Matematica per le Applicazioni Economiche I, 19 giugno 2018
Testo d'esame A

La prova ha la durata di 1 ora e 45 minuti. Spiegate con cura le vostre risposte.

Esercizio 1 (punti 10) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

tenendo presente che il dominio della funzione è $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Si ometta lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (punti 10) Si calcolino i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(x) - 1)}{3x^2 e^x (e^x - 1)}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2) + x e^x + \ln(x)}{\sin(x^2) + e^{2x} - \ln(x)}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3}}.$$

Esercizio 3 (punti 6) Sia $f(x) = x^2 + 3$ e si osservi che il dominio di f è $\mathbb{R}$ e che f è positiva su $\mathbb{R}$. Si determini la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, dalla formula

$$g(x) = \frac{x f'(x)}{f(2x)}.$$

Si verifichi successivamente che $x_0 = 1$ non è punto di massimo relativo per g .

Esercizio 4 (punti 6) Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false. Si motivino le risposte.

- (a) Se una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è crescente e limitata, allora è derivabile.
- (b) Se un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è limitato, allora è chiuso.

Esercizio 5 (punti 8)

- (a) Si dia la definizione di funzione convessa.
- (b) Usando la definizione, si verifichi che $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l(x) = 7x + 1$ è convessa.
- (c) Si considerino $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si supponga che f e g siano derivabili due volte in $\mathbb{R}$ e che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si abbia che

$$f''(x) > 0, \quad g'(x) > 0, \quad g''(x) > 0.$$

Si dimostri che la funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) + g(f(x))$$

è convessa su $\mathbb{R}$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 19 giugno 2018
Testo d'esame B

La prova ha la durata di 1 ora e 45 minuti. Spiegate con cura le vostre risposte.

Esercizio 1 (punti 10) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 - 4}\right)$$

tenendo presente che il dominio della funzione è $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$. Si ometta lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (punti 10) Si calcolino i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{5+x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sin(x) + e^{3x}}{\cos(2x) + x^4 e^x + 5x^2}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(e^x - 1)}{3e^x(\cos(x) - 1)}.$$

Esercizio 3 (punti 6) Sia $f(x) = x^2 + 7$ e si osservi che il dominio di f è $\mathbb{R}$ e che f è positiva su $\mathbb{R}$. Si determini la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, dalla formula

$$g(x) = \frac{x f'(2x)}{f(x)}.$$

Si verifichi successivamente che $x_0 = 2$ non è punto di minimo relativo per g .

Esercizio 4 (punti 6) Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false. Si motivino le risposte.

- (a) Se una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è decrescente e limitata, allora è derivabile.
- (b) Se un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è illimitato superiormente, allora è aperto.

Esercizio 5 (punti 8)

- (a) Si dia la definizione di funzione convessa.
- (b) Usando la definizione, si verifichi che $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l(x) = 3x - 5$ è convessa.
- (c) Si considerino $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si supponga che f e g siano derivabili due volte in $\mathbb{R}$ e che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si abbia che

$$f(x) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad g'(x) > 0, \quad g''(x) > 0.$$

Si dimostri che la funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

è convessa su $\mathbb{R}$.