1.- COSTRUIRE CON RIGA E COMPASSO

1.1 - La definizione.

Sia $\mathcal{I}$ un insieme di punti e di curve ([1]) del piano al quale appartengono almeno due punti distinti $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_1$. Un punto del piano [una retta del piano, una circonferenza del piano] si dice *costruibile con riga e compasso a partire da* $\mathcal{I}$ se è l'ultimo elemento di una sequenza finita ogni elemento della quale

– è un elemento di $\mathcal{I}$ ([2]), oppure

– è la retta passante per due punti P, Q che la precedono nella sequenza, oppure

– è la circonferenza di centro P passante per Q, con P, Q punti che la precedono nella sequenza, oppure

– è l'intersezione di due curve che la precedono nella sequenza.

La sequenza sopra descritta si dice una *costruzione con riga e compasso a partire da* $\mathcal{I}$ del punto [della retta, della circonferenza]; il numero naturale k si dice *lunghezza* di tale costruzione.

È immediato notare che

– ogni elemento di $\mathcal{I}$ è costruibile con riga e compasso a partire da $\mathcal{I}$ (mediante una costruzione di lunghezza 1)

– se un punto [una retta, una circonferenza] è costruibile con riga e compasso a partire da $\mathcal{I}$, anche ogni elemento che compare in qualsiasi sua costruzione è costruibile con riga e compasso a partire da $\mathcal{I}$.

---

[1] Non è questo il luogo dove discutere che cosa si debba intendere per "curva". Ai fini di quel che segue, "curva" può essere qualsiasi insieme di punti del piano; all'atto pratico, specificheremo volta per volta quali punti (oltre a $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_1$) e quali insiemi di punti appartengono a $\mathcal{I}$ e quindi non rischiamo ambiguità.

[2] Per effetto di quest'ultima precisazione, ogni elemento di $\mathcal{I}$ (sia esso un punto oppure una curva) può comparire nella sequenza!

Di solito, ed è quel che faremo costantemente nel seguito, la precisazione “con riga e compasso” si tralascia; si parla dunque semplicemente di punti, rette e circonferenze *costruibili a partire da* $\mathcal{I}$.

Se all’insieme $\mathcal{I}$ appartengono soltanto i due punti $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_1$, si tralascia anche la precisazione “a partire da $\mathcal{I}$”. Dunque, ad esempio, “costruibile” significa “costruibile con riga e compasso a partire dall’insieme $\mathcal{I} = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\}$.

Nel seguito, assumeremo il segmento di estremi $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_1$ come unità di misura per le distanze.

1.2 - Primi risultati.

Lemma 1.2.1

La retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ è costruibile, e su di essa per ogni numero intero positivo n sono costruibili due punti che hanno distanza n da $\mathbf{P}_0$.

Lemma 1.2.2

Su ogni retta costruibile c’è almeno un punto costruibile.

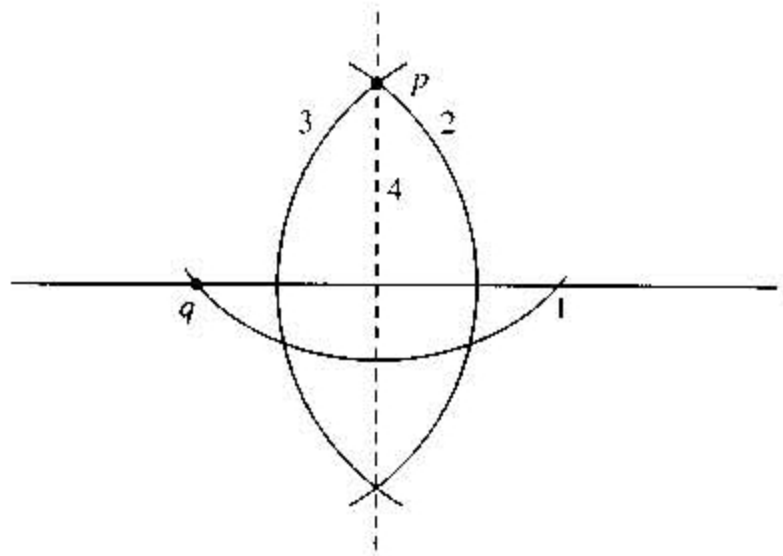
Le pagine che seguono sono tratte da:
Michel Artin
ALGEBRA
Bollati Boringhieri, 1991

(pagine 590-595)

Descriveremo tutte le possibili costruzioni, cominciando da alcune ben note. In ciascuna delle figure seguenti, le rette e le circonferenze vanno disegnate nell'ordine indicato.

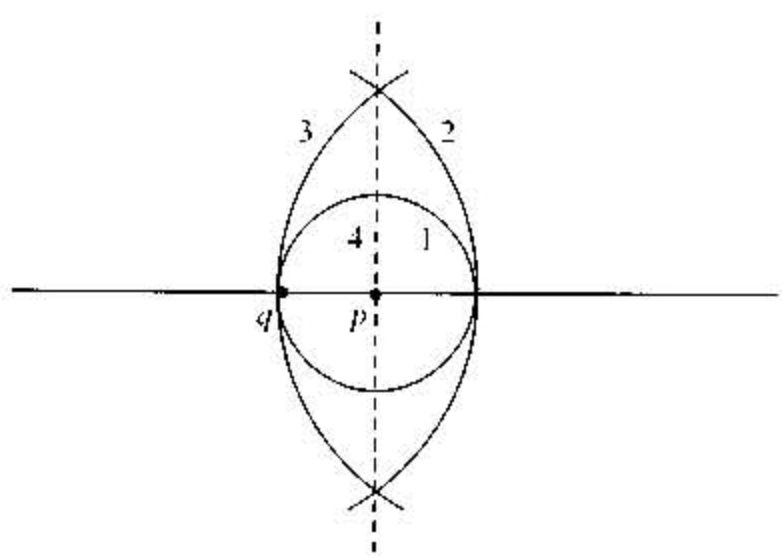
(4.2) *Disegnare una retta passante per un punto costruito p e perpendicolare a una retta costruita ℓ.*

Caso 1: $p \notin \ell$

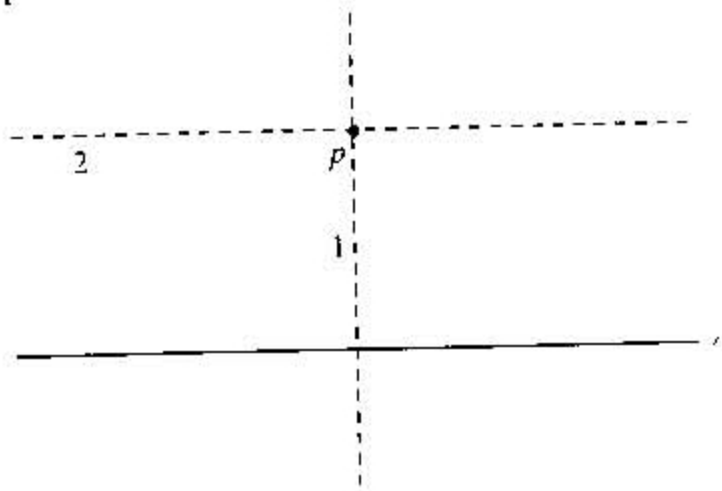


Questa costruzione può essere effettuata con un punto $q \in \ell$ qualsiasi, purché non appartenente alla perpendicolare. Tuttavia, faremmo bene a non scegliere i punti arbitrariamente, poiché così facendo avremmo difficoltà a distinguere i punti che abbiamo costruito da quelli fittizi che compaiono in conseguenza di una scelta arbitraria. Ogniqualvolta avremo bisogno di un punto arbitrario, ne costruiremo uno *ad hoc*.

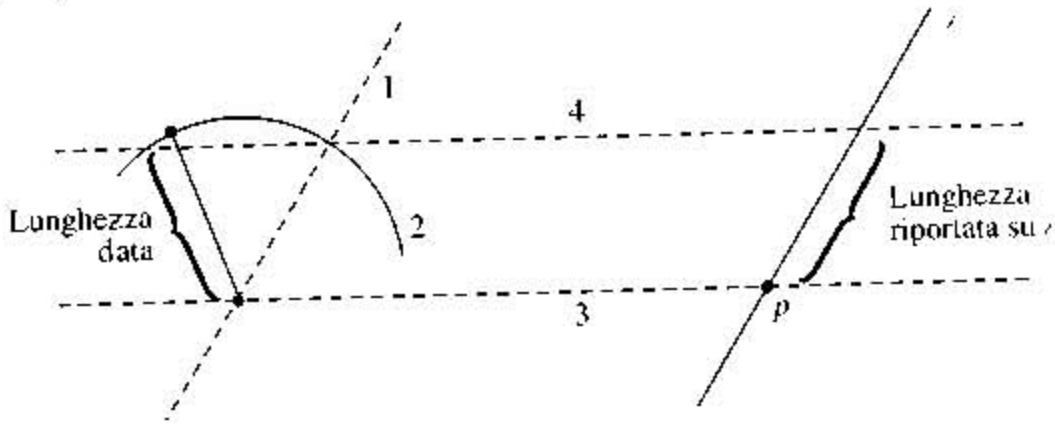
Caso 2: $p \in \ell$



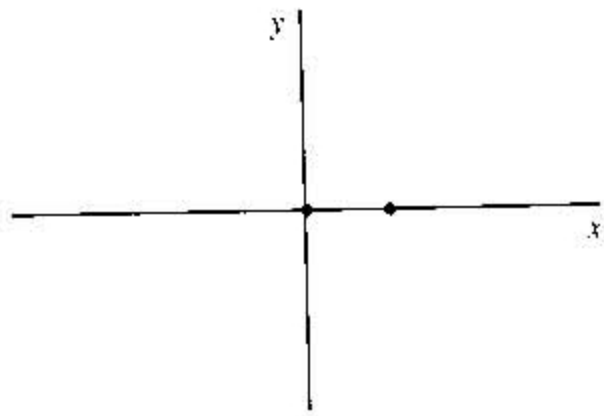
(4.3) *Tracciare una retta parallela a ℓ e passante per p.* (Basta applicare i casi 1 e 2 precedenti).



(4.4) *Riportare una lunghezza definita da due punti su una retta costruita ℓ, partendo da un punto costruito $p \in \ell$.* (Basta utilizzare la costruzione di rette parallele).



Queste costruzioni permettono di introdurre coordinate cartesiane nel piano sicché possiamo supporre che i due punti assegnati all'inizio abbiano coordinate $(0,0)$ e $(0,1)$. Potremmo scegliere altri sistemi di coordinate che comunque condurrebbero a teorie equivalenti.



Diremo che un numero reale è *costruibile* (con riga e compasso) se il suo valore assoluto $|a|$ è la distanza tra due punti costruibili con riga e compasso, l'unità di lunghezza essendo la distanza tra i punti assegnati all'inizio.

(4.5) PROPOSIZIONE *Un punto $p = (a, b)$ è costruibile se e solo se le sue coordinate cartesiane a e b sono numeri costruibili.*

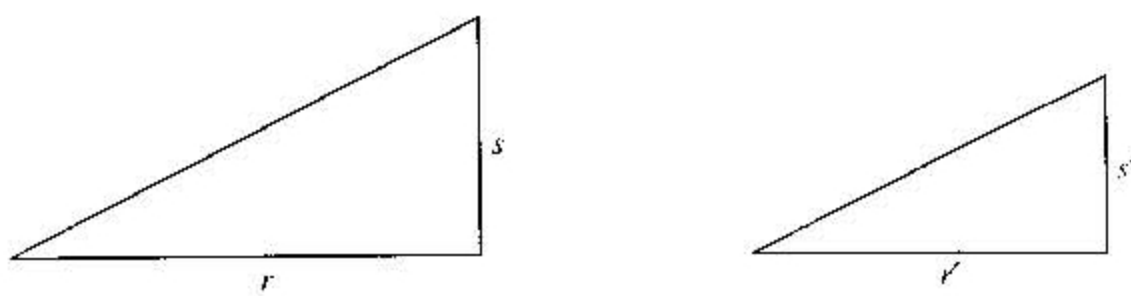
Dimostrazione. Ciò segue dalle costruzioni precedenti. Dato un punto costruito p, possiamo costruire le sue coordinate conducendo le perpendicolari agli assi. Viceversa, siano a e b numeri costruibili. Allora possiamo costruire il punto p riportando a, b sui due assi, come specificato in (4.4), e conducendo perpendicolari. ■

(4.6) PROPOSIZIONE *I numeri costruibili formano un sottocampo di* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Faremo vedere che se a e b sono numeri costruibili positivi, allora $a+b$, ab, $a-b$ (se $a > b$) e a^{-1} (se $a \neq 0$) sono anch'essi costruibili. Da ciò si ottiene facilmente la chiusura nel caso in cui a o b sia negativo.

Per l'addizione e la sottrazione, basta riportare le lunghezze su una retta, utilizzando la costruzione (4.4).

Per la moltiplicazione, utilizziamo triangoli rettangoli simili:



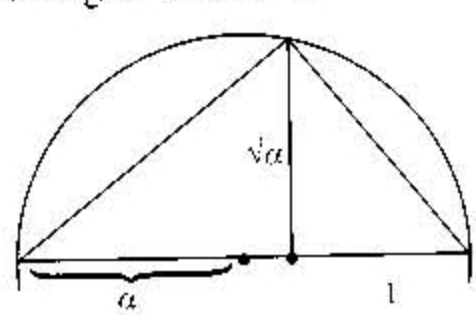
Dati un triangolo e un segmento parallelo ad uno dei suoi lati, tracciando le parallele agli altri due lati passanti per gli estremi del segmento si costruisce su di esso un triangolo simile a quello dato.

Per costruire il prodotto ab, poniamo $r = 1$, $s = a$ e $r' = b$. Allora poiché $r/s = r'/s'$, si ha $s' = ab$. Per costruire a^{-1}, poniamo $r = a$, $s = 1$ e $r' = 1$. Allora risulta $s' = a^{-1}$. ■

(4.7) PROPOSIZIONE *Se a è un numero costruibile positivo, tale risulta $\sqrt{a}$.*

Dimostrazione. Usiamo di nuovo i triangoli simili. Dobbiamo costruirli in modo che $r = a$, $r' = s$ e $s' = 1$. Allora risulta: $s = r' = \sqrt{a}$.

Questa volta la costruzione è meno ovvia, ma possiamo utilizzare i triangoli inscritti in una circonferenza. Come sappiamo dalle scuole superiori, un triangolo inscritto in una circonferenza avente un diametro come lato è un triangolo rettangolo. Questo teorema si può dimostrare usando l'equazione di una circonferenza e il teorema di Pitagora. Tracciamo dunque una circonferenza di diametro $1 + a$ e procediamo nel modo illustrato nella figura qui sotto. Si noti che il triangolo grande si compone di due triangoli simili. ■



(4.8) PROPOSIZIONE *Supponiamo assegnati quattro punti, le cui coordinate appartengono a un sottocampo F di $\mathbb{R}$. Siano A, B rette o circonferenze costruite utilizzando tali punti. Allora i punti di intersezione di A e B hanno coordinate in F o in un campo della forma $F(\sqrt{r})$, dove r è un numero positivo in F.*

Dimostrazione. La retta passante per (a_0, b_0), (a_1, b_1) ha equazione:

$$(a_1 - a_0)(y - b_0) = (b_1 - b_0)(x - a_0).$$

La circonferenza di centro (a_0, b_0) e passante per (a_1, b_1) ha equazione:

$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = (a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2.$$

L'intersezione di due rette può essere determinata risolvendo un sistema di due equazioni lineari a coefficienti in F, quindi le sue coordinate stanno anch'esse in F. Per trovare le intersezioni di una retta e di una circonferenza usiamo l'equazione della retta per eliminare una variabile dall'equazione della circonferenza, ottenendo un'equazione di secondo grado in una sola incognita. Tale equazione ha soluzioni nel campo $F(\sqrt{D})$, dove D è il discriminante, il quale è un elemento di F. Se $D < 0$, la retta e la circonferenza non si intersecano.

Consideriamo ora le intersezioni di due circonferenze, aventi ad esempio, equazioni

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \quad \text{e} \quad (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2,$$

con $a_i, b_i, r_i \in F$. In generale, le soluzioni di un sistema di due equazioni di secondo grado in due incognite si ottengono risolvendo un'equazione di quarto grado. In questo caso siamo fortunati, poiché la differenza delle due equazioni di secondo grado è un'equazione lineare che può essere usata, come prima, per eliminare una variabile. ∎

(4.9) TEOREMA *Siano $a_1, \ldots, a_m$ numeri reali costruibili. Allora esiste una catena di sottocampi $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = K$ tali che*

(i) *K è un sottocampo di $\mathbb{R}$;*

(ii) *$a_1, \ldots, a_m \in K$;*

(iii) *per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, il campo F_{i+1} si ottiene a partire da F_i aggiungendo la radice quadrata di un numero positivo $r_i \in F_i$ che non è un quadrato in F_i.*

Viceversa, sia $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = K$ una catena di sottocampi di $\mathbb{R}$ che soddisfi alla condizione (iii). *Allora ogni elemento di K è costruibile.*

Dimostrazione. Abbiamo introdotto un sistema di coordinate tale che i punti da cui siamo partiti abbiano coordinate in $\mathbb{Q}$. Il procedimento per costruire i numeri a_i consiste essenzialmente nel tracciare rette e circonferenze e prendere le

loro intersezioni. Pertanto la prima parte del teorema segue, per induzione, dalla proposizione (4.8). Viceversa, data una catena di campi che soddisfa la condizione (iii), i suoi elementi sono costruibili, in base alle proposizioni (4.6) e (4.7). ∎

(4.10) COROLLARIO *Se a è un numero reale costruibile, allora a è algebrico e il suo grado su* Q *è una potenza di* 2.

Dimostrazione. Nella catena di campi (4.9), il grado di F_{i+1} su F_i è 2, e quindi $[K : \mathbf{Q}] = 2^n$. Il corollario (3.6) ci dice che il grado di a divide 2^n, e quindi è una potenza di 2. ∎

L'enunciato inverso del corollario (4.10) è falso: per esempio esistono numeri reali a che hanno grado 4 su Q, ma non sono costruibili. Lo dimostreremo più avanti, utilizzando la teoria di Galois.

Siamo ora in grado di dimostrare l'impossibilità di talune costruzioni geometriche. Il nostro metodo consisterà nel far vedere che se fosse possibile una certa costruzione, sarebbe anche possibile costruire un numero algebrico il cui grado su Q non è una potenza di 2, in contraddizione col corollario (4.10).

Come primo esempio, trattiamo il problema della trisezione dell'angolo. Dobbiamo fare attenzione a porre correttamente il problema, poiché è possibile trisecare molti angoli particolari, ad esempio un angolo di 45°. Di solito, il problema si enuncia richiedendo un unico metodo di costruzione che valga per *un angolo assegnato qualsiasi*.

Per essere precisi il più possibile, diciamo che un angolo θ è *costruibile* se il suo coseno $\cos\theta$ è costruibile. È possibile dare altre definizioni equivalenti. Per esempio, θ è costruibile se e solo se la retta che passa per l'origine e forma un angolo θ con l'asse x è costruibile. Oppure, θ è costruibile se e solo se è possibile costruire due rette qualsiasi formanti tra loro un angolo θ.

Ora, basta assegnare un angolo θ (ad esempio riportando il suo coseno sull'asse x) per disporre di una nuova informazione utilizzabile in un'eventuale trisezione. Per analizzare le implicazioni di questa nuova informazione, dovremmo cominciare a determinare tutte le costruzioni che potrebbero essere effettuate quando, oltre a due punti, venisse assegnata all'inizio un'altra lunghezza ($= \cos\theta$). Preferiremmo non perdere troppo tempo, e per fortuna c'è una via di uscita. Esibiremo un angolo θ particolare, con le seguenti proprietà:

(4.11) (i) θ è costruibile,

(ii) $\frac{1}{3}\theta$ non è costruibile.

La prima condizione ci dice che l'assegnazione dell'angolo θ non ci dà alcuna nuova informazione, nel senso che, se l'angolo θ, una volta assegnato, può essere trisecato, esso può essere trisecato anche senza esser stato assegnato. La seconda condizione ci dice che non esiste un metodo generale di trisezione, poiché non è possibile trisecare θ.

L'angolo $\theta = 60°$ risolve il problema. Un angolo di $60°$ è costruibile, poiché $\cos 60° = \frac{1}{2}$. D'altra parte, è impossibile costruire un angolo di $20°$. Per dimostrarlo faremo vedere che $\cos 20°$ è un numero algebrico di grado 3 su $\mathbf{Q}$. Ne seguirà, in virtù del corollario (4.10), che $\cos 20°$ non è costruibile e quindi che l'angolo di $60°$ non può essere trisecato.

Le formule di addizione per il seno e il coseno possono essere usate per dimostrare l'identità:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \tag{4.12}$$

Ponendo $\theta = 20°$ e $\alpha = \cos 20°$, si ottiene la relazione: $\frac{1}{2} = 4\alpha^3 - 3\alpha$, ossia, $8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$.

(4.13) LEMMA *Il polinomio $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ è irriducibile su $\mathbf{Q}$.*

Dimostrazione. È sufficiente cercare fattori lineari $ax + b$, con a, b interi tali che a divida 8, e b sia uguale a ± 1. Un altro modo per dimostrare l'irriducibilità è quello di verificare che f non ha radici modulo 5. ■

Questo lemma ci dice che α ha grado 3 su $\mathbf{Q}$, e quindi non può essere costruito.

Come secondo esempio, dimostriamo che è impossibile costruire con riga e compasso il poligono regolare di 7 lati. (Questo problema è simile al precedente, poiché la costruzione dell'angolo di $20°$ è equivalente alla costruzione del poligono regolare di 18 lati.) Denotiamo con θ l'angolo $2\pi/7$ e poniamo $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$. Allora ζ è una radice del polinomio $x^6 + x^5 + \cdots + 1$, che è irriducibile [cap. 11 (4.6)]. Pertanto ζ ha grado 6 su $\mathbf{Q}$. Se l'ettagono regolare fosse costruibile, allora $\cos\theta$ e $\sin\theta$ sarebbero numeri costruibili, e quindi apparterrebbero a un'estensione reale di grado 2^n su $\mathbf{Q}$, in virtù del teorema (4.9). Chiamiamo K tale campo e consideriamo l'estensione $K(i)$. Essa ha grado 2, e pertanto $[K(i) : \mathbf{Q}] = 2^{n+1}$. Ma $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta \in K(i)$. Ciò contraddice il fatto che il grado di ζ è 6 [cfr. (3.6)].

Conviene notare che la precedente argomentazione non vale soltanto per il numero 7: essa è applicabile a un numero primo p qualsiasi, con l'unica condizione che $p - 1$, ossia il grado del polinomio irriducibile $x^{p-1} + \cdots + x + 1$, non sia una potenza di 2.

(4.14) COROLLARIO *Sia p un numero primo. Se il poligono regolare di p lati può essere costruito con riga e compasso, allora $p = 2^r + 1$, essendo r un intero opportuno.* ■

Gauss ha dimostrato il viceversa, ossia che, se un numero primo p ha la forma $2^r + 1$, è possibile costruire il poligono regolare di p lati. Per esempio, il poligono regolare di 17 lati può essere costruito con riga e compasso.

2.- LE CONICHE CON RIGA E COMPASSO

2.1 - Ovvietà sulla parabola.

Scelti nel piano un punto **F** e una retta d, si dice *parabola* di *fuoco* **F** e *direttrice* d l'insieme dei punti P del piano per i quali si ha

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{P}, d)\,.$$

Sia $\mathbf{F}_0$ la proiezione ortogonale di **F** su d, e sia **O** il punto medio del segmento $\mathbf{FF}_0$. Conviene studiare la parabola di fuoco **F** e direttrice d scrivendone l'equazione in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico che abbia l'origine in **O** e l'asse delle ascisse parallelo alla retta d: se scegliamo come unità di misura per le distanze il doppio della distanza di **F** da d, l'equazione della parabola è

$$y = x^2\,.$$

Dunque, a meno di similitudini, esiste una sola parabola. Inoltre, la retta $\mathbf{FF}_0$ (che per costruzione è la retta passante per il fuoco ortogonale alla direttrice, e nel nostro sistema di riferimento ha equazione $x = 0$) è asse di simmetria per la parabola: essa si dice brevemente *asse* della parabola.

Teorema 2.1.1

(i) Ogni retta parallela all'asse incontra la parabola in un solo punto;

(ii) se **P** è un punto della parabola, esistono esattamente due rette passanti per **P** che incontrano la parabola nel solo punto **P**.

Dimostrazione — Ogni retta parallela all'asse della parabola ha equazione della forma $x = x_0$ e quindi incontra la parabola nel solo punto $\mathbf{P} \equiv (x_0,\, x_0^2)$.

Viceversa, sia $\mathbf{P} \equiv (x_0,\, x_0^2)$ un punto della parabola e sia r una retta non parallela all'asse della parabola; allora r ha equazione

$$y = px + q$$

e passa per **P** se e soltanto se

$$x_0^2 = px_0 + q$$

ossia se e soltanto se

$$q = x_0^2 - px_0\,.$$

Cerchiamo le intersezioni fra r e la parabola per imporre che l'unica di esse sia il punto **P** . Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = px + x_0^2 - px_0 \end{cases}$$

che ci conduce all'equazione nella x

$$x^2 - px - (x_0^2 - px_0) = 0\,.$$

Poiché sappiamo che x_0 è soluzione, possiamo abbassare di grado dividendo il primo membro per $x - x_0$. L'equazione diventa

$$(x - x_0)(x + x_0 - p) = 0$$

cosicché la retta r incontra la parabola nel solo punto **P** se e soltanto se

$$p - x_0 = x_0$$

ossia se e soltanto se

$$p = 2x_0\,.$$

Sia $\mathcal{P}$ una parabola, e sia **T** un punto di $\mathcal{P}$. L'unica retta passante per **T** non parallela all'asse di $\mathcal{P}$ che incontra $\mathcal{P}$ nel solo punto **T** si dice *tangente* a $\mathcal{P}$ nel punto **T**.

Utilizzando il metodo delle coordinate come nella dimostrazione del teorema 2.1.1 non è difficile vedere che per ogni punto **P** del piano non appartenente alla parabola

– se la distanza di **P** dal fuoco è minore della distanza di **P** dalla direttrice, per **P** non passa nessuna retta tangente alla parabola;

– se la distanza di **P** dal fuoco è maggiore della distanza di **P** dalla direttrice, per **P** passano esattamente due rette tangenti alla parabola.

2.2 - Costruzione con riga e compasso di punti della parabola e delle tangenti alla parabola.

In questa sezione, **F** sarà un fissato punto del piano, d sarà una fissata retta del piano e $\mathcal{P}$ sarà la parabola di fuoco **F** e direttrice d .

Teorema 2.2.1

Per ogni punto **P** della direttrice d, sia $r_{\mathbf{P}}$ la retta per **P** ortogonale a d (e quindi parallela all'asse della parabola) e sia **T** l'unico punto (cfr. teorema 2.1.1 (i)) in cui $r_{\mathbf{P}}$ incontra $\mathcal{P}$.

L'asse del segmento **FP** è la retta tangente alla parabola $\mathcal{P}$ nel punto **T** .

Dimostrazione — Poiché **T** appartiene alla parabola $\mathcal{P}$, per definizione di parabola è

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{T}, \mathbf{F}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{T}, d)$$

ma per come è stato costruito **T** è

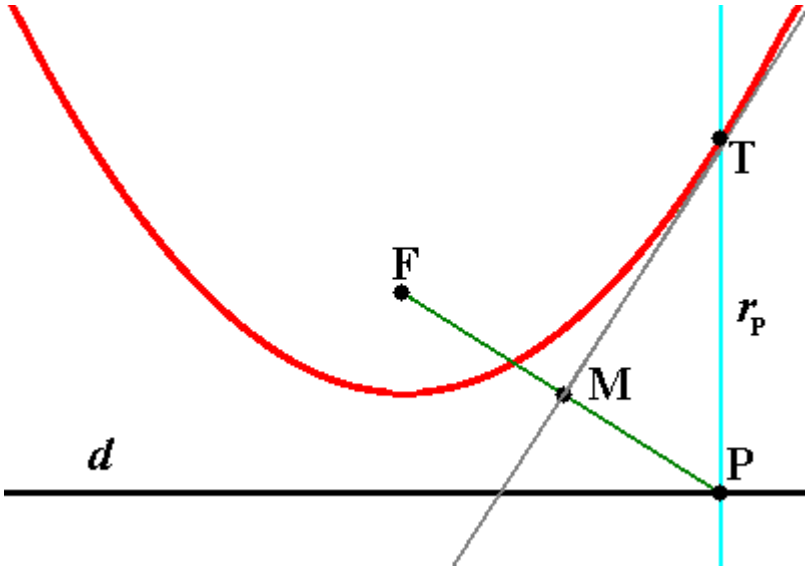
$$\boldsymbol{d}(\mathbf{T}, d) = \boldsymbol{d}(\mathbf{T}, \mathbf{P})$$

(infatti **P** è la proiezione ortogonale di **T** su d). Dunque **T** appartiene all'asse del segmento **FP**.

Se l'asse del segmento **FP** incontrasse la parabola $\mathcal{P}$ in un altro punto $\overline{\mathbf{T}}$, dovrebbe essere

$$\boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}}, \mathbf{P}) = \boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}}, \mathbf{F}) = \boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}}, d)$$

(la prima uguaglianza perché $\overline{\mathbf{T}}$ appartiene all'asse del segmento FP; la seconda perché $\overline{\mathbf{T}}$ appartiene alla parabola $\mathcal{P}$) cioè la proiezione ortogonale di $\overline{\mathbf{T}}$ su d dovrebbe essere **P**; ma allora $\overline{\mathbf{T}}$ apparterrebbe alla retta $r_{\mathbf{P}}$, che però incontra la parabola $\mathcal{P}$ soltanto nel punto **T**.



Corollario 2.2.2

Sia **F** costruibile con riga e compasso, sia d costruibile con riga e compasso, e sia $\mathcal{P}$ la parabola di fuoco **F** e direttrice d.

Se **T** è un punto di $\mathcal{P}$ costruibile con riga e compasso, è costruibile con riga e compasso la retta tangente in **T** a $\mathcal{P}$.

Dimostrazione — Con riga e compasso è possibile

(i) costruire la retta r passante per **T** e ortogonale a d;

(ii) costruire l'intersezione **P** tra la retta r e la retta d;

(iii) costruire l'asse del segmento **FP**.

Per il teorema 2.2.1, l'asse del segmento **FP** è la retta tangente in **T** a $\mathcal{P}$.

Corollario 2.2.3

Sia **F** costruibile con riga e compasso, sia d costruibile con riga e compasso, e sia $\mathcal{P}$ la parabola di fuoco **F** e direttrice d.

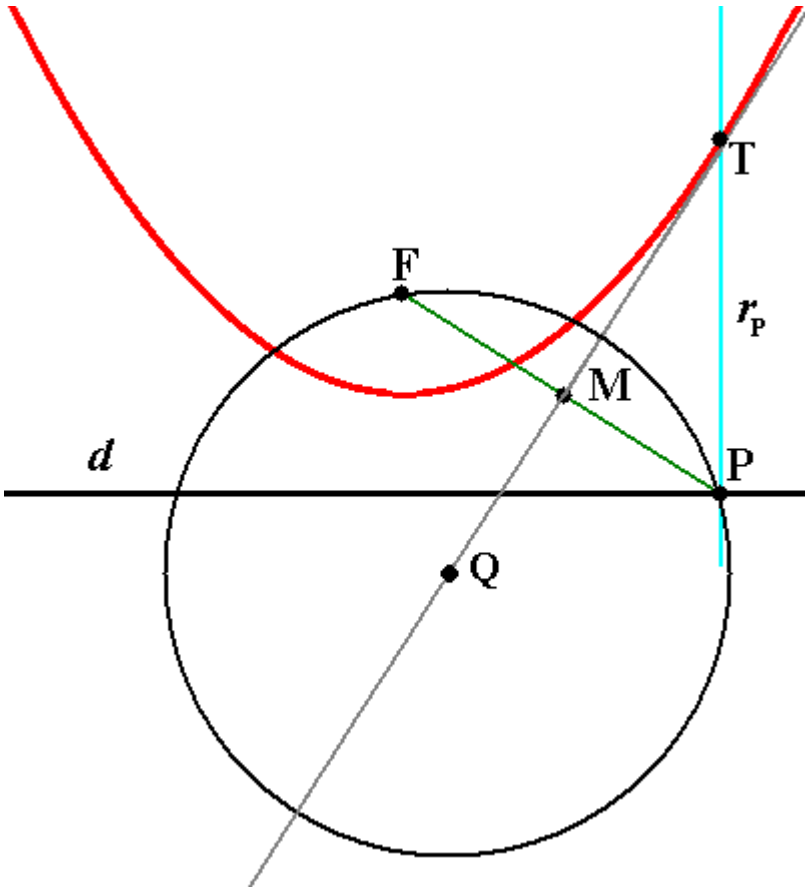
Per ogni punto **Q** del piano costruibile con riga e compasso, è costruibile con riga e compasso ogni retta tangente a $\mathcal{P}$ passante per **Q**.

Dimostrazione — Con riga e compasso è possibile

(i) costruire la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro **Q** passante per **F**;

(i) costruire ogni punto **P** di intersezione fra d e $\mathcal{C}$;

(iii) costruire l'asse t del segmento **FP**.



Per il teorema 2.2.1, la retta t è tangente a $\mathcal{P}$. Ma, per come è stato trovato **P**, il punto **Q** appartiene a t, dunque t è una retta tangente a $\mathcal{P}$ passante per **Q**. Non è poi difficile verificare che con questo procedimento si ottengono tutte le rette tangenti a $\mathcal{P}$ passanti per **Q**.

Corollario 2.2.4

Sia t una retta tangente alla parabola $\mathcal{P}$ di fuoco **F** e direttrice d.

La simmetria assiale di asse t porta **F** su d.

Dimostrazione — Sia **T** l'unica intersezione fra t e $\mathcal{P}$, e sia **P** la proiezione ortogonale di T su d. Per il teorema 2.2.1, l'asse del segmento **FP** è tangente alla parabola in **T**, dunque coincide con t (perché la tangente a una parabola in un suo punto è unica!). Pertanto, la simmetria assiale di asse t scambia **F** con **P** (e in particolare porta **F** su d).

Corollario 2.2.5

Sia t l'asse di una simmetria assiale che porta il punto **F** sulla retta d. Allora t è tangente alla parabola $\mathcal{P}$ di fuoco **F** e direttrice d.

Dimostrazione — Sia **P** ($\in d$) l'immagine di **F** nella simmetria assiale di asse t, sia $r_{\mathbf{P}}$ la retta per **P** ortogonale a d e sia **T** il punto in cui $r_{\mathbf{P}}$ incontra la parabola $\mathcal{P}$. Poiché t è l'asse del segmento **FP**, per il teorema 2.2.1 t è tangente alla parabola $\mathcal{P}$ nel punto **T**.

Teorema 2.2.6

Sia **F** costruibile con riga e compasso, sia d costruibile con riga e compasso, e sia $\mathcal{P}$ la parabola di fuoco **F** e direttrice d.

Per ogni punto **P** della direttrice d che sia costruibile con riga è compasso, è costruibile con riga e compasso il punto **T** di $\mathcal{P}$ tale che l'asse del segmento **FP** è tangente a $\mathcal{P}$ in **T**.

Dimostrazione — Sia t l'asse del segmento **FP** e sia $r_{\mathbf{P}}$ la retta per **P** ortogonale a d; sia t che $r_{\mathbf{P}}$ sono costruibili con riga e compasso; allora è costruibile con riga e compasso il punto **T** intersezione fra t e $r_{\mathbf{P}}$; per il teorema 2.2.1, **T** è il punto della parabola $\mathcal{P}$ in cui la retta t è tangente a $\mathcal{P}$.

2.3 - Ovvietà su ellisse e iperbole.

Scelti nel piano due punti $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, sia $c := \frac{1}{2}\boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. Sia inoltre a un numero reale positivo; poniamo $e := \frac{c}{a}$.

Se $a > c$, si dice *ellisse* di *fuochi* $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ ed *eccentricità* e l'insieme dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ è uguale a $2a$; se invece $a < c$, si dice *iperbole* di *fuochi* $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ ed *eccentricità* e l'insieme dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze da $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ (considerati in entrambi gli ordini!) è uguale a $2a$.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel quale l'asse delle ascisse è la retta $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ e l'origine è il punto medio del segmento $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ (cosicché $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$, è facile verificare che l'ellisse (o l'iperbole) di eccentricità e ha equazione

(*) $$(a^2 - c^2)(a^2 - x^2) = a^2y^2 \,.$$

Se si tratta di un'ellisse, e quindi $a > c$, si può porre $b^2 := a^2 - c^2$ e scrivere l'equazione (*) nella forma

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \,.$$

Se si tratta invece di un'iperbole, e quindi $a < c$, si può porre $b^2 := c^2 - a^2$ e scrivere l'equazione (*) nella forma

$$\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \,.$$

Sia $\mathcal{E}$ un'ellisse, e sia $\mathbf{T}$ un punto di $\mathcal{E}$. Si dimostra che esiste esattamente una retta passante per $\mathbf{T}$ che incontra $\mathcal{E}$ nel solo punto $\mathbf{T}$; tale retta si dice *tangente* a $\mathcal{E}$ nel punto $\mathbf{T}$.

Inoltre si può verificare che per ogni punto $\mathbf{P}$ del piano non appartenente all'ellisse di fuochi $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ (con $\boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 2c$) ed eccentricità $e = \frac{c}{a}$

– se $\boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2) < 2a$, per $\mathbf{P}$ non passa nessuna retta tangente alla parabola;

– se $\boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2) > 2a$, per $\mathbf{P}$ passano esattamente due rette tangenti alla parabola.

Il caso dell'iperbole è complicato dall'esistenza degli asintoti. Sia $\mathcal{H}$ un'iperbole, e sia $\mathbf{T}$ un punto di $\mathcal{H}$. Si dimostra che esistono esattamente tre rette passanti per $\mathbf{T}$ che incontrano $\mathcal{H}$ nel solo punto $\mathbf{T}$; due di esse sono parallele a uno degli asintoti, la terza si dice *tangente* a $\mathcal{H}$ nel punto $\mathbf{T}$.

Inoltre si può verificare che per ogni punto $\mathbf{P}$ del piano non appartenente all'iperbole di fuochi $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ (con $\boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 2c$) ed eccentricità $e = \frac{c}{a}$

– se $|\boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) - \boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2)| < 2a$, per $\mathbf{P}$ non passa nessuna retta tangente alla parabola;

– se $|\boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) - \boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2)| > 2a$, per $\mathbf{P}$ passano esattamente due rette tangenti alla parabola.

2.4 - Costruzione con riga e compasso di punti dell'ellisse e delle tangenti all'ellisse.

Teorema 2.4.1

Siano $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ punti del piano, sia $2c$ la distanza fra $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ e sia a un numero reale positivo maggiore di c. Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $\mathbf{F}_1$ e raggio $2a$ e sia $\mathcal{E}$ l'ellisse $\mathcal{E}$ di fuochi $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ ed $\frac{c}{a}$.

Per ogni punto $\mathbf{H}$ di $\mathcal{C}$, sia t l'asse del segmento $\mathbf{HF}_2$ e sia $\mathbf{T}$ l'intersezione fra t e la retta $\mathbf{HF}_1$. Allora t è tangente in $\mathbf{T}$ all'ellisse $\mathcal{E}$.

Dimostrazione — Sia r la retta per $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$, e sia $\mathbf{A}$ il punto di intersezione fra r e $\mathcal{C}$ più vicino a $\mathbf{F}_2$.

Osserviamo in primo luogo che t incontra effettivamente la retta $\mathbf{HF}_1$ in un punto $\mathbf{T}$: se così non fosse, le rette $\mathbf{HF}_1$ e $\mathbf{HF}_2$ sarebbero ortogonali, cioè l'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{HF}_2$ sarebbe retto; ma è l'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{HA}$ che è retto (perché inscritto nella semicirconferenza di diametro $\mathbf{F}_1\mathbf{A}$) mentre l'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{HF}_2$ è strettamente minore dell'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{HA}$. Inoltre, il punto $\mathbf{T}$ è interno al segmento $\mathbf{FH}_1$: se così non fosse, il punto $\mathbf{T}$ apparterrebbe alla semiretta individuata da $\mathbf{F}_1$ su $\mathbf{HF}_1$ non contenente $\mathbf{H}$ oppure alla semiretta individuata da $\mathbf{H}$ su $\mathbf{F}_1\mathbf{H}$ non contenente $\mathbf{F}_1$.

Nel primo caso sarebbe

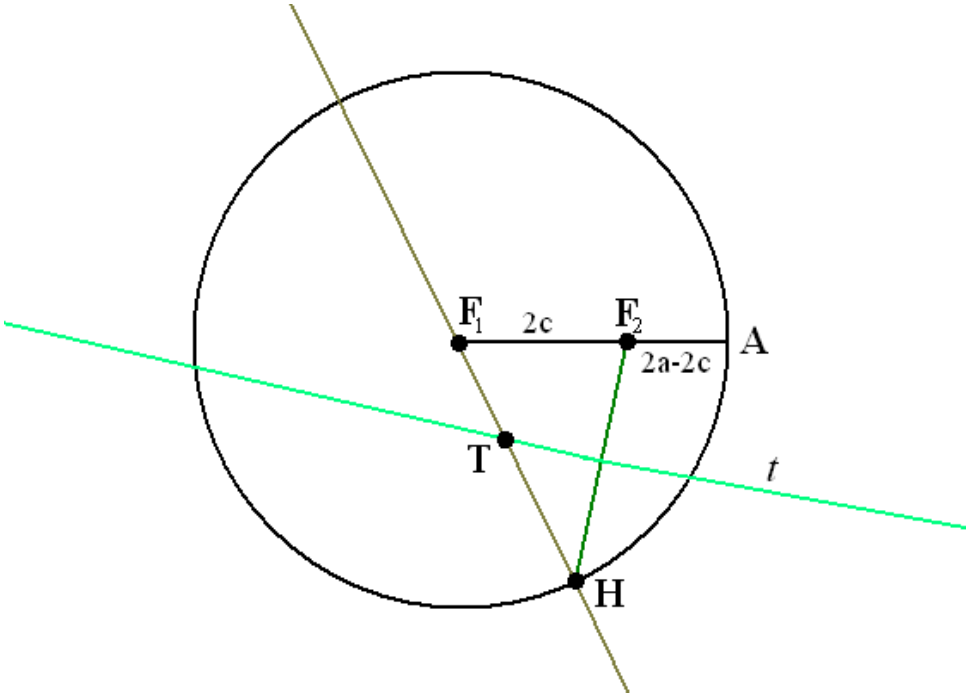
$$\boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_2) - \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_1) = \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{H}) - \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_1) = \boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1,\mathbf{H}) = 2a > 2c = \boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2)$$

mentre nel secondo caso sarebbe

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_1) - \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_2) = \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{H}) + \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{F}_1) - \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_2) =$$

$$\sum = \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_2) + \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{F}_1) - \boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_2) = \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{F}_1) = 2a > 2c = \boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2)$$

e comunque nel triangolo $\mathbf{TF}_1\mathbf{F}_2$ il lato $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ sarebbe strettamente minore della differenza fra gli altri due.



È facile adesso concludere che il punto **T** appartiene all'ellisse $\mathcal{E}$, dato che

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_2)=\boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{d}(\mathbf{T},\mathbf{H})=\boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1,\mathbf{H})=2a\,.$$

Per ogni altro punto $\overline{\mathbf{T}}$ di t è

$$\boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}},\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}},\mathbf{F}_2)=\boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}},\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{d}(\overline{\mathbf{T}},\mathbf{H})>\boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1,\mathbf{H})=2a$$

perché nel triangolo $\overline{\mathbf{T}}\mathbf{F}_1\mathbf{H}$ il lato $\mathbf{F}_1\mathbf{H}$ deve essere strettamente minore della somma degli altri due. Dunque la retta t incontra $\mathcal{E}$ nel solo punto **T**, cioè è tangente in **T** a $\mathcal{E}$, come si voleva dimostrare.

Corollario 2.4.2

Siano $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ punti del piano costruibili con riga e compasso, sia $2c$ la distanza fra $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ e sia a un numero reale positivo costruibile maggiore di c. Sia $\mathcal{E}$ l'ellisse $\mathcal{E}$ di fuochi $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ ed eccentricità $\frac{c}{a}$.

La circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $\mathbf{F}_1$ e raggio $2a$ è costruibile; per ogni punto costruibile **H** di $\mathcal{C}$ si può costruire un punto di $\mathcal{E}$ come intersezione fra l'asse del segmento $\mathbf{HF}_2$ e la retta $\mathbf{HF}_1$; e, viceversa, ogni punto costruibile di $\mathcal{E}$ si può ottenere in questo modo a partire da un punto costruibile di $\mathcal{C}$.

Dimostrazione – Sulla semiretta di origine $\mathbf{F}_2$ non contenente $\mathbf{F}_1$ della retta $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ si può costruire un punto **A** in modo che la distanza di A da $\mathbf{F}_2$ sia $\frac{a-c}{2}$: la circonferenza $\mathcal{C}$ è la circonferenza di centro $\mathbf{F}_1$ passante per **A**, dunque è costruibile. L'ultima parte dell'asserto segue facilmente dal teorema 2.4.1 ricordando che la retta individuata da due punti costruibili è costruibile.

Corollario 2.4.3

Siano $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ punti del piano costruibili con riga e compasso, sia $2c$ la distanza fra $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ e sia a un numero reale positivo costruibile maggiore di c. Sia $\mathcal{E}$ l'ellisse $\mathcal{E}$ di fuochi $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ ed eccentricità $\frac{c}{a}$.

Per ogni punto costruibile **P** del piano, è costruibile ogni tangente a $\mathcal{E}$ passante per **P**.

Dimostrazione – Come si è visto nel corollario 2.4.2, è costruibile la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $\mathbf{F}_1$ e raggio $2a$.

Esistono rette tangenti a $\mathcal{E}$ passanti per **P** se e soltanto se

(*) $$\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_2)\geq 2a$$

e in tal caso la circonferenza $\overline{\mathcal{C}}$ di centro **P** passante per $\mathbf{F}_2$ incontra la circonferenza $\mathcal{C}$: infatti la distanza fra i centri di $\mathcal{C}$ e $\overline{\mathcal{C}}$ è $\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_1)$, e per la (*) si ha

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_1)\geq 2a-\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_2)$$

mentre (considerando il triangolo $\mathbf{PF}_1\mathbf{F}_2$)

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_1)\leq\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_2)+\boldsymbol{d}(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2)=\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}_2)+2c<2a\,.$$

La circonferenza $\overline{\mathcal{C}}$ è costruibile, e quindi è costruibile ogni intersezione **H** fra $\mathcal{C}$ e $\overline{\mathcal{C}}$. Per il teorema 2.4.1, l'asse t del segmento $\mathbf{HF}_2$ è tangente a $\mathcal{E}$; ma, per come è stato trovato **H**, il punto **P** appartiene a t, dunque t è una retta tangente a $\mathcal{E}$ passante per **P**. Non è poi difficile verificare che con questo procedimento si ottengono tutte le rette tangenti a $\mathcal{E}$ passanti per **P**.

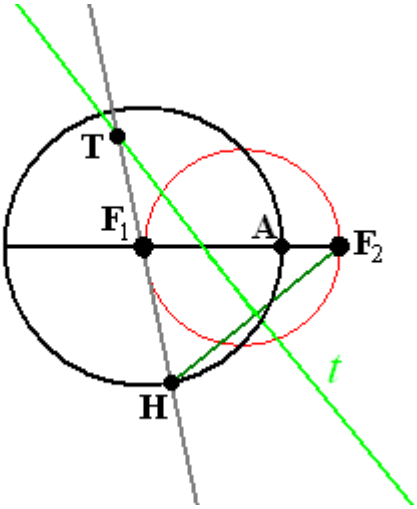
2.5 - Costruzione con riga e compasso di punti dell'iperbole e delle tangenti all'iperbole.

Teorema 2.5.1

Siano $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ punti del piano, sia $2c$ la distanza fra $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ e sia a un numero reale positivo minore di c. Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $\mathbf{F}_1$ e raggio $2a$ e sia $\mathcal{H}$ l'iperbole di fuochi $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$ ed $\frac{c}{a}$.

Per ogni punto **K** di $\mathcal{C}$, sia t l'asse del segmento $\mathbf{KF}_2$; se **K** non appartiene alla circonferenza di diametro $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$, t incontra la retta $\mathbf{KF}_1$ in un punto $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$ ed è tangente in **T** all'iperbole $\mathcal{H}$.

Dimostrazione — Si lascia per esercizio, ricordando che t non incontra la retta $\mathbf{KF}_1$ se e soltanto se le rette $\mathbf{KF}_1$ e $\mathbf{KF}_2$ sono ortogonali, cioè se e soltanto se **K** non appartiene alla circonferenza di diametro $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$.



Esercizio 2.5.2

Si enuncino e si dimostrino gli analoghi per l'iperbole dei corollari 2.4.2 e 2.4.3.

3.- COSTRUZIONI CON RIGA GRADUATA E COMPASSO

3.1 - La definizione.

Come nel capitolo 1, sia $\mathcal{I}$ un insieme di punti e di curve del piano al quale appartengono almeno due punti distinti $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_1$. Un punto del piano [una retta del piano, una circonferenza del piano] si dice *costruibile con riga graduata e compasso a partire da* $\mathcal{I}$ se è l'ultimo elemento di una sequenza finita ogni elemento della quale

– è un elemento di $\mathcal{I}$, oppure

– è la retta passante per due punti **P**, **Q** che la precedono nella sequenza, oppure

– è la circonferenza di centro **P** passante per **Q**, con **P**, **Q** punti che la precedono nella sequenza, oppure

– è l'intersezione di due curve che la precedono nella sequenza, oppure

– è la retta passante per un punto **P** che la precede nella sequenza e interseca due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ che la precedono nella sequenza in due punti **H**, **K** tali che

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1)\,.$$

La sequenza sopra descritta si dice una *costruzione con riga graduata e compasso a partire da* $\mathcal{I}$ del punto [della retta, della circonferenza] ; il numero naturale k si dice *lunghezza* di tale costruzione.

È chiaro che questa definizione aggiunge una possibilità a quelle contemplate nella sez. 1.1 . Valgono tutte le considerazioni fatte in quella sezione, ed osserviamo esplicitamente che avendo scelto il segmento di estremi $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_1$ come unità di misura per le distanze la nuova possibilità di costruzione si può enunciare come segue:

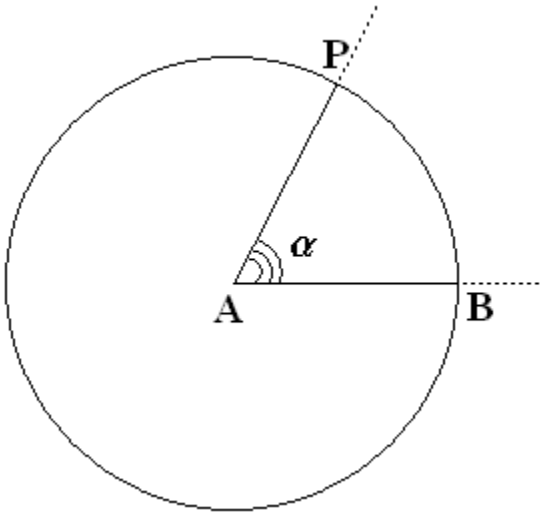
– è la retta passante per un punto **P** che la precede nella sequenza e interseca due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ che la precedono nella sequenza in due punti **H**, **K** tali che

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = 1\,.$$

3.2 - La trisezione dell'angolo con riga *graduata* e compasso.

Mostriamo come si può trisecare il generico angolo acuto con riga graduata e compasso. Vale la pena di osservare che che il requisito che l'angolo sia acuto non costituisce una effettiva limitazione, perché ogni angolo ottuso è il doppio di un angolo acuto (e ogni angolo concavo è il doppio di un angolo ottuso), e sono ben noti gli algoritmi per bisecare e raddoppiare [3]un angolo.

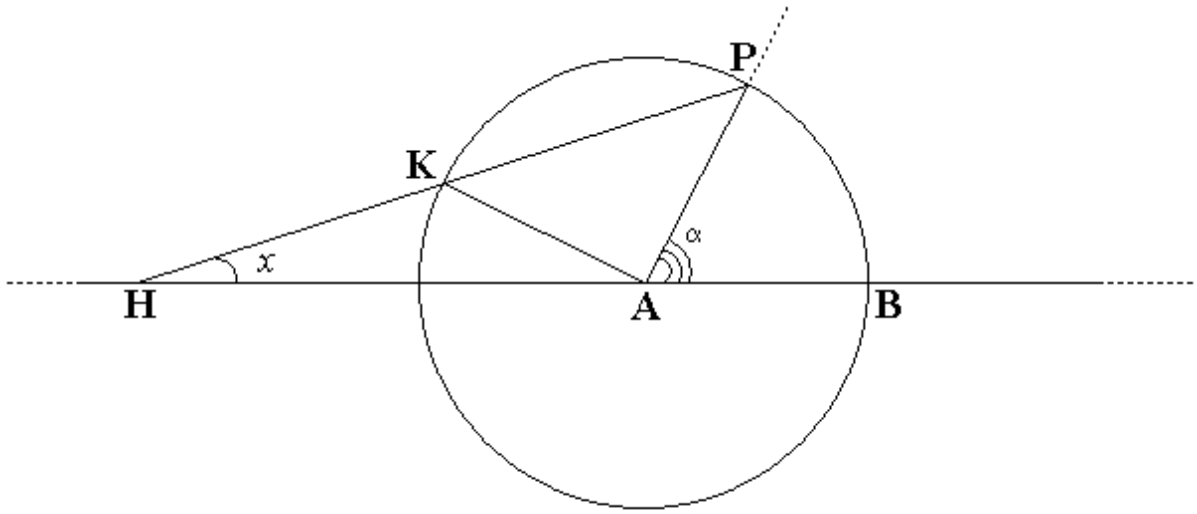
Sia α l'angolo da trisecare, individuato da due semirette che hanno in comune l'origine **A**. Scelto un punto **B** sul primo lato dell'angolo in modo che il segmento **AB** abbia lunghezza 1, costruiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro **A** passante per **B**, e costruiamo il punto **P** in cui tale circonferenza incontra il secondo lato dell'angolo:



Costruiamo una retta che passi per **P** e incontri la retta **AB** in un punto **H** e la circonferenza $\mathcal{C}$ in un punto **K** tali che sia $\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = 1$. Naturalmente, escludiamo il diametro passante per **P** (che verifica banalmente le condizioni poste).

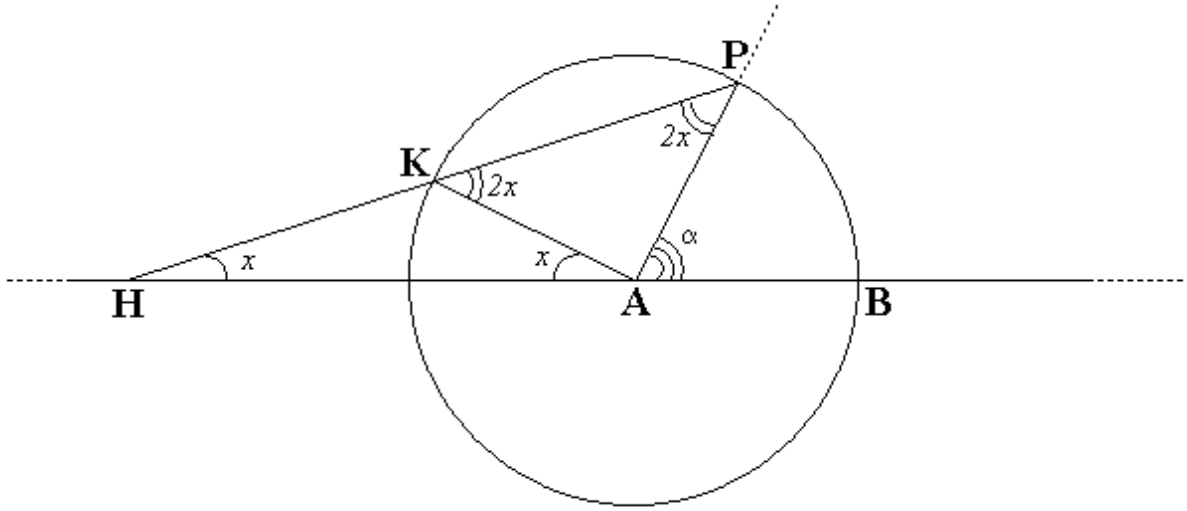
Supponiamo che **H** appartenga alla semiretta della retta **AB** di origine **A** non contenente **B** e che sia esterno alla circonferenza $\mathcal{C}$.

[3] Davvero sono "ben noti"? Poiché $\mathbf{cos}(\frac{\alpha}{2})$ e $\mathbf{cos}\ (2\alpha)$ si ottengono a partire da $\mathbf{cos}\ (\alpha)$ e $\mathbf{sin}\ (\alpha)$ mediante somme, prodotti ed estrazioni di radice quadrata, sappiamo che un angolo qualsiasi può essere bisecato o raddoppiato con riga e compasso. Ma se è davvero ben noto un procedimento sintetico ed "elegante" per bisecare un angolo dato, non si può dire lo stesso per un analogo procedimento che lo raddoppi.



Per ipotesi, $\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{K}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{P}) = 1$. Proviamo che l'angolo **AHK** è un terzo dell'angolo α.

Se indichiamo con x la misura dell'angolo **AHK**, poiché il triangolo **HAK** è isoscele con base **HA** deve essere anche **HAK** $= x$. L'angolo esterno **PKA**, allora, è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e quindi misura $2x$.



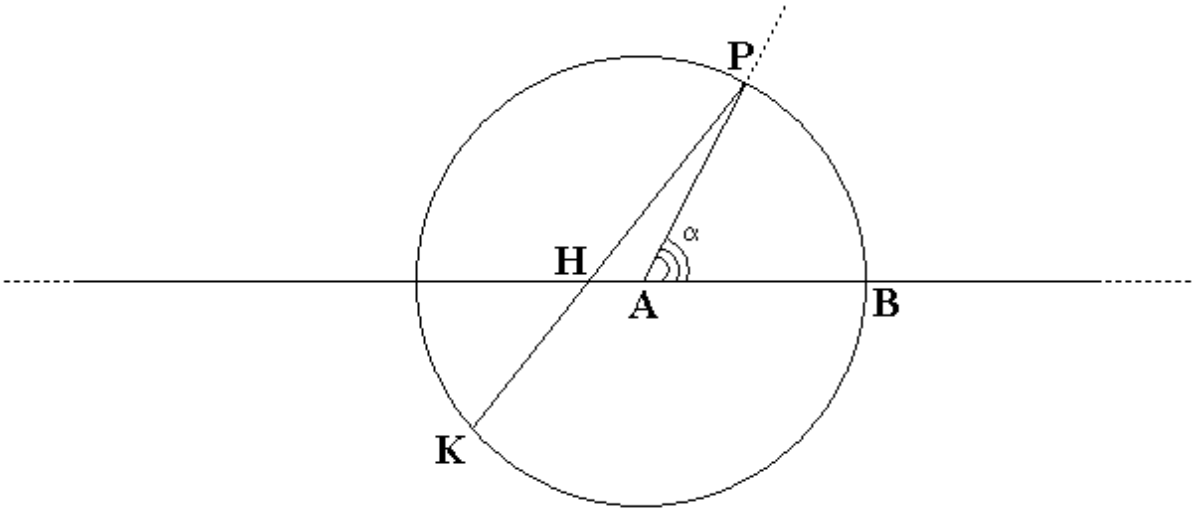
Anche il triangolo **KAP** è isoscele, con base **KP** (infatti **AK** e **AP** sono raggi della circonferenza). Dunque l'angolo **APK** ha la stessa misura dell'angolo **PKA**, cioè $2x$. Poiché α è angolo esterno del triangolo **HAP**, esso è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti, ossia

$$\alpha = x + 2x = 3x$$

e quindi $x = \frac{1}{3}\alpha$, come si voleva dimostrare.

Ma si noti che non c'è alcun motivo perché si debba supporre che **H** appartenga alla semiretta della retta **AB** di origine **A** non contenente **B**, e nemmeno che sia esterno alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Certamente, se **H** appartiene alla semiretta della retta **AB** di origine **A** non contenente **B** allora **H** deve essere esterno alla circonferenza $\mathcal{C}$: infatti per ipotesi l'angolo **PAH** è ottuso, quindi nel triangolo **PAH** il lato **PH** è il maggiore dei tre, da cui $\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{H}) > \boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{A}) = 1$.



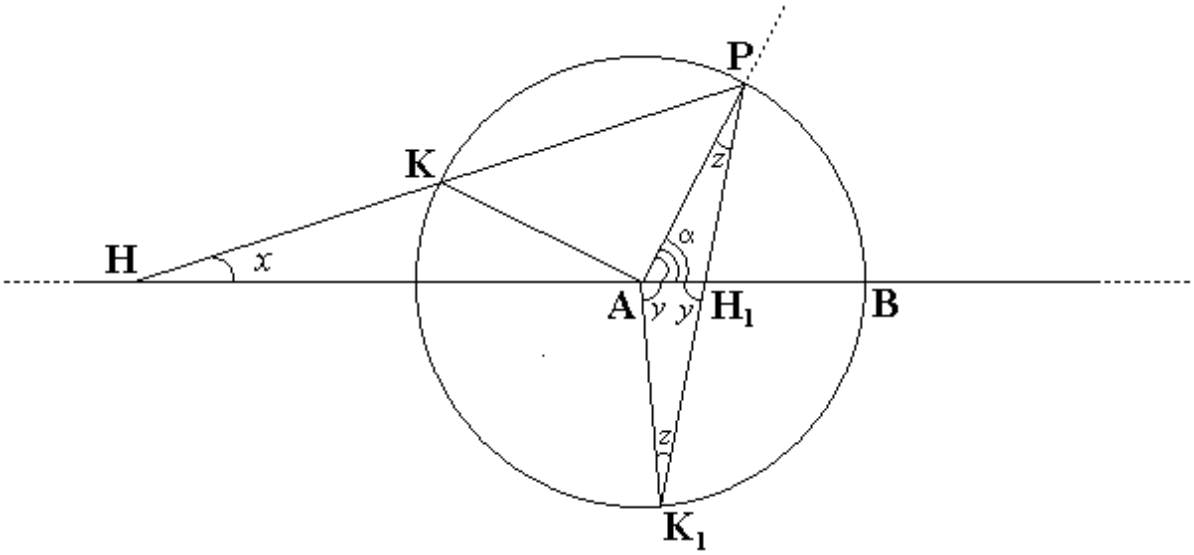
Ma allora se fosse $\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = 1$ si avrebbe che

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{K}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{P},\mathbf{H}) + \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) > 1 + 1 = 2$$

cioè la corda **PK** sarebbe maggiore del diametro.

Si devono in effetti considerare altre due possibilità.

La prima è che K appartenga al segmento AB



e in questo caso si considerano i triangoli isosceli (perché due lati sono uguali al raggio) $\mathbf{AK_1H_1}$ e $\mathbf{AK_1P}$; dal primo si ricava che $z = 180° - 2y$, dal secondo che

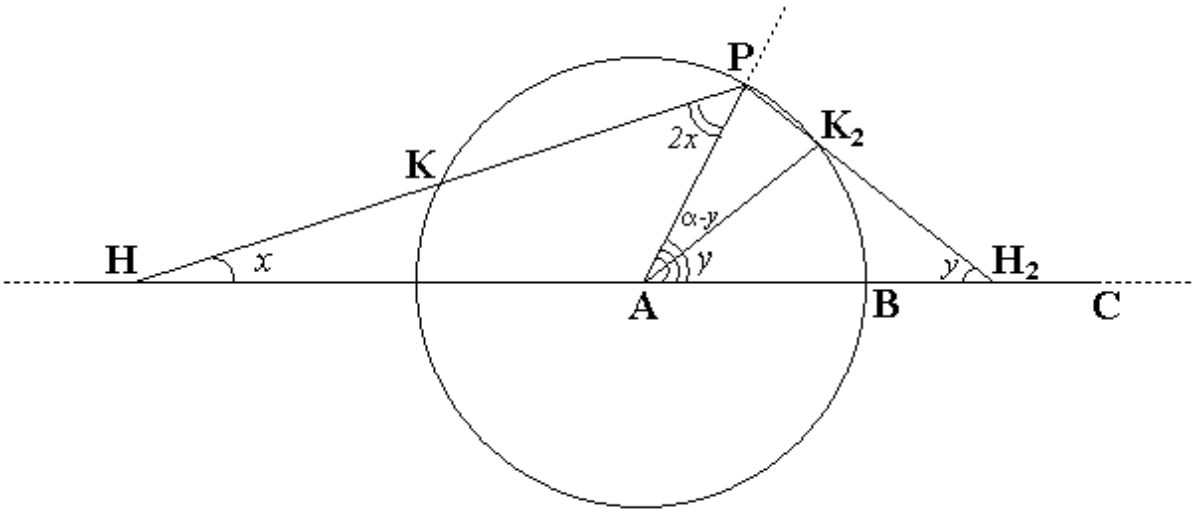
$$180° = 2z + y + 3x = (360° - 4y) + y + 3x = 360° - 3y + 3x$$

ossia che

$$y = x + 60°$$

cosicché la misura dell'angolo concavo $\mathbf{BH_1K_1}$ è $x + 240°$, e quindi in effetti il triplo di questo angolo è $3x + 720°$ ossia α.

La seconda possibilità è che **K** appartenga alla semiretta della retta **AB** di origine **B** non contenente **A**. Il problema ha infatti tre soluzioni, come è ragionevole attendersi dato che analiticamente si traduce in un'equazione di terzo grado.



In quest'ultimo caso si considerano i triangoli isosceli (perché due lati sono uguali al raggio) $\mathbf{AK_2H_2}$ e $\mathbf{AK_2P}$; l'angolo $\mathbf{APK_2}$ ha la stessa misura dell'angolo $\mathbf{AK_2P}$ che è angolo esterno del triangolo $\mathbf{AK_2H_2}$ e quindi misura $2y$. Poiché la somma degli angoli interni del triangolo $\mathbf{HPK_2}$ deve essere $180°$, si ricava che

$$180° = x + 2x + 2y + y = 3x + 3y$$

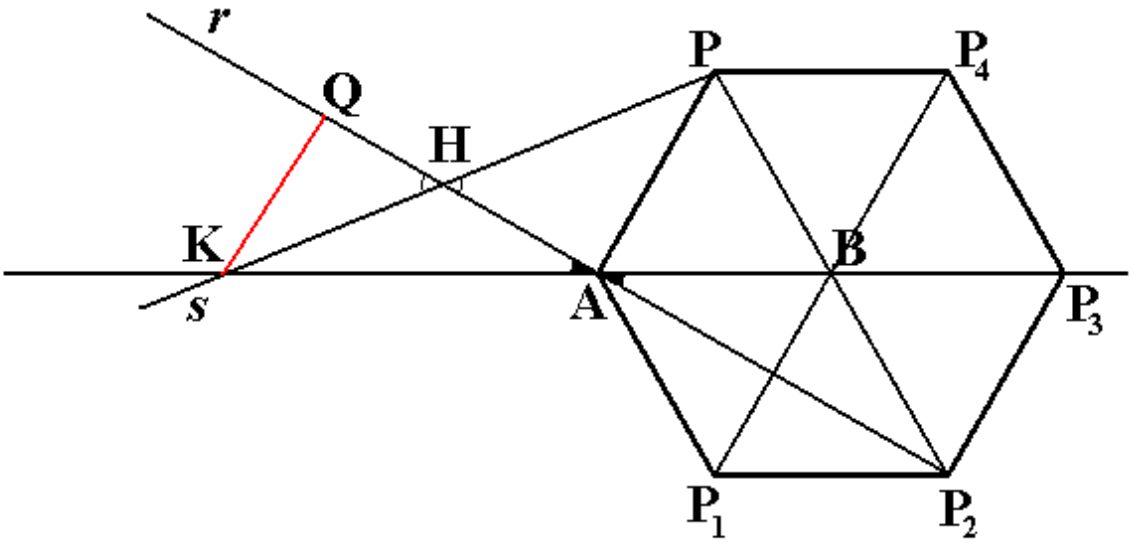
ossia che

$$y = 60° - x$$

cosicché la misura dell'angolo ottuso $\mathbf{CH_2K_2}$ è $x + 120°$, e quindi in effetti il triplo di questo angolo è $3x + 360°$ ossia α.

3.3 - La costruzione di $\sqrt[3]{2}$ con riga *graduata* e compasso.

Siano **A**, **B** due punti costruiti di distanza 1. Dopo aver costruito la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro **B** passante per **A**, costruiamo l'esagono regolare $\mathcal{E}$ inscritto in $\mathcal{C}$ che ha un vertice in **A** ([4]). Siano $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ e P_4 gli altri cinque vertici di $\mathcal{E}$, che si susseguono dopo A percorrendo $\mathcal{C}$ nel verso positivo ("antiorario").



Costruiamo la retta $\boldsymbol{r}$ individuata da **A** e $\mathbf{P}_2$.

Costruiamo (usando la riga graduata!) la retta $\boldsymbol{s}$ che passa per **P** e incontra la retta $\boldsymbol{r}$ in un punto **H** e la retta **AB** in un punto **K** tali che sia $\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = 1$. Ci sono in effetti due rette con tale proprietà; ma noi scegliamo quella per la quale **K** non appartiene alla stessa semiretta individuata da **A** a cui appartiene **B**.

Vogliamo dimostrare che $\boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{P}) = \sqrt[3]{2}$.

Sia **Q** il piede della proiezione ortogonale di **K** su $\boldsymbol{r}$, cosicché il triangolo **HKQ** è rettangolo (con angolo retto in **Q**). Anche il triangolo **PAH** è rettangolo (con angolo retto in **A**) perché l'angolo **BAP** misura $\frac{\pi}{3}$ (per costruzione) e l'angolo **HAK** misura $\frac{\pi}{6}$ (essendo angolo opposto al vertice di $\mathbf{P}_2\mathbf{A}\mathbf{P}_1$).

Poiché gli angoli **QHK** e **PHA** sono opposti al vertice, i triangoli rettangoli **HQK** e **PAH** sono simili, e si ha

(1) $$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q},\mathbf{K}) : \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) \;=\; \boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{P}) : \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{P})$$

e

(2) $$\boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{H}) : \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{P}) \;=\; \boldsymbol{d}(\mathbf{Q},\mathbf{H}) : \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{K}) .$$

---

[4] Come è noto, tutti i lati di $\mathcal{E}$ sono congruenti al raggio di $\mathcal{C}$ e quindi hanno lunghezza 1 .

Poniamo $x := \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{P})$ e $y := \boldsymbol{d}(\mathbf{Q},\mathbf{H})$. Dalla (1) si ricava che

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q},\mathbf{K}) : 1 = 1 : x \qquad (\text{cioè} \quad \boldsymbol{d}(\mathbf{Q},\mathbf{K}) = \tfrac{1}{x})$$

e dalla (2) si ricava che

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{H}) : x = y : 1 \qquad (\text{cioè} \quad \boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{H}) = xy)\,.$$

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo **PAH** si ha che

(*) $$x^2 = 1 + x^2y^2\,.$$

D'altro lato, il triangolo **AQK** (rettangolo in **Q** per costruzione) ha un angolo (quello in **A**) che misura $\frac{\pi}{6}$, dunque (è la metà di un triangolo equilatero di altezza **AQ** e)

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{Q}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{K},\mathbf{Q})\sqrt{3}$$

cioè (poiché $\mathbf{AQ} = \mathbf{AH} + \mathbf{HQ}$ e quindi $\boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{Q}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{A},\mathbf{H}) + \boldsymbol{d}(\mathbf{H},\mathbf{Q})$)

$$xy + y = \tfrac{1}{x}\sqrt{3}$$

da cui

$$y = \tfrac{\sqrt{3}}{x(x+1)} \qquad \text{e} \qquad y^2 = \tfrac{3}{x^2(x+1)^2}\,.$$

Sostituendo nella (*) si trova che

$$x^2 = 1 + x^2\tfrac{3}{x^2(x+1)^2} = 1 + \tfrac{3}{(x+1)^2}$$

ossia

$$x^2(x+1)^2 = (x+1)^2 + 3$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + 2x + 1 + 3$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

$$x^3(x+2) - 2(x+2) = 0$$

$$(x^3 - 2)(x+2) = 0\,.$$

Poiché x deve essere un numero positivo, non può che essere $x = \sqrt[3]{2}$.

4.- LE COSTRUZIONI COL PIEGAMENTO DELLA CARTA CHE NON SI POSSONO EFFETTUARE CON RIGA E COMPASSO

4.1 - Tangenti comuni a due parabole.

Osservazione 4.1.1

Siano $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ punti del piano, e siano d_1, d_2 rette del piano. Sia $\mathcal{P}_1$ la parabola di fuoco $\mathbf{F}_1$ e direttrice d_1, e sia $\mathcal{P}_2$ la parabola di fuoco $\mathbf{F}_2$ e direttrice d_2 **.**

Sia t l'asse di una simmetria assiale che porta $\mathbf{F}_1$ su d_1 e $\mathbf{F}_2$ su d_2 ; allora t è tangente comune alle parabole $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Viceversa, ogni retta che sia tangente sia a $\mathcal{P}_1$ che a $\mathcal{P}_2$ è asse di una simmetria assiale che porta $\mathbf{F}_1$ su d_1 e $\mathbf{F}_2$ su d_2 .

Dimostrazione — Segue subito dai corollari 2.2.4 e 2.2.5 .

Osservazione 4.1.2

In generale, non sono costruibili con riga e compasso le tangenti comuni a due parabole delle quali siano costruibili con riga e compasso fuochi e direttrici.

Dimostrazione — Basta mostrare un esempio di due parabole delle quali siano costruibili con riga e compasso fuochi e direttrici ma non è costruibile con riga e compasso alcuna tangente comune.

Riferiamo il piano al sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico positivamente orientato costruito come si è visto nel capitolo 1 a partire dai due punti dati per le costruzioni con riga e compasso; sappiamo che tutti i punti che in tale SdR hanno coordinate razionali e tutte le rette che ammettono di essere rappresentate con una equazione di primo grado a coefficienti razionali risultano costruibili con riga e compasso.

Sia $\mathcal{P}_1$ la parabola di fuoco $\mathbf{F}_1 \equiv (-4, 0)$ e direttrice $d_1 \equiv (x = 4)$ (parallela all'asse delle ordinate), e sia $\mathcal{P}_2$ la parabola di fuoco $\mathbf{F}_2 \equiv (-\frac{1}{2}, 0)$ e direttrice $d_2 \equiv (y = -\frac{1}{2})$ (parallela all'asse delle ascisse). Allora $\mathcal{P}_1$ ha equazione $x = -\frac{1}{16}y^2$ e $\mathcal{P}_2$ ha equazione $y = x^2$.

Sia $\mathbf{T} \equiv (x_0, x_0^2)$ un punto di $\mathcal{P}_2$. La generica retta non parallela all'asse di $\mathcal{P}_2$ passante per $\mathbf{T}$ ha equazione

$$y = p(x - x_0) + x_0^2$$

ed è tangente in $\mathbf{T}$ a $\mathcal{P}_2$ se e soltanto se il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = p(x - x_0) + x_0^2 \end{cases}$$

ha la sola soluzione (x_0, x_0^2).

Si deve considerare l'equazione di secondo grado nella incognita x

$$x^2 = p(x - x_0) + x_0^2$$

ossia

$$x^2 - px - x_0^2 + px_0 = 0$$

che deve avere x_0 come unica soluzione. Dividendo il primo membro per $x - x_0$ si ottiene come quoziente $x + (x_0 - p)$, quindi l'equazione si può scrivere

$$(x - x_0)(x + (x_0 - p)) = 0\,.$$

Deve dunque essere $x_0 = p - x_0$, ossia $p = 2x_0$. La retta tangente in T alla parabola $\mathcal{P}_2$ ha dunque equazione

$$y = 2x_0 x - x_0^2\,.$$

Adesso dobbiamo imporre che essa sia tangente anche alla parabola $\mathcal{P}_2$, cioè (che sia $x_0 \neq 0$, affinché non risulti parallela all'asse di $\mathcal{P}_2$, e) che il sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{16}y^2 \\ y = 2x_0 x - x_0^2 \end{cases}$$

abbia una sola soluzione.

Sostituendo nella seconda equazione il valore di x ricavato dalla prima si ottiene l'equazione nell'incognita y

$$y = 2x_0\big(-\tfrac{1}{16}y^2\big) - x_0^2$$

ossia

$$\tfrac{x_0}{8}y^2 + y + x_0^2 = 0$$

che deve avere una sola soluzione; deve cioè essere

$$0 = \Delta = 1 - \tfrac{x_0}{2}x_0^2 \qquad \text{ovvero} \qquad x_0^3 = 2\,.$$

Ciò significa che l' unica tangente comune a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ ha equazione

$$y = 2\sqrt[3]{2}\,x - \sqrt[3]{4}$$

e quindi non è costruibile con riga e compasso (altrimenti sarebbe costruibile la sua intersezione con l'asse delle ordinate, quindi il numero reale $\sqrt[3]{4}$ e anche $\sqrt[3]{2}$ che ne è la radice quadrata).