) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è strettamente crescente.*

c) Se $f(x) < 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è strettamente crescente.*

d) Se $f(x) < 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è strettamente decrescente.*

Soluzione L'affermazione a è vera. Il motivo è che se x_1, x_2 sono in A e tali che $x_1 < x_2$, allora $0 < f(x_1) < f(x_2)$ e dunque $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ (perché la funzione $\frac{1}{x}$ è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$), ovvero $g(x_1) > g(x_2)$. Poiché a è vera, l'affermazione b è falsa considerando la funzione $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

L'affermazione d è vera. Il motivo è che se x_1, x_2 sono in A e tali che $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2) < 0$ e dunque $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$, ovvero $g(x_1) > g(x_2)$. Poiché d è vera, L'affermazione c è falsa considerando la funzione $f(x) = -e^{-x}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esercizio 43. *Data* $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}$*, si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

a) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = \ln(f(x))$ *è strettamente decrescente.*

b) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = \ln(f(x))$ *è strettamente crescente.*

c) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = \ln(1/f(x))$ *è strettamente crescente.*

d) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è strettamente crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = \ln(1/f(x))$ *è strettamente decrescente.*

Soluzione L'affermazione b è vera. Il motivo è che se x_1, x_2 sono in A e tali che $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$ e dunque $\ln(f(x_1)) < \ln(f(x_2))$ (perché $\ln(x)$ è una funzione strettamente crescente), ovvero $g(x_1) < g(x_2)$. Poiché b è vera, l'affermazione a è falsa considerando la funzione $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

L'affermazione d è vera. Il motivo è che se x_1, x_2 sono in A e tali che $x_1 < x_2$, allora $0 < f(x_1) < f(x_2)$ e dunque $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$, quindi $\ln(\frac{1}{f(x_1)}) > \ln(\frac{1}{f(x_2)})$, ovvero $g(x_1) > g(x_2)$. Poiché d è vera, l'affermazione c è falsa considerando la funzione $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esercizio 44. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = e^{2x} - 3x$ è monotona strettamente crescente?*

$$a)\ (0, \ln(\frac{3}{2})); \qquad b)\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \qquad c)\ (0,1); \qquad d)\ (1,2)$$

Soluzione Poiché $f'(x) = 2e^{2x} - 3$, risulta che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}), +\infty)$, dunque f è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}), +\infty)$, e in particolare nell'intervallo $(1,2)$, che è un sottoinsieme di $(\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}), +\infty)$. La risposta giusta è d.

Esercizio 45. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = 2x - e^{x+1}$ è monotona strettamente crescente?*

$$a)\ (-1,1); \qquad b)\ (-\frac{1}{2}, 0); \qquad c)\ (-1,0); \qquad d)\ (-2,-1)$$

Soluzione Poiché $f'(x) = 2 - e^{x+1}$, risulta che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1 + \ln(2))$, dunque f è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -1+\ln(2))$, e in particolare nell'intervallo $(-2,-1)$, che è un sottoinsieme di $(-\infty, -1 + \ln(2))$. La risposta giusta è d.

Esercizio 46. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$ è monotona strettamente decrescente?*

$$a)\ (-\infty, +\infty); \qquad b)\ (-\infty, 0); \qquad c)\ (0, +\infty); \qquad d)\ (-3,3)$$

Soluzione Poiché $f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x} = 3e^{-3x}(e^{6x} - 1)$, risulta che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$, dunque f è monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$. La risposta giusta è b.

Esercizio 47. *Siano date tre funzioni f, g, h tali che*

$$f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{x-2},$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è derivabile in } \mathbb{R} \text{ e tale che } g'(y) > 0,\ g''(y) > 0 \text{ per ogni } y \in \mathbb{R}, \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$$

e

$$h : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = (g \circ f)(x).$$

a. si studi la monotonia di h e si dica se per h esiste un punto di massimo globale;
b. si studi la concavità/convessità di h.

Soluzione La funzione h è tale che $h(x) = g(f(x)) = g(\frac{x+1}{x-2})$, quindi $h'(x) = g'(\frac{x+1}{x-2})\frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}g'(\frac{x+1}{x-2}) < 0$. Poiché $h'(x) < 0$ per ogni $x \in (2, +\infty)$, la funzione h è strettamente decrescente su tutto il proprio dominio. Poiché $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$, si deduce che $\lim_{x \to 2^+} h(x) = +\infty$, dunque non esiste alcun punto di massimo globale per h.

La derivata seconda di h è $h''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}g'(\frac{x+1}{x-2}) + \frac{9}{(x-2)^4}g''(\frac{x+1}{x-2})$ ed è positiva per ogni $x \in (2, +\infty)$, dunque h è convessa in tutto il proprio dominio.

Esercizio 48. *Si determinino, se esistono, i punti di minimo globale e i punti di massimo globale della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} + x\cos(x) - \sin(x).$$

Soluzione Poiché $-|x| \leq x\cos(x) \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che (i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e dunque non esiste alcun punto di minimo globale per f; (ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e dunque non esiste alcun punto di massimo globale per f.

Esercizio 49. *Sia $f(x) = \cos(\ln(x))$ definita nel proprio insieme di definizione. Si determinino i punti di massimo relativo per f.*

Soluzione L'insieme di definizione di f è $(0, +\infty)$, e $f'(x) = -\sin(\ln(x))\frac{1}{x}$, dunque i punti critici di f sono gli x tali che $\ln(x)$ è un multiplo di π, ovvero gli x tali che $\ln(x) = k\pi$ al variare di k in $\mathbb{Z}$, ovvero $x = e^{k\pi}$ al variare di k in $\mathbb{Z}$. Poiché $f''(x) = \frac{\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{x^2}$, si deduce che se $x = e^{k\pi}$ con k dispari, allora $f''(x) = \frac{1}{(e^{k\pi})^2} > 0$, quindi x non è un punto di max relativo per f (è punto di minimo relativo). Se invece $x = e^{k\pi}$ con k pari, allora $f''(x) = -\frac{1}{(e^{k\pi})^2} < 0$, e quindi x è un punto di max relativo per f. L'insieme dei punti di max relativo per f è pertanto $\{x \in \mathbb{R} : x = e^{k\pi}$ al variare di k pari in $\mathbb{Z}\}$. Ovviamente, questo è l'insieme dei punti nei quali f ha valore 1.

Esercizio 50. *Sia $f(x) = \sin(e^x)$ definita nel proprio insieme di definizione. Si determinino i punti di minimo relativo per f.*

Soluzione L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$, e $f'(x) = e^x \cos(e^x)$, dunque i punti critici di f sono gli x tali che $e^x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ al variare di k in $\mathbb{N} \cup \{0\}$,[6] ovvero $x = \ln(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ al variare di k in $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Poiché $f''(x) = -e^{2x} \sin(e^x) + e^x \cos(e^x)$, se $x = \ln(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ con k pari allora $f''(x) = -e^{2x} < 0$ e dunque x non e' un punto di min relativo per f (è un punto di max relativo per f); se $x = \ln(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ con k dispari allora $f''(x) = e^{2x} > 0$ e x è un punto di min relativo per f. L'insieme dei punti di min relativo per f è pertanto $\{x \in \mathbb{R} : x = \ln(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ al variare di k dispari in $\mathbb{N}\}$. Ovviamente, questo è l'insieme dei punti nei quali f ha valore -1.

Esercizio 51. *Si individuino i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$$

Soluzione Possiamo utilizzare due metodi per individuare i punti di massimo locale e i punti di minimo locale di f.

Il primo metodo si basa sul segno di f'. Risulta che $f'(x) = x^2 + 3x + 2$, e dunque $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-2, -1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, +\infty)$. Pertanto -2 è punto di max relativo, -1 è punto di min relativo.

Il secondo metodo si basa sull'individuare i punti critici di f e sul segno di f'' in tali punti critici. Dato che $f'(x) = x^2 + 3x + 2$, i punti critici di f sono -2 e -1. Risulta che $f''(x) = 2x + 3$ e $f''(-2) = -1 < 0$, $f''(-1) = 1 > 0$. Pertanto -2 è punto di max relativo, -1 è punto di min relativo.

Esercizio 52. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si determinino l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, i punti critici (per ciascun punto critico x_0 si utilizzi il segno di $f''(x_0)$ per stabilire la natura di x_0), e i punti di max/min locali e globali:*

$$\text{(a) } f(x) = 2x - e^{x+1}; \qquad \text{(b) } f(x) = 3x + \cos(x).$$

Soluzione (a) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Inoltre, $f'(x) = 2 - e^{x+1}$, e $2 - e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 2 > e^{x+1} \Leftrightarrow \ln(2) > x+1 \Leftrightarrow -1+\ln(2) > x$. Viceversa, $f'(x) < 0$ per $x \in (-1+\ln(2), +\infty)$ e $x_0 = -1+\ln(2)$ è un punto critico per f. Poiché $f''(x) = -e^{x+1}$ e $f''(x_0) < 0$, si deduce che x_0 è un punto di max locale. Utilizzando il segno di f' si deduce che f è monotona strettamente crescente in $(-\infty, x_0)$, e monotona strettamente decrescente in $(x_0, +\infty)$. Quindi x_0 è punto di max globale per f con $\max f = f(x_0) = 2\ln(2) - 4$; per f non esiste un punto di min globale perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(b) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Inoltre, $f'(x) = 3 - \sin(x)$, e $3 - \sin(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e non esistono punti di max/min globale né punti di max/min locale.

Esercizio 53. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si determinino l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, i punti critici (per ciascun punto critico x_0 si utilizzi il segno di $f''(x_0)$ per stabilire la natura di x_0), e i punti di max/min locali e globali:*

$$\begin{aligned} \text{(a) } f(x) &= e^{3x} + e^{-3x}; \qquad &\text{(b) } f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x);\\ \text{(c) } f(x) &= 3\ln(x) - 4x; \qquad &\text{(d) } f(x) = \frac{2x-3}{x^2-2x+5}. \end{aligned}$$

Soluzione (a) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Inoltre, $f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x} = 3(e^{3x} - e^{-3x}) = 3e^{-3x}(e^{6x} - 1)$, e $e^{6x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{6x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Viceversa, $f'(x) < 0$ per $x < 0$ e $x_0 = 0$ è un punto critico per f. Poiché $f''(x) = 9e^{3x} + 9e^{-3x}$ e $f''(x_0) > 0$, si deduce che x_0 è un punto di min locale. Utilizzando il segno di f' si deduce che f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, monotona strettamente crescente in $(0, +\infty)$. Per f non esiste un punto di max globale (perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), e x_0 è punto di min globale con $\min f = f(x_0) = 2$.

(b) L'insieme di definizione di f è $(0, +\infty)$. Inoltre, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$, e $\frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x}) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > 1$. Viceversa, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$ e $x_0 = 1$ è un punto critico per f. Poiché $f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ e $f''(x_0) > 0$, si deduce che x_0 è un punto di min locale. Utilizzando il segno di f' si deduce che f è monotona strettamente

[6] Poiche' $e^x > 0$ per ogni x, il lato destro non puo' essere un numero negativo.

decrescente in $(0,1)$, monotona strettamente crescente in $(1,+\infty)$. Per f non esiste un punto di max globale (perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), e x_0 è punto di min globale con $\min f = f(x_0) = 1$.

(c) L'insieme di definizione di f è $(0,+\infty)$. Inoltre, $f'(x) = \frac{3}{x} - 4$, e $\frac{3}{x} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x} > 4 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{4}$. Viceversa, $f'(x) < 0$ per $x > \frac{3}{4}$ e $x_0 = \frac{3}{4}$ è un punto critico per f. Poiché $f''(x) = -\frac{3}{x^2}$ e $f''(x_0) < 0$, si deduce che x_0 è un punto di max locale. Utilizzando il segno di f' si deduce che f è monotona strettamente crescente in $(0, \frac{3}{4})$, monotona strettamente decrescente in $(\frac{3}{4}, +\infty)$. Per f non esiste un punto di min globale (perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$), e x_0 è punto di max globale con $\max f = f(x_0) = 3\ln(\frac{3}{4}) - 3$.

(d) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Inoltre, $f'(x) = \frac{2(x^2-2x+5)-(2x-3)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} = 2\frac{-x^2+3x+2}{(-2x+x^2+5)^2}$, dunque $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17})$, $f'(x) < 0$ per $x \in (\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, +\infty)$. I punti critici per f sono $x_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$ e $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$, e poiché $f''(x) = 2\frac{(-2x+3)\left(-2x+x^2+5\right)^2 - 2\left(-2x+x^2+5\right)(-2+2x)(-x^2+3x+2)}{(-2x+x^2+5)^4} = 2\frac{(-2x+3)\left(-2x+x^2+5\right) - 2(-2+2x)(-x^2+3x+2)}{(-2x+x^2+5)^3} = 2\frac{2x^3-9x^2-12x+23}{(-2x+x^2+5)^3}$ e $f''(x_0) = \frac{9}{272}\sqrt{17} + \frac{1}{16} > 0$, $f''(x_1) = \frac{1}{16} - \frac{9}{272}\sqrt{17} < 0$, si deduce che x_0 è un punto di min locale e x_1 è un punto di max locale. Utilizzando il segno di f' si deduce che f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17})$, monotona strettamente crescente in $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17})$, monotona strettamente decrescente in $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, +\infty)$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(x_0) = -\frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}$, $f(x_1) = \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, si deduce che x_0 è punto di min globale per f, x_1 è punto di max globale per f.

Esercizio 54. *Un'impresa deve scegliere il prezzo $p \geq 0$ per il prodotto che essa mette in vendita, e sa che per ogni $p \geq 0$ la quantità venduta è pari a $800e^{-p/6}$ unità. Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p800e^{-p/6}$. L'impresa vuole individuare il prezzo che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere prezzi maggiori di 4.*

Si scriva il problema di massimizzazione del profitto; è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione? Indipendentemente dalla risposta alla domanda precedente, si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica poi se la cancellazione della legge che impone $p \leq 4$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

Soluzione L'impresa deve massimizzare la funzione $f(p) = 800e^{-p/6}p$, $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, ed è possible applicare il teorema di Weierstrass per concludere immediatamente che esiste un punto di max globale per f, dato che f è continua e il dominio di f è un intervallo chiuso e limitato. Per trovare il punto di max globale utilizziamo $f'(p) = 800(e^{-p/6}(-\frac{1}{6})p + e^{-p/6}) = 800e^{-p/6}(-\frac{1}{6}p + 1)$, che è positiva per ogni p nel dominio di f. Quindi f è monotona strettamente crescente in $[0,4]$, e $p = 4$ è il punto di max globale per f. Nel caso che il vincolo $p \leq 4$ venga eliminato, il profitto dell'impresa aumenta poiché $f'(p) > 0$ in $[0,6)$, e quindi $f(6) > f(4)$, cioè il profitto dell'impresa è maggiore per $p = 6$ che per $p = 4$.

Esercizio 55. *Si ripeta l'esercizio precedente assumendo che la quantità venduta dall'impresa dato $p \geq 0$ sia* $\begin{cases} 16 + \frac{36}{p} - p & \textit{se } p \in (0,18] \\ 0 & \textit{se } p > 18 \end{cases}$ *e per legge non è possibile praticare prezzi maggiori di* 11.

Soluzione L'impresa deve massimizzare la funzione $f(p) = p(16 + \frac{36}{p} - p)$, cioè $f(p) = -p^2 + 16p + 36$, $f : [0,11] \to \mathbb{R}$, ed è possible applicare il teorema di Weierstrass per concludere immediatamente che esiste un punto di max globale per f, dato che f è continua e il dominio di f è un intervallo chiuso e limitato. Per trovare il punto di max globale utilizziamo $f'(p) = -2p + 16$, che è positiva per $p \in (0,8)$, negativa per $p \in (8,11]$. Quindi f è monotona strettamente crescente in $[0,8]$, monotona strettamente decrescente in $[8,11]$, e $p = 8$ è il punto di max globale per f. Nel caso che il vincolo $p \leq 11$ venga eliminato, il profitto dell'impresa non cambia, in quanto il vincolo $p \leq 11$ non impedisce all'impresa di scegliere il punto di max globale di f.

Esercizio 56. *Si consideri un'impresa che produce un solo tipo di bene; l'impresa deve decidere la quantità x di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene è 9, e dunque produrre la quantità x genera un ricavo pari a $9x$. Per produrre la quantità x, l'impresa sostiene un costo pari a $15x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantità x è*

$$\pi(x) = 9x - (15x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)$$

L'obiettivo dell'impresa è individuare un punto di max globale per la funzione π, la quale è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

E' possibile applicare il teorema di Weierstrass per stabilire l'esistenza di un punto di max globale per la funzione π? Indipendentemente dalla risposta alla domanda precedente, si determini un punto di max globale per la funzione π.

Soluzione L'impresa deve massimizzare la funzione $\pi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, alla quale non è possible applicare il teorema di Weierstrass (nonostante che π sia continua) perché il dominio di π è un intervallo illimitato. Poiché $\pi'(x) = -6 + 7x - x^2$, risulta che $\pi'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$, $\pi'(x) > 0$ per $x \in (1, 6)$, $\pi'(x) < 0$ per $x > 6$. Dunque π è monotona strettamente decrescente in $(0, 1)$, monotona strettamente crescente in $(1, 6)$, monotona strettamente decrescente in $(6, +\infty)$. Poiché $\pi(0) = 0$, $\pi(6) = 9 \cdot 6 - (15 \cdot 6 - \frac{7}{2} \cdot 6^2 + \frac{1}{3} \cdot 6^3) = 18$, si deduce che $x = 6$ è punto di max globale per π.

Esercizio 57. *Siano date tre funzioni, f, g, h, ognuna definita in $\mathbb{R}$ e ognuna derivabile. Si assuma che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga $f'(x) > 0$, $g'(x) \geq 0$, $h'(x) > 0$.*

(a) Si dica se la funzione $\ell_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell_1(x) = f(g(x)) + e^{h(x)}$ è una funzione crescente.

(b) Se la funzione g ha un punto critico in x_0 (ovvero, $g'(x_0) = 0$), è vero che la funzione $\ell_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell_2(x) = f(g(2x))$ ha un punto critico in $\frac{x_0}{2}$?

Soluzione (a) Poiché $\ell_1'(x) = f'(g(x))g'(x) + e^{h(x)}h'(x)$, si deduce che $\ell_1'(x) > 0$ per ogni x, e dunque ℓ_1 è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(b) Poiché $\ell_2'(x) = f'(g(2x))g'(2x)2$, si deduce che $\ell_2'(\frac{x_0}{2}) = f'(g(x_0))g'(x_0)2 = 0$, visto che $g'(x_0) = 0$.

Esercizio 58. *Siano date tre funzioni, f, g, h, ognuna definita in $\mathbb{R}$ e ognuna derivabile. Si assuma che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga $f(x) \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $g(x) > 0, g'(x) > 0$, $h(x) > 0, h'(x) > 0$. Quali delle seguenti funzioni sono derivabili? Quali sono crescenti?*

$$\text{(a) } \ell_1(x) = f(x^3 + g(x)); \qquad \text{(b) } \ell_2(x) = f(x)g(x)h(x); \qquad \text{(c) } \ell_3(x) = \frac{\ln(f(x))}{h(x)}$$

Soluzione (a) ℓ_1 è derivabile perché è somma e composizione di funzioni derivabili, e $\ell_1'(x) = f'(x^3 + g(x))(3x^2 + g'(x)) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi ℓ_1 è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(b) ℓ_2 è derivabile perché è il prodotto di funzioni derivabili, e $\ell_2'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi ℓ_2 è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(c) ℓ_3 è derivabile perché è composizione e quoziente di funzioni derivabili, e $\ell_3'(x) = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}h(x) - h'(x)\ln(f(x))}{(h(x))^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché $\ln(f(x)) < 0$, quindi ℓ_3 è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 59. *Si considerino le funzioni f, g, h, ognuna definita in $\mathbb{R}$ e ognuna monotona strettamente crescente; inoltre, $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dati a e b numeri positivi, si dica se le seguenti funzioni sono monotone strettamenti crescenti:*

$$\text{(a) } \ell_1(x) = h(af(x) + bg(x)); \qquad \text{(b) } \ell_2(x) = h(af(x) + bg(x)) + \ln(g(x)); \qquad \text{(c) } \ell_3(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Soluzione (a) Poiché $a > 0$ e $b > 0$, si deduce che $af(x)$ e $bg(x)$ sono entrambe funzioni monotone strettamente crescenti, e dunque anche $af(x) + bg(x)$ è monotona strettamente crescente. Inoltre, h è monotona strettamente crescente e la composizione di funzioni monotone strettamente crescenti è una funzione monotona strettamente crescente. Dunque ℓ_1 è monotona strettamente crescente.

(b) Poiché $\ln(x)$ e $g(x)$ sono entrambe funzioni monotone strettamente crescenti e la composizione di funzioni monotone strettamente crescenti è una funzione monotona strettamente crescente, si deduce che $\ln(g(x))$ è monotona strettamente crescente. Dunque la somma ℓ_2 tra $h(af(x) + bg(x))$ e $\ln(g(x))$ è una funzione monotona strettamente crescente.

(c) Non necessariamente ℓ_3 è crescente: si consideri ad esempio il caso in cui $f(x) = -10 + \frac{1}{10}x$ e $g(x) = \frac{1}{10}x$, entrambi funzioni monotone strettamente crescenti. Allora $\ell_3(x) = -x + \frac{1}{100}x^2$, che è monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 50)$.[7]

Esercizio 60. *Si calcolino i seguenti limiti*

$$\text{(a) } \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}; \qquad \text{(b) } \lim_{x \to 0^+} x^x$$

[7] Se le funzioni f e g fossero positive per ogni x, oltre che monotone strettamente crescenti, allora ℓ_3 sarebbe monotona strettamente crescente.

Soluzione (a) Consideriamo le funzioni $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ e $g(x) = x$. Allora $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Tentando di applicare il teorema di de l'Hôpital (per la precisione, il teorema 8.10 nel libro di testo, relativo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$) otteniamo

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

il cui limite per x che tende a 0^+ è ancora una forma indeterminata. Applicando ancora il teorema di de l'Hôpital otteniamo

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

il cui limite per x che tende a 0^+ è ancora una forma indeterminata. Procediamo allora in modo diverso utilizzando il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$, e osservando che $y \to +\infty$ dato che $x \to 0^+$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

in virtù della gerarchia tra infiniti.

(b) Questo limite è una forma indeterminata 0^0, e utilizziamo l'uguaglianza $x^x = e^{x\ln(x)}$. Risulta che $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ è una forma indeterminata $0 \cdot (-\infty)$ e allora notiamo che $x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$. Sebbene $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$ sia una forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty}$, ad esso si può applicare il teorema di de l'Hôpital (per la precisione, il teorema 8.11 del libro di testo, relativo alle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$), ottenendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$. Dunque $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Esercizio 61. *Si calcolino i seguenti limiti:*

i. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+1-\cos(x)}{x^2}$;

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)+e^{x^2}-3}{x^2+x}$;

iii. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-4x+5)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)}$;

Soluzione Ciascuno dei limiti considerati è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che affrontiamo applicando il teorema di de l'Hôpital per le forme indeterminate $\frac{0}{0}$.

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2) + \sin(x)}{2x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) + \cos(x)}{2} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+1-\cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$.

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x) + 2xe^{x^2}}{2x+1} = 0$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)+e^{x^2}-3}{x^2+x} = 0$.

(c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \frac{1}{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)} = 0$$

dunque $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-4x+5)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)} = 0$.

Esercizio 62. *Si calcolino i seguenti limiti:*

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right);$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right); \qquad (d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) + \sin(x)}{x}.$$

Soluzione (a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{0}{0}$. Per applicare di nuovo il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}$, quindi $\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$, e dunque $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.[8]

(b) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)})=+\infty-\infty$, e $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)}{1}=0$, quindi $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)})=0$.

(c) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}+\ln(x))=+\infty-\infty$, e $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}+\ln(x))=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x\ln(x)}{x}$. Poiché sappiamo che $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$,[9] si deduce che $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x\ln(x)}{x}=+\infty$.

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+\sin(x)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital è necessario calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\cos(x)}{1}$, ma tale limite non esiste. Tuttavia, calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+\sin(x)}{x}$ è immediato (senza bisogno del teorema di de l'Hôpital) poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+\sin(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

Esercizio 63. *Si calcolino i seguenti limiti:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-4x-1-x^2}{5x}$; *(b)* $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)}$; *(c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{2x-\pi}$; *(e)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\cos(5x)-1}$; *(f)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}(\frac{2}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})$; *(h)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos(x))^{\frac{1}{x^3}}$; *(i)* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan(x))^{\cos(x)}$;

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\ln(x+e)+\frac{x}{e}}{x^2}$; *(m)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos(x)-\frac{1}{2}x^2}$; *(n)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-2+x}{(\sin\pi x)^2}$.

Soluzione (a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-4x-1-x^2}{5x}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-4-2x}{5}=-\frac{3}{5}$, quindi $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-4x-1-x^2}{5x}=-\frac{3}{5}$.

(b) $\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x-3}{x^2-3x+3}}{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)}=-\frac{2}{\pi}$, quindi $\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)}=-\frac{2}{\pi}$.

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, quindi $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{2x-\pi}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(x)}{2}=-\frac{1}{2}$, quindi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{2x-\pi}=-\frac{1}{2}$.

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\cos(5x)-1}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{6xe^{3x^2}-2xe^{x^2}}{-5\sin(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-5\sin(5x)}(3e^{3x^2}-e^{x^2})=-\frac{2}{25}\cdot 2=-\frac{4}{25}$, quindi $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\cos(5x)-1}=-\frac{4}{25}$.

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin(x)}=\frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

(g) $\lim_{x\to 0^-}(\frac{2}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})=-\infty+\infty$ e $\lim_{x\to 0^-}(\frac{2}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=-\infty$, quindi $\lim_{x\to 0^-}(\frac{2}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})=-\infty$.

(h) $\lim_{x\to 0^+}(\cos(x))^{\frac{1}{x^3}}=1^{+\infty}$, $(\cos(x))^{\frac{1}{x^3}}=e^{\frac{1}{x^3}\ln(\cos(x))}$ e $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos(x))}{x^3}=\frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{x\cos(x)}=-\infty$, quindi $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos(x))}{x^3}=-\infty$ e $\lim_{x\to 0^+}(\cos(x))^{\frac{1}{x^3}}=0$.

(i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan(x))^{\cos(x)}=(+\infty)^0$, e $(\tan(x))^{\cos(x)}=e^{(\cos(x))\ln(\tan(x))}$. Poiché $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos(x))\ln(\tan(x))=(0^+)\cdot(+\infty)$, è utile notare che $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos(x))\ln(\tan(x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan(x))}{\frac{1}{\cos(x)}}=\frac{+\infty}{+\infty}$. Al fine di

[8] Si noti che per calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$ non è necessario applicare nuovamente il teorema di De L'Hopital, ma è sufficiente osservare che $\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2x+2}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x+2}=\frac{1}{2}$.

[9] Si veda il limite (b) nell'esercizio 63.

applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1+(\tan(x))^2}{\tan(x)}}{\frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{(\cos(x))^2\tan(x)}\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{(\tan(x))\sin(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2} = 0$, quindi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos(x))\ln(\tan(x)) = 0$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan(x))^{\cos(x)} = e^0 = 1$.

(l) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\ln(x+e)+\frac{x}{e}}{x^2} = \frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\frac{1}{x+e}+\frac{1}{e}}{2x} = \frac{0}{0}$. Per applicare di nuovo il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+\frac{1}{(x+e)^2}}{2} = 1+\frac{1}{2e^2}$. Quindi $\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\frac{1}{x+e}+\frac{1}{e}}{2x} = 1+\frac{1}{2e^2}$, e dunque $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\ln(x+e)+\frac{x}{e}}{x^2} = 1+\frac{1}{2e^2}$.

(m) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos(x)-\frac{1}{2}x^2} = \frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)-x} = \frac{0}{0}$. Per applicare di nuovo il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)-1} = \frac{1}{0^-}$. Quindi $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)-1} = -\infty$, dunque $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)-x} = -\infty$, e per finire $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos(x)-\frac{1}{2}x^2} = -\infty$.

(n) $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-2+x}{(\sin\pi x)^2} = \frac{0}{0}$. Al fine di applicare il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}+1}{2\pi(\sin\pi x)(\cos\pi x)} = \frac{0}{0}$. Per applicare di nuovo il teorema di de l'Hôpital si calcola $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x^3}}{2\pi(\pi(\cos\pi x)^2-\pi(\sin\pi x)^2)} = \frac{1}{\pi^2}$. Quindi $\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}+1}{2\pi(\sin\pi x)(\cos\pi x)} = \frac{1}{\pi^2}$ e dunque $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-2+x}{(\sin\pi x)^2} = \frac{1}{\pi^2}$.

Esercizio 64. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = x - \cos(x)$ è concava?*

$$a)\ (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});\quad b)\ (0,\frac{\pi}{2});\quad c)\ (\frac{\pi}{2},\pi);\quad d)\ (\frac{3\pi}{2},2\pi)$$

Soluzione Poiché $f''(x) = \cos(x)$, risulta che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ (e anche per molti altri x), dunque f è concava in tale intervallo. La risposta giusta è c.

Esercizio 65. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = \sin(x) + x$ è convessa?*

$$a)\ (-\pi,\pi);\quad b)\ (0,\frac{\pi}{2});\quad c)\ (0,\pi);\quad d)\ (\pi,2\pi)$$

Soluzione Poiché $f''(x) = -\sin(x)$, risulta che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (\pi,2\pi)$, dunque f è convessa in tale intervallo. La risposta giusta è d.

Esercizio 66. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = \sin(3x)$ è concava?*

$$a)\ (0,\frac{\pi}{2});\quad b)\ (-\frac{\pi}{2},0);\quad c)\ (0,\frac{\pi}{3});\quad d)\ (-\frac{\pi}{3},0)$$

Soluzione Poiché $f''(x) = -9\sin(3x)$, risulta che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (0,\frac{\pi}{3})$, dunque f è concava nell'intervallo $(0,\frac{\pi}{3})$. La risposta giusta è c.

Esercizio 67. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = \tan(2x)$ è convessa?*

$$a)\ (0,\frac{\pi}{2});\quad b)\ (-\frac{\pi}{2},0);\quad c)\ (0,\frac{\pi}{4});\quad d)\ (-\frac{\pi}{4},0)$$

Soluzione Poiché $f''(x) = 8(1+(\tan(2x))^2)\tan(2x)$, risulta che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0,\frac{\pi}{4})$, dunque f è convessa nell'intervallo $(0,\frac{\pi}{4})$. La risposta giusta è c.

Esercizio 68. *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = \ln\left(2+2x^2\right)$ è convessa?*

$$a)\ (0,+\infty);\quad b)\ (1,+\infty);\quad c)\ (-1,0);\quad d)\ (-\infty,0)$$

Soluzione Poiché $f''(x) = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, risulta che $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-1)$, $f''(x) > 0$ per $x \in (-1,1)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (1,+\infty)$. Pertanto f è convessa nell'intervallo $(-1,1)$, e in particolare nell'intervallo $(-1,0)$ che è un sottoinsieme di $(-1,1)$. La risposta giusta è c.

Esercizio 69. *Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 11x - 2$, si determinino gli intervalli di concavità/convessità per f.*

Soluzione Poiché $f''(x) = 60x^3-180x^2+120x = 60x\,(x-1)\,(x-2)$, risulta che $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty,0)$, quindi f è concava in $(-\infty,0)$; $f''(x) > 0$ per $x \in (0,1)$, quindi f è convesssa in $(0,1)$; $f''(x) < 0$ per $x \in (1,2)$, quindi f è concava in $(1,2)$; $f''(x) > 0$ per $x \in (2,+\infty)$, quindi f è convessa in $(2,+\infty)$.

Esercizio 70. *Data la funzione $f(x) = \ln(x^2+3)$ definita nel proprio insieme di definizione, si determinino gli intervalli di concavità/convessità per f.*

Soluzione L'insieme dei definizione di f è $\mathbb{R}$, e poiché $f''(x) = 2\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$ risulta che $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, \sqrt{3})$, quindi f è concava in $(-\infty, \sqrt{3})$; $f''(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, quindi f è convessa in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$; $f''(x) < 0$ per $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$, quindi f è concava in $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Esercizio 71. *Data la funzione $f(x) = e^{2-x^2}$ definita in $\mathbb{R}$, si determinino gli intervalli di concavità/convessità per f.*

Soluzione Poiché $f''(x) = 2\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2+2}$, risulta che $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, quindi f è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $f''(x) < 0$ per $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, quindi f è convessa in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $f''(x) > 0$ per $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, quindi f è convessa in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Esercizio 72. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si determinino l'insieme di definizione e gli intervalli di concavità/convessità (nel caso (b) il risultato dipende dal parametro a, che si assume essere diverso da zero):*

$$\text{(a) } f(x) = e^{3-2x^2+x}; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{1}{12}ax^4 + \frac{1}{6}ax^3 - ax^2 + ax + 6.$$

Soluzione (a) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$, e f è due volte derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = (1-4x)\, e^{-2x^2+x+3}$, $f''(x) = (16x^2 - 8x - 3)e^{-2x^2+x+3}$. Dunque $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{1}{4})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $f''(x) > 0$ per $x \in (\frac{3}{4}, +\infty)$. Pertanto f è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{4})$, concava in $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, convessa in $(\frac{3}{4}, +\infty)$.

(b) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$, e f è due volte derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}ax^2 - 2ax$, $f''(x) = a(x^2 + x - 2)$. Risulta che $x^2 + x - 2 > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $x^2 + x - 2 < 0$ per $x \in (-2, 1)$, $x^2+x-2 > 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Pertanto, se $a > 0$, f è convessa in $(-\infty, -2)$, concava in $(-2, 1)$, convessa in $(1, +\infty)$. Se viceversa $a < 0$, allora f è concava in $(-\infty, -2)$, convessa in $(-2, 1)$, concava in $(1, +\infty)$.

Esercizio 73. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si determinino l'insieme di definizione, gli intervalli di concavità/convessità:*

$$\begin{aligned} \text{(a) } f(x) &= x - \sin(x); \qquad \text{(b) } f(x) = \ln(x^2 - 3); \\ \text{(c) } f(x) &= 3x^5 - 20x^4 + 30x^3 + 9x - 17; \qquad \text{(d) } f(x) = \ln(2 + 3x^2) \end{aligned}$$

Soluzione (a) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$, e f è due volte derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 1 - \cos(x)$, $f''(x) = \sin(x)$. Dunque $f''(x) > 0$ per $x \in (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup ... \cup (-2\pi, -\pi) \cup (-4\pi, -3\pi)... = \cup_{z=-\infty}^{+\infty}(2z\pi, (2z+1)\pi)$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \cup ... \cup (-\pi, 0) \cup (-3\pi, -2\pi)... = \cup_{z=-\infty}^{+\infty}((2z-1)\pi, 2z\pi)$. Pertanto f è convessa nell'intervallo $(0, \pi)$, è convessa nell'intervallo $(2\pi, 3\pi)$, è convessa nell'intervallo $(4\pi, 5\pi)$, ... cioè è convessa nell'intervallo $(2z\pi, (2z+1)\pi)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$. Viceversa, f è concava nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$, è concava nell'intervallo $(3\pi, 4\pi)$, ... cioè è concava nell'intervallo $((2z-1)\pi, 2z\pi)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

(b) L'insieme di definizione di f è $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, e f è due volte derivabile in $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ con $f'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$ e $f''(x) = -\frac{2x^2+6}{(x^2-3)^2}$. Dunque $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ e pertanto f è concava in $(-\infty, -\sqrt{3})$; $f''(x) < 0$ anche per ogni $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$, e pertanto f è concava anche in $(\sqrt{3}, +\infty)$.

(c) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$, e f è due volte derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 15x^4 - 80x^3 + 90x^2 + 9$, $f''(x) = 60x^3 - 240x^2 + 180x = 60x(x^2 - 4x + 3)$. Dunque $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (1, 3)$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (3, +\infty)$. Pertanto f è concava in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, 1)$, concava in $(1, 3)$, convessa in $(3, +\infty)$.

(d) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$, e f è due volte derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = \frac{6x}{2+3x^2}$, $f''(x) = 6\frac{2-3x^2}{(3x^2+2)^2}$. Dunque $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $f''(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$. Pertanto f è concava in $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, convessa in $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, concava in $(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$.

Esercizio 74. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si studi il grafico (si tralasci lo studio del segno di f'' per la funzione (b)):*

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 5}; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{e^{-x}}{|x^2 - 4|} + 1.$$

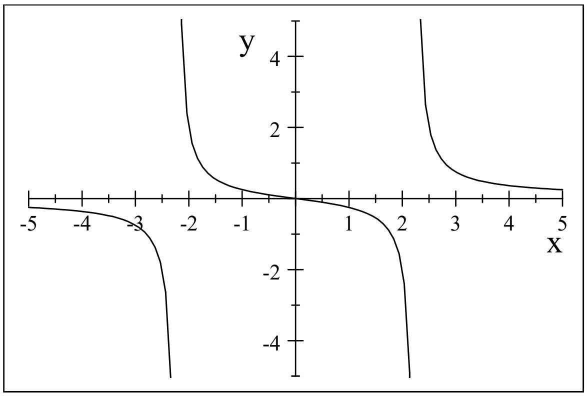
Qual è il numero di soluzioni per l'equazione $\frac{e^{-x}}{|x^2-4|} + 1 = a$ al variare di a in $\mathbb{R}$?

Soluzione (a) L'insieme di definizione di f è $A = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$; in tale insieme f è derivabile, dunque anche continua. f è dispari poiché $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-5} = -\frac{x}{x^2-5} = -f(x)$ per ogni $x > 0$, $x \neq \sqrt{5}$. Dunque studiamo il grafico di f nell'insieme $[0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > \sqrt{5}$, $f(x) < 0$ per $x \in (0, \sqrt{5})$.

$\lim_{x\to\sqrt{5}^-} f(x) = \frac{\sqrt{5}}{0^-}$, dunque $\lim_{x\to\sqrt{5}^-} f(x) = -\infty$ (la retta di equazione $x = \sqrt{5}$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to\sqrt{5}^+} f(x) = \frac{\sqrt{5}}{0^+}$, dunque $\lim_{x\to\sqrt{5}^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$).

$f'(x) = \frac{x^2-5-x2x}{(x^2-5)^2} = -\frac{x^2+5}{(x^2-5)^2} < 0$ per ogni $x \in [0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$, dunque f è monotona strettamente decrescente in $[0, \sqrt{5})$ e monotona strettamente decrescente in $(\sqrt{5}, +\infty)$ (f non è monotona strettamente decrescente in $[0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$). Non esistono punti di max/min locale/globale, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.

$f''(x) = -\frac{2x(x^2-5)^2-2(x^2-5)2x(x^2+5)}{(x^2-5)^4} = 2x\frac{x^2+15}{(x^2-5)^3}$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (0, \sqrt{5})$, $f''(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{5}, +\infty)$, dunque f è concava in $[0, \sqrt{5})$, è convessa in $(\sqrt{5}, +\infty)$. Il grafico di f e'



(b) L'insieme di definizione di f è $A = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Inoltre, f non è pari né dispari né periodica. f è derivabile in A, e dunque è continua. $f(0) = \frac{5}{4}$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ e la sostituzione $y = -x$ indica che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{|y^2-4|} + 1 = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^2-4} + 1 = +\infty$ in virtù della gerarchia tra infiniti. $\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{e^2}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-2} f(x) = +\infty$ (la retta di equazione $x = -2$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to2} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$ (la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty}+1$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$).

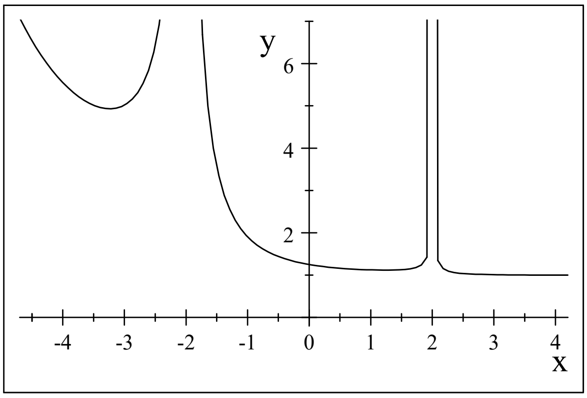
Per il calcolo di $f'(x)$ è bene notare che $x^2 - 4 > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (2 + \infty)$, $x^2 - 4 < 0$ per $x \in (-2, 2)$, dunque

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x^2-4} + 1 & \text{per } x \in (-\infty, -2) \cup (2 + \infty) \\ \frac{e^{-x}}{4-x^2} + 1 & \text{per } x \in (-2, 2) \end{cases}$$

e pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{(x^2-4)^2}(-x^2 - 2x + 4) & \text{per } x \in (-\infty, -2) \cup (2 + \infty) \\ \frac{e^{-x}}{(4-x^2)^2}(x^2 + 2x - 4) & \text{per } x \in (-2, 2) \end{cases}$$

Poiché $-x^2 - 2x + 4 = 0$ in $x = -\sqrt{5} - 1$ e in $x = \sqrt{5} - 1$, si deduce che $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{5} - 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{5} - 1, -2)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-2, \sqrt{5} - 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{5} - 1, 2)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (2, +\infty)$. Quindi f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{5} - 1)$, strettamente crescente in $(-\sqrt{5} - 1, -2)$, strettamente decrescente in $(-2, \sqrt{5} - 1)$, strettamente crescente in $(\sqrt{5} - 1, 2)$, strettamente decrescente in $(2, +\infty)$. Il grafico di f è dunque



Esistono due punti di min locale per f che sono $x_0 = -\sqrt{5}-1$ e $x_1 = \sqrt{5}-1$, con $f(x_0) = \frac{e^{\sqrt{5}+1}}{2+2\sqrt{5}} + 1 \cong 4.93$, $f(x_1) = \frac{e^{-\sqrt{5}+1}}{2\sqrt{5}-2} + 1 \cong 1.12$. Non esistono punti di max/min globale, e $\sup f = +\infty$, $\inf f = 1$.

Dato $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\frac{e^{-x}}{|x^2-4|} + 1 = a$ è 5 se $a > 4.93$, 4 se $a = 4.93$, 3 se $1.12 < a < 4.93$, 2 se $a = 1.12$, 1 se $1 < a < 1.12$, 0 se $a \leq 1$.

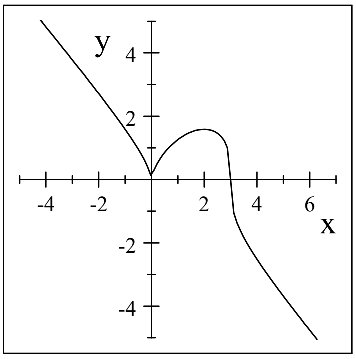
Esercizio 75. *Per ciascuna delle seguenti funzioni si studi il grafico (si tralasci lo studio del segno di f'' per le funzioni (a)-(d)):*

$$\begin{array}{llll}
(a)\ f(x) = \sqrt[3]{(3-x)x^2}; & (b)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x-2}; & (c)\ f(x) = \dfrac{-e^x}{x^2-1}; & \\
(d)\ f(x) = \dfrac{|x^3-x^2|}{x^2-1}; & (e)\ f(x) = \max\{e^{-x}-3, x|x|-2\}; & (f)\ f(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}; & \\
(g)\ f(x) = \dfrac{x^2-4x+7}{x-1}; & (h)\ f(x) = \dfrac{-5}{x^2-2x-3}+1; & (i)\ f(x) = e^{-x}(2x+x^2); & \\
(l)\ f(x) = \ln(1+x^2) - \dfrac{3}{5}x; & (m)\ f(x) = \dfrac{e^x}{|x^2-1|} & &
\end{array}$$

Soluzione (a) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$; in tale insieme f è continua, ma non è derivabile nei punti in cui l'argomento della radice cubica vale zero, cioè in $x = 0$ e in $x = 3$. f non è pari né dispari né periodica. $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $f(3) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (3, +\infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Per calcolare $f'(x)$ è utile scrivere $f(x)$ come $(3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$: $f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(6x - 3x^2) = \frac{x(2-x)}{\sqrt[3]{(3x^2-x^3)^2}}$. Quindi $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (0, 2)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$, e dunque f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, monotona strettamente crescente in $(0, 2)$, monotona strettamente decrescente in $(2, 3)$ e in $(3, +\infty)$. Non esistono punti di max/min globali e $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$. Il punto $x_0 = 0$ è punto di min locale; il punto $x_1 = 2$ è punto di max locale.



(b) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; in tale insieme f è continua, ma non è derivabile nel punto in cui l'argomento della radice quadrata vale zero, cioè in $x = 0$. f non è pari né dispari né periodica. $f(0) = 0$ e $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$, $f(x) > 0$ per $x \in (2, +\infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$); $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ (la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale per f).

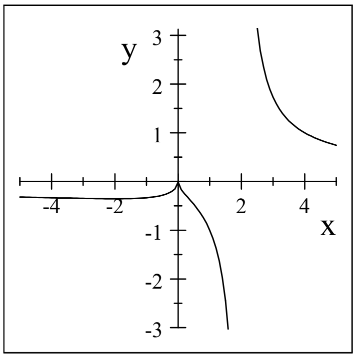
Per il calcolo di $f'(x)$ è bene notare che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x-2} & \text{per } x \in (0,2) \cup (2+\infty) \\ \frac{\sqrt{-x}}{x-2} & \text{per } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

dunque

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{x-2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-2)^2} = -\frac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2} & \text{per } x \in (0,2) \cup (2+\infty) \\ \frac{\frac{-(x-2)}{2\sqrt{-x}} - \sqrt{-x}}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{2\sqrt{-x}(x-2)^2} & \text{per } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

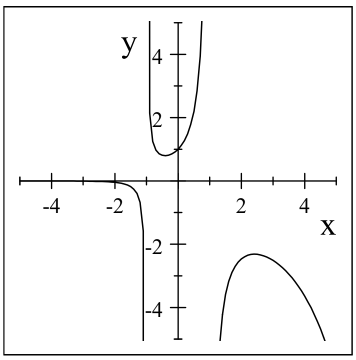
Pertanto $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-2, 0)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 2) \cup (2 + \infty)$. Quindi f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -2)$, monotona strettamente crescente in $(-2, 0)$, monotona strettamente decrescente in $(0, 2)$ e in $(2, +\infty)$. Non esistono punti di max/min globali, e $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$. Il punto $x_0 = -2$ è punto di min locale, il punto $x_1 = 0$ è punto di max locale.



(c) L'insieme di definizione di f è $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$; in tale insieme f è derivabile, quindi continua. Inoltre, non f è pari né dispari né periodica. $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) > 0$ per $x \in (-1, 1)$, $f(x) < 0$ per $x \in (1, +\infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$); $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{-e^{-1}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-e^{-1}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ (la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-e}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-e}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ (la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ per la gerarchia tra infiniti.

$f'(x) = -\frac{e^x(x^2-1) - 2xe^x}{(x^2-1)^2} = \frac{e^x}{(x^2-1)^2}(-x^2+2x+1)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1-\sqrt{2})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$, $f'(x) < 0$ per $x \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$, dunque f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, monotona strettamente decrescente in $(-1, 1 - \sqrt{2})$, monotona strettamente crescente in $(1-\sqrt{2}, 1)$, monotona strettamente crescente in $(1, 1+\sqrt{2})$, monotona strettamente decrescente in $(1+\sqrt{2}, +\infty)$. Non esistono punti di max/min globali e $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$. Il punto $x_0 = 1-\sqrt{2}$ è punto di min locale, il punto $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ è punto di max locale.



(d) L'insieme di definizione di f è $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

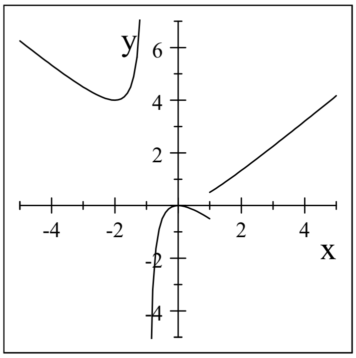
$f(x) = \frac{|x^2(x-1)|}{x^2-1} = x^2 \frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} x^2 \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} & \text{se } x \in (1, +\infty) \\ x^2 \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x^2}{x+1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \end{cases}$ e quindi f è derivabile in A, dunque continua.

$f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$, $f(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$.

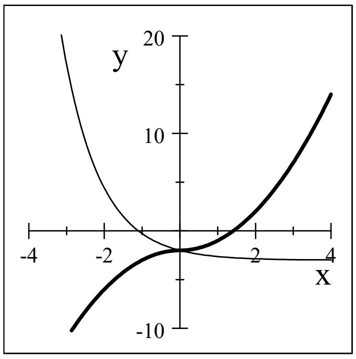
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-\frac{x^2}{x+1}) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\frac{1}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ (la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$.

$f'(x) = \begin{cases} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} & \text{se } x \in (1, +\infty) \\ \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \end{cases}$ quindi $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-2, -1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, 0)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$.

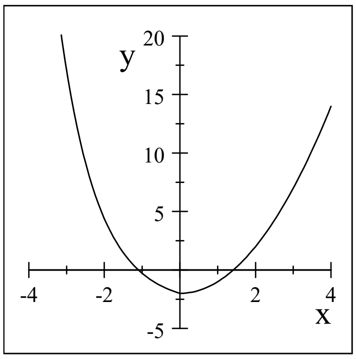
Non esistono punti di max/min globali e $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$; $x_0 = -2$ è punto di min locale, $x_1 = 0$ è punto di max locale.



(e) $f(x) = \max\{g(x), h(x)\}$, con $g(x) = e^{-x} - 3$ e $h(x) = x|x| - 2$, entrambe definite in $\mathbb{R}$. Dunque per ricavare il grafico di f è utile ricavare il grafico di g e il grafico di h. Osservando che $g(x) = (\frac{1}{e})^x - 3$ e $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ si ricavano i grafici delle due funzioni (il grafico di g è la curva sottile; il grafico di h è la curva spessa).



Questo rivela che $\max\{g(x), h(x)\} = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < 0 \\ h(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, cioè $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e dunque il grafico di f è

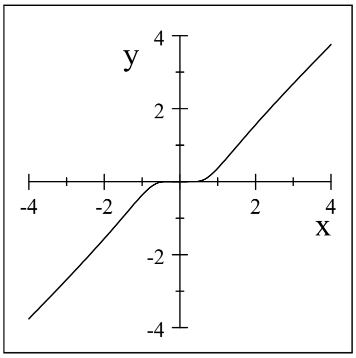


(f) L'insieme di definizione di f è $A = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; in tale insieme f è derivabile, quindi continua. Inoltre, f è dispari dato che $f(-x) = (-x)e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -xe^{-\frac{1}{x^2}} = -f(x)$ per ogni $x > 0$. Quindi studiamo il grafico di f nell'insieme $(0, +\infty)$. $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

$\lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 0 = 0$; $\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty \cdot 1$, dunque $\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + xe^{-\frac{1}{x^2}}(\frac{2}{x^3}) = \frac{x^2+2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$, e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, dunque f è monotona strettamente crescente in $(0, +\infty)$. Non esistono punti di max/min locali/globali, e $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.

$f''(x) = \frac{4-2x^2}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}$, e $f''(x) > 0$ per $x \in (0, \sqrt{2})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$, dunque f è convessa in $(0, \sqrt{2})$, è concava in $(\sqrt{2}, +\infty)$.

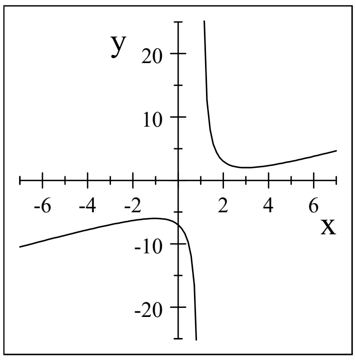


(g) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R} - \{1\}$; in tale insieme f è derivabile, e dunque anche continua; f non è pari né dispari né periodica. $f(0) = -7$ e $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 1)$, $f(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{4}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ (la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{4}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$.

$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+7)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (1, 3)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (3, +\infty)$, dunque f è monotona strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, monotona strettamente decrescente in $(-1, 1)$, monotona strettamente decrescente in $(1, 3)$, monotona strettamente crescente in $(3, +\infty)$. Non esistono punti di max/min globali e $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$. Il punto $x_0 = -1$ è punto di max locale; il punto $x_1 = 3$ è punto di min locale.

$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$, dunque f è concava in $(-\infty, 1)$, è convessa in $(1, +\infty)$.

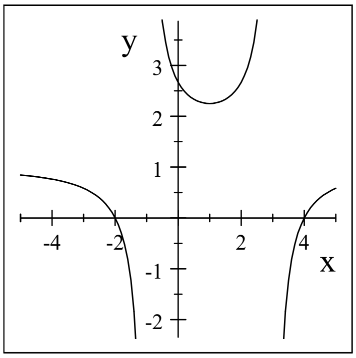


(h) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R} - \{-1, 3\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$; in tale insieme f è derivabile, e dunque anche continua; f non è pari né dispari né periodica. $f(0) = \frac{8}{3}$ e $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x^2-2x-3} > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3) \cup (4, +\infty)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$); $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{-5}{0^+} + 1$, quindi $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ (la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-5}{0^-} + 1$, quindi $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{-5}{0^-} + 1$, quindi $\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$ (la retta di equazione $x = 3$ è asintoto verticale per f); $\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} + 1$, quindi $\lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = 10\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (1, 3) \cup (3, +\infty)$, dunque f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, monotona strettamente decrescente in $(-1, 1)$, monotona strettamente crescente in $(1, 3)$, monotona strettamente crescente in $(3, +\infty)$. Non esistono punti di max/min globali, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$. Il punto $x_0 = 1$ è punto di min locale.

$f''(x) = 10\frac{-3x^2+6x-7}{(x^2-2x-3)^3}$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, $f''(x) > 0$ per $x \in (-1, 3)$, dunque f è concava in $(-\infty, -1)$, convessa in $(-1, 3)$, concava in $(3, +\infty)$.

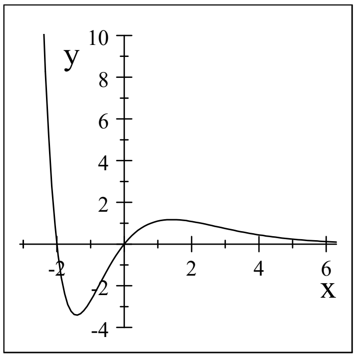


(i) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$; in tale insieme f è derivabile, quindi continua. Inoltre, non f è pari né dispari né periodica. $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 0)$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty)$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x^2}{e^x} = 0$ per la gerarchia tra infiniti (la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$).

$f'(x) = e^{-x}\left(2 - x^2\right)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, dunque f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{2})$, monotona strettamente crescente in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, monotona strettamente decrescente in $(\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x_0 = -\sqrt{2}$ è punto di min globale; il punto $x_1 = \sqrt{2}$ è punto di max locale. Non esistono punti di max globale, $\sup f = +\infty$, $\min f = f(-\sqrt{2}) = -2e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

$f''(x) = e^{-x}\left(-2x + x^2 - 2\right)$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, dunque f è convessa in $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$, concava in $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, convessa in $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$.

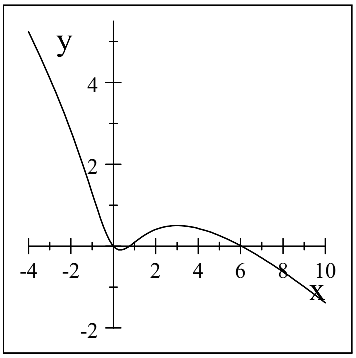


(l) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$; in tale insieme f è derivabile, quindi continua. Inoltre, non f è pari né dispari né periodica. $f(0) = 0$, e non esistono formule che permettono di risolvere le disequazioni $f(x) < 0$, $f(x) > 0$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty + \infty$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(x^2) - \frac{3}{5}x) = \lim_{x\to+\infty}(2\ln(x) - \frac{3}{5}x) = -\infty$ per la gerarchia tra infiniti.

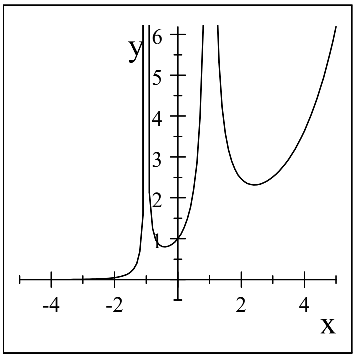
$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{5} = \frac{-3x^2+10x-3}{5(x^2+1)}$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (3, +\infty)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\frac{1}{3}, 3)$, dunque f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, \frac{1}{3})$, monotona strettamente crescente in $(\frac{1}{3}, 3)$, monotona strettamente decrescente in $(3, +\infty)$. Il punto $x_0 = \frac{1}{3}$ è punto di min locale; il punto $x_1 = 3$ è punto di max locale. Non esistono punti di max/min globale, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.

$f''(x) = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f''(x) > 0$ per $x \in (-1, 1)$, dunque f è concava in $(-\infty, -1)$, convessa in $(-1, 1)$, concava in $(1, +\infty)$.



(m) La funzione da studiare è strettamente collegata alla funzione del punto (c). In particolare, $f(x) = \left|\frac{-e^x}{x^2-1}\right| = \frac{|-e^x|}{|x^2-1|} = \frac{e^x}{|x^2-1|}$. Quindi il grafico di f è ottenuto a partire dal grafico per la funzione al punto (c), ribaltandolo rispetto all'asse orizzontale per gli x tali che $\frac{-e^x}{x^2-1} < 0$.

$$\left|\frac{-e^x}{x^2-1}\right|$$



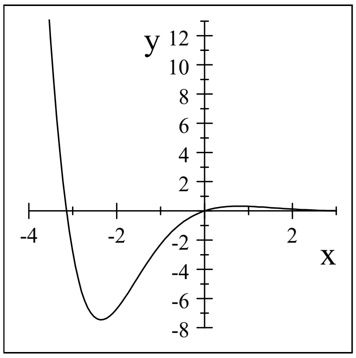
Esercizio 76. *Si disegni il grafico di*

$$f(x) = e^{-x}\sin(x)$$

Tralasciando lo studio della derivata seconda.

Soluzione L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$ perché e^{-x} e $\sin(x)$ sono funzioni definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Intersezioni del grafico con gli assi cartesiani. $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ se e solo se $\sin(x) = 0$, ovvero se e solo se $x = k\pi$ al variare di k in $\mathbb{Z}$.
f non è pari, né dispari, né periodica.
Segno di f. $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ al variare di k in $\mathbb{Z}$; $f(x) < 0$ se e solo se $x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ al variare di k in $\mathbb{Z}$.
Limiti. Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si osservi che $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ e $-1 \le \sin(x) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; dunque il teorema del confronto implica che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ non esiste.
Studio della derivata prima. $f'(x) = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$, e $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (2(k-1)\pi + \frac{1}{4}\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4})$ al variare di k in $\mathbb{Z}$ (in ciascuno di questi intervalli f è monotona strettamente crescente), $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2(k+1)\pi + \frac{1}{4}\pi)$ al variare di k in $\mathbb{Z}$ (in ciascuno di questi intervalli f è monotona strettamente decrescente). Dunque, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ il punto $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ è punto di max locale per f e $x = 2(k+1)\pi + \frac{1}{4}\pi$ è punto di min locale.

Il grafico di f e' il seguente:



Esercizio 77. *Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione*

$$\ln(|x^2 + 2x|) + \alpha = 0$$

al variare del parametro α.

Soluzione L'equazione e' equivalente a $\ln(|x^2+2x|) = -\alpha$, quindi studiamo la funzione $f(x) = \ln(|x^2+2x|)$, per la quale si nota che

$$|x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq -2 \text{ o } x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & \text{se } x \in (-2, 0) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 2x) & \text{se } x < -2 \text{ o } x > 0 \\ \ln(-x^2 - 2x) & \text{se } x \in (-2, 0) \end{cases}$$

L'insieme di definizione di f e' $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, f non e' pari ne' dispari, ne' periodica. Riguardo al segno di f, risulta che $f(x) = 0$ se e solo se $|x^2 + 2x| = 1$, ovvero se e solo se $x = -\sqrt{2} - 1$, o $x = -1$, o $x = \sqrt{2} - 1$; $f(x) > 0$ se e solo se $|x^2 + 2x| > 1$, ovvero se e solo se $x \in (-\infty, -\sqrt{2} - 1)$ o $x \in (\sqrt{2} - 1, +\infty)$; $f(x) < 0$ se e solo se $|x^2 + 2x| < 1$ e $x^2 + 2x \neq 0$, ovvero se e solo se $x \in (-\sqrt{2} - 1, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \sqrt{2} - 1)$.

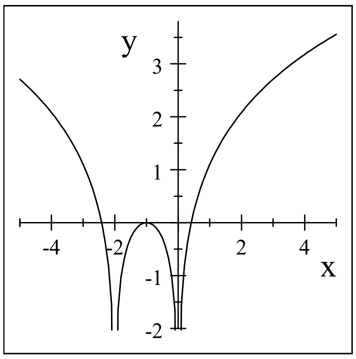
I limiti da calcolare sono i seguenti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -2} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Studio di f'. Risulta che

$$f'(x) = \begin{cases} 2\frac{x+1}{x^2+2x} & \text{se } x < -2 \text{ o } x > 0 \\ 2\frac{x+1}{x^2+2x} & \text{se } x \in (-2, 0) \end{cases}$$

Pertanto $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-2, -1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 0)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$. Quindi $x = -1$ e' punto di max locale e $f(-1) = 0$. Il grafico di f e'



Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = -\alpha$ ha quattro soluzioni se $\alpha > 0$, tre soluzioni se $\alpha = 0$, due soluzioni se $\alpha < 0$.

Esercizio 78. *Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione*

$$\ln(|x^2 - 2x|) - \alpha = 0$$

al variare del parametro α.

Soluzione L'equazione e' equivalente a $\ln(|x^2-2x|)=\alpha$, quindi studiamo la funzione $f(x)=\ln(|x^2-2x|)$, per la quale si nota che

$$|x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & \text{se } x \le 0 \text{ o } x \ge 2 \\ -x^2+2x & \text{se } x \in (0,2) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(x) = \begin{cases} \ln(x^2-2x) & \text{se } x \le 0 \text{ o } x \ge 2 \\ \ln(-x^2+2x) & \text{se } x \in (0,2) \end{cases}$$

L'insieme di definizione di f e' $\mathbb{R}-\{0,2\}$, f non e' pari ne' dispari, ne' periodica. Riguardo al segno di f, risulta che $f(x)=0$ se e solo se $|x^2-2x|=1$, ovvero se e solo se $x=-\sqrt{2}+1$, o $x=1$, o $x=\sqrt{2}+1$; $f(x)>0$ se e solo se $|x^2-2x|>1$, ovvero se e solo se $x\in(-\infty,-\sqrt{2}+1)$ o $x\in(\sqrt{2}+1,+\infty)$; $f(x)<0$ se e solo se $|x^2-2x|<1$ e $x^2-2x\neq 0$, ovvero se e solo se $x\in(-\sqrt{2}+1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,\sqrt{2}-1)$.

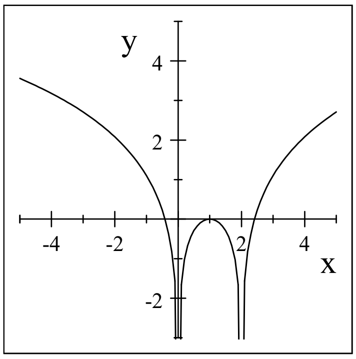
I limiti da calcolare sono i seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to 0} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)+\infty$$

Studio di f'. Risulta che

$$f'(x) = \begin{cases} 2\frac{x-1}{x^2-2x} & \text{se } x<0 \text{ o } x>2 \\ 2\frac{x-1}{x^2-2x} & \text{se } x\in(0,2) \end{cases}$$

Pertanto $f'(x)<0$ per $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)>0$ per $x\in(0,1)$, $f'(x)<0$ per $x\in(1,2)$, $f'(x)>0$ per $x\in(2,+\infty)$. Quindi $x=1$ e' punto di max locale e $f(1)=0$. Il grafico di f e'



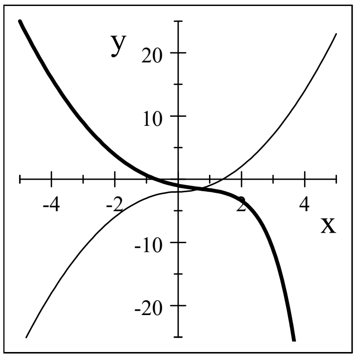
Dato $\alpha\in\mathbb{R}$, l'equazione $f(x)=\alpha$ ha quattro soluzioni se $\alpha<0$, tre soluzioni se $\alpha=0$, due soluzioni se $\alpha>0$.

Esercizio 79. *Si calcoli l'estremo inferiore della funzione*

$$f(x)=\max\left\{x|x|-2, x^2-e^x\right\}$$

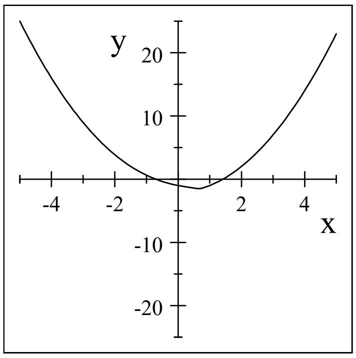
Soluzione Sia $g(x)=x|x|-2$, $h(x)=x^2-e^x$, entrambe funzioni definite in $\mathbb{R}$. Dunque $g(x)=\begin{cases} -x^2-2 & \text{se } x<0 \\ x^2-2 & \text{se } x\ge 0 \end{cases}$ e il grafico di g e' immediato da ricavare: si veda la curva sottile nel piano cartesiano sotto.

Riguardo a h, risulta che $\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ (in virtù della gerarchia tra infiniti). Inoltre, $h'(x)=2x-e^x$ e per ogni x risulta che $h'(x)<0$.[10] Dunque h e' strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ e il suo grafico e' dato dalla curva in grassetto nel piano cartesiano sotto.



[10] Per l'esattezza, $x=\ln(2)$ e' punto di massimo globale per h', e $h'(\ln(2))=2(\ln(2)-1)<0$. Dunque $h'(x)\le h'(\ln(2))<0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Poiche' (i) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$; (ii) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$; (iii) g e h sono funzioni continue, si conclude che esiste un x_0 tale che $g(x_0) = h(x_0)$. Inoltre, poiche' g e' strettamente crescente e h e' strettamente decrescente, esiste un unico x_0 tale che $g(x_0) = h(x_0)$ e $h(x) > g(x)$ per ogni $x \in (-\infty, x_0)$, $h(x) < g(x)$ per ogni $x \in (x_0, +\infty)$; dunque $f(x) = h(x)$ per ogni $x \in (-\infty, x_0]$, $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in (x_0, +\infty)$. Il grafico di f e' il seguente:



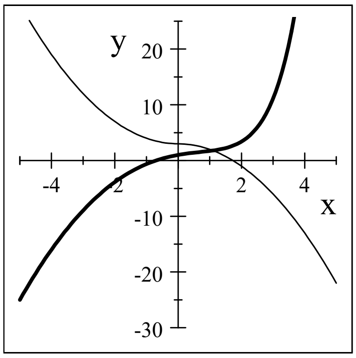
Pertanto f e' strettamente decrescente in $(-\infty, x_0]$, strettamente crescente in $(x_0, +\infty)$ e x_0 e' punto di min globale per f, $\min f = \inf f = f(x_0)$. Poiche' $g(0) = -2 < h(0) = -1$, si deduce che $x_0 > 0$, dunque esso risolve l'equazione $x^2 - e^x = x|x| - 2$, ovvero $e^x = 2$, e quindi $x_0 = \ln(2)$, $f(x_0) = (\ln(2))^2 - 2$.

Esercizio 80. *Si calcoli l'estremo superiore della funzione*

$$f(x) = \min\left\{3 - x|x|, e^x - x^2\right\}$$

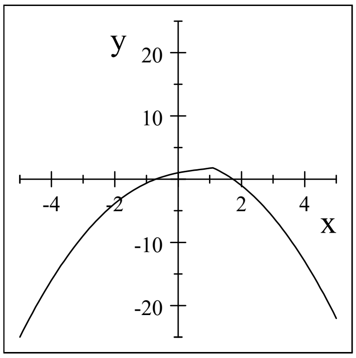
Soluzione Sia $g(x) = 3 - x|x|$, $h(x) = e^x - x^2$, entrambe funzioni definite in $\mathbb{R}$. Dunque $g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{se } x < 0 \\ 3 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e il grafico di g e' immediato da ricavare: si veda la curva sottile nel piano cartesiano sotto.

Riguardo a h, risulta che $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ (in virtù della gerarchia tra infiniti). Inoltre, $h'(x) = e^x - 2x$ e per ogni x risulta che $h'(x) > 0$. Dunque h e' strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e il suo grafico e' dato dalla curva in grassetto nel piano cartesiano sotto.



Poiche' (i) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$; (ii) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$; (iii) g e h sono funzioni continue, si conclude che esiste un x_0 tale che $g(x_0) = h(x_0)$. Inoltre, poiche' g e' strettamente decrescente e h e' strettamente crescente, esiste un unico x_0 tale che $g(x_0) = h(x_0)$ e $g(x) > h(x)$ per ogni $x \in (-\infty, x_0)$, $g(x) < h(x)$ per ogni $x \in (x_0, +\infty)$; dunque $f(x) = h(x)$ per ogni

$x \in (-\infty, x_0]$, $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in (x_0, +\infty)$. Il grafico di f e' il seguente:



Pertanto f e' strettamente crescente in $(-\infty, x_0]$, strettamente decrescente in $(x_0, +\infty)$ e x_0 e' punto di max globale per f, $\max f = \sup f = f(x_0)$. Poiche' $g(0) = 3 > h(0) = 1$, si deduce che $x_0 > 0$, dunque esso risolve l'equazione $3 - x^2 = e^x - x^2$, ovvero $e^x = 3$ e quindi $x_0 = \ln(3)$, $f(x_0) = 3 - (\ln(3))^2$.

Esercizio 81. *Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione*

$$f(x) = \exp\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = e^{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Soluzione L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R} - \{0\}$, e f è una funzione pari e $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, si deduce che $\inf f = 0$. Inoltre, $f(x) < e$ perché $1 - \frac{1}{x^2} < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$; dunque $\sup f = e$.