Geometria e Algebra Computazionale
CL in Matematica, 2017/18

Esercizi da portare all'esame

Si prepari un file m2 che permetta di risolvere due tra i seguenti problemi:

1. Trovare i valori di $a \in \mathbb{C}$ tali che i due polinomi nella x

   $f = x^5 + x + 1$ e $g = x^4 + ax^3 - 12 * x^2 + 7$ abbiano una radice complessa in comune, e li si approssimi . Quanti sono i valori precedenti di a che sono reali (eseguendo il calcolo in aritmetica esatta)?

2. Sia $\mathbb{C}^6$ lo spazio delle matrici simmetriche 3×3. Sia $X \subset \mathbb{C}^6$ la varietà formata dalle matrici simmetriche di rango 1. Si provi che $I(X)$ è un ideale omogeneo. Si trovi una applicazione polinomiale $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^6$ tale che la sua immagine coincida con X e si verifichi computazionalmente che $I(\mathrm{Im}\ f) = I(X)$.

3. Sia $f = (x+y)^2+2xy-y$, $g_a = x^2+y^2-ax+1$. Si calcoli il numero di punti reali in $V(f, g_a)$ per $a = -1, 0, 3$. Si calcoli il determinante della matrice bezoutiante dell'ideale generato da f e g_a, in funzione di a. In quante radici reali si annulla il bezoutiante? Da questo calcolo, come si possono trovare dei valori reali di a per cui $V(f, g_a)$ abbia quattro radici reali ? Trovare un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $V(f, g_a)$ abbia tutte le radici reali e provarlo in aritmetica esatta.

4. Si trovi la famiglia di polinomi $p(x)$ (che dipendono da t, s) di grado ≤ 6 tali che

   - lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in $x = 1$ è $1 + (x - 1) + s(x - 1)^2$
   - lo sviluppo di Taylor al terzo ordine in $x = 2$ è $-3 - 5(x - 2)^2 + t(x - 2)^3$.